Caracterização do escoamento turbulento em canais com vegetação emersa rígida. Aplicação ao estudo da resistência hidráulica.

Ana Margarida da Costa Ricardo

10 de Dezembro de 2008

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado no Instituto Superior Técnico sob a orientação do Professor Rui Ferreira e co-orientação do Professor Mário Franca. Contou com o apoio da FCT com a atribuição de uma bolsa de iniciação científica.

O primeiro, e sem duvida o mais sentido, agradecimento é dirigido ao Professor Rui Ferreira a quem agradeço o inesgotável apoio e amizade, o empenho e o entusiasmo contagiante que demonstrou em todos os momentos desta dissertação. O seu vasto conhecimento cientifico e a sua disponibilidade foram determinantes no sucesso deste trabalho. Agradeço ainda toda a paciência que demonstrou para com as minhas muitas duvidas "existenciais".

Agradeço também ao Professor Mário Franca pelo apoio, amizade e pelo esforço que fez para acompanhar de perto o meu trabalho.

Ao Professor Heleno Cardoso quero agradecer o importante "empurrãozinho"que me ajudou a escolher o caminho de que nada me arrependo de ter percorrido. Agradeço ainda, de forma geral, a todos os professores da Secção de Hidráulica e Recursos Hídricos pelo estimulo e conhecimento que me foram transmitindo.

Ao Sr. Vitor Sena agradeço o apoio, o empenho e a experiência que me disponibilizou para que nada faltasse na componente laboratorial deste trabalho. Agradeço ainda a sua companhia e amizade, que sem duvidas tornaram mais alegres, as minhas muitas tardes no laboratório. Agradeço também ao João Pedro pela sua colaboração e constante disponibilidade para ajudar nas tarefas laboratoriais. Dirijo ainda um agradecimento muito especial à D. Dulce pela boa vontade e eficiência que sempre revelou para me ajudar a tratar das questões mais burocráticas.

Ao Filipe agradeço a assistência técnica que me deu ao longo do período de execução da dissertação. Com os seus vastos conhecimentos sobre computadores e com a sua grande disponibilidade, ele resolveu-me a maioria dos problemas com hardware e software.

Ao Professor Carlos Tiago agradeço as dicas sobre a utilização do latex para escrever uma tese.

À Eng. Isabel Nogueira do Laboratório de Materiais agradeço o apoio na caracterização das partículas de *seeding*.

Ao Professor Viriato Semião quero agradecer o livro sobre o PIV que me emprestou.

À Lara Ferreira agradeço toda ajuda e companhia que me dispensou em vários momentos ao longo deste trabalho, em especial nos meses que passámos no laboratório.

Aproveito também para agradecer a todos os elementos da turma de hidráulica, não tenho duvida de que com a ajuda de todos, formamos uma turma exemplar. Deixo um agradecimento especial ao Nuno Mota pela inesgotável paciência que me dispensou e pela ajuda que me deu nos meus primeiros passos com o Latex. E outro à Inês Pipa por ser uma amiga fantástica.

Agradeço, em geral, a todos os meus amigos que, cada um à sua maneira, me foram incentivando e dando apoio ao longo de todo o percurso académico. Aos meus amigos Joana Santos, Luís, Jorge, Vanessa e Inês Franco agradeço, ainda, o apoio que me deram nos meses em que o cansaço tendia a ser desencorajador. E deixo, também, um grande agradecimento à Joana Simão que além da sua companhia e amizade me dispensou uma grande ajuda nos momentos finais desta dissertação. Ao Nuno Alves, além da sua amizade, agradeço o apoio técnico que me deu no desenho do canal em Autocad.

À minha mãe e ao meu irmão agradeço o apoio e o permanente esforço que fizeram para que nunca me faltasse nada. Aos meus avós agradeço as ajudas financeira que me foram dando ao longo dos 5 anos de curso. Dirijo um agradecimento especial ao tio Jorge e à tia Alice por tudo o que sempre fizeram por mim. Agradeço também à restante família e aos inúmeros amigos da minha aldeia pela força que me foram transmitindo.

Agradeço ainda à Rita, à Madalena e ao Simões pela confiança que sempre depositaram em mim e pela força que me deram nos momentos mais difíceis.

Ao Sérgio dirijo um agradecimento muito especial. Além da paciência que teve comigo, quero agradecer os momentos especiais e a motivação que muita vezes me transmitiu.

E porque os últimos são sempre os primeiros, o meu último e muito sentido agradecimento vai para a minha amiga Ana Bejinha pelo apoio permanente que me dispensou nestes 5 anos, sem ela a minha história teria sido muito diferente.

Esta dissertação enquadra-se no projecto PTDC/ECM/65442/2006 financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia.

Resumo

A vegetação emersa que recobre as planícies de inundação, as margens dos leitos menores e as zonas húmidas, desempenha um papel muito importante no equilíbrio dos ecossistemas fluviais. A principal característica dos escoamentos por entre campos de hastes emersas e rígidas é a grande heterogeneidade que apresentam à escala do espaçamento médio entre as hastes. Assim, para estudar a resistência neste tipo de escoamentos é necessário recorrer a uma formulação das equações de conservação de quantidade de movimento e de massa que incorporem explicitamente a heterogeneidade espacial do escoamento.

Os objectivos desta dissertação são i) caracterizar e quantificar o escoamento no interior de zonas povoadas e ii) quantificar as forças, por unidade de área, que o escoamento exerce nas hastes e no fundo do canal, com base nos princípios fundamentais da hidrodinâmica.

Para concretizar este objectivos, foram realizados ensaios laboratoriais que reproduziam condições semelhantes às que se encontram no meio natural. Simulou-se um leito sem vegetação que permitiu, por comparação de resultados, avaliar as alterações induzidas pela presença de vegetação em dois ensaios com diferentes densidades de hastes. Nos ensaios laboratoriais mediram-se campos de velocidades instantâneas recorrendo ao sistema de medição não intrusiva *Particle Image Velocimetry* (PIV). O tratamento dos dados recolhidos foi efectuado com a metodologia *Double-Average*, devido à grande heterogeneidade do escoamento. Foi desenvolvido um modelo teórico para o cálculo da força aplicada nas hastes e da força exercida no fundo e os respectivos coeficientes de resistência.

Este trabalho permitiu concluir que a aplicação da metodologia *Double-Average*, cujo formalismo não está ainda completamente desenvolvido no domínio dos escoamentos hidráulicos em zonas com vegetação, requer um número elevado de perfis médios ou uma criteriosa distribuição desses perfis para caracterizar adequadamente a heterogeneidade do escoamento.

Os resultados obtidos permitiram concluir que as tensões dispersivas, nomeadamente as tensões normais longitudinais e de corte, não são, em geral, desprezáveis face às tensões de Reynolds. A análise do valor das tensões dispersivas normais longitudinais providencia argumentos para explicar, parcialmente, o aumento do coeficiente de arrastamento das hastes com o aumento da densidade de hastes.

Palavras chave: Vegetação emersa rígida, resistência ao escoamento, PIV, metodologia *Double-Average*

Abstract

Emergent vegetation covering floodplains and wetlands has an important role in fluvial ecosystems. The main characteristic of the flow through rigid stems is the great spatial variability that exists in the inter-stem space. Thus, to understand flow resistance phenomena in vegetated streams is necessary to resort to a formulation of the momentum and mass conservation equations that take explicitly into account flow variability.

This work is aimed at i) the detailed characterization and quantification of the flow within vegetated areas susceptible to be simulated by dense arrays of vertical emergent stems and ii) the independent quantification of the forces, per unit bed area, acting on the stems and on the bed boundary. Both objectives concur for a better knowledge of the flow resistance in wetlands and vegetated areas in general.

To meet the proposed objectives, conditions similar to that found in nature were reproduced in a laboratory facility. Three experimental tests were carried out, a test without stems, to characterize a reference situation and two tests with different densities of stems. The measurements of velocity fields were made using a Particle Image Velocimetry (PIV), a non-intrusive technique. The treatment of the data was done with the Double Averaged methodology (DAM), to express the great spatial variability of the flow. A theoretical model for the calculation of the drag force exerted on the stems and the drag force applied to the bed boundary, and respective coefficients, was developed.

A sensitivity analysis upon DAM procedures which are not fully mature for hydraulic flows within vegetated areas revealed that special care is needed in the definition of the number and location of the time-averaged profiles. If the profiles location doesn't made a correct representation of the flow spatial variability, the results can be much influenced. The location of the profiles should be carefully chosen or the sampling density must be high to ensure good mean results, especially if the stem density is low.

The results reveal that the contribution of form-induced stresses, namely longitudinal normal and shear stresses, is of the order of magnitude of the contribution of Reynolds stresses. Hence, in general, this stresses cannot be neglected. The analysis of form-induced stresses helps to explain the increase of the drag coefficient when the stem density increases.

Key words: Emergent rigid vegetation, flow resistance, PIV, double-average methodology

Conteúdo

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Simbologia

NOTA: Nesta dissertação foi usada notação anglo-saxónica para a separação decimal.

Símbolo	Descrição	Dimensão
A_f	Área ocupada por fluido	$[\mathrm{L}^2]$
A_k	Área de influência de (x_k, y_k) pertencente ao sub-domínio convexo Ω	$[\mathrm{L}^2]$
A_R	Área do obstáculo projectada para montante	$[\mathrm{L}^2]$
A_T	Área total	$[\mathrm{L}^2]$
a	Área de vegetação projectada no plano normal ao escoamento por unidade de volume	$[\mathrm{L}^2]$
C_f	Coeficiente de arrastamento do fundo	[-]
C_R	Coeficiente de arrastamento de uma haste	[-]
D_{50}	Diâmetro mediano do material do fundo	[L]
d	Diâmetro das haste	[L]
d_p	Diâmetro médio das partículas de *seeding*	[L]
Fr	Número de Froude	[-]
$\mathcal{F}_D$	Força de arrastamento por unidade de volume de fluido devido à vegetação	$[\mathrm{ML}^{-2}\mathrm{T}^{-2}]$
F_R	Força de arrastamento	$[\mathrm{MLT}^{-2}]$
$\langle \bar{f}_x \rangle$	Força de arrastamento exercida numa haste, por unidade de área	$[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}]$
$\langle \bar{f}_D \rangle$	Força de arrastamento média na direcção do escoamento por unidade de comprimento de haste	$[\mathrm{MT}^{-2}]$
f_c	Frequência das estruturas turbulentas do escoamento do fluido	$[\mathrm{T}^{-1}]$
f_p	Factor de calibração para converter unidades da câmara em unidades SI	[-]
f_{32}	Menor abertura do diafragma da câmara do sistema PIV	[-]
g	Aceleração gravítica	$[\mathrm{LT}^{-2}]$
g_i	Componente da aceleração gravítica na direcção i	$[\mathrm{LT}^{-2}]$
h	Altura do escoamento	[L]
$\bar{h}$	Altura do escoamento média temporal	[L]
J	Perda de carga unitária	[-]
k_s	escala geométrica dos elementos rugosos	[L]

Símbolo	Descrição	Dimensão
L_x	Comprimento do domínio Ω	[L]
L_y	Largura média do domínio Ω	[L]
ℓ	Comprimento de mistura	[L]
l_1	Largura média dos elementos sólidos	[L]
l_2	Altura submersa dos elementos sólidos	[L]
N_k	Número de sub-domínios à cota z	[-]
NI	Número de mapas instantâneos recolhidos em cada instância de aquisição	[-]
NP	Número de perfis médios temporais	[-]
NR	Número de instâncias de aquisição pretendidas para cada perfil	[-]
n	Número de hastes por unidade de área	$\left[\mathrm{L}^{-2}\right]$
n_i	Componente normal do vector unitário normal à interface sólido líquido dirigida da parte sólida para a parte líquida	[-]
p	Pressão local	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
$\langle\bar{p}\rangle$	Pressão média temporal e espacial	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
p'	Flutuação turbulenta da pressão	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
$\bar{p}$	Pressão média temporal	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
$\tilde{p} \equiv \tilde{\bar{p}}$	Flutuação espacial da pressão média temporal	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
p^*	Energia potencial por unidade de massa	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
Q	Caudal	$\left[\mathrm{L}^{3}\mathrm{T}^{-1}\right]$
Re	Número de Reynolds	[-]
Re_*	Número de Reynolds característico da rugosidade	[-]
Re_p	Número de Reynolds característico das hastes	[-]
r_p	Rácio que traduz a aptidão das partículas de *seeding* para seguir um fluido em movimento	[-]
S_{ar}	Área ocupada por ar na área de controlo	$\left[\mathrm{L}^{2}\right]$
S_b	Área ocupada por leito na área de controlo	$\left[\mathrm{L}^{2}\right]$
S_{int}	Superfície de interface entre a parte sólida e a parte líquida do volume de controlo	$\left[\mathrm{L}^{2}\right]$
S_s	Área ocupada por hastes na área de controlo	$\left[\mathrm{L}^{2}\right]$
s	Densidade do material do fundo	[-]
$s^{(p)}$	Densidade das partículas de *seeding*	[-]
$s^{(w)}$	Densidade da água	[-]
t	Tempo	[T]
u	Componente da velocidade na a direcção longitudinal	$\left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$
u_*	Velocidade de atrito	$\left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$
u_i	Componente da velocidade segundo a direcção i	$\left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$
$u_i^{(I)}$	Componente i do vector velocidade na interface sólido/líquido	$\left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$
$\bar{u}$	Velocidade longitudinal média temporal	$\left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$
u'	Flutuação turbulenta da velocidade longitudinal	$\left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$

Símbolo	**Descrição**	**Dimensão**
$\tilde{u} \equiv \overline{\tilde{u}}$	Flutuação espacial da velocidade longitudinal média	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
$\langle \bar{u} \rangle$	Velocidade longitudinal média temporal e espacial	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
$[\bar{u}]$	Média na coluna de água da velocidade longitudinal média temporal	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
$[\langle \bar{u} \rangle] \equiv U$	Média na coluna da velocidade longitudinal média temporal e espacial	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
V	Módulo da velocidade do escoamento	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
V_p	Módulo da velocidade das partículas de *seeding*	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
$V_*^{(c)}$	Velocidade adimensional para a correcção da lei logarítmica	[-]
v	Componente da velocidade na a direcção transversal	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
w	Componente da velocidade na a direcção vertical	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
$\bar{w}$	Velocidade longitudinal média temporal	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
w'	Flutuação turbulenta da velocidade vertical	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
$\tilde{w} \equiv \overline{\tilde{w}}$	Flutuação espacial da velocidade vertical média temporal	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
$\langle \bar{w} \rangle$	Velocidade vertical média temporal e espacial	$[\mathrm{LT}^{-1}]$
x	Distância longitudinal	[L]
z	Distância vertical	[L]
$\forall_f$	Volume de controlo adequado para a definição das forças de arrastamento viscosas e de pressão	$[\mathrm{L}^3]$
$\varkappa(x, z)$	Função que representa as flutuações de pressão em relação à distribuição hidrostática de pressões	$[\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}]$
α_0	Constante usada na expressão do coeficiente de arrastamento proposta por Tanino & Nepf (2008)	[-]
α_1	Parâmetro usado na expressão do coeficiente de arrastamento proposta por Tanino & Nepf (2008)	[-]
α_m	Relação entre a média do produto de duas variáveis e o produto da média de cada variável	[-]
β	Declive do fundo do canal	[-]
β_T	Relação entre os coeficientes de arrastamento de um elemento de rugosidade isolado e do fundo	[-]
Δd	Distância	[L]
Δt	Intervalo de tempo entre impulsos	[T]
δ_ν	Espessura da camada limite	[L]
δ_{ij}	Delta de Kronecker	[-]
$\delta^{(i)}$	Função que toma o valor 1 na zona i e é nula fora desta zona	[-]
κ	Constante de vom Kármán	[-]
λ	Densidade dos elementos sólidos	$[\mathrm{L}^{-2}]$
$\mu^{(t)}$	Viscosidade dinâmica turbulenta	$[\mathrm{ML}^{-2}\mathrm{T}^{-1}]$
$\mu^{(w)}$	Viscosidade dinâmica da água	$[\mathrm{ML}^{-2}\mathrm{T}^{-1}]$
$\nu^{(t)}$	Viscosidade cinemática turbulenta	$[\mathrm{LT}^{-1}]$

Símbolo	Descrição	Dimensão
$\nu^{(w)}$	Viscosidade cinemática da água	$\left[\mathrm{LT}^{-1}\right]$
Π	Parâmetro de Coles	[-]
$\rho^{(w)}$	Massa volúmica da água	$\left[\mathrm{ML}^{-2}\right]$
$-\rho^{(w)}\tilde{u}\tilde{w}$	Tensão tangencial dispersiva	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
$-\rho^{(w)}\overline{u'w'}$	Tensão tangencial de Reynolds	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
σ_{ij}	Tensor das tensões	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
τ_{Re}	Tensão tangencial de Reynolds	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
τ_{ij}	Tensor das tensões	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
τ_T	Tensão de arrastamento total	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
τ_b	Tensão de arrastamento no fundo	$\left[\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\right]$
ψ	Função de vazios	[-]
$\psi^{(i)}$	Função de vazios na zona i	[-]
ϕ	Fracção sólida no volume de controlo	[-]
Ω	Domínio rectangular cuja área é $L_x \times L_y$ paralelo a um plano definido por z=constante	$[-]$
Ω_k	Sub-domínio convexo pertencente ao domínio Ω	$[-]$
ξ_1	Coordenada segundo a direcção x dos pontos ocupados pelo fluido	[L]
ξ_2	Coordenada segundo a direcção y dos pontos ocupados pelo fluido	[L]

Acrónimos

Acrónimo	**Descrição**
CCD	*Charge-couple device* (Dispositivo de carga acoplado)
CRIV	Canal de recirculação e inclinação variável
DAM	Metodologia *Double-Average*
DANS	Equações de *Double-Average Navier Stokes*
fps	*Frames per second*
IV	Radiação infra-vermelha
PIV	*Particle image velocimetry*
PSP	*Polyamide Seeding Particles*
PVC	Poli-cloreto de vinilo
RANS	Equações de *Reynolds-Averaged Navier Stokes*
SI	Sistema Internacional
YAG	*Yittrium Aluminium Garnet*

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento

A vegetação emersa que recobre as margens e o fundo de muitos rios aluvionares, bem como extensas áreas nas planícies de inundação, desempenha um papel muito importante no equilíbrio dos ecossistemas fluviais, uma vez que influencia os processos geomorfológicos e hidrológicos e contribui positivamente para a biodiversidade, para a qualidade da água e para a integração paisagística.

A existência de vegetação num curso de água conduz a um aumento da resistência hidráulica e, consequentemente, ao aumento da altura do escoamento e à redução da velocidade média do escoamento (Kadlec 1990, Yen 2002, Green 2006, Tanino & Nepf 2008). Afectando a resistência ao escoamento, a vegetação emersa afecta também o transporte e a deposição de sedimentos e contaminantes (Lopez & García 1998, Yen 2002, Defina & Bixio 2005, Nepf & Vivoni 1999, Tanino & Nepf 2008) e a intensidade e a difusão turbulentas (Nepf 1999).

A reduzida velocidade nas áreas vegetadas laterais aos rios permite que estas sirvam de locais de descanso e crescimento para alevins. Por outro lado, a vegetação tem um papel fundamental na protecção contra a erosão de leitos e margens de cursos de água (Wolfe & Nickling 1996, Crawley & Nickling 2003, Li & Shao 2003, Thompson *et al.* 2004, Gillies *et al.* 2007). É de extrema importância, para a protecção contra fenómenos de erosão, poder prever e limitar a fracção da tensão de arrastamento que actua directamente sobre as partículas do solo. Sabe-se que força de arrastamento total num escoamento com vegetação pode ser dividida em duas componentes, uma componente exercida nas hastes e outra que actua no fundo do canal e é responsável pelo destacamento e transporte das partículas do leito (Raupach 1992). Assim, a diminuição da parcela da tensão de arrastamento que age sobre o solo é conseguida aumentando a parcela que age sobre as hastes, isto é, aumentando a densidade da cobertura vegetal. Em engenharia de reabilitação fluvial, estes princípios são usados nas soluções de bioengenharia para a protecção do leito e margens, com o que se procura articular o compromisso entre a valia ambiental e a estabilidade hidromorfológica dos sistemas fluviais.

O cálculo da resistência hidráulica em canais com vegetação emersa parte do princípio geral que esta resulta da acção das forças de pressão e das forças viscosas sobre o perímetro molhado (Wu *et al.* 1999, Kirby *et al.* 2005), incluindo o leito e as hastes das plantas. Assim,

A definição das equações de resistência hidráulica num canal com vegetação requer que se conheça o coeficiente de arrastamento das hastes das plantas (Maheshwari 1992). No entanto, as tradicionais equações de resistência baseadas em coeficientes de rugosidade empíricos, como as equações de Chezy, Darcy-Weisbach ou Manning-Strickler não são adequadas para a aplicação no caso de leitos vegetados devido à complexidade das formas geométricas da vegetação (Maheshwari 1992, Thompson & Wilson 2002) e devido ao facto destas equações assumirem que a resistência ao escoamento provém, principalmente, da tensão de corte junto ao fundo (Kadlec 1990, James *et al.* 2004).

Nas últimas décadas, motivados pelas crescentes preocupações ambientais, têm sido levados a cabo trabalhos de investigação para compreender a influência da presença da vegetação nos cursos de água e para colmatar lacunas no processo nos modelos de cálculo da resistência hidráulica. No entanto, são escassos os estudos em que se procurou conhecer em detalhe a estrutura do escoamento em toda a coluna de água para proceder ao cálculo directo e independente da forças exercidas pelo escoamento no fundo do canal e da força aplicada pelo escoamento nas hastes emersas. De entre os trabalhos dedicados parcialmente a este objectivo contam-se Nepf (1999) e Tanino & Nepf (2008). Contudo, por falta de instrumentação adequada, estes trabalhos não dão a conhecer detalhes do escoamento no interior das zonas povoadas com vegetação. Neste trabalho procurar-se-á colmatar estas lacunas no conhecimento do escoamento em zonas com vegetação emersa rígida.

Esta dissertação enquadra-se no projecto PTDC/ECM/65442/2006 financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia.

1.2 Objectivo

Neste trabalho pretende-se i) caracterizar detalhadamente e quantificar o escoamento no interior de zonas povoadas com vegetação emersa rígida e ii) quantificar, de forma independente, as forças, por unidade de área, que o escoamento exerce nas hastes e no fundo do canal e os respectivos coeficientes de resistência. Ambos os objectivos conduzem a um melhor conhecimento da resistência hidráulica. São levados a cabo com base em trabalho laboratorial, em condições controladas, recorrendo a uma técnica não intrusiva de visualização e medição de velocidades, o *Particle Image Velocimetry* (PIV).

Sublinhe-se que não se pretende um estudo da resistência hidráulica baseado em parâmetros macroscópicos do escoamento. Pretende-se um estudo baseado nos princípios fundamentais da hidrodinâmica de escoamentos turbulentos cuja escala geométrica fundamental é o espaçamento médio entre hastes e em que o cálculo das forças de resistência resulta da caracterização do escoamento em volumes de controlo definidos com aquela escala geométrica.

1.3 Metodologia

O trabalho é essencialmente experimental e teórico. Estuda-se em laboratório o comportamento hidrodinâmico de um trecho de canal, potencialmente móvel, protegido por hastes rígidas.

O trabalho laboratorial consiste na medição de velocidades do escoamento recorrendo a uma instrumentação não intrusiva, o PIV. Serão efectuados ensaios em leito sem vegetação e ensaios com duas densidades de hastes.

Uma vez que o escoamento no interior de zonas povoadas com vegetação é fortemente heterogéneo, o tratamento dos dados é efectuado com recurso à metodologia DAM, *Double Average Method* (Gimenez-Curto & Corniero Lera 1996, Finnigan 2000, Nikora *et al.* 2001 e Ferreira *et al.* 2008a), orientado para a determinação de perfis médios (no tempo e no espaço) de velocidades longitudinais e verticais e de tensões de Reynolds e dispersivas.

Calcula-se, ainda, os gradientes destas quantidades sempre que relevante para o cálculo da distribuição vertical de pressões ou das forças de arrastamento no fundo e nas hastes.

Com base nas medições, desenvolve-se um modelo teórico para o cálculo das forças aplicadas nas hastes e no fundo e respectivos coeficientes de resistência. Os valores obtidos para cada uma das situações estudadas, função da densidade de hastes, são discutidos e comparados entre si e com resultados existentes na literatura.

1.4 Estrutura do relatório

A dissertação é composta por sete capítulos, organizados como se explica nos parágrafos seguintes.

No capítulo 2 apresenta-se o desenvolvimento do modelo conceptual para a determinação da média temporal e espacial das equações do movimento. Este desenvolvimento inicia-se com as equações de Navier-Stokes, a partir das quais se obtém as equações de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) e que, por por aplicação da metodologia DAM, dão origem às equações *Double Average Navier-Stokes* (DANS).

No capítulo 3 procede-se a uma revisão sobre hidrodinâmica de escoamentos em áreas com vegetação emersa e ao desenvolvimento de um modelo teórico para caracterização da resistência ao escoamento. Em particular, apresenta-se um resumo dos trabalhos já desenvolvidos por outros investigadores sobre esta temática e faz-se referência às estruturas do escoamento turbulento em leito liso e em leitos com vegetação. Com base nas ferramentas desenvolvidas no capítulo 2, elabora-se um modelo teórico para determinar as forças de arrastamento exercidas nas hastes e no fundo, bem como os respectivos coeficientes de resistência.

No capítulo 4 faz-se uma descrição detalhada da instalação experimental e do equipamento utilizado. O procedimento experimental e a descrição dos ensaios realizados são apresentados no capítulo 5.

O capítulo 6 contém a apresentação e a discussão dos resultados obtidos. Em particular é feita uma análise de sensibilidade aos parâmetros relevantes para aplicação da DAM e são quantificados os termos do modelo de cálculo para a força de arrastamento nas hastes e no fundo, com os resultados do trabalho laboratorial.

A dissertação é encerrada no capítulo 7, onde se apresentam as conclusões e as propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Escoamentos em zonas com vegetação emersa. Sistemas físico e conceptual

2.1 Escoamentos em zonas com vegetação emersa. Sistema físico

A existência de vegetação emersa é muito frequente em planícies de inundação, nas margens dos leitos menores e em zonas húmidas. Nas planícies de inundação e nas margens os elementos de vegetação existente são muitas vezes arbustos e árvores de maior porte. As zonas húmidas são zonas de transição entre os ambientes aquático e terrestre, onde os escoamentos apresentam pequena profundidade e velocidades relativamente baixas. As plantas nestas zonas são, normalmente, emersas mas de pequena altura e diâmetro.

Apesar de escalas diferentes, estes tipos de vegetação têm em comum, além do inquestionável valor ecológico e paisagístico que a presença de vegetação confere aos sistemas fluviais, o importante papel de regulação de vários processos físicos e morfodinâmicos associados aos rios, nomeadamente, a estabilidade das margens, a protecção contra a erosão e a depuração de águas poluídas.

Quanto à estrutura do escoamento por entre campos de hastes emersas e rígidas, a sua principal característica é a grande heterogeneidade que apresentam à escala do espaçamento médio entre as hastes. À escala macroscópica da zona vegetada os fortes gradientes na zona entre hastes não são susceptíveis de serem percebidos e o escoamento é caracterizado como dispersivo (Nepf 1999). À escala da haste, o escoamento é entendido como o escoamento em torno de um cilindro de eixo vertical na esteira de outros cilindros.

Para determinar a resistência ao escoamento trabalhar-se-à à escala do espaçamento médio entre hastes usando equações que incorporam a heterogeneidade espacial. Apresentar-se-há com grande detalhe a dedução das equações, nomeadamente as que decorrem da

(a) (b)

Figura 2.1: a) Zona húmida com grande densidade de juncos. b) Zona húmida com vegetação emersa com baixa densidade (Fonte: http://animaldiversity.ummz.umich.edu)

aplicação da metodologia DAM, uma vez que não existem, na literatura, modelos conceptuais especificamente deduzidos para estes escoamentos.

2.2 Modelo conceptual

2.2.1 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais não lineares que descrevem o escoamento dos fluidos Newtonianos. Estas equações expressam um equilíbrio de forças de massa, de superfície e de inércia (Schlichting 1968, p. 65) e obtêm-se a partir das equações da conservação da quantidade de movimento e da relação constitutiva que expressa a interdependência entre a taxa de deformação e as tensões desenvolvidas no seio do escoamento.

A conservação da quantidade de movimento para um fluido incompressível é, em notação tensorial, expressa por (Currie 1993, p. 17)

$$\rho^{(w)}\frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho^{(w)}\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_i} = \rho^{(w)} g_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

Nesta equação, e nos restantes desenvolvimentos algébricos desta dissertação, adoptou-se o sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) com os eixos x e y orientados, respectivamente, nas direcções longitudinal e transversal ao escoamento e o eixo z orientado na direcção normal ao leito. Neste sistema de coordenadas as correspondentes componentes da velocidade são (u, v, w). A notação tensorial foi utilizada de acordo com $\{x_1, x_2, x_3\} \equiv \{x, y, z\}$ e $\{u_1, u_2, u_3\} \equiv \{u, v, w\}$ e foi seguida a notação de Einstein para simplificar a escrita de somatórios. Na equação (2.1), $\rho^{(w)}$ é a massa volúmica do fluido, g_i é a componente da aceleração gravítica na direcção i, σ_{ij} é o tensor das tensões e i e j tomam os valores 1, 2 e 3 correspondentes a cada uma das direcções, x, y e z, respectivamente.

Desenvolvendo o segundo termo do lado esquerdo da equação (2.1) obtém-se

$$\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_i} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{2.2}$$

Considerando que a equação de conservação da massa (equação da continuidade) para fluidos incompressíveis é

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2.3}$$

as equações da conservação da quantidade de movimento podem também escrever-se

$$\rho^{(w)} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho^{(w)} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \rho^{(w)} g_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\ , \tag{2.4}$$

onde o lado esquerdo representa a taxa de variação da quantidade de movimento por unidade de volume de fluido, sendo $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ a aceleração local e $u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ a aceleração convectiva. O lado direito diz respeito às forças responsáveis pela aceleração do fluido, sendo o primeiro termo devido às forças gravíticas que actuam na massa de fluido e o segundo ao gradiente das forças por unidade de área que actuam na superfície (Currie 1993, pp. 14-17). Na equação (2.1) os termos de inércia convectiva são escritos na forma conservativa, enquanto que na equação (2.4) a aceleração convectiva está escrita na forma não conservativa (Hirsch 1988, p. 15).

A relação constitutiva para o tensor das tensões num fluido Newtoniano incompressível é

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu^{(w)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.5}$$

onde p é a pressão local e $\mu^{(w)}$ é a viscosidade dinâmica (Currie 1993, p. 28, Pope 2000, pp. 16 e 17). Note-se que nesta equação o termo $p\delta_{ij}$ representa a pressão isotrópica no fluido, ao passo que o termo $\mu^{(w)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ representa o tensor das tensões para um fluido Newtoniano.

Derivando a equação (2.5) e considerando a hipótese de incompressibilidade e que $\mu^{(w)}$ é constante, obtém-se

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu^{(w)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \tag{2.6}$$

Substituindo este resultado na equação (2.4), obtêm-se as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis (Schlichting 1968, p. 62, Monin & Yaglom 1971, p. 30, Currie 1993, p. 31):

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = g_j - \frac{1}{\rho^{(w)}} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu^{(w)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \tag{2.7}$$

Estas equações representam três equações escalares correspondentes a cada uma das direcções ($j = 1,\ 2\, e\, 3$), onde $\nu^{(w)} = \mu^{(w)}/\rho^{(w)}$ é a viscosidade cinemática do fluido. Nesta equação, g_j representa as forças de massa, $\frac{\partial p}{\partial x_j}$ e $\nu^{(w)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i}$ são forças de contacto, de pressão e viscosas, respectivamente.

2.2.2 Equações *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS)

Os escoamentos turbulentos podem ser descritos como uma série contínua de diversas escalas de turbilhões (*eddy scales* na literatura inglesa). Num escoamento turbulento com superfície livre, as maiores escalas dos turbilhões são da ordem de grandeza da profundidade do escoamento. A escala dos menores turbilhões é da ordem de grandeza de pequenos grupos de moléculas de fluido. As equações de Navier-Stokes conseguem descrever todos os detalhes dos campos de velocidades de escoamentos turbulentos, da maior à mais pequena escala turbulenta. No entanto, este ponto forte das equação de Navier-Stokes é também a sua fraqueza, pois torna estas equações impraticáveis para qualquer problema de engenharia (Pope 2000, pp.8, 34-37). No presente estado do conhecimento, não existe solução analítica para as equações de Navier-Stokes, pelo que a sua resolução passa por soluções numéricas. Para resolver todas as escalas dos escoamentos turbulentos, a solução numérica directa destas equações necessita de uma malha de cálculo cuja largura seja da ordem de grandeza do diâmetro das moléculas do fluido $\left(10^{-10}\right)$. Assim, o tempo de cálculo necessário para obter soluções para problemas de engenharia pode ser de meses, anos ou séculos (Pope 2000, pp. 31-32), tornando a resolução directa das equações de Navier-Stokes impraticável.

Assim, para resolver os problemas concretos surgiram as *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS), equações resultantes da aplicação do operador média temporal às equações de Navier-Stokes num intervalo de tempo superior ao período característico das oscilações turbulentas (Mauri 2002). Para se obterem as RANS a partir das equações instantâneas de Navier-Stokes é necessário introduzir o conceito de decomposição de Reynolds, que é uma ferramenta que permite resolver todas as escalas dos escoamentos turbulentos (Schlichting 1968, p. 526, Raupach & Shaw 1982, Finnigan 2000, Pope 2000, 83-87). Esta decomposição consiste na separação do valor instantâneo das variáveis do escoamento numa componente média temporal e numa componente de flutuação, como se ilustra na Figura 2.2 para o caso da velocidade longitudinal.

Assim, para uma variável instantânea genérica, θ, tem-se

$$\theta\left(x,y,z,t\right)=\overline{\theta}\left(x,y,z\right)+\theta'\left(x,y,z,t\right) \qquad \text{em que } \overline{\theta'}=0 \tag{2.8}$$

onde a barra superior designa a média temporal e a plica representa a flutuação instantânea.

Aplicando a decomposição de Reynolds às variáveis do escoamento e o operador média temporal aos vários termos das equações de Navier-Stokes obtém-se:

$$\overline{\frac{\partial\left(\bar{u}_j+u'_j\right)}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial\left(\bar{u}_j+u'_j\right)\left(\bar{u}_i+u'_i\right)}{\partial x_i}}=\overline{\left(\bar{g}_j+g'_j\right)}-\frac{1}{\rho^{(w)}}\overline{\frac{\partial\left(\bar{p}+p'\right)}{\partial x_j}}+\nu^{(w)}\overline{\frac{\partial^2\left(\bar{u}_j+u'_j\right)}{\partial x_i\partial x_i}} \tag{2.9}$$

Note-se que se optou por escrever a aceleração convectiva na forma conservativa (ver equações (2.1) e (2.4)). Aplicando as regras do operador média temporal (Hinze 1975, pp. 6 e

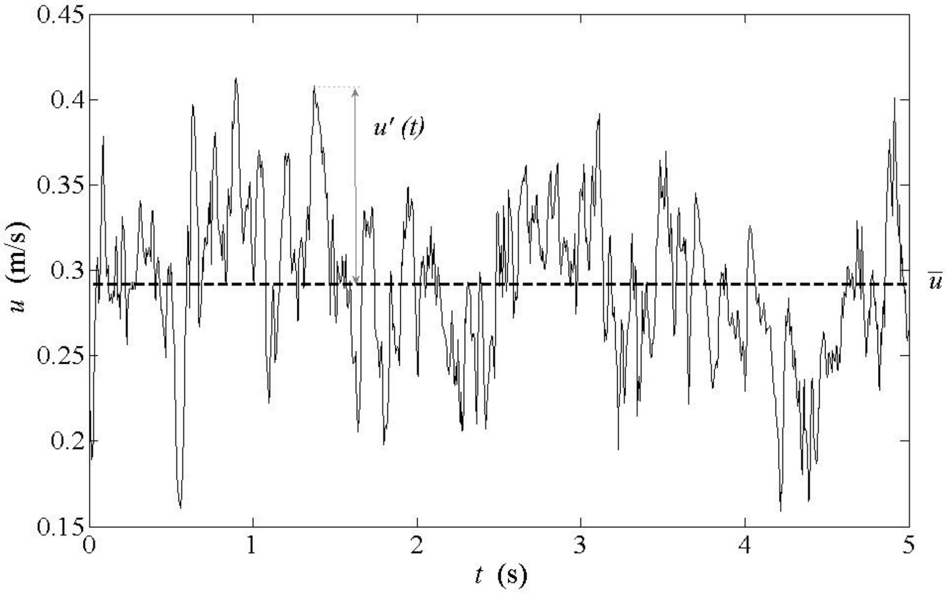


Figura 2.2: Série temporal de velocidades instantâneas ($u(t)$) num dado intervalo de tempo (t), representando o valor médio e as flutuações instantâneas (Dados de Ferreira (2005, cap. 2)).

7)

$$\bar{\bar{\theta}} = \bar{\theta} \qquad \overline{\theta + \xi} = \bar{\theta} + \bar{\xi}$$

$$\overline{\bar{\theta}\xi} = \bar{\theta}\bar{\xi} \qquad \overline{\frac{\partial \theta}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s}$$

$$\overline{\theta\xi} \neq \bar{\theta}\bar{\xi}$$

(em que θ e ξ representam variáveis genéricas) aos termos da equação (2.9) obtém-se as RANS para o escoamento de um fluido Newtoniano incompressível (Schlichting 1968, p. 529, Brederode 1997, p. 263):

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = g_j - \frac{1}{\rho^{(w)}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j u'_i}}{\partial x_i} + \nu^{(w)} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i} \tag{2.10}$$

Comparando as equações (2.7) e (2.10) conclui-se que a maioria dos termos das equações de Navier-Stokes foram simplesmente substituídos pela respectiva média temporal nas RANS. A excepção é o terceiro termo do lado direito da equação (2.10), conhecido como o termo das tensões de Reynolds, que, para o escoamento médio, representa o efeito médio do transporte de quantidade de movimento pelas flutuações de velocidade (Wilson & Shaw 1977, Brederode 1997, pp. 263-265). Este termo surge devido à não linearidade do termos da aceleração convectiva, uma vez que

$$\overline{u_j u_i} = \overline{\left(\bar{u}_j + u'_j\right)\left(\bar{u}_i + u'_i\right)} = \bar{u}_j \bar{u}_i + \overline{u'_j u'_i}$$

O tensor das tensões de Reynolds, também designado por tensor das tensões turbulentas e definido por $-\rho\overline{u'_i u'_j}$, é frequentemente modelado como uma difusão turbulenta de quantidade de movimento (Schlichting 1968, p. 546). Outras equações de fecho têm sido propostas para possibilitar a obtenção de soluções numéricas para as RANS (Patel *et al.* 1985).

As RANS são uma ferramenta essencial para a modelação numérica e interpretação de resultados experimentais de escoamentos turbulentos. No entanto, em rigor, as RANS aplicam-se apenas a escoamentos em que a fronteira é lisa ou pouco irregular. Nos casos em que a heterogeneidade espacial é relativamente elevada este tipo de equações não representa toda a complexidade do escoamento junto às fronteiras rugosas. Para resolver este problema, além do recurso às médias temporais, há que transformar as equações de Navier-Stokes por intermédio de médias espaciais (Nikora *et al.* 2007a).

2.2.3 Metodologia *Double-Average*

A metodologia *Double-Average* é a metodologia através da qual se obtém, nos domínios temporal e espacial, os termos médios de velocidade e pressão presentes nas equações de conservação que descrevem o escoamento bem como as tensões aparentes que resultam da variabilidade temporal e espacial do escoamento. A metodologia *Double-Average* permite, assim, deduzir equações de conservação, por aplicação de operadores de médias espaciais e temporais às equações de Navier-Stokes, que permitem a simulação e compreensão de escoamentos sobre fronteiras irregulares (Finnigan 2000, Nikora *et al.* 2001, Pokrajac *et al.* 2007, Franca *et al.* 2008). A metodologia *Double-Average* será doravante invocada com o acrónimo DAM.

A DAM é mais que um simples processo estatístico, na medida em que permite explicitar matematicamente os termos das tensões dispersivas, da resistência de forma e da resistência viscosa (*form-induced stresses, form drag* e *viscous drag* na literatura inglesa, respectivamente, Campbell 2005, pp. 43 e 44, Nikora *et al.* 2007a, Pokrajac *et al.* 2008), que durante muitos anos foram adicionados às RANS de forma *ad hoc* (Finnigan 2000, Nikora *et al.* 2007a).

As primeiras aplicações da DAM surgiram associadas ao estudo de escoamentos com múltiplas fases e de escoamentos subterrâneos (Whitaker 1967, Gray & Lee 1977).

Na hidráulica dos escoamentos com superfície livre, o conceito de *Double-Average* foi introduzido por Smith & McLean (1977) para caracterizar o escoamento sobre dunas de grande amplitude relativa. No mesmo ano, Wilson & Shaw (1977) publicaram detalhes da aplicação desta metodologia aos escoamentos atmosféricos no seio e sobre as copas das árvores. A partir dessa data, o formalismo desta metodologia para os escoamentos turbulentos rugosos foi sendo desenvolvido no âmbito da descrição dos escoamentos atmosféricos sobre diversos tipos de vegetação (Raupach & Shaw 1982, Raupach *et al.* 1986, Raupach *et al.* 1991, Raupach *et al.* 1996, Finnigan 2000, Poggi *et al.* 2004a, Poggi *et al.* 2004b, Poggi & Katul 2008, Finnigan & Shaw 2008).

Em relação aos escoamentos hidráulicos, entre os primeiros trabalhos publicados destaca-se o de Gimenez-Curto & Corniero Lera (1996) em que se analisaram as oscilações de um escoamento turbulento sobre superfícies rugosas. Este trabalho introduziu o termo das tensões dispersivas para descrever as perturbações espaciais do escoamento médio temporal. Destaca-se também o trabalho de Lopez & García (1998) onde se aplicou a DAM a um escoamento sobre vegetação rígida para avaliar a capacidade de transporte de sedimentos em suspensão do escoamento.

Na última década, tem vindo a ser levado a cabo um importante esforço para detalhar os formalismos da DAM aplicada à hidráulica ambiental (Nikora *et al.* 2001, Nikora *et al.* 2004, Campbell 2005, Manes *et al.* 2007, Pokrajac *et al.* 2008, Ferreira *et al.* 2008b).

Nikora *et al.* (2001) mostraram que a DAM aplicada às equações do movimento deve ser encarada como uma ferramenta essencial da hidráulica dos escoamentos com superfície livre em canais de fundo irregular, especialmente nos que apresentam uma submergência relativamente pequena. De acordo com Nikora *et al.* (2001), as principais vantagens da DAM são: i) a existência de uma relação consistente entre a média espacial dos parâmetros da rugosidade do fundo e a média temporal e espacial das variáveis do escoamento; ii) o aparecimento do termos das tensões dispersivas e da resistência de forma como resultado de uma derivação rigorosa; iii) a possibilidade de efectuar considerações e parametrizações com base nas variáveis médias, temporais e espaciais; iv) a possibilidade de repartir de forma consistente as escalas dos parâmetros de rugosidade e das propriedades do escoamento no caso de existirem vários tipos de rugosidade.

Nikora *et al.* (2004) propuseram uma família de modelos fenomenológicos para determinar o perfil vertical da velocidade longitudinal média, no tempo e no espaço, de escoamentos sobre leitos rugosos, sugerindo que este perfil pode ser exponencial, linear ou constante, dependendo das condições do escoamento e da geometria da rugosidade.

Nikora *et al.* (2007a), Nikora *et al.* (2007b) e Nikora (2008) apresentam uma síntese dos avanços conseguidos na teoria que fundamenta a DAM bem como várias aplicações desta metodologia nos domínios da hidráulica, ilustrando vantagens, potenciais aplicações e oportunidades de futuras investigações. Exemplo de uma aplicação da DAM é o estudo de Ferreira *et al.* (2008b) dedicado à caracterização e quantificação da resistência de escoamentos em canais com superfície livre e com leitos porosos, hidraulicamente rugosos e potencialmente móveis. Ferreira *et al.* (2008b) quantifica o impacte, sobre os parâmetros da lei da parede, do transporte sólido por arrastamento e avalia os efeitos desse impacte na lei de resistência.

2.2.4 Equações *Double-Average Navier-Stokes* (DANS)

Da aplicação da DAM às equações de Navier-Stokes resulta um conjunto de equações designadas por equações Double-Average Navier-Stokes (DANS). Assim, as DANS podem ser entendidas como as equações resultantes da aplicação do operador média espacial às RANS. Segundo Nikora *et al.* (2007a) esta forma de aplicar a DAM (média temporal seguida da média espacial), é especialmente adequada para os escoamentos em leitos irregulares por parecer mais intuitiva. No entanto, deve considerar-se que existe a possibilidade de determinar primeiro a média espacial e só depois a média temporal (Pokrajac *et al.* 2008). Note-se que ambas conduzem a resultados necessariamente idênticos (Pokrajac *et al.* 2008).

A decomposição do valor instantâneo de uma variável genérica, θ, no contexto da metodologia *Double-Average* (Pokrajac *et al.* 2008), é

$$\theta = \left\langle \bar{\theta} \right\rangle + \tilde{\bar{\theta}} + \langle \theta \rangle' + \tilde{\theta}' \tag{2.11}$$

em que $\left\langle \bar{\theta} \right\rangle$ representa a média espacial e temporal de θ, $\tilde{\bar{\theta}}$ representa a flutuação espacial (num domínio espacial representativo Ω) dos valores da média temporal de θ, $\langle \theta \rangle'$ representa a flutuação temporal da média espacial de θ (flutuações turbulentas de escala elevada) e $\tilde{\theta}'$ representa a flutuação temporal das flutuações espaciais de θ (flutuações de escala reduzida). Agrupando os dois últimos termos de (2.11) num único termo de flutuação temporal, $\theta' = \langle \theta \rangle' + \tilde{\theta}'$, obtém-se

$$\theta = \left\langle \bar{\theta} \right\rangle + \tilde{\bar{\theta}} + \theta' \tag{2.12}$$

comparando (2.12) com (2.8) torna-se evidente que

$$\bar{\theta}(x, y, z) = \left\langle \bar{\theta} \right\rangle (z) + \tilde{\bar{\theta}}(x, y, z) \tag{2.13}$$

Sublinhe-se que o valor da média temporal e espacial da variável genérica θ não tem existência em valores particulares (x, y). A média $\left\langle \bar{\theta} \right\rangle$ é válida num domínio Ω cuja medida, num espaço bidimensional, é maior que o produto dos comprimentos de onda das flutuações espaciais de $\bar{\theta}$, em duas direcções independentes do espaço.

Para simplificar a notação, doravante usar-se-à $\tilde{\theta} \equiv \tilde{\bar{\theta}}$.

Para obter as DANS há que proceder à aplicação do operador média espacial às RANS, introduzir a decomposição espacial definida pela equação (2.13) e considerar as seguintes regras a que o operador média espacial está sujeito (Finnigan & Shaw 2008)

$$\begin{aligned} \langle \langle \theta \rangle \rangle &= \langle \theta \rangle & \qquad \langle \theta + \xi \rangle &= \langle \theta \rangle + \langle \xi \rangle \\ \langle \langle \theta \rangle \xi \rangle &= \langle \theta \rangle \langle \xi \rangle & \qquad \langle \theta \xi \rangle &\neq \langle \theta \rangle \langle \xi \rangle \end{aligned}$$

em que θ e ξ representam duas variáveis genéricas do escoamento, que podem ser, por exemplo, a velocidade, u_i, ou a pressão, p. Há ainda a acrescentar que a propriedade comutativa entre operadores diferencial e média espacial não é válida quando o volume de controlo intersecta os elementos sólidos (Wilson & Shaw 1977, Raupach & Shaw 1982). Assim,

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j}$$

quando o volume de controlo é constituído apenas pela componente líquida, isto é, não intersecta os elementos de rugosidade. No caso em que o volume de controlo é constituído por uma fracção líquida e por uma fracção sólida

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\rangle \neq \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j} \ ,$$

pelo que, para determinar a média espacial dos termos diferenciais, há que recorrer aos seguintes teoremas (detalhes em Gray & Lee (1977), Raupach *et al.* (1986), Finnigan (2000), Campbell (2005, pp. 67; 215-219) ou Nikora *et al.* (2007a)).

A: Teorema da média espacial

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi \langle \theta \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{\forall_f} \int_{S_{int}} \theta n_j \mathrm{d}S \tag{2.14}$$

B: Equação geral do transporte

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi \langle \theta \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\forall_f} \int_{S_{int}} \theta u_i^{(I)} n_i \mathrm{d}S \tag{2.15}$$

Nestes teoremas, θ é uma variável do escoamento definida apenas no volume de fluido, S_{int} é a superfície de interface entre a parte sólida e a parte líquida do volume de controlo; $\psi = \psi(z) = \frac{A_f(z)}{A_T}$ expressa a percentagem de vazios, ou seja, a relação entre a área ocupada pelo fluido A_f, e a área total A_T, num dado nível z; n_i é a componente i do vector unitário normal à interface sólido/líquido dirigida da parte sólida para a parte líquida; $u_i^{(I)}$ é a componente i do vector velocidade na interface sólido/líquido e as restantes variáveis têm o significado anteriormente apresentado. Devido à condição de não escorregamento, se a velocidade dos elementos sólidos for nula e a fronteira não porosa tem-se $u_i^{(I)} = 0$, pelo que o último termo da equação geral do transporte torna-se nulo. Sempre que não houver ambiguidade de notação, prescindir-se-à do sobrescrito (I).

Deve ainda considerar-se, para a simplificação de alguns termos que decorrem da dedução das DANS a partir das RANS, que a média espacial da equação da continuidade escrita em termos de média temporal, $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$, resulta por aplicação do teorema A

$$\left\langle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\forall_f} \int_{S_{int}} \bar{u}_i n_i \mathrm{d}S = 0$$

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i} = \frac{1}{\forall_f} \int_{S_{int}} \bar{u}_i n_i \mathrm{d}S \tag{2.16}$$

Se a fronteira for fixa e não porosa $\frac{1}{\forall_f} \int_{S_{int}} \bar{u}_i n_i \mathrm{d}S = 0$, pelo que equação da continuidade se pode escrever

$$\frac{\partial \psi \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \tag{2.17}$$

Assim, aplicando as regras e os teoremas apresentados e considerando as simplificações resultantes da média temporal e espacial da equação da continuidade para fluidos incompressíveis, obtém-se

$$\frac{\partial\left\langle\bar{u}_j\right\rangle}{\partial t}+\left\langle\bar{u}_i\right\rangle\frac{\partial\left\langle\bar{u}_j\right\rangle}{\partial x_i}=g_j-\frac{1}{\psi\rho^{(w)}}\frac{\partial\psi\left\langle\bar{p}\right\rangle}{\partial x_j}-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi\left\langle\overline{u_j'u_i'}\right\rangle}{\partial x_i}-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi\left\langle\tilde{u}_j\tilde{u}_i\right\rangle}{\partial x_i}$$

$$+\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi\left\langle\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right\rangle\right)+\frac{1}{\rho^{(w)}\forall_f}\int_{S_{int}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S-\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}}\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}n_i\mathrm{d}S$$

$$-\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}}\bar{u}_ju_i^{(I)}n_i\mathrm{d}S-\frac{\left\langle\bar{u}_j\right\rangle}{\forall_f}\int_{S_{int}}\bar{u}_in_i\mathrm{d}S+\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}}\bar{u}_j\bar{u}_in_i\mathrm{d}S+\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}}\overline{u_j'u_i'}n_i\mathrm{d}S-\frac{\left\langle\bar{u}_i\right\rangle}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2.18}$$

Pela consideração da condição de não escorregamento e admitindo que a fronteira sólido - fluido é fixa no tempo e não porosa, os termos da última linha da equação (2.18) são nulos e as DANS, para leitos fixos, tomam a forma (Raupach *et al.* 1986, Finnigan 2000, Nikora *et al.* 2007a, Nikora 2008, Ferreira *et al.* 2008a)

$$\frac{\partial\left\langle\bar{u}_j\right\rangle}{\partial t}+\left\langle\bar{u}_i\right\rangle\frac{\partial\left\langle\bar{u}_j\right\rangle}{\partial x_i}=g_j-\frac{1}{\psi\rho^{(w)}}\frac{\partial\psi\left\langle\bar{p}\right\rangle}{\partial x_j}-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi\left\langle\overline{u_j'u_i'}\right\rangle}{\partial x_i}-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi\left\langle\tilde{u}_j\tilde{u}_i\right\rangle}{\partial x_i}$$

$$+\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi\left\langle\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right\rangle\right)+\frac{1}{\rho^{(w)}\forall_f}\int_{S_{int}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S-\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}}\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}n_i\mathrm{d}S \tag{2.19}$$

Comparando esta equação com as RANS, conclui-se que a variabilidade espacial conduz ao aparecimento de três novos termos nas equações do movimento.

À semelhança do que acontece com o termo das tensões de Reynolds nas RANS, nas DANS surge um termo devido à não linearidade do termo convectivo da aceleração, $\frac{\partial\psi\langle\tilde{u}_j\tilde{u}_i\rangle}{\partial x_i}$. Este termo, é conhecido com o termo das tensões dispersivas e deve-se às perturbações espaciais da velocidade, em relação à média temporal (Nikora *et al.* 2001, Poggi *et al.* 2004b, Campbell 2005, pp. 63 e 64). O tensor das tensões dispersivas, definido por $-\rho\psi\left\langle\tilde{u}_j\tilde{u}_i\right\rangle$, toma valores não nulos desde que exista vorticidade no escoamento perturbado, segundo Gimenez-Curto & Corniero Lera (1996). Além do termo das tensões dispersivas surgem os termos $\frac{1}{\rho\forall_f}\int_{S_{int}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S$ e $-\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}}\nu\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}n_i\mathrm{d}S$ que correspondem à resistência de forma e à resistência viscosa, respectivamente, sendo ambos forças por unidade de massa de líquido. Estes dois últimos termos surgem devido à não comutatividade dos operadores diferencial e média quando o volume de controlo contém as fases sólida e fluida.

Note-se que nas equações anteriores se considerou que a DAM foi aplicada a um intervalo de tempo suficientemente largo e a um volume de controlo infinito em área e de espessura infinitesimal. Se estas condições não forem válidas surgem termos adicionais de tensão (detalhes em Leonard 1974, Finnigan 2000, Nikora *et al.* 2007a).

A parcela da resistência de forma nas DANS pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S=-\left\langle\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_j}\right\rangle+\frac{\left\langle\bar{p}\right\rangle}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} \tag{2.20}$$

onde o primeiro termo do lado direito corresponde à parcela da resistência de forma devido à variação espacial das flutuações da pressão e o segundo termo corresponde à variação espacial do volume de vazios da área de controlo (Campbell 2005, p. 228). À semelhança da resistência de forma, também a resistência viscosa pode ser decomposta em vários termos (Campbell 2005, p. 231)

$$-\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}} \nu^{(w)}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} n_i \mathrm{d}S = \left\langle \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_i \partial x_i}\right\rangle - \frac{\nu^{(w)}\left\langle \bar{u}_j\right\rangle}{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{2\nu^{(w)}}{\psi}\frac{\partial\left\langle \bar{u}_j\right\rangle}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} +$$
$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\nu^{(w)}\left(\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}} \bar{u}_j n_i \mathrm{d}S\right) \quad (2.21)$$

O último termo da expressão (2.21) desaparece quando os elementos de rugosidade do leito são rígidos, não porosos e a velocidade na fronteira obedece à condição de não escorregamento.

Substituindo na equação (2.19) as definições (2.20) e (2.21) e considerando que

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi\left\langle \bar{p}\right\rangle}{\partial x_j} = \frac{\left\langle \bar{p}\right\rangle}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \frac{\partial\left\langle \bar{p}\right\rangle}{\partial x_j}$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi\left\langle \nu^{(w)}\frac{\partial\left\langle \bar{u}_j\right\rangle}{\partial x_i}\right\rangle\right) = \left\langle \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i}\right\rangle + \frac{\nu^{(w)}\left\langle \bar{u}_j\right\rangle}{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{2\nu^{(w)}}{\psi}\frac{\partial\left\langle \bar{u}_j\right\rangle}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

obtém-se outra forma de escrever as DANS

$$\frac{\partial\left\langle \bar{u}_j\right\rangle}{\partial t} + \left\langle \bar{u}_i\right\rangle\frac{\partial\left\langle \bar{u}_j\right\rangle}{\partial x_i} = g_j - \frac{1}{\rho^{(w)}}\frac{\partial\left\langle \bar{p}\right\rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi\left\langle \overline{u_j' u_i'}\right\rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi\left\langle \tilde{u}_j \tilde{u}_i\right\rangle}{\partial x_i}$$
$$+\,\nu^{(w)}\frac{\partial^2\left\langle \bar{u}_j\right\rangle}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho^{(w)}}\left\langle \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_j}\right\rangle + \nu^{(w)}\left\langle \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_i \partial x_i}\right\rangle \quad (2.22)$$

Note-se que em algumas referências bibliográficas (Nikora *et al.* 2001, Poggi *et al.* 2004a, Poggi & Katul 2008, Finnigan & Shaw 2008) os termos da resistência de forma e da resistência viscosa são apresentados apenas como $\left\langle \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}\right\rangle$ e $\left\langle \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_i \partial x_i}\right\rangle$, respectivamente, o que constitui uma aproximação, pois estes termos são apenas uma das componentes dos termos da resistência de forma e da resistência viscosa.

Neste trabalho considerou-se que o domínio espacial representativo, Ω, para a aplicação da DAM terá dimensões superiores às escalas do espectro produtivo da turbulência (Franca 2005) e inferiores às características topográficas de larga escala. Considerou-se também que o operador média espacial é definido por (Raupach & Shaw 1982, Nikora *et al.* 2001, Franca *et al.* 2008, Ferreira *et al.* 2008a)

$$\left\langle \bar{\theta}\right\rangle(z) = \frac{1}{A_f(z)}\int_{\Omega} \bar{\theta}(\xi_1, \xi_2, z)\,\mathrm{d}S \quad (2.23)$$

onde $\overline{\theta}$ representa a média temporal de uma variável do escoamento definida num ponto que não seja ocupado pelos elementos rugosos, Ω é, sem perda de generalidade, um domínio rectangular cuja área é $L_x \times L_y$, paralelo a um plano definido por $z =$ constante (assume-se que é paralelo ao leito) e $A_f(z)$ é a área ocupada por fluido no domínio Ω. As dimensões do domínio rectangular, L_x e L_y, devem ser relativamente largas quando comparadas com o comprimento de onda da distribuição espacial das variações da velocidade longitudinal junto ao fundo do canal. As variáveis ξ_1 e ξ_2 são tais que $0 < \xi_1 < L_x$ e $0 < \xi_2 < L_y$ e correspondem às coordenadas, segundo a direcção x e y, dos pontos ocupados pelo fluido em que $\overline{\theta}$ está definido.

A equação (2.23) não tem aplicação prática nos casos em que existem dados que são espacialmente discretos, como é o caso desta dissertação na qual se dispõe de perfis de velocidades obtidos para um número finito de pontos numa dada área do canal. Nesses casos, a média espacial de uma variável média no tempo, $\overline{\theta}$, é determinada através de (Franca *et al.* 2008, Ferreira *et al.* 2008a)

$$\left\langle \overline{\theta} \right\rangle (z) \approx \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N-N_0(z)} \bar{\theta}_k(z) A_k(z)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N-N_0(z)} A_k(z)} \tag{2.24}$$

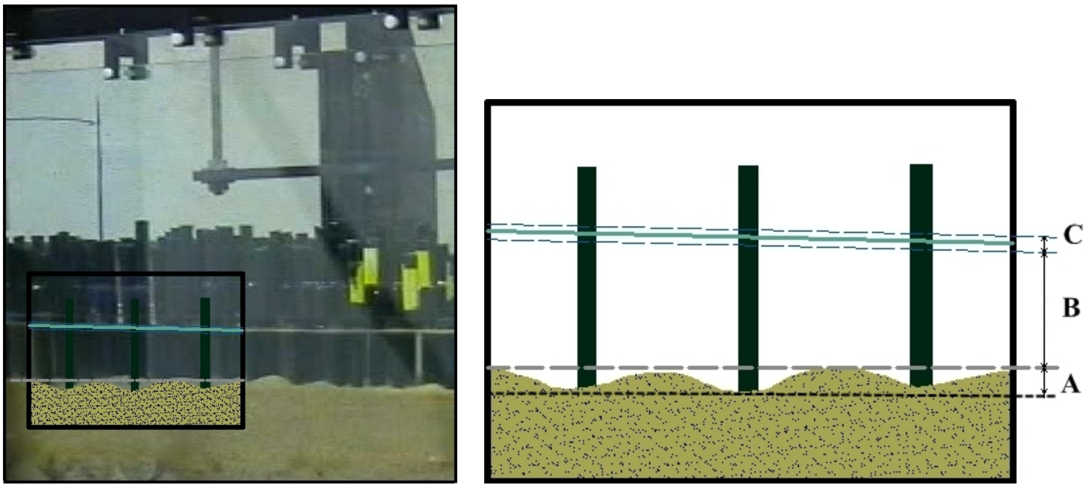
onde $A_k(z)$ é a área do sub-domínio convexo Ω_k, definida como a área de influência de $(x_k, y_k) \in]0, L_x[\times]0, L_y[$ e tal que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{N(z)} \Omega_k = \Omega$, N corresponde ao número total de sub-domínios e $N_0(z)$ ao número de sub-domínios, à cota z, para o qual a variável do escoamento não está definida em (x_k, y_k). Deve notar-se que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-N_0(z)} A_k(z) < A(z)$ para $N_0(z) > 0$.

No estudo de um escoamento na presença de hastes rígidas, cilíndricas e emersas, em relação à variação da função de vazios, $\psi = \psi(z)$, podem identificar-se três zonas distintas, A, B e C, representadas na Figura 2.3.

Entre o plano que contém os pontos mais baixos do leito e o plano onde estão contidas as cristas mais alta das oscilações do fundo, encontra-se a zona A onde a função de vazios, $\psi^{(A)}$, toma valores que variam entre a porosidade do leito e $n\pi d^2/4$, em que n é o número de hastes por unidade de área e d é o diâmetro das hastes.

Um escoamento no interior de elementos rígidos emersos pode apresentar oscilações na superfície livre. Assim, numa faixa de espessura significativa junto à superfície livre, onde a área ocupada por fluido é variável, pode definir-se uma função de vazios $\psi^{(C)}$. A faixa entre a cota mais baixa e a mais alta da superfície livre corresponde à zona C, identificada na Figura 2.3.

A zona B, localizada entre as regiões A e C anteriormente apresentadas, corresponde à parte da coluna de água onde a função de vazios, $\psi^{(B)}$, se mantém constante e igual a $n\pi d^2/4$.



(a) (b)

Figura 2.3: a) Fotografia das oscilações do leito com vegetação e b) representação esquemática das regiões com diferentes funções de vazios.

No que respeita às DANS, como nestas intervém a função de vazios, a forma destas equações varia para cada uma das zonas identificadas anteriormente. Em seguida apresentam-se as DANS para cada umas das zonas.

Na zona A, os termos de resistência de forma e de resistência viscosa totais das DANS dividem-se em duas componentes, a parte devida às hastes (s) e a parte devida às formas do fundo (b). Assim, para esta zona as DANS escrevem-se na forma

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial t} + \langle \bar{u}_i \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_i} = g_j - \frac{1}{\psi^{(A)} \rho^{(w)}} \frac{\partial \psi^{(A)} \langle \bar{p} \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{\psi^{(A)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi^{(A)} \left\langle \nu^{(w)} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right\rangle \right)$$

$$- \frac{1}{\psi^{(A)}} \frac{\partial \psi^{(A)} \left\langle \overline{u'_j u'_i} \right\rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\psi^{(A)}} \frac{\partial \psi^{(A)} \langle \tilde{u}_j \tilde{u}_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho^{(w)} \forall_f} \int_{S_{int}^{(s)}} \bar{p} n_j \mathrm{d}S$$

$$- \frac{1}{\forall_f} \int_{S_{int}^{(s)}} \nu^{(w)} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} n_i \mathrm{d}S + \frac{1}{\rho^{(w)} \forall_f} \int_{S_{int}^{(b)}} \bar{p} n_j \mathrm{d}S - \frac{1}{\forall_f} \int_{S_{int}^{(b)}} \nu^{(w)} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} n_i \mathrm{d}S \quad (2.25)$$

Na zona B, em que a função de vazios é constante, as DANS escrevem-se

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial t} + \langle \bar{u}_i \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_i} = g_j - \frac{1}{\rho^{(w)}} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \nu^{(w)} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{\partial \left\langle \overline{u'_j u'_i} \right\rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \tilde{u}_i \rangle}{\partial x_i}$$

$$+ \frac{1}{\rho \forall_f} \int_{S_{int}^{(s)}} \bar{p} n_j \mathrm{d}S - \frac{1}{\forall_f} \int_{S_{int}^{(s)}} \nu^{(w)} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} n_i \mathrm{d}S \quad (2.26)$$

Na zona C, os termos de resistência de forma e de resistência viscosas devem-se exclusivamente à presença das hastes (s) no volume de controlo e as DANS definem-se

$$\frac{\partial\left\langle\bar{u}_j\right\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\left\langle\overline{u_j}\right\rangle}{\partial t}+\left\langle\overline{u_i}\right\rangle\frac{\partial\left\langle\overline{u_j}\right\rangle}{\partial x_i}=g_j-\frac{1}{\psi^{(C)}\rho^{(w)}}\frac{\partial\psi^{(C)}\left\langle\bar{p}\right\rangle}{\partial x_j}+\frac{1}{\psi^{(C)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi^{(C)}\left\langle\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right\rangle\right)$$

$$-\frac{1}{\psi^{(C)}}\frac{\partial\psi^{(C)}\left\langle\overline{u_j'u_i'}\right\rangle}{\partial x_i}-\frac{1}{\psi^{(C)}}\frac{\partial\psi^{(C)}\left\langle\tilde{u}_j\tilde{u}_i\right\rangle}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho^{(w)}\forall_f}\int_{S_{int}^{(s)}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S-\frac{1}{\forall_f}\int_{S_{int}^{(s)}}\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}n_i\mathrm{d}S \tag{2.27}$$

Para simplificar a escrita das DANS, nos casos em que a coluna de água se divide nas zonas identificadas anteriormente, irá definir-se uma equação única, válida em toda a coluna de água. Nessa equação a função de vazios é definida como

$$\psi(z)=\begin{cases}\psi^{(A)}=\frac{A_f^{(A)}}{A_T}=\frac{A_T-S^{(s)}-S^{(b)}}{A_T}, & \text{zona A}\\ \psi^{(B)}=\frac{A_f^{(B)}}{A_T}=\frac{A_T-S^{(s)}}{A_T}, & \text{zona B}\\ \psi^{(C)}=\frac{A_f^{(C)}}{A_T}=\frac{A_T-S^{(s)}-S^{(ar)}}{A_T}, & \text{zona C}\end{cases} \tag{2.28}$$

em que $A_f^{(i)}$ corresponde à área de fluido na área de controlo, A_T, na zona i, $S^{(s)}$, $S^{(b)}$ e $S^{(ar)}$ correspondem, respectivamente, à parcela ocupada pelas hastes, pelo material do fundo e por ar na área de controlo.

Considerando a função

$$\delta^{(i)}=\begin{cases}1, & \text{na zona } i\\ 0, & \text{fora da zona } i\end{cases} \tag{2.29}$$

onde $i=A,\ B\,\text{ou}\,C$, as DANS para um escoamento no interior de elementos rígidos emersos escrevem-se

$$\frac{\partial\left\langle\bar{u}_j\right\rangle}{\partial t}+\left\langle\bar{u}_i\right\rangle\frac{\partial\left\langle\bar{u}_j\right\rangle}{\partial x_i}=g_j-\frac{1}{\psi\rho^{(w)}}\frac{\partial\psi\left\langle\bar{p}\right\rangle}{\partial x_j}+\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi\left\langle\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right\rangle\right)$$

$$-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi\left\langle\overline{u_j'u_i'}\right\rangle}{\partial x_i}-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi\left\langle\tilde{u}_j\tilde{u}_i\right\rangle}{\partial x_i}+\frac{\delta^{(A)}}{\rho^{(w)}\forall_f^{(A)}}\int_{S_{int}^{(s)}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S+\frac{\delta^{(B)}}{\rho^{(w)}\forall_f^{(B)}}\int_{S_{int}^{(s)}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S$$

$$+\frac{\delta^{(C)}}{\rho^{(w)}\forall_f^{(C)}}\int_{S_{int}^{(s)}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S-\frac{\delta^{(A)}}{\forall_f^{(A)}}\int_{S_{int}^{(s)}}\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}n_i\mathrm{d}S-\frac{\delta^{(B)}}{\forall_f^{(B)}}\int_{S_{int}^{(s)}}\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}n_i\mathrm{d}S$$

$$-\frac{\delta^{(C)}}{\forall_f^{(C)}}\int_{S_{int}^{(s)}}\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}n_i\mathrm{d}S+\frac{\delta^{(A)}}{\rho^{(w)}\forall_f^{(A)}}\int_{S_{int}^{(b)}}\bar{p}n_j\mathrm{d}S-\frac{\delta^{(A)}}{\forall_f^{(A)}}\int_{S_{int}^{(b)}}\nu^{(w)}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}n_i\mathrm{d}S \tag{2.30}$$

Capítulo 3

Resistência ao escoamento em zonas com vegetação emersa

3.1 Partição da tensão de arrastamento

A resistência hidráulica dos escoamentos com superfície livre resulta da acção das forças de pressão e das forças viscosas sobre o perímetro molhado (Wu *et al.* 1999, Kirby *et al.* 2005). A existência de vegetação num curso de água conduz a um aumento da resistência hidráulica e, consequentemente, ao aumento da altura do escoamento e à redução da velocidade média do escoamento com o caudal constante (Kadlec 1990, Yen 2002, Green 2006, Tanino & Nepf 2008). Em problemas de engenharia fluvial, a avaliação da resistência ao escoamento consiste principalmente em encontrar uma forma expedita de estimar a profundidade do escoamento. Afectando a resistência ao escoamento, a vegetação emersa afecta também o transporte e a deposição de sedimentos e contaminantes (Lopez & García 1998, Yen 2002, Defina & Bixio 2005, Nepf & Vivoni 1999, Tanino & Nepf 2008) e a intensidade e a difusão turbulentas (Nepf 1999).

De facto, a vegetação tem um papel fundamental na protecção contra a erosão de leitos e margens de cursos de água, na medida em que conduz à redução da tensão de arrastamento que actua nas partículas do solo (Wolfe & Nickling 1996, Crawley & Nickling 2003, Li & Shao 2003, Thompson *et al.* 2004, Gillies *et al.* 2007). Assim, é de extrema importância, para a protecção contra fenómenos de erosão, poder prever e limitar a fracção da tensão de arrastamento do escoamento que actua directamente sobre as partículas do solo.

A tensão de arrastamento total, τ_T, num escoamento com vegetação pode ser dividida em duas componentes, uma componente exercida nas plantas (elementos de rugosidade), $\langle \overline{f_x} \rangle$ e outra que actua no fundo do canal e é responsável pelo destacamento e transporte das partículas de solo, τ_b (Raupach 1992, Crawley & Nickling 2003, Thompson *et al.* 2004)

$$\tau_T = \langle \overline{f_x} \rangle + \tau_b \tag{3.1}$$

Apesar da pertinência do tema, devido à sua complexidade não foi ainda desenvolvido trabalho suficiente para entender com clareza o fenómeno da partição de tensões. Contudo, é no âmbito dos escoamentos atmosféricos que mais se tem procurado caracterizar a partição da tensão de arrastamento total (Raupach 1992, Wolfe & Nickling 1996, Crawley & Nickling 2003, Li & Shao 2003, Gillies *et al.* 2007).

Uma teoria muito simples foi proposta por Raupach (1992) para avaliar a repartição de tensões totais provocadas pelo vento sobre as copas das árvores. Esta teoria baseou-se na ideia de que as propriedades da esteira e do arrastamento de um elemento isolado podem ser caracterizados pela área e pelo volume abrigados pelo elemento, nos quais as tensões de superfície e as tensões de arrastamento sofrem uma atenuação. A teoria de Raupach é baseada em parâmetros físicos e apesar de ter sido desenvolvida para os escoamentos atmosféricos pode ser aplicada nos escoamentos hidráulicos. Segundo Raupach (1992), a relação entre a tensão que actua no leito e a tensão total é dada por

$$\frac{\tau_b}{\tau_T} = \frac{1}{1 + \beta_T \lambda} \tag{3.2}$$

onde $\beta_T = C_R/C_f$ traduz a relação entre os coeficientes de arrastamento de um elemento de rugosidade isolado e da superfície e λ representa a densidade dos elementos sólidos, que é definida como:

$$\lambda = \frac{N l_1 l_2}{A_s} \tag{3.3}$$

em que N é o número de elementos de rugosidade na superfície total do solo A_S e l_1 e l_2 são, respectivamente, a largura média e a altura submersa desses elementos. Raupach (1992) recomenda que os valores do coeficiente de arrastamento dos elementos isolados, C_R, sejam consultados numa colectânea publicada em 1988 por Taylor que apresenta coeficientes para diversos tipos de elementos. Em relação ao coeficiente de arrastamento do fundo, $C_f = (u_*/U_h)^2$ (u_* - velocidade de atrito; U_h - velocidade de referência do vento) é estimado a partir da lei da parede para superfícies lisas. Segundo a teoria de Raupach (1992), a partição da tensão é insignificante quando o valor de λ é superior a um valor no intervalo de 0.03 a 0.1, uma vez que nesse caso a relação $\left\langle \overline{f_x} \right\rangle / \tau_T$ é praticamente igual à unidade.

Li & Shao (2003) desenvolveram um modelo computacional de dinâmica de fluidos para estudar a partição da tensão de arrastamento dos escoamentos atmosféricos sobre elementos rugosos como a copa das árvores. As soluções numéricas encontradas foram comparadas com as teorias de alguns investigadores, entre os quais, Raupach (1992). Apesar das soluções encontradas por Li & Shao (2003) não se afastarem muito dos resultados de outros investigadores, este trabalho indica que a altura das plantas e a sua distribuição espacial devem ser considerados como factores que afectam a partição da tensão de arrastamento. Mais recentemente, Gillies *et al.* (2007) também testou a teoria desenvolvida por Raupach (1992), usando um conjunto de ensaios de campo em que mediu as duas componentes da tensão de arrastamento na sub-camada atmosférica inercial para diferentes formas e densidades dos elementos de rugosidade. Gillies *et al.* (2007) verificou que teoria testada se ajusta razoavelmente aos seus resultados, mas sugere que para além da densidade das plantas também a sua porosidade e flexibilidade podem influenciar a componente da tensão de arrastamento exercida nas plantas, e consequentemente a partição da tensão total.

Thompson *et al.* (2004) utilizou elementos rígidos, emersos, com várias formas idealizadas (cilindros e prismas) e com várias densidades para estudar a partição da tensão nos escoamentos hidráulicos em canais com vegetação. Este estudo experimental baseou-se na teoria desenvolvida por Raupach (1992) e nas medições laboratoriais das tensões nos elementos de rugosidade e no fundo do canal com anemometria de fio quente. Neste trabalho o coeficiente de arrastamento de cada elemento foi determinado por:

$$C_R = \frac{2F_R}{\rho^{(w)}U^2 A_R} \tag{3.4}$$

em que F_R é a força de arrastamento, $\rho^{(w)}$ é a densidade da água, U é a velocidade média do escoamento e A_R é a área do objecto projectada para montante. Para calcular o coeficiente de arrastamento da superfície do fundo do canal, neste estudo, recorreu-se à expressão

$$C_f = \frac{\tau_b\prime}{\rho U^2} \tag{3.5}$$

onde $\tau_b\prime = \rho^{(w)}gRS$, em que R é o raio hidráulico do canal e S é o gradiente hidráulico, corresponde à tensão no fundo de um canal sem vegetação com os mesmos gradiente hidráulico e altura do escoamento que o canal com vegetação. Com base nestas expressões Thompson *et al.* (2004) apresentou a equação

$$C_f = 0.0016Q^{-0.2266} \tag{3.6}$$

como uma boa aproximação para estimar o coeficiente de arrastamento da superfície em função do caudal escoado. Thompson *et al.* (2004) verificou que os seus resultados eram razoavelmente representados pela teoria de Raupach e concluiu que não é necessário uma grande cobertura do solo pela vegetação para reduzir significativamente a tensão que actua nas partículas do solo.

Assim, com base na teoria de Raupach (1992), conclui-se que para determinar a partição de tensões de arrastamento nos escoamentos em zonas com vegetação emersa, é imperativo saber calcular os coeficientes de resistência do fundo, C_f e das hastes, C_R. Neste trabalho, mantendo o essencial da teoria de Raupach (1992), que consiste na consideração de uma partição linear da tensão de arrastamento nas duas componentes indicadas, abandonou-se o formalismo da equação (3.2). Nas secções seguintes apresentam-se os fundamentos necessários para determinar a resistência ao escoamento em leitos com e sem vegetação. Salienta-se que, no que respeita ao arrastamento junto ao fundo, o trabalho cingir-se-á a fronteiras lisas ou de transição, em relação à rugosidade do grão.

3.2 Resistência associada ao fundo

Nesta secção vai estuda-se a resistência ao escoamento de leitos sem vegetação com camada limite completamente desenvolvida. Por camada limite entende-se a região onde se manifestam os efeitos do fundo, induzidos pela condição de não escorregamento. Esta camada vai continuamente aumentando de espessura ao longo do escoamento, considerando-se completamente desenvolvida quando atinge a superfície livre.

No que respeita à rugosidade das fronteiras dos escoamentos, estas classificam-se em hidraulicamente lisas, de transição ou hidraulicamente rugosas (Monin & Yaglom 1971, pp. 288 e 289, Brederode 1997, pp. 283-291) em função do valor do número de Reynolds característico da rugosidade, Re_*, que se define

$$Re_* = \frac{u_* k_s}{\nu^{(w)}} \tag{3.7}$$

onde $u_* = \sqrt{\tau_b/\rho^{(w)}}$ é a velocidade de arrastamento junto ao fundo (ou velocidade de atrito), τ_b é a tensão de arrastamento no fundo, definida como a força que o escoamento exerce sobre o fundo por unidade de área em planta, k_s é a escala geométrica dos elementos rugosos (também designada de rugosidade equivalente de Nikuradse) e $\nu^{(w)}$ é a viscosidade cinemática do fluido. Este parâmetro, Re_*, representa a razão entre duas escalas, a escala dos elementos de rugosidade, k_s, e a escala da sub-camada viscosa. A sub-camada viscosa é a camada sobre a fronteira onde se fazem sentir os efeitos da viscosidade. A espessura da sub-camada viscosa é estimada por $\delta_\nu = 11.3\frac{\nu^{(w)}}{u_*}$.

Para valores de $Re_* < 5$, a fronteira diz-se hidraulicamente lisa. Neste tipo de escoamento, devido à reduzida dimensão dos elementos de rugosidade relativamente à espessura da sub-camada viscosa, estes encontram-se contidos na sub-camada viscosa e o escoamento comporta-se como se se desenvolvesse ao longo de uma superfície lisa (Figura 3.1). A força exercida sobre o fundo é exclusivamente de natureza viscosa.

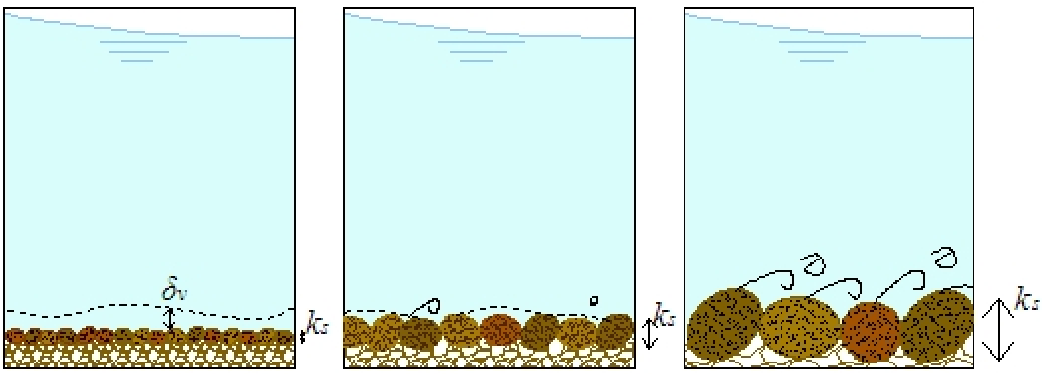


Figura 3.1: Esquerda: Representação de uma fronteira hidraulicamente lisa, sobre a qual se consegue identificar uma sub-camada viscosa de espessura δ_ν e onde a influência da rugosidade do grão é desprezável para a determinação da resistência ao escoamento. Centro: Fronteira de transição onde a sub-camada viscosa está presente em grande parte da área da fronteira e onde os elementos rugosos têm influência não desprezável. Direita: Fronteira hidraulicamente rugosa onde a produção de turbulência e a resistência ao escoamento são influenciados pela dimensão dos elementos rugosos.

Uma fronteira considera-se hidraulicamente rugosa quando $Re_* > 70$. Neste caso, os elementos de rugosidade têm dimensões muito superiores à escala geométrica da viscosidade (Figura 3.1). A sub-camada viscosa deixa de existir, sendo os efeitos da viscosidade sentidos apenas numa fina película que envolve os elementos de rugosidade. Existe uma considerável produção de turbulência por efeito de vórtices gerados nas zonas de separação a jusante dos elementos de rugosidade. A força exercida pelo escoamento sobre o fundo deve-se, sobretudo, aos gradientes de pressão entre as zonas de estagnação a montante e as zonas de separação a jusante dos elementos de rugosidade.

Os escoamentos com valores de Re_* entre 5 e 70 encontram-se numa situação intermédia em que a força exercida sobre o fundo depende tanto da viscosidade molecular como da rugosidade de grão. Nestes casos a fronteira é designada como fronteira de transição (Figura 3.1).

Nos leitos hidraulicamente lisos, como não existem heterogeneidades espaciais significativas, os escoamentos podem ser caracterizados pelas RANS. Desta forma a distribuição vertical de tensões tangenciais neste tipo de escoamentos, obtém-se a partir da integração das equações (2.10).

A componente vertical das RANS escreve-se

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} = -g\cos\beta - \frac{1}{\rho^{(w)}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} + \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \tag{3.8}$$

Desprezando as tensões viscosas, por integração vertical da equação (3.8) entre uma cota genérica z e a cota da superfície livre, h, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_z^h \bar{w}\mathrm{d}z - \frac{\partial h}{\partial t}\,\bar{w}|_h + \frac{\partial}{\partial x}\int_z^h \bar{w}\bar{u}\mathrm{d}z - \frac{\partial h}{\partial x}\,(\bar{w}\bar{u})|_h + \left(\bar{w}^2\big|_h - \bar{w}^2\big|_z\right) = -g\cos\beta\,(h-z)$$

$$- \frac{1}{\rho^{(w)}}\left(\bar{p}|_h - \bar{p}|_z\right) - \frac{\partial}{\partial x}\int_z^h \overline{u'w'}\mathrm{d}z - \frac{\partial h}{\partial x}\,\overline{u'w'}\big|_h - \left(\overline{w'^2}\Big|_h - \overline{w'^2}\Big|_z\right) \tag{3.9}$$

Sabendo que o valor médio na vertical entre z e h de uma variável genérica, $[\theta]$, é definido por

$$[\theta] = \frac{1}{h-z}\int_z^h \theta\,\mathrm{d}z \tag{3.10}$$

a equação (3.9) pode escrever-se

$$\underbrace{\frac{\partial\,[\bar{w}]\,(h-z)}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t}\,\bar{w}|_h + \frac{\partial\,[\bar{w}\bar{u}]\,(h-z)}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x}\,(\bar{w}\bar{u})|_h + \left(\bar{w}^2\big|_h - \bar{w}^2\big|_z\right)}_{\mathrm{A}} =$$

$$-\,g\cos\beta\,(h-z) - \frac{1}{\rho^{(w)}}\left(\bar{p}|_h - \bar{p}|_z\right) - \frac{\partial\,\left[\overline{u'w'}\right](h-z)}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x}\,\overline{u'w'}\big|_h - \left(\overline{w'^2}\Big|_h - \overline{w'^2}\Big|_z\right) \tag{3.11}$$

Como a média temporal da componente vertical da velocidade apresenta valores relativamente pequenos, pode considerar-se que $\bar{w}^2\big|_z$ é desprezável quando comparado com os outros termos da equação. Sendo α_m o coeficiente que expressa a relação entre a média do produto de duas variáveis e o produto da média de cada variável, pode escrever-se

$$[\bar{w}\bar{u}] = \alpha_m [\bar{w}] [\bar{u}] \tag{3.12}$$

Com estas hipóteses e admitindo que $[\bar{w}] = 0$, o lado esquerdo da equação (3.11) escreve-se

$$A = -\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\, \bar{u}|_h - \bar{w}|_h\right) \bar{w}|_h \tag{3.13}$$

Dado que a condição de fronteira cinemática corresponde a

$$\bar{w}|_h = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\, \bar{u}|_h \tag{3.14}$$

conclui-se que o lado esquerdo da equação (3.11) é nulo ($A = 0$).

Em relação ao lado direito da equação (3.11), pode afirmar-se que a intensidade turbulenta vertical é desprezável quando comparada com o termo gravítico, pelo que se pode considerar $\left(\overline{w'^2}\Big|_h - \overline{w'^2}\Big|_z\right) \approx 0$. E no que respeita às tensões de Reynolds, considera-se que estas são nulas à superfície e que a sua média na coluna de água não varia significativamente na direcção longitudinal. Assim, $\overline{w'u'}\big|_h = 0$, $\frac{\partial \left[\overline{u'w'}\right](h-z)}{\partial x} \approx 0$ e a equação (3.11) vem

$$0 = -g \cos\beta\,(h - z_0) + \frac{1}{\rho^{(w)}}\, \bar{p}|_z \tag{3.15}$$

Com a equação anterior conclui-se que a integração na direcção vertical da componente vertical das RANS, com as condições apresentadas, conduz à distribuição hidrostática de pressões

$$\bar{p}(z) = \rho^{(w)} g \cos\beta\,(h - z) \tag{3.16}$$

A componente longitudinal das RANS para escoamentos permanentes é expressa por

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = g\sin\beta - \frac{1}{\rho^{(w)}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} + \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial x} + \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z \partial z} \tag{3.17}$$

Introduzindo na equação anterior o resultado da derivação a equação (3.16) em ordem a x, resulta

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = g\left(\sin\beta - \cos\beta\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} + \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial x} + \nu^{(w)}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z \partial z} \tag{3.18}$$

Como resultado da integração da equação (3.18), na vertical entre z e h, e considerando que a componente vertical da velocidade média é desprezável, vem

$$\frac{\partial [\bar{u}]^2 h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x}\, \bar{u}^2\big|_h + \bar{w}\bar{u}|_h = g\left(\sin\beta - \cos\beta\frac{\partial h}{\partial x}\right)(h - z) - \frac{\partial \left[\overline{u'^2}\right] h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x}\, \overline{u'^2}\Big|_h$$
$$- \left(\overline{u'w'}\big|_h - \overline{u'w'}\big|_z\right) + \frac{\partial}{\partial x}\int_z^h \nu^{(w)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\mathrm{d}z + \frac{\partial h}{\partial x}\left(\nu^{(w)}\, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\bigg|_h\right) + \nu^{(w)}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\bigg|_h - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\bigg|_z\right) \tag{3.19}$$

Com a introdução da condição de fronteira cinemática para o regime permanente, $\left(\bar{w}|_h = \frac{\partial h}{\partial x}\,\bar{u}|_h\right)$ e considerando desprezável a variação longitudinal do fluxo de quantidade de movimento por unidade de largura e por unidade de massa, o lado esquerdo da equação (3.19) torna-se nulo. Em comparação com a aceleração gravítica, a intensidade turbulenta na direcção longitudinal apresenta valores muito pequenos, pelo que se podem desprezar os termos $\frac{\partial \left[\overline{u'^2}\right] h}{\partial x}$ e $\frac{\partial h}{\partial x}\,\overline{u'^2}\Big|_h$. Na hipótese de escoamento quase uniforme, a variação longitudinal da velocidade longitudinal é muito pequena, pelo que $\frac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_z^h \nu^{(w)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\mathrm{d}z$ e $\frac{\partial h}{\partial x}\left(\nu^{(w)}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\Big|_h\right)$ se consideram desprezáveis. Admite-se também que, na superfície livre, a tensão de Reynolds e a derivada, em z, da componente longitudinal da velocidade são nulas. Com base em todas as hipóteses apresentadas, a equação (3.19) pode escrever-se

$$g\left(\sin(\beta) - \cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}\right)(h-z) = -\,\overline{u'w'}\big|_z + \nu^{(w)}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\bigg|_z \tag{3.20}$$

ou na forma

$$\rho^{(w)} gJh\left(1 - \frac{z}{h}\right) = \tau\left(z\right) \tag{3.21}$$

sendo $J = \left(\sin(\beta) - \cos(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}\right)$ a perda de carga unitária, $\tau\left(z\right)$ a tensão de corte ao longo da coluna de água e as restantes variáveis têm o significado apresentado anteriormente. Num escoamento com superfície livre, bidimensional, quase uniforme, com a fronteira fixa e hidraulicamente lisa e com a camada limite desenvolvida, o perfil vertical das tensões de corte, no centro do canal, é dado por (Pope 2000, pp. 266 e 267):

$$\tau\left(z\right) = -\rho^{(w)}\overline{u'w'} + \mu^{(w)}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \tag{3.22}$$

Sendo a tensão tangencial junto ao fundo definida por $\tau\left(0\right) \equiv \tau_b = \rho^{(w)}u_*^2$, também se pode escrever

$$\frac{\tau\left(z\right)}{\rho^{(w)}} = u_*^2\left(1 - \frac{z}{h}\right) \tag{3.23}$$

A Figura 3.2 apresenta os perfis adimensionais das tensões tangenciais de Reynolds (c), viscosas (a) e totais (g) medidos por Cameron & Nikora (2008) num escoamento uniforme com fronteira hidraulicamente lisa. Os dados apresentados na Figura 3.2 provam que o perfil de tensões de corte tem um andamento linear e que as tensões viscosas apenas são relevantes na proximidade da fronteira. Repare-se que o valor da tensão de arrastamento no fundo, τ_b, pode ser determinado através da intersecção de uma recta ajustada às tensões de Reynolds com o plano do leito.

Para a derivação de perfis de velocidade é frequente utilizar um modelo proposto por Prandtl em 1930 (Schlichting 1968, pp. 554 e 555, Pope 2000, p. 367). O modelo de Prandtl recorre ao conceito de comprimento de mistura, ℓ (*mixing length* na literatura inglesa) que é definido como a dimensão dos vórtices que promovem a mistura entre os movimentos mais rápidos e mais lentos do fluido, na direcção longitudinal e transversal. O comprimento de mistura varia com a distância ao fundo do canal e, na região interior, pode ser aproximado por

$$\ell \approx \kappa z \tag{3.24}$$

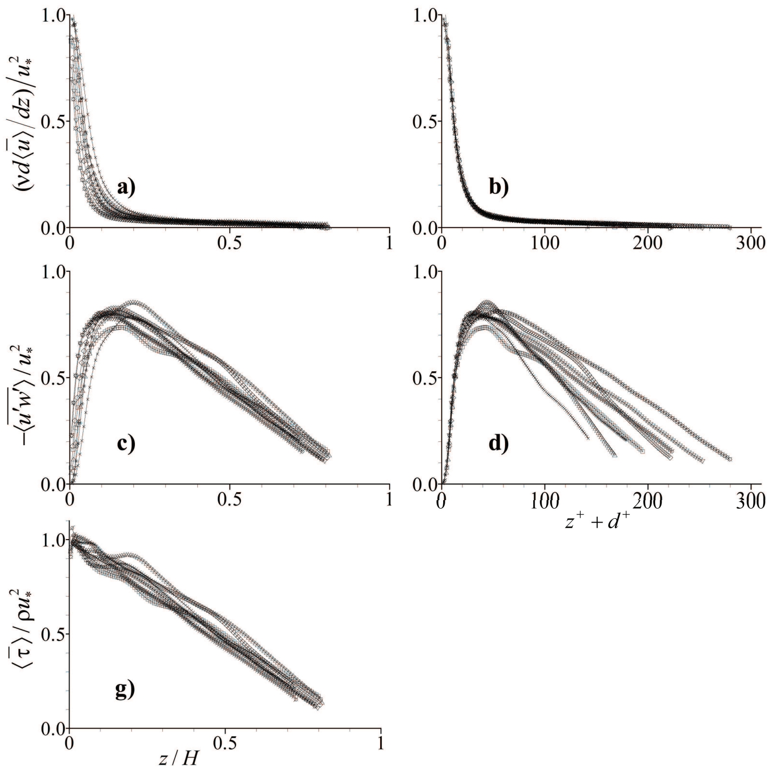


Figura 3.2: Distribuição das tensões viscosas (a) e b)), de Reynolds (c) e d)) e totais (g)) medidos por Cameron & Nikora (2008) num escoamento uniforme com fronteira hidraulicamente lisa

em que $\kappa = 0.41$ é a constante de von Kármán. Note-se que nos escoamento turbulentos com superfície livre e fronteira fixa considera-se a coluna água dividida em três regiões, a interior, a intermédia e a exterior (Nezu & Nakagawa 1993, pp. 19 e 20). A região interior, junto à fronteira, corresponde à região onde a estrutura do escoamento se relaciona directamente com a tensão de arrastamento junto ao fundo (τ_b). Na região exterior as características do escoamento são fortemente afectadas pela superfície livre e a influência de τ_b é apenas indirecta (ver Figura 3.3). A região intermédia corresponde à região entre as duas anteriores e nela as características do escoamento são afectadas pelo fundo e pela superfície livre. Nos escoamentos com fronteira hidraulicamente lisa, a região interior é frequentemente dividida em três sub-regiões: sub-camada viscosa, sub-camada intermédia e sub-camada logarítmica.

Segundo o modelo de Prandtl, as tensões de Reynolds são modeladas por

$$-\rho^{(w)}\overline{u'w'} \equiv \mu^{(t)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = l^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \tag{3.25a}$$

$$\mu^{(t)} = \ell^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{3.25b}$$

onde $\mu^{(t)} = \rho^{(w)}\nu^{(t)}$ é o coeficiente de viscosidade turbulenta.

Introduzindo a premissa de Prandtl na (3.23) obtém-se

$$\ell^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right| + \nu^{(w)}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2\left(1 - \frac{z}{h}\right) \tag{3.26}$$

A solução numérica desta equação conduz ao perfil vertical de velocidades longitudinais. Facilmente se percebe que a equação (3.26) apresenta um problema de múltiplas escalas inerente à subdivisão do escoamento nas várias camadas, pelo que a sua solução junto à fronteira é diferente da solução nas camadas superiores.

Para a região interior, onde $\frac{z}{h} \ll 1$ a equação (3.26) escreve-se

$$(\kappa z)^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| + \nu^{(w)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 \tag{3.27a}$$

$$\kappa^2 \frac{z}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| + \frac{\nu^{(w)}}{z u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{z} \tag{3.27b}$$

Na sub-camada viscosa $z \sim \frac{\nu^{(w)}}{u_*}$ e $\frac{z}{h} \frac{h}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \ll 1$. Assim, nesta sub-camada, o termo das tensões viscosas é dominante e a equação (3.27) vem

$$\frac{\nu^{(w)}}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_* \tag{3.28}$$

Integrando esta equação entre a cota $z = 0$ e uma cota genérica z, obtém-se o perfil vertical da velocidade longitudinal na sub-camada viscosa

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu^{(w)}} \tag{3.29}$$

Com o afastamento em relação à fronteira, o efeito das tensões viscosas vai diminuindo. No topo da camada interior, onde $z \gg \frac{\nu^{(w)}}{u_*}$, a relação $\frac{\nu^{(w)}}{u_* z}$ tende para zero e o termo das tensões de Reynolds torna-se dominante. Assim, na camada logarítmica a equação (3.27) escreve-se

$$\kappa z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_* \tag{3.30}$$

O perfil vertical de velocidade longitudinal nesta camada resulta da integração da equação anterior entre a cota $z = 0$ e uma cota genérica z, e é expresso por

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* z}{\nu^{(w)}} \right) + B \tag{3.31}$$

onde B é uma constante que depende do número de Reynolds. Esta constante pode ser determinada teoricamente ou experimentalmente, e é consensual que em escoamentos fortemente turbulentos sobre fronteiras lisas a constante B é aproximadamente igual a 5.3. Ferreira (2005, p. 165) apresenta os detalhes da determinação teórica do valor de B. Na Figura 3.3 apresenta-se o perfil vertical da velocidade longitudinal nas várias camadas em que se divide a coluna de água.

Nos casos em que a fronteira do escoamento é uma fronteira de transição, por exemplo quando o leito é composto por areia, a rugosidade do grão pode introduzir um efeito considerável no escoamento embora o efeito da viscosidade possa não ser considerado desprezável. Assim, a distribuição vertical de velocidades para considerar estes dois efeitos é dada por

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z u_*}{\nu^{(w)}} \right) + B'' \tag{3.32}$$

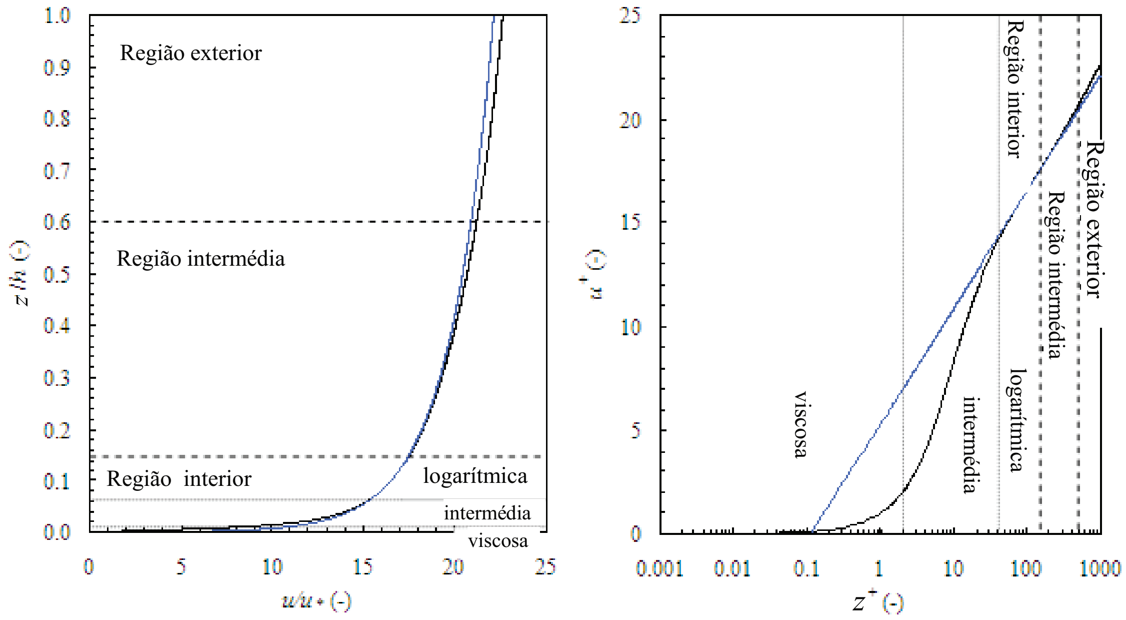


Figura 3.3: Distribuição vertical da velocidade longitudinal num escoamento quase uniforme com fronteira hidraulicamente lisa, ao longo das várias regiões em que se divide a coluna de água.

onde B'' é uma constante que depende da relação $Re_* = \frac{u_* k_s}{\nu^{(w)}}$ (Schlichting 1968, p. 585) e que se pode determinar a partir do gráfico apresentado na Figura 3.4.

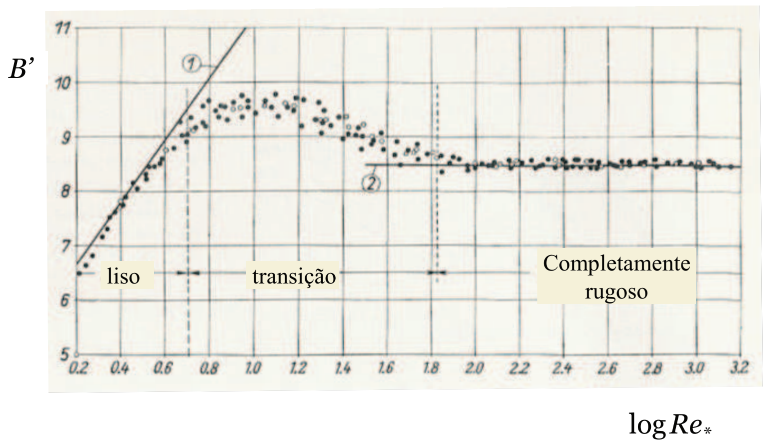


Figura 3.4: Variação da constante aditiva $B' = B'' + \frac{1}{\kappa}\ln(Re_*)$ com $\log Re_*$ de acordo com as experiências de Nikuradse (adaptada de Schlichting 1968, p. 583).

Nos escoamentos com fronteira hidraulicamente lisa ou de transição a tensão de arrastamento no fundo, τ_b, pode retirar-se directamente da distribuição vertical de velocidades longitudinais junto ao fundo, uma vez que

$$\tau_b = \rho^{(w)} u_*^2 = \mu^{(w)} \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{3.33}$$

No entanto, determinar a distribuição vertical de velocidades longitudinais junto ao fundo é pouco prático e geralmente dispõe-se apenas da velocidade média na secção. Assim, para calcular a tensão de arrastamento no fundo, torna-se necessário encontrar formas de estimar o coeficiente de arrastamento no fundo, C_f.

Para obter uma estimativa do coeficiente de arrastamento C_f há que integrar verticalmente o perfil de velocidades de modo a obter o seu valor médio, uma vez que

$$[\bar{u}] = \frac{1}{h - h_0} \int_{h_0}^{h} \bar{u} \, \mathrm{d}z \tag{3.34}$$

em que h_0 corresponde à cota a partir da qual o perfil vertical da velocidade longitudinal passa a ser descrito pela lei logarítmica.

Aplicando a definição anterior à equação (3.32) vem

$$\begin{aligned}
\frac{[\bar{u}]}{u_*} &= \frac{1}{h - h_0} \int_{h_0}^{h} \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* z}{\nu^{(w)}} \right) + B'' \right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{h - h_0} \left[\frac{1}{\kappa} \left(h \ln(h) - h - h_0 \ln(h_0) + h_0 - \ln \left(\frac{\nu^{(w)}}{u_*} \right) (h - h_0) \right) + B'' (h - h_0) \right] \\
&= \frac{h}{h - h_0} \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h u_*}{\nu^{(w)}} \right) + \left(B'' - \frac{1}{\kappa} \right) + \frac{1}{h - h_0} \frac{1}{\kappa} \left(h_0 \ln h_0 + h_0 \ln \left(\frac{\nu^{(w)}}{u_*} \right) \right)
\end{aligned}$$

Sendo $h_0 \ll (h - h_0)$ um valor muito próximo de zero e sendo, pela regra de l'Hopital, $\lim_{h_0 \to 0} h_0 \ln(h_0) = 0$, os últimos dois termos da última linha da equação anterior desaparecem e o valor médio na coluna de água da velocidade longitudinal é dado por

$$[\bar{u}] = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h u_*}{\nu^{(w)}} \right) + B'' - \frac{1}{\kappa} \right) \tag{3.35}$$

A tensão de arrastamento no fundo pode ser traduzida pela expressão

$$\tau_b = \frac{1}{2} \rho^{(w)} C_f \, [\bar{u}]^2 \tag{3.36}$$

e, como já foi referido, define-se $\tau_b = \rho^{(w)} u_*^2$, pelo que o coeficiente de arrastamento no fundo é dado por

$$C_f = 2 \left(\frac{u_*}{[\bar{u}]} \right)^2 \tag{3.37}$$

Substituindo nesta definição do C_f a equação (3.35) obtém-se

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{[\bar{u}]}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h u_*}{\nu^{(w)}} \right) + B'' - \frac{1}{\kappa} \tag{3.38}$$

Até aqui a análise recaiu apenas sobre os escoamentos uniformes pelo que, de seguida, se apresenta uma breve descrição dos perfis de velocidades e de tensões de Reynolds em escoamentos gradualmente variados.

Nos escoamentos não uniformes o gradiente de pressões afecta a distribuição de velocidades na região exterior e a distribuição de tensões tangenciais, como se ilustra na Figura 3.5. Neste caso, as tensões tangenciais, que deixam de ter um perfil linear porque $\left.\overline{w'^2}\right|_z$

e $\overline{w}|_z$ não são desprezáveis nas equações (3.11) e (3.19) (Graf 1998, pp. 49 e 50). Por conveniência de notação, escreve-se a equação (3.21) como

$$\tau\,(z) = \tau_b + \left(\frac{\partial p^*}{\partial x}\right) z \tag{3.39}$$

em que $p^* = p + \rho^{(w)} g z$ representa a energia potencial por unidade de massa e p é a pressão isotrópica. Assim, se o gradiente de pressões for positivo $\left(\frac{\partial p^*}{\partial x}\right) > 0$ o escoamento é desacelerado e o perfil de tensões apresenta uma forma convexa, enquanto que se o gradiente de pressões for negativo $\left(\frac{\partial p^*}{\partial x}\right) < 0$ a forma do perfil de tensões será côncava, correspondendo a um escoamento acelerado.

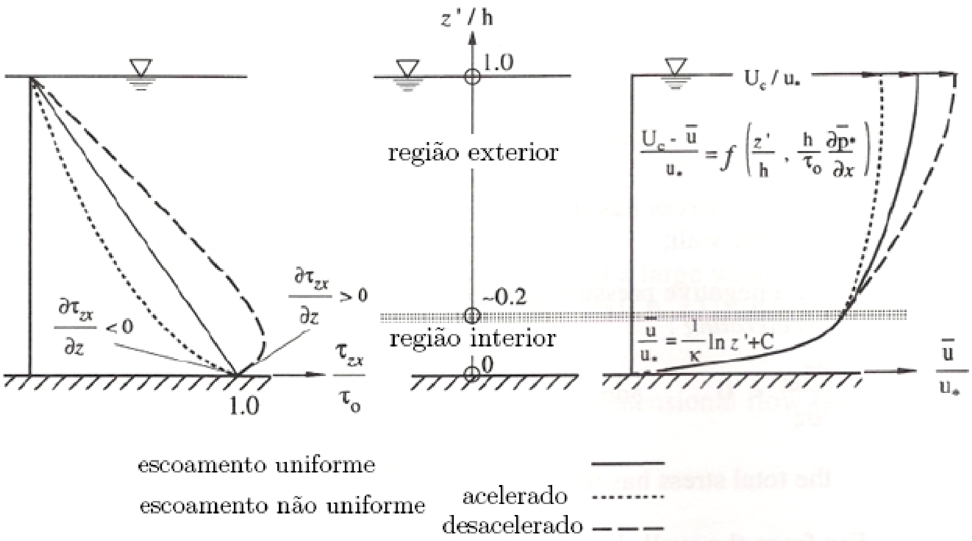


Figura 3.5: Distribuição das tensões de corte e da velocidade em escoamentos gradualmente variados (adaptado de Graf 1998, p. 49).

A distribuição de velocidades longitudinais só é afectada na região exterior do escoamento. Neste caso, é especialmente importante corrigir as equações (3.31) e (3.32) adicionando-lhes o termo (Nezu & Nakagawa 1993, p. 16)

$$V_*^{(c)}(z) = \frac{2\Pi}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\Pi z}{2h}\right) \tag{3.40}$$

em que Π é o parâmetro de Coles. O valor do parâmetro Π de Coles, em geral, aumenta com a aceleração convectiva do escoamento.

3.3 Resistência associada às hastes

3.3.1 Coeficiente de resistência ao escoamento em leitos com vegetação

A definição das equações de resistência hidráulica num canal com vegetação requer que se conheça o coeficiente de arrastamento das hastes das plantas (Maheshwari 1992). No entanto, as tradicionais equações de resistência baseadas em coeficientes de rugosidade empíricos, como as equações de Chezy, Darcy-Weisbach ou Manning-Strickler não são adequadas para a aplicação no caso de leitos vegetados devido à complexidade das formas geométricas da vegetação (Maheshwari 1992, Thompson & Wilson 2002) e devido ao facto destas equações assumirem que a resistência ao escoamento provém, principalmente, da tensão de corte junto ao fundo e não da tensão de arrastamento em toda a coluna de água (Kadlec 1990, James *et al.* 2004).

A previsão dos efeitos da vegetação aquática na resistência dos escoamentos é de extrema importância na gestão dos sistemas fluviais para definir medidas de intervenção nos rios que garantam a eficiência hidráulica sem comprometer a diversidade ecológica e a valia paisagística (Järvelä 2002, Green 2006). No entanto, as interacções entre o escoamento e a vegetação são fenómenos muito complexos, que dependem das características da vegetação, do curso de água e do regime de escoamento.

Nas últimas décadas, motivados pelas crescentes preocupações ambientais, têm sido levados a cabo muitos trabalhos de investigação para compreender a influência da presença da vegetação nos cursos de água. Algumas publicações basearam-se em trabalhos de campo nos quais se efectuaram medições em situações naturais (Petryk & Bosmajian 1975, Kadlec 1990, Lee *et al.* 2004, Green 2005a, Wang & Wang 2007, Nikora *et al.* 2008), mas a maioria dos trabalhos baseiam-se em ensaios laboratoriais com vegetação flexível (Fathi-Maghadam & Kouwen 1997, Nepf & Vivoni 1999, Righetti & Armanini 2002, Stephan & Gutknecht 2002, Järvelä 2002, Wilson *et al.* 2003, Carollo *et al.* 2005, Kirby *et al.* 2005, Järvelä 2005, James *et al.* 2008) ou com vegetação rígida (Li & Shen 1973, Nepf 1999, Fischer-Antze *et al.* 2001, Stone & Shen 2002, Järvelä 2002, Ghisalberti & Nepf 2004, James *et al.* 2004, Järvelä 2004, Serra *et al.* 2004, Defina & Bixio 2005, Armanini *et al.* 2005, Huthoff *et al.* 2006, White & Nepf 2008, Tanino & Nepf 2008). Existem também alguns estudos apenas computacionais (Howells 1974, Koch & Ladd 1997, Lopez & García 1998, Lopez & Garcia 2001, Neary 2003) ou teóricos que enumeram vários modelos apresentando os seus domínios de aplicação e as suas limitações (Maheshwari 1992, Yen 2002, Green 2005b).

Do ponto de vista da engenharia fluvial a preocupação no estudo da resistência ao escoamento induzido pela presença de vegetação nos cursos de água (principalmente nos leitos de cheias) deve-se à necessidade de estimar a altura de água com o máximo de rigor possível.

O estudo da resistência dos escoamentos passa sempre por determinar um coeficiente de resistência, que pode ser obtido de diversas formas. Muitos trabalhos foram desenvolvidos com o objectivo de estimar coeficientes de resistência como o de Manning, de Chezy ou de Darcy-Weisbach para resolver o problema da resistência ao escoamento com base nas expressões matemáticas convencionais para a resistência ao escoamento devido ao arrastamento no fundo (Petryk & Bosmajian 1975, Kadlec 1990, Wu *et al.* 1999, Lopez & Garcia 2001, Nikora *et al.* 2008).

Enquanto que outros separam arrastamento global do escoamento no arrastamento devido às vegetação e devido ao fundo, e como o arrastamento no fundo é um tema conhecido, concentram-se essencialmente em determinar um coeficiente de arrastamento devido à presença de vegetação com base em ensaios laboratoriais . Na maioria dos estudos, este coeficiente de arrastamento é determinado com base na hipótese de que a força de arrastamento é apenas equilibrada pela força de pressão, que é a expressão da força gravítica (Nepf 1999, Stone & Shen 2002, Järvelä 2004, Defina & Bixio 2005, Tanino & Nepf 2008).

Apesar de na literatura se encontrarem várias expressões para determinar a força de arrastamento, a maioria delas são muito semelhantes apresentada por Nepf (1999), diferindo ligeiramente na definição das variáveis (Maheshwari 1992, Lopez & García 1998, Wu *et al.* 1999, Fischer-Antze *et al.* 2001, Zang & Zhou 2001, Righetti & Armanini 2002, Stone & Shen 2002, White & Nepf 2003, Ghisalberti & Nepf 2004, Järvelä 2004, James *et al.* 2004, Lee *et al.* 2004, White & Nepf 2008):

$$\mathcal{F}_D = \frac{1}{2}\rho^{(w)} a C_D U^2 \tag{3.41}$$

onde $\mathcal{F}_D$ é a força de arrastamento por unidade de volume de fluido devido à vegetação, C_D é o coeficiente de arrastamento do conjunto de elementos de vegetação em causa, U é a velocidade média do escoamento e a é a área de vegetação projectada no plano normal ao escoamento por unidade de volume, o que corresponde a uma medida da densidade da vegetação. Se as hastes das plantas forem modeladas como cilindros emergentes, o parâmetro a é definido por Nepf (1999), como

$$a = nd = \frac{dh}{\Delta S^2 h} = \frac{d}{\Delta S^2} \tag{3.42}$$

em que n representa o número de hastes por unidade de área, ΔS é o espaçamento médio entre hastes, d é o diâmetro das hastes e $h \equiv \langle \bar{h} \rangle$ é altura do escoamento.

O problema da determinação de um coeficiente de rugosidade para descrever a resistência exercida pela vegetação relaciona-se com o facto de cada tipo de vegetação exercer uma resistência ao escoamento diferente e com o facto de a resistência variar com as alterações da altura do escoamento (Stone & Shen 2002). Assim, a relação entre o coeficiente de rugosidade e a altura do escoamento, em canais vegetados, é muito variável e não linear (Thompson & Wilson 2002).

Como os cursos de água com vegetação apresentam grande heterogeneidade espacial é mais adequado que a caracterização da resistência hidráulica seja avaliada com base em médias temporais e espaciais (Ghisalberti & Nepf 2004, Righetti & Armanini 2002, Nikora *et al.* 2008, Tanino & Nepf 2008, White & Nepf 2008), ou seja, com base na DAM apresentada anteriormente.

Assim, para caracterizar o arrastamento adicional devido à presença da vegetação no escoamento pode definir-se o coeficiente de arrastamento médio espacial e temporal pela seguinte expressão (Tanino & Nepf (2008))

$$C_R = \frac{\langle \overline{f_D} \rangle}{\rho^{(w)} U^2 \langle d \rangle / 2} \tag{3.43}$$

onde $\langle d \rangle \equiv d$ é a largura característica das hastes das plantas, $\left\langle \overline{f_D} \right\rangle = \frac{\mathcal{F}_D d}{a}$ é a força de arrastamento média na direcção do escoamento por unidade de comprimento de haste submersa. Esta força é calculada pela seguinte expressão:

$$\left\langle \overline{f_D} \right\rangle = \frac{\left\langle \overline{f_x} \right\rangle}{nh} \tag{3.44}$$

na qual $\left\langle \overline{f_x} \right\rangle$ é a força de arrastamento exercida nas hastes por unidade de área de hastes projectada no plano horizontal, na direcção longitudinal, determinada pela resolução da equação da conservação da quantidade de movimento nessa direcção (ver equação 3.1).

A força $\left\langle \overline{f_x} \right\rangle$ é calculada pela soma das várias componentes da equação que surgem da integração das DANS na direcção longitudinal. Assim, estão a considerar-se todas as forças intervenientes no escoamento e não apenas a força gravítica, o que conduz a uma melhor estimativa do coeficiente de arrastamento. A dedução da força $\left\langle \overline{f_x} \right\rangle$ apresenta-se na secção seguinte.

3.3.2 Integração vertical das DANS

Com o objectivo de determinar a distribuição vertical de pressões, integrar-se-á, segundo a direcção z, a componente vertical das DANS (eq. 2.30). Como apenas foram medidas as componentes longitudinal e vertical da velocidade, assumiu-se que a velocidade na direcção y é nula ($v = 0$). Assim, a equação (2.30) segundo a direcção vertical, para um escoamento permanente, escreve-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \bar{w} \rangle \langle \bar{u} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \bar{w} \rangle^2}{\partial z} = -g \cos\beta - \frac{1}{\psi \rho^{(w)}} \frac{\partial \psi \langle \bar{p} \rangle}{\partial z} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \left\langle \nu^{(w)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right\rangle \right) \\
+ \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi \left\langle \nu^{(w)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\rangle \right) - \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi \left\langle \overline{w'u'} \right\rangle}{\partial x} - \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle}{\partial z} - \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi \langle \tilde{w}\tilde{u} \rangle}{\partial x} - \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi \langle \tilde{w}^2 \rangle}{\partial z} - \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{pz}^{(A,s)} \\
- \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{pz}^{(B,s)} - \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{pz}^{(C,s)} - \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{vz}^{(A,s)} - \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{vz}^{(B,s)} - \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{vz}^{(C,s)} - \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{pz}^{(A,b)} - \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{vz}^{(A,s)}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

onde

$$I_{pz}^{(i,k)} = -\frac{\delta^{(i)}}{\forall_f^{(i)}} \int_{S_{int}^{(k)}} \bar{p} n_z \mathrm{d}S$$

e

$$I_{vz}^{(i,k)} = \frac{\delta^{(i)}}{\forall_f^{(i)}} \int_{S_{int}^{(k)}} \left(\mu^{(w)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} n_x + \mu^{(w)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} n_z \right) \mathrm{d}S$$

representam, respectivamente, uma força pressão e uma força viscosa por unidade de volume na direcção vertical. Nestas definições o sobrescrito $i = A$, B, C indica a camada onde a força actua e o sobrescrito $k = s$, b diz respeito à fronteira (hastes ou fundo).

Na equação (3.45) as forças, por unidade de volume, de pressão e viscosas nas hastes são nulas uma vez que não existe componente de $S_{int}^{(s)}$ segundo a direcção n_z porque as hastes são verticais. Como a viscosidade cinemática do fluido é da ordem de $10^-6 \ll \cos\beta\psi$ desprezam-se os termos de resistência viscosa e as tensões viscosas. Com as hipóteses apresentadas e multiplicando todos os termos por ψ, a equação anterior escreve-se

$$\frac{\partial\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle\left\langle\bar{u}\right\rangle}{\partial x}+\frac{\partial\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle^2}{\partial z}=-g\cos\beta\psi-\frac{1}{\rho^{(w)}}\frac{\partial\psi\left\langle\bar{p}\right\rangle}{\partial z}-\frac{\partial\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\psi\left\langle\overline{w'^2}\right\rangle}{\partial z}$$

$$-\frac{\partial\psi\left\langle\tilde{u}\tilde{w}\right\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\psi\left\langle\tilde{w}^2\right\rangle}{\partial z}-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_p^{(A,b)}+\left\langle\bar{w}\right\rangle^2\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{3.46}$$

A integração desta equação entre uma cota genérica z e a cota da superfície livre $\left\langle\bar{h}\right\rangle$ depende da camada em que se encontra a cota z. Considerou-se que a cota z_{AB} corresponde à cota da fronteira entre as camadas A e B, e que a cota z_{BC} corresponde à cota da fronteira entre as camadas B e C. Assim, título de exemplo, a integração de uma grandeza genérica θ entre z e $\left\langle\bar{h}\right\rangle$, no caso de z ser uma cota da camada A é dada por

$$\int_z^{\langle\bar{h}\rangle}\theta\mathrm{d}z=\int_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\theta\mathrm{d}z+\int_{z_{AB}}^{z_{BC}}\theta\mathrm{d}z+\int_z^{z_{AB}}\theta\mathrm{d}z$$

Na integração da equação (3.46) será aplicada a condição de fronteira cinemática para a superfície livre ($\frac{\partial h}{\partial x}\,u|_h=w|_h$, discussão em Ferreira 2005, pp. 207-211) e a regra de Leibnitz

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\int_a^b\theta\mathrm{d}z=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\xi}\theta\mathrm{d}z+\frac{\partial b}{\partial\xi}\,\theta|_b-\frac{\partial a}{\partial\xi}\,\theta|_a$$

Deste modo, se a cota genérica z se encontrar entre a cota z_{BC} e a superfície livre, a integração da equação (3.46) resulta

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle\left\langle\bar{u}\right\rangle\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\left\langle\bar{h}\right\rangle-z\right)\right)-\left(\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle^2\right)\Big|_z=-g\cos\beta\left[\psi\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\left\langle\bar{h}\right\rangle-z\right)$$

$$+\frac{1}{\rho^{(w)}}\left(\psi\left\langle\bar{p}\right\rangle\right)\big|_z-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\left\langle\bar{h}\right\rangle-z\right)\right)+\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right)\big|_{\langle\bar{h}\rangle}$$

$$-\left(\psi\left\langle\overline{w'^2}\right\rangle\right)\Big|_{\langle\bar{h}\rangle}+\left(\psi\left\langle\overline{w'^2}\right\rangle\right)\Big|_z-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\left\langle\bar{h}\right\rangle-z\right)\right)$$

$$+\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right)\big|_{\langle\bar{h}\rangle}-\left(\psi\left\langle\tilde{w}^2\right\rangle\right)\big|_{\langle\bar{h}\rangle}+\left(\psi\left\langle\tilde{w}^2\right\rangle\right)\big|_z+\left[\left\langle\bar{w}\right\rangle^2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\left\langle\bar{h}\right\rangle-z\right) \tag{3.47}$$

Note-se que além da integração da equação (3.46), a equação anterior resulta de algumas manipulações algébricas, nomeadamente a aplicação da definição (3.10). Para simplificar a expressão que traduz a distribuição vertical de pressões, define-se uma função $\varkappa^{(C)}(x,z)$

que representará o desvio em relação à pressão hidrostática, na camada C. Desta forma, a distribuição de pressões na camada superior é dada por

$$\psi(z)\left\langle \bar{p}\right\rangle(z)=\rho^{(w)}g\cos\beta\left[\psi\right]_{z}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z\right)+\rho^{(w)}\varkappa^{(C)}(x,z) \tag{3.48}$$

onde

$$\begin{aligned}\varkappa^{(C)}(x,z)=&\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_{z}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z\right)\right)-\frac{\partial\left\langle \bar{h}\right\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right)\Big|_{\left\langle \bar{h}\right\rangle}+\left(\psi\left\langle\overline{w'^{2}}\right\rangle\right)\Big|_{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\\&-\left(\psi\left\langle\overline{w'^{2}}\right\rangle\right)\Big|_{z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right]_{z}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z\right)\right)-\frac{\partial\left\langle \bar{h}\right\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right)\big|_{\left\langle \bar{h}\right\rangle}+\left(\psi\left\langle\tilde{w}^{2}\right\rangle\right)\big|_{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\\&-\left(\psi\left\langle\tilde{w}^{2}\right\rangle\right)\big|_{z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle\left\langle\bar{u}\right\rangle\right]_{z}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z\right)\right)-\left(\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle^{2}\right)\Big|_{z}-\left[\left\langle\bar{w}\right\rangle^{2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z\right)\end{aligned} \tag{3.49}$$

Com um procedimento idêntico ao aplicado para camada anterior, após a integração da equação (3.46) quando a cota genérica z se encontra entre as cotas z_{BC} e z_{AB}, obtém-se a seguinte distribuição de pressões

$$\psi(z)\left\langle \bar{p}\right\rangle(z)=\rho^{(w)}g\cos\beta\left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z_{BC}\right)+\rho^{(w)}g\cos\beta\left[\psi\right]_{z}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z\right)+\rho^{(w)}\varkappa^{(B)}(x,z) \tag{3.50}$$

onde

$$\begin{aligned}\varkappa^{(B)}(x,z)=&\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z_{BC}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_{z}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z\right)\right)\\&-\frac{\partial\left\langle \bar{h}\right\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right)\Big|_{\left\langle \bar{h}\right\rangle}+\left(\psi\left\langle\overline{w'^{2}}\right\rangle\right)\Big|_{\left\langle \bar{h}\right\rangle}-\left(\psi\left\langle\overline{w'^{2}}\right\rangle\right)\Big|_{z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z_{BC}\right)\right)\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right]_{z}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z\right)\right)-\frac{\partial\left\langle \bar{h}\right\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right)\big|_{\left\langle \bar{h}\right\rangle}+\left(\psi\left\langle\tilde{w}^{2}\right\rangle\right)\big|_{\left\langle \bar{h}\right\rangle}-\left(\psi\left\langle\tilde{w}^{2}\right\rangle\right)\big|_{z}\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle\left\langle\bar{u}\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z_{BC}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle\left\langle\bar{u}\right\rangle\right]_{z}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z\right)\right)-\left(\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle^{2}\right)\Big|_{z}\\&-\left[\left\langle\bar{w}\right\rangle^{2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z_{BC}}^{\left\langle \bar{h}\right\rangle}\left(\left\langle \bar{h}\right\rangle-z_{BC}\right)-\left[\left\langle\bar{w}\right\rangle^{2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z\right)\end{aligned} \tag{3.51}$$

Se a cota genérica z se encontrar entre o fundo e a cota z_{AB}, a integração da equação

(3.46) conduz à seguinte a distribuição de pressões

$$\psi(z)\left\langle\bar{p}\right\rangle(z)=\rho^{(w)}g\cos\beta\left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\langle\bar{h}\rangle-z_{BC}\right)+\rho^{(w)}g\cos\beta\left[\psi\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z_{AB}\right)$$
$$+\rho^{(w)}g\cos\beta\left[\psi\right]_{z}^{z_{AB}}\left(z_{AB}-z\right)+\rho^{(w)}\varkappa^{(A)}(x,z)\quad(3.52)$$

onde

$$\varkappa^{(A)}(x,z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\langle\bar{h}\rangle-z_{BC}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z_{AB}\right)\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_{z}^{z_{AB}}\left(z_{AB}-z\right)\right)-\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right)\Big|_{\langle\bar{h}\rangle}+\left(\psi\left\langle\overline{w'^2}\right\rangle\right)\Big|_{\langle\bar{h}\rangle}-\left(\psi\left\langle\overline{w'^2}\right\rangle\right)\Big|_{z}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\langle\bar{h}\rangle-z_{BC}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z_{AB}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right]_{z}^{z_{AB}}\left(z_{AB}-z\right)\right)$$
$$-\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{w}\tilde{u}\right\rangle\right)\Big|_{\langle\bar{h}\rangle}+\left(\psi\left\langle\tilde{w}^2\right\rangle\right)\Big|_{\langle\bar{h}\rangle}-\left(\psi\left\langle\tilde{w}^2\right\rangle\right)\Big|_{z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle\left\langle\bar{u}\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\langle\bar{h}\rangle-z_{BC}\right)\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle\left\langle\bar{u}\right\rangle\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z_{AB}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle\left\langle\bar{u}\right\rangle\right]_{z}^{z_{AB}}\left(z_{AB}-z\right)\right)-\left(\psi\left\langle\bar{w}\right\rangle^2\right)\Big|_{z}$$
$$-\left[\left\langle\bar{w}\right\rangle^2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\langle\bar{h}\rangle-z_{BC}\right)-\left[\left\langle\bar{w}\right\rangle^2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}\left(z_{BC}-z_{AB}\right)-\left[\left\langle\bar{w}\right\rangle^2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z}^{z_{AB}}\left(z_{AB}-z\right)$$
$$+\int_{z}^{z_{AB}}\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{pz}^{(A,b)}\mathrm{d}z\quad(3.53)$$

Para obter a força de arrastamento exercida nas hastes é necessário proceder à integração, na coluna de água, a componente longitudinal das DANS. Na hipótese da velocidade segundo y ser nula e admitindo desprezáveis as tensões viscosas devido ao reduzido valor de $\nu^{(w)}$ $\left(10^{-6}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}\right)$, a componente longitudinal das DANS (eq. (2.30)), para um escoamento permanente, multiplicada por ψ, vem igual a

$$\psi\frac{\partial\left\langle\bar{u}\right\rangle^2}{\partial x}+\psi\frac{\partial\left\langle\bar{u}\right\rangle\left\langle\bar{w}\right\rangle}{\partial z}=g\sin\beta\psi-\frac{1}{\rho^{(w)}}\frac{\partial\psi\left\langle\bar{p}\right\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle}{\partial z}$$
$$-\frac{\partial\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\psi\left\langle\tilde{u}\tilde{w}\right\rangle}{\partial z}-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{px}^{(A,s)}-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{px}^{(B,s)}-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{px}p^{(C,s)}$$
$$-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{vx}^{(A,s)}-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{vx}^{(B,s)}-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{vx}^{(C,s)}-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{px}^{(A,b)}-\frac{1}{\rho^{(w)}}I_{vx}^{(A,b)}\quad(3.54)$$

onde

$$I_{px}^{(i,k)} = -\frac{\delta^{(i)}}{\forall_f^{(i)}} \int_{S_{int}^{(k)}} \bar{p} n_x \mathrm{d}S$$

e

$$I_{vx}^{(i,k)} = \frac{\delta^{(i)}}{\forall_f^{(i)}} \int_{S_{int}^{(k)}} \left(\mu^{(w)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} n_x + \mu^{(w)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} n_z \right) \mathrm{d}S$$

representam, respectivamente, uma força pressão e uma força viscosa por unidade de volume na direcção longitudinal.

Como a função de vazios, ψ, não varia longitudinalmente (varia apenas na direcção vertical) o lado esquerdo da equação (3.54) pode ser escrito

$$\psi \frac{\partial \langle \overline{u} \rangle^2}{\partial x} + \psi \frac{\partial \langle \overline{u} \rangle \langle \overline{w} \rangle}{\partial z} = \frac{\partial \psi \langle \overline{u} \rangle^2}{\partial x} + \frac{\partial \psi \langle \overline{u} \rangle \langle \overline{w} \rangle}{\partial z} - \langle \bar{u} \rangle \langle \bar{w} \rangle \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{3.55}$$

Tal como a integração da componente vertical, a integração da componente longitudinal das DANS tem de ser feita separadamente para cada uma das camadas em que se dividiu este tipo de escoamentos. Introduzindo na equação anterior o gradiente longitudinal da distribuição vertical de pressões obtida para a camada C e considerando as simplificações apresentadas, a integração vertical da equação (3.54), entre a cota z_{BC} e a superfície livre, $\langle \bar{h} \rangle$ conduz a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \langle \bar{u} \rangle^2 \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right) \right) - \left[\langle \bar{u} \rangle \langle \bar{w} \rangle \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right) =$$

$$g \sin\beta \left[\psi \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right) - g \cos\beta \left(\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right) \left[\left[\psi \right]_z^{\langle \bar{h} \rangle} \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \right.$$

$$\left. + \langle \bar{h} \rangle \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\psi \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} - \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(z_{BC} \left[\psi \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\varkappa^{(C)}(x,z) \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right) \right)$$

$$+ \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \varkappa^{(C)}(x, \langle \bar{h} \rangle) - \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \varkappa^{(C)}(x, z_{BC}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right) \right)$$

$$+ \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right) \Big|_{\langle \bar{h} \rangle} - \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right) \Big|_{z_{BC}} - \psi \left\langle \overline{u'w'} \right\rangle \big|_{\langle \bar{h} \rangle} + \psi \left\langle \overline{u'w'} \right\rangle \big|_{z_{BC}}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \langle \tilde{u}^2 \rangle \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right) \right) + \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(\psi \langle \tilde{u}^2 \rangle \right) \big|_{\langle \bar{h} \rangle} - \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(\psi \langle \tilde{u}^2 \rangle \right) \big|_{z_{BC}}$$

$$- \psi \langle \tilde{u} \tilde{w} \rangle \big|_{\langle \bar{h} \rangle} + \psi \langle \tilde{u} \tilde{w} \rangle \big|_{z_{BC}} - \frac{1}{\rho^{(w)}} \alpha_c \left[\psi \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left\langle \overline{f_x^{(d\,s\,C)}} \right\rangle - \frac{1}{\rho^{(w)}} \alpha_c \left[\psi \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left\langle \overline{f_x^{(\nu\,s\,C)}} \right\rangle \tag{3.56}$$

Nesta equação, $\left\langle\overline{f_x^{(d\,s\,C)}}\right\rangle$ e $\left\langle\overline{f_x^{(\nu\,s\,C)}}\right\rangle$ representam, respectivamente, a força de arrastamento de forma e a força de arrastamento de natureza viscosa, ambas devido à presença das hastes na camada C. A forma como estas forças por unidade de área em planta surgem na equação anterior tem origem no seguinte desenvolvimento

$$\int_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle} \frac{\psi}{\rho^{(w)}} I_p^{(C,s)} \mathrm{d}z = -\frac{1}{\rho^{(w)}} \alpha_c \left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle} \left[I_p^{(C,s)}\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle} \left(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC}\right) = -\frac{1}{\rho^{(w)}} \alpha_c \left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle} \left\langle\overline{f_x^{(d\,s\,C)}}\right\rangle$$

Note-se ainda, que na dedução da equação anterior foram utilizadas manipulações algébricas semelhantes às que se utilizaram na integração das RANS e na integração da componente vertical das DANS nas diferentes camadas, nomeadamente a regra de Leibnitz e a condição de fronteira cinemática em todas as fronteiras.

Dado que a espessura da camada C é constante e como os termos $\langle\bar{h}\rangle \frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x} \left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}$ e $\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(z_{BC}\left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\right)$ e os termos $\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\varkappa^{(C)}(x,\langle\bar{h}\rangle)$ e $\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\varkappa^{(C)}(x,z_{BC})$ apresentam valores muito parecidos e sinais contrários, a equação (3.56) simplifica-se para

$$\left\langle\overline{f_x^{(C)}}\right\rangle = \left\langle\overline{f_x^{(d\,s\,C)}}\right\rangle + \left\langle\overline{f_x^{(\nu\,s\,C)}}\right\rangle = \frac{\rho^{(w)}}{\alpha_c\left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}} \Bigg(g\sin\beta\left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC}\right)$$
$$- g\cos\beta\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC}\right)\left[\left[\psi\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle}\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\varkappa^{(C)}(x,z)\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\right)\left(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\right)\left(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC}\right)+\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right)\Big|_{\langle\bar{h}\rangle}-\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right)\Big|_{z_{BC}}-\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\big|_{\langle\bar{h}\rangle}$$
$$+\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\big|_{z_{BC}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\right)\left(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC}\right)+\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right)\big|_{\langle\bar{h}\rangle}-\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right)\big|_{z_{BC}}$$
$$-\psi\left\langle\tilde{u}\tilde{w}\right\rangle\big|_{\langle\bar{h}\rangle}+\psi\left\langle\tilde{u}\tilde{w}\right\rangle\big|_{z_{BC}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\bar{u}\right\rangle^2\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\right)\left(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC}\right)+\left[\langle\bar{u}\rangle\langle\bar{w}\rangle\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\left(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC}\right)\Bigg) \tag{3.57}$$

onde $\left\langle\overline{f_x^{(C)}}\right\rangle$ representa a força de arrastamento, por unidade de área, exercida pelo escoamento sobre as hastes na camada C.

Da mesma forma, na camada intermédia, onde a função de vazios é constante, a força de arrastamento, por unidade de área, exercida pelo escoamento sobre as hastes é dada por

$$\left\langle \overline{f_x^{(B)}} \right\rangle = \left\langle \overline{f_x^{(d\,s\,B)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(\nu\,s\,B)}} \right\rangle = \frac{\rho^{(w)}}{\alpha_c \left[\psi\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}} \Big(g \sin\beta \left[\psi\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \left(z_{BC} - z_{AB}\right)$$

$$- g\cos\beta \left(\frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(z_{BC} - z_{AB}\right) \left[\left[\psi\right]_z^{z_{BC}}\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} + z_{BC} \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\left[\psi\right]_z^{z_{BC}}\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[z \left[\psi\right]_z^{z_{BC}}\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\varkappa^{(B)}(x,z) \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) \left(z_{BC} - z_{AB}\right) - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\varkappa^{(B)}(x,z) \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} + \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \varkappa^{(B)}(x, z_{BC})$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) \left(z_{BC} - z_{AB}\right) - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} + \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right) \Big|_{z_{BC}}$$

$$- \psi \left\langle \overline{u'w'} \right\rangle \Big|_{z_{BC}} + \psi \left\langle \overline{u'w'} \right\rangle \Big|_{z_{AB}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) \left(z_{BC} - z_{AB}\right) - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}$$

$$+ \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right) \Big|_{z_{BC}} - \psi \left\langle \tilde{u}\tilde{w} \right\rangle \big|_{z_{BC}} + \psi \left\langle \tilde{u}\tilde{w} \right\rangle \big|_{z_{AB}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \bar{u} \right\rangle^2 \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \left(z_{BC} - z_{AB}\right) \right) \Big) \quad (3.58)$$

A força de arrastamento, por unidade de área, exercida pelo escoamento sobre as hastes na camada junto ao fundo, obtida a partir da integração vertical, entre o fundo e a cota z_{AB}, da equação (3.54), é dada por

$$\left\langle \overline{f_x^{(A)}} \right\rangle = \left\langle \overline{f_x^{(d\,s\,A)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(\nu\,s\,A)}} \right\rangle = \frac{\rho^{(w)}}{\alpha_c \left[\psi\right]_0^{z_{AB}}} \Big(g \sin\beta \left[\psi\right]_0^{z_{AB}} z_{AB}$$

$$- g\cos\beta z_{AB} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\left[\psi\right]_z^{z_{AB}}\right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\varkappa^{(A)}(x,z) \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB}$$

$$- \psi \left\langle \overline{u'w'} \right\rangle \Big|_{z_{AB}} + \psi \left\langle \overline{u'w'} \right\rangle \Big|_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} - \psi \left\langle \tilde{u}\tilde{w} \right\rangle \big|_{z_{AB}} + \psi \left\langle \tilde{u}\tilde{w} \right\rangle \big|_0$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \bar{u} \right\rangle^2 \right]_0^{z_{AB}} z_{AB} \right) + \left[\left\langle \bar{u} \right\rangle \left\langle \bar{w} \right\rangle \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_0^{z_{AB}} z_{AB} - \frac{1}{\rho^{(w)}} \alpha_a \left[\psi\right]_0^{z_{AB}} \left\langle \overline{f_x^{(b\,A)}} \right\rangle \Big) \quad (3.59)$$

Após a determinação das equações resultantes da integração vertical da componente longitudinal das DANS, para cada uma das camadas, está-se em condições de determinar a força de arrastamento total exercida nas hastes por unidade de área, $\left\langle \overline{f_x} \right\rangle$ (equação 3.43). Esta força é determinada directamente a partir da soma das forças de arrastamento em cada camada, as quais se obtêm directamente a partir das equações (3.57), (3.58) e (3.59).

$$\left\langle \overline{f_x} \right\rangle = \left\langle \overline{f_x^{(d\,s\,A)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(\nu\,s\,A)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(d\,s\,B)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(\nu\,s\,B)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(d\,s\,C)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(\nu\,s\,C)}} \right\rangle \tag{3.60}$$

Assim, as equações (3.60), (3.44) e (3.43) constituem o conjunto de ferramentas necessárias para a determinação o coeficiente de arrastamento devido à presença de elementos rígidos e emersos no escoamento.

Capítulo 4

Instalações laboratoriais e instrumentação

4.1 Considerações gerais

O trabalho experimental realizado no âmbito desta dissertação foi conduzido no canal de recirculação e inclinação variável (CRIV) do Laboratório de Hidráulica e Recursos Hídricos do Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura do Instituto Superior Técnico. Nas Figuras 4.1 e 4.2 mostra-se o aspecto geral do CRIV.

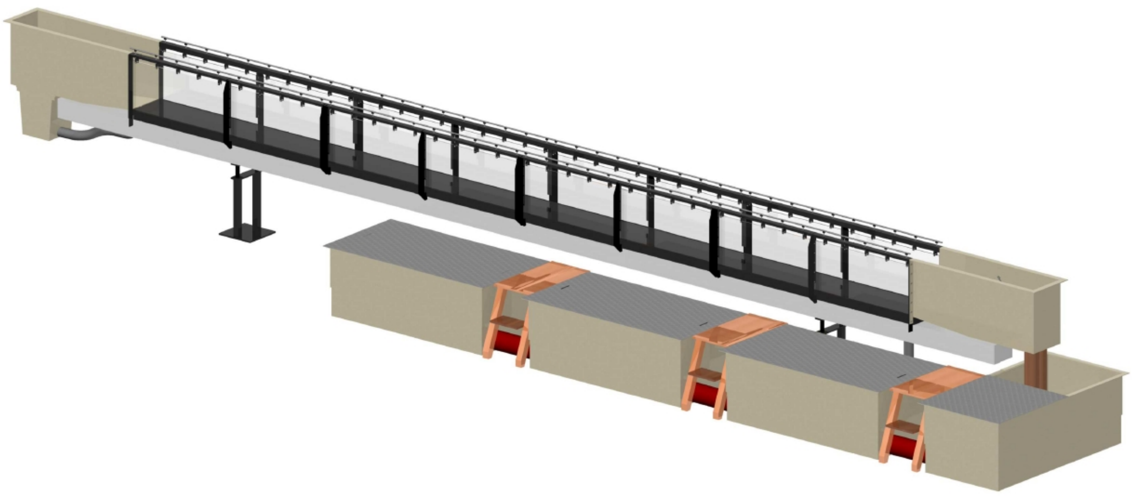
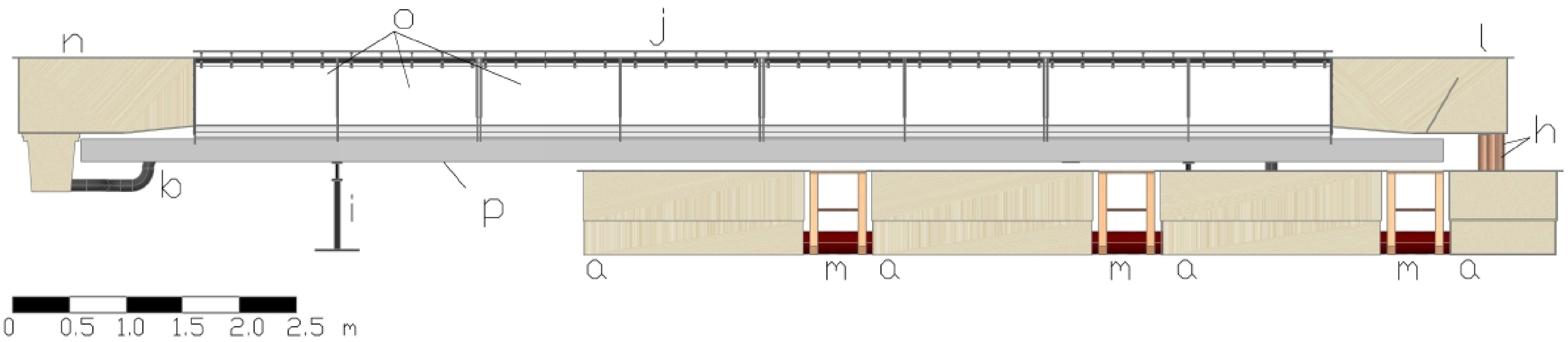
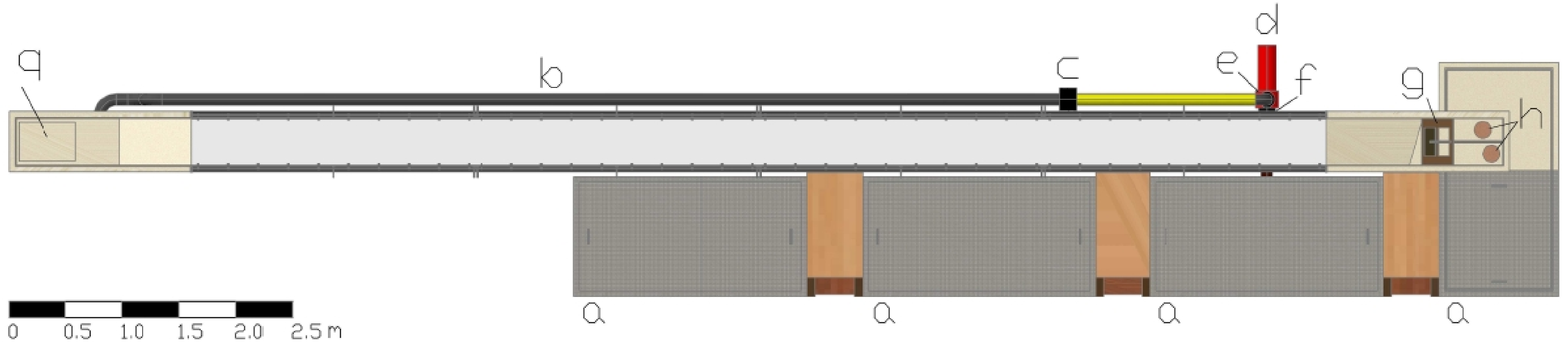


Figura 4.1: Vista geral do CRIV.

O trabalho laboratorial destinou-se a obter mapas de velocidades instantâneas para posteriormente calcular as quantidades turbulentas necessárias para caracterizar o escoamento. Utilizou-se um sistema de *Particle Image Velocimetry* (PIV) para medir, de forma não intrusiva, os mapas de velocidades.



(a)



(b)

Figura 4.2: Vista geral do CRIV: a) alçado lateral direito e b) planta.

Nas seguintes secções apresenta-se uma descrição detalhada do CRIV e dos seus acessórios, do sistema PIV e da restante instrumentação utilizada no trabalho experimental.

4.2 Descrição do canal

Os elementos fundamentais do CRIV são um canal prismático com a respectiva estrutura de suporte e um circuito de recirculação. A Figura 4.2 mostra a planta e o alçado lateral do CRIV. Os componentes do CRIV identificados na Figura 4.2 podem organizar-se da seguinte forma:

Circuito de recirculação:

a. Tanques	b. Conduta de PVC
c. Caudalímetro digital	d. Bomba centrífuga
e. Válvula a jusante da bomba	f. Válvula a montante da bomba
m. Conduta de ligação dos tanques	

Canal e estrutura de suporte:

j. Varão auxiliar	i. Suporte de altura regulável
o. Paredes laterais de vidro	p. Coluna de suporte

Estrutura de saída:

g. Comporta h. Orifícios de saida l. Saida do canal

Estrutura de entrada:

n. Entrada do canal q. Estabilizador de superfície livre

Em seguida faz-se uma descrição das propriedades de cada um dos elementos do canal apresentados.

O canal prismático apresenta 12.5 m de comprimento, dos quais 10.0 m correspondem ao comprimento efectivo. Apresenta paredes laterais de vidro transparente que permitem a fácil observação do escoamento e medições baseadas em registos vídeo. A secção transversal do canal é rectangular com 40.9 cm de largura e 50.0 cm de altura. O canal é suportado por uma coluna metálica que se apoia num pórtico motorizado que permite o ajuste do declive dentro de uma gama de valores que varia de $-1/200$ até $+1/40$.

O circuito de recirculação do CRIV é constituído por:

i) quatro tanques de armazenamento e inércia, interligados por tubos com 200 mm de diâmetro funcionando como vasos comunicantes e com capacidade para armazenar cerca de 1.1 m^3 de água cada um (Figura 4.3 a);

ii) uma bomba centrífuga, cujo caudal máximo caudal que consegue elevar é 25 l/s (Figura 4.3b);

iii) uma conduta de PVC com 100 mm de diâmetro, que transporta a água desde a bomba até à estrutura de entrada;

iv) uma válvula de seccionamento e uma válvula de retenção, ambas a montante da bomba;

v) uma válvula a jusante da bomba, para controlo do caudal;

vi) um caudalímetro digital (Figura 4.3c).

Em relação ao circuito de recirculação, deve ainda mencionar-se que a admissão à bomba não é feita no tanque que recolhe o escoamento, para minimizar a entrada de ar na bomba.

(a) (b) (c)

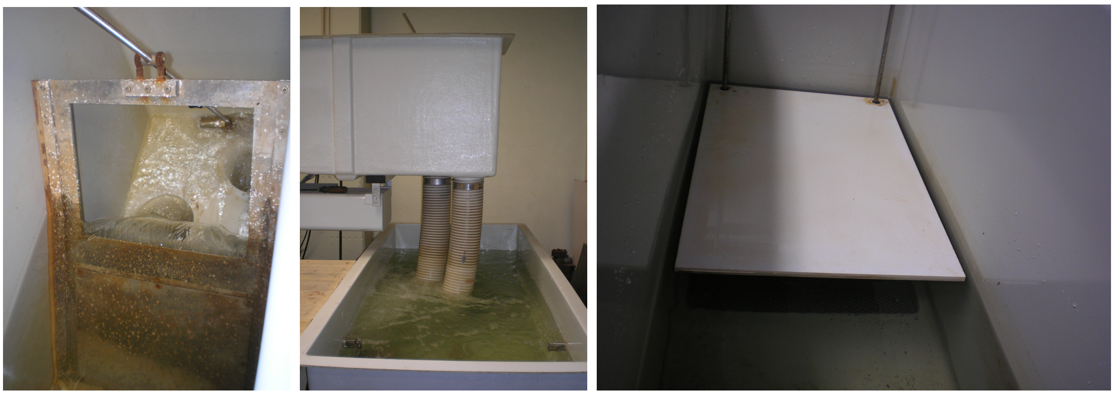
Figura 4.3: Elementos do circuito de recirculação do CRIV: a) tanque; b) bomba centrífuga e c) caudalímetro digital.

Na estrutura de entrada existe um estabilizador de madeira (Figura 4.4c) para diminuir as oscilações da superfície livre provocadas pela componente vertical do escoamento provindo da conduta identificada com a letra b na Figura 4.2. O escoamento é acelerado na estrutura de entrada para reduzir a magnitude de estruturas turbulentas tridimensionais.

Em relação à estrutura de saída, deve referir-se que no extremo de jusante do canal existe uma comporta basculante que permite regular a altura do escoamento. A saída da água do canal é efectuada verticalmente por dois orifícios que encaminham a água para um dos tanques. Na Figura 4.4 apresentam-se as fotografias da comporta e dos orifícios.

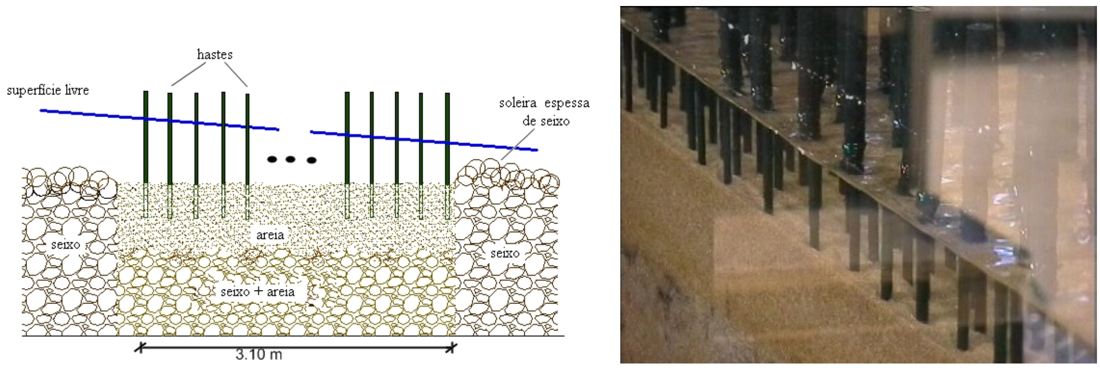
Feita a descrição do canal em geral, prossegue-se com a descrição da forma como este foi utilizado neste trabalho experimental, no qual se procurou simular as condições do escoamento em zonas com vegetação emersa. Para este efeito, criou-se no CRIV uma zona de leito, de areia, plano horizontal no qual se colocaram as estacas de eixo vertical (Figura 4.5).

Foi colocada, sobre o leito de seixos existente, uma camada de areia com cerca de 7 cm de espessura, numa extensão de 3.8 m com início a 5.1 m do início do canal. A montante



(a) (b) (c)

Figura 4.4: Acessórios do CRIV: a) comporta; b) orifícios de saída e c) estabilizador de montante.



(a) (b)

Figura 4.5: a) Representação esquemática do leito utilizado nos ensaios laboratoriais; b) Pormenor do canal numa zona povoada com as estacas de eixo vertical.

do leito de areia colocaram-se elementos rugosos (seixos) para acelerar o desenvolvimento da camada limite. A jusante da camada de areia também foram colocadas pedras para criar uma soleira espessa (Figura 4.6c) que permitisse fixar a altura do escoamento naquela secção, evitando assim que no interior das hastes se sentisse o efeito da comporta.

Sobre a camada de areia, horizontal e lisa, colocaram-se estacas com diâmetro $d =$ 1.1 cm e cerca de 20 cm de comprimento, que simularam caules rígidos de elementos de vegetação (Figura 4.6). As estacas foram colocadas no leito de areia de forma aleatória, mas tentando manter a sua densidade uniforme em toda a área povoada pelas estacas. No capítulo seguinte explica-se de forma mais detalhada a preparação dos ensaios.

(a) (b) (c)

Figura 4.6: a) Elemento usado para simular as haste das plantas, b)vista geral do leito com as hastes e c) soleira espessa porosa construída a jusante.

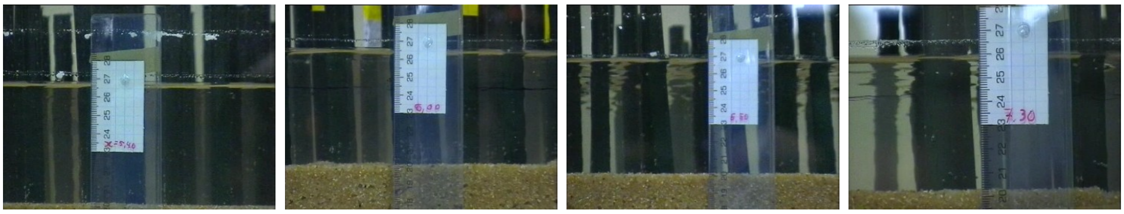
4.3 Instrumentação. Descrição do equipamento

Os ensaios realizados requereram a imposição de um caudal e a medição de campos de velocidades instantâneas e da topografia do fundo. Adicionalmente, mediu-se a temperatura da água para estimar a viscosidade da água.

No CRIV, o caudal é regulado por uma válvula no circuito de recirculação e medido através do caudalímetro (Figura 4.3c).

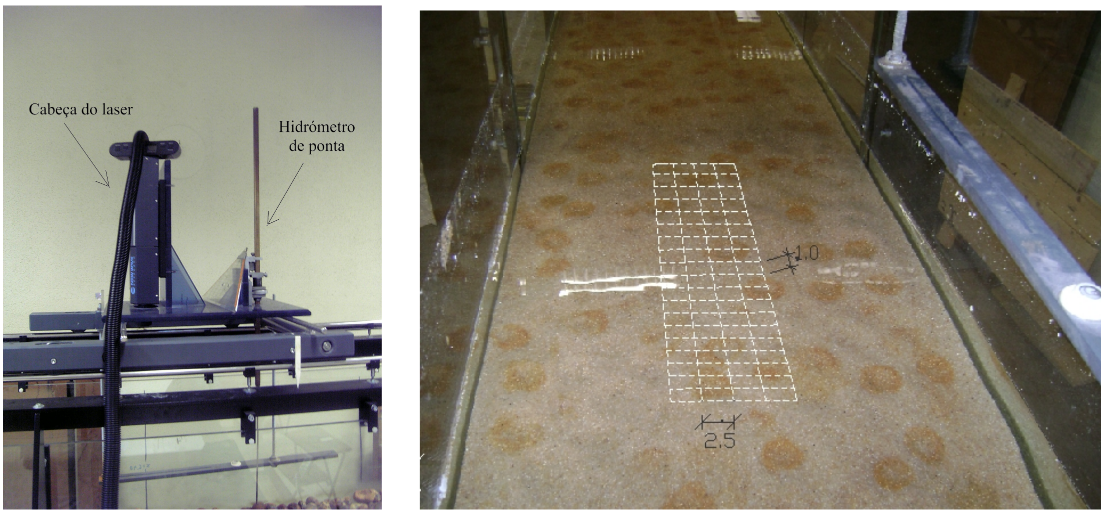
Para determinar o perfil longitudinal da altura do escoamento filmou-se o escoamento, perpendicularmente às paredes do canal, com uma câmara digital de fps cujo *shutter* estava regulado para a velocidade de 250 s^{-1}. Em cada posição da câmara, e no campo de registo desta, foi colocada, junto ao vidro do canal uma régua com 1.0 mm de precisão (Figura 4.7). Obteve-se, desta forma, séries temporais de alturas de escoamento cuja análise permitiu quantificar a altura do escoamento média temporal em cada posição longitudinal.

Para obter a topografia do fundo, foram medidas as cotas de pontos afastados de 1.0 cm ao longo das secções longitudinais em que se efectuaram registos da velocidade. As cotas dos pontos foram medidas com um hidrómetro de ponta de 1.0 mm de precisão. Na Figura 4.8 apresenta-se um esquema que identifica os perfis medidos bem como o equipamento utilizado para efectuar as medições.



(a) $x = 5.40$m (b) $x = 6.00$m (c) $x = 6.50$m (d) $x = 7.30$m

Figura 4.7: Exemplo de imagens utilizadas na determinação da altura do escoamento provenientes dos registos vídeo.



(a) (b)

Figura 4.8: a) Hidrómetro de ponta usado para medir a cota dos pontos do fundo e b) esquema ilustrativo dos pontos medidos.

Para medir a temperatura da água utilizou-se um termómetro digital, que para facilitar as medições se fixou na parte final do canal (Figura 4.9).

Figura 4.9: Termómetro digital.

Para registar os campos de velocidades instantâneas foi utilizado um sistema PIV, um equipamento de medição não intrusivo e recomendado para medições em escoamentos com grande heterogeneidade espacial (Pokrajac *et al.* 2007). O sistema PIV é constituído pelos seguintes componentes:

i) cabeça do laser;

ii) gerador do feixe do laser;

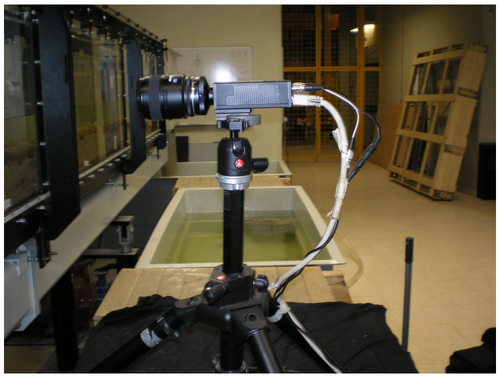
iii) câmara CCD;

iv) software de aquisição e processamento de dados (Figura 4.10).

Estes componentes estavam interligados da forma ilustrada na Figura 4.11.

A cabeça do laser foi colocada verticalmente sobre o suporte móvel apoiado sobre os varões do canal (Figura 4.10a), para as medições no plano vertical. O laser é do tipo Nd:YAG (cristal de YAG - *Yittrium Aluminium Garnet*- infiltrado com iões de Neodímio) e emite um feixe de luz que ilumina uma dada secção (Figura 4.12)). A cabeça do laser tem um sistema óptico que direcciona o feixe de luz para a secção que se pretende iluminar, através de um alinhamento manual. O laser, de cavidade dupla, permite a emissão de radiação por impulsos, sendo o intervalo de tempo entre dois impulsos consecutivos controlado pelo utilizador. A utilização deste tipo de lasers obriga a existência de um sistema de sincronização entre a emissão do laser e a aquisição de imagens pela câmara (Sveen & Cowen 2004).

A luz emitida pelo laser é, fundamentalmente, da gama infra-vermelha (IV), o que não é adequado para efectuar as medições uma vez que os comprimentos de onda desta gama não são detectados pelas câmaras nem pela visão humana, o que tornaria o processo de alinhamento mais complicado e diminuiria a segurança do utilizador. No entanto, a cabeça do laser dispõe de um sistema que transforma a luz da gama do infravermelho em luz visível com comprimento de onda de 532 nm (cor verde)(Raffel *et al.* 1998, p.3). Em relação ao perigo da radiação emitida, o laser Nd:YAG é considerado da classe quatro, a classe mais perigosa, pelo que o operador tem utilizar óculos protectores com filtros de luz verde. A entrada do laboratório deve ainda ser sinalizada e restringida durante os ensaios.



(a) (b) (c)

(d)

Figura 4.10: Componentes do PIV: a) cabeça do laser, b) gerador do feixe do laser, c) câmara CCD e d) software DynamicStudio®.

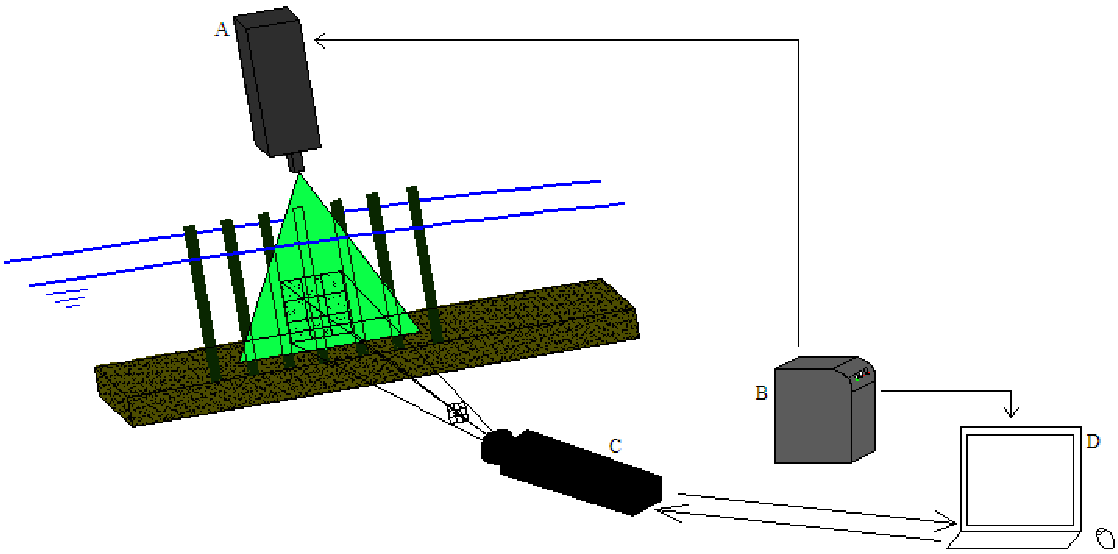


Figura 4.11: Esquema representativo da interligação entre os vários componentes do sistema PIV: A-cabeça do laser; B-gerador do feixe do laser; C-câmara e D-computador.

(a)

(b)

Figura 4.12: a) Laser em funcionamento e b) óculos protectores.

É no gerador do PIV que se gera e controla o feixe de laser (Figura 4.10b). O laser pode ser operado de dois modos distintos: modo interno em que é controlado directamente pelo utilizador ou modo externo em que é controlado pelo software de aquisição.

O software que controlou as propriedades do laser e a aquisição de dados e realizou o processamento dos mesmos foi o DynamicStudio®. Este software permite controlar as propriedades do laser e a aquisição dos dados. Em relação às características do laser, o software permite definir o tempo entre dois impulsos consecutivos e a frequência dos impulsos. Para a análise dos dados as variáveis controláveis são o tipo de correlação, o tamanho da área de interrogação e o método de validação dos dados.

A câmara CCD filma a secção iluminada pelo feixe de luz emitido pelo laser, registando a posição das partículas transportadas em suspensão no escoamento. A câmara foi instalada perpendicularmente ao plano dos vidros do canal para as medições de campos de velocidades 2D verticais. Para as medições no plano horizontal, colocou-se a câmara na direcção perpendicular ao plano leito. Na Figura 4.13 apresenta-se um exemplo de imagem captada pela câmara, onde se podem identificar as partículas como pontos brilhantes num fundo negro. Como as partículas iluminadas são interpretadas como tons de cinzento

Figura 4.13: Imagem captada pela câmara.

é muito importante que a luminosidade no laboratório seja a mínima possível, uma vez que esta pode reduzir o contraste e influenciar negativamente a qualidade das imagens adquiridas.

4.4 O sistema *Particle Image Velocimetry* (PIV)

4.4.1 Princípios do *Particle Image Velocimetry* (PIV)

Esta secção pretende descrever, de forma sumária, os principais aspectos do funcionamento do PIV.

PIV é uma técnica não intrusiva que permite medir campos de velocidades instantâneas através do registo fotográfico da posição dos alvos (partículas suspensas no escoamento) em dois instantes de tempo consecutivos. Esta técnica permite obter as duas componentes da velocidade no plano iluminado pelo feixe de laser.

Os mapas de velocidades instantâneas são obtidos a partir de uma aproximação da definição de velocidade:

$$u(x,z) \simeq \frac{(x + \Delta d_x) - x}{\Delta t} \tag{4.1a}$$

$$w(x,z) \simeq \frac{(z + \Delta d_z) - z}{\Delta t} \tag{4.1b}$$

onde u e w são as componentes longitudinal e vertical da velocidade instantânea, Δd_i é o deslocamento das partículas segundo a direcção i, determinado pela análise das imagens, e Δt é o intervalo de tempo entre dois impulsos consecutivos, definido pelo operador. Como o *shutter* da câmara funciona a velocidades muito elevadas, o tempo de registo da imagem é muito pequeno em comparação com o tempo entre impulsos, o que permite obter imagens *quasi*- instantâneas. A frequência de aquisição dos dados, f_T (Hz), é escolhida em função do tipo de fenómeno que se pretende estudar. Quanto mais pequenas forem as escalas que se pretendem detalhar, maior será a frequência de aquisição necessária.

As partículas que normalmente existem no escoamento não são suficientes para obter imagens que conduzam a resultados com qualidade, pelo que é necessário introduzir no escoamento partículas artificiais, denominadas de *seeding*, que acompanhem o movimento do fluido. É desejável que estas partículas sejam não tóxicas, não corrosivas, não voláteis, não abrasivas e que sejam inertes quimicamente. Em relação à sua dimensão, as partículas devem, por um lado, ser suficientemente pequenas para acompanhar bem o movimento do fluido mas, por outro lado, devem apresentar dimensão suficiente para reflectir a luz do laser para serem captadas adequadamente pela câmara (Melling 1997). A escolha do *seeding* é um aspecto muito importante para o sucesso da aquisição dos dados experimentais. Assim, parâmetros como o tamanho médio e forma das partículas, gama de distribuição de tamanho, densidade, índice de refracção e características da superfície são aspectos que se devem considerar na escolha do *seeding* (Raffel *et al.* 1998, pp. 13-22).

As partículas iluminadas são representadas por grupos de pixeis e tons de cinzento que, idealmente, preservam a luminosidade e a forma. Para analisar as imagens adquiridas cada imagem é dividida em pequenas áreas, designadas por áreas de interrogação. As áreas de interrogação podem apresentar diversas dimensões, sendo as mais frequentes 8×8, 16×16, 32×32, 64×64 ou 128×128 pixeis.

Para obter o vector deslocamento, cada área de interrogação da primeira imagem é correlacionada, pixel a pixel, com a correspondente área de interrogação da segunda imagem através de uma função baseada no algoritmo da transformada de Fourier (Westerweel 1997 e Sveen & Cowen 2004, pp.7-10). O vector de deslocamento médio das partículas, em cada área de interrogação, corresponde ao pico da função de correlação (Figura 4.14).

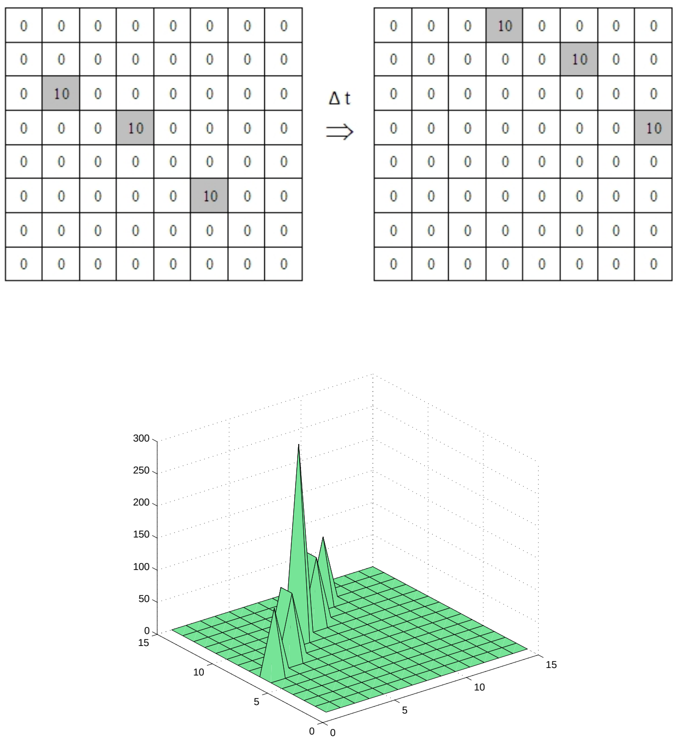


Figura 4.14: Exemplo de uma função de correlação.

O processamento dos dados do PIV tem sido alvo de grandes avanços desde o aparecimento desta técnica de medição. Os algoritmos de correlação têm-se tornado cada vez mais sofisticados, rápidos e eficientes. As funções designadas por *Young's fringe* (Backer and Fourney 1977 *in* Weng *et al.* 2000) e *autocorrelation* (Adrian 1989 *in* Weng *et al.* 2000) são das funções de correlação mais primitivas e foram progressivamente substituídas pela correlação simples (*cross correlation*) por esta apresentar um nível de ruído significativamente inferior e por eliminar a ambiguidade na direcção do escoamento (Westerweel 1997, Raffel *et al.* 1998 e Weng *et al.* 2000). Os modelos de *cross correlation* têm sofrido grandes melhorias e a partir deles surgiram novos modelos de correlação como a correlação média (*average correlation*) ou a correlação adaptativa (*adaptive correlation*) (Wereley & Meinhart 2000). Segundo Wereley & Meinhart (2000) a técnica de correlação adaptativa é uma das técnicas que conduz a melhores resultados. Esta técnica parte de áreas de interrogação de maior dimensão com as quais o escoamento é caracterizado sem grande detalhe e através de sucessivos passos, com áreas de interrogação menores, vai melhorando os resultados.

Em algumas situações é necessário estimar o deslocamento com uma precisão inferior ao pixel. Os estimadores mais frequentes para determinar o pico de correlação são o estimador do centro de massa, o ajuste parabólico e o ajuste Gaussiano, sendo o último o mais comum no PIV (Sveen & Cowen 2004, pp.17-20).

A cada área de interrogação corresponde um vector instantâneo de velocidade. A existência de vectores erróneos é praticamente inevitável, ainda que se adopte uma conduta extremamente cuidadosa. Estes erros podem ter várias origens, como a iluminação não homogénea ou os defeitos da câmara, mas a principal é a existência de áreas de interrogação com um número insuficiente de partículas de *seeding* (Westerweel 1994, Westerweel 1997).

Para melhorar a qualidade dos resultados é aplicado um algoritmo de validação para remover e substituir os vectores não coerentes. A validação consiste em avaliar a verosimilhança de cada vector em comparação com o conjunto de vectores que define a sua vizinhança. Um vector é considerado não válido (ou não coerente) se o seu módulo, ou direcção, se afastar mais que um dado limite em relação ao valor médio dos seus vectores vizinhos. A substituição dos vectores não coerentes é efectuada, principalmente, de acordo com procedimentos baseados na média global, na média móvel ou na mediana local (Sveen & Cowen 2004, pp.23 e 24, Westerweel 1994). Westerweel (1993, p. 192) também estudou este três tipos de modelos de validação e concluiu que o mais eficiente e mais robusto é o que se baseia na mediana local.

4.4.2 Variáveis do sistema de aquisição de dados do PIV

A qualidade dos dados adquiridos, e consequentemente dos resultados, depende fundamentalmente de três parâmetros relacionados entre si: o tempo entre dois impulsos consecutivos do laser (Δt), a quantidade de *seeding* e a dimensão da área de interrogação.

O intervalo de tempo entre impulsos, Δt, deve ser suficientemente pequeno para que as partículas registadas na primeira imagem não desapareçam na transição para a segunda imagem (*loss of pairs* na literatura inglesa, Raffel *et al.* 1998, pp. 125 e 140). No entanto, quanto maior for o Δt maiores serão os deslocamentos registados e, consequentemente, maior será a precisão dos resultados. Assim, a escolha do Δt resulta de um compromisso entre a precisão das medições e a necessidade de minimizar o problema de *loss of pairs*. Valores de Δt demasiados pequenos ou demasiado elevados podem conduzir ao enviesamento, para valores mais reduzidos, da velocidade instantânea. Este problema é designado por *bias-to-zero* na literatura inglesa (Raffel *et al.* 1998, pp. 137 e 138). O enviesamento dos valores da velocidade quando Δt é muito elevado corresponde ao problema de *loss of pairs*. Quando Δt é muito reduzido, o algoritmo de interpolação sub-pixel pode perder precisão e indicar deslocamentos nulos.

A dimensão da área de interrogação está relacionada com o valor do intervalo de tempo entre impulsos e depende da quantidade de partículas captada em cada imagem. Como regra geral pretende-se que existam 12 partículas de *seeding* em cada área de interrogação e que o deslocamento destas partículas não seja maior que 25% do lado da área de interrogação (Raffel *et al.* 1998, p. 137). Assim, quando se utilizam pequenas áreas de interrogação é necessário introduzir no escoamento elevadas quantidades de *seeding* cujas partículas deverão ser de pequenas dimensões. Por outro lado, pequenas áreas de interrogação estão associadas a grandes deslocamentos das partículas de *seeding*. Se os deslocamentos forem muito grandes, as partículas de *seeding* que iniciam o seu deslocamento junto das fronteiras da área de interrogação poderão terminar o seu percurso fora desta área, o que também gera problemas de *loss of pairs*, e consequentemente o enviesamento da velocidade para valores mais baixos. Para minimizar este problema, é comum sobrepor as áreas de interrogação 25% a 75%. Deste modo, assegura-se a maximização do número de partículas de *seeding* efectivamente utilizadas no cálculo dos vectores de velocidade. Note-se que a sobreposição não melhora a qualidade dos resultados dentro de cada área de interrogação mas melhora a qualidade média dos mapas de velocidades instantâneas e a sua resolução.

O vector de velocidade instantânea é um vector médio no espaço correspondente à área de interrogação em que foi obtido. Quanto maior for a área de interrogação menor será a precisão espacial do vector da velocidade instantâneo. Assim, o tamanho da área de interrogação funciona como um filtro que elimina as pequenas escalas do movimento turbulento. O problema é tanto maior quanto mais complexo for o escoamento e quanto mais prenunciados forem os gradientes de velocidade dentro de área de interrogação. Para minimizar este problema é usual correr o algoritmo de correlação de uma forma iterativa em áreas de interrogação sucessivamente mais pequenas. A tendência do movimento é guardada entre cada dois passos e usada para eliminar erros no algoritmo de correlação perceptíveis por conduzirem a deslocamentos aparentemente contra a tendência do movimento.

Desta forma a escolha da dimensão das áreas de interrogação passa por um compromisso entre o detalhe que se pretende para as estruturas turbulentas, que é tanto maior quanto menor for a área de interrogação, e a quantidade de *seeding* que é necessário adicionar ao escoamento, que será tanto maior quanto menor for a área de interrogação.

De seguida, com base na anterior descrição dos parâmetros, procede-se à apresentação do processo conducente à escolha dos valores dos parâmetros do sistema de aquisição.

Ponderando estes os vários factores, definiu-se que a dimensão das áreas de interrogação a utilizar neste trabalho era 16×16 pixel, o que, fisicamente, corresponde a áreas com cerca de 1.1×1.1 mm.

Depois de fixar o tamanho das áreas de interrogação, determinou-se a quantidade de *seeding* que conduzia à captação de imagens com qualidade adequada, para as condições dos escoamento que se pretendia estudar. As imagens captadas com cerca de 2.5 g de *seeding* apresentaram uma densidade de partículas iluminadas que se considerou adequada. Para avaliar a sensibilidade dos resultados ao tempo entre impulsos, efectuaram-se várias medições para diferentes valores de Δt, no intervalo de 500 a 4000 μs, mantendo constante a quantidade de *seeding* e as condições do escoamento. Na Figura 4.15 apresentam-se os perfis de velocidade obtidos, de onde se conclui que para a gama de valores testados os resultados não são muito sensíveis ao intervalo de tempo e determinou-se que os ensaios seriam realizados com o tempo entre dois impulsos consecutivos igual a 1500 μs.

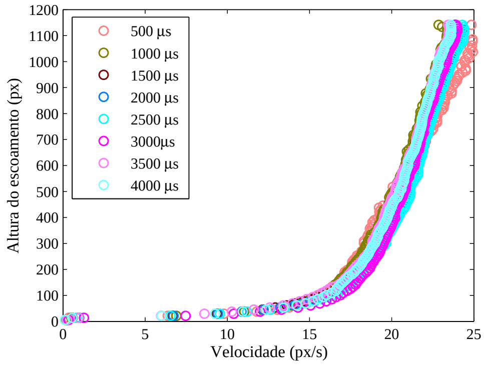


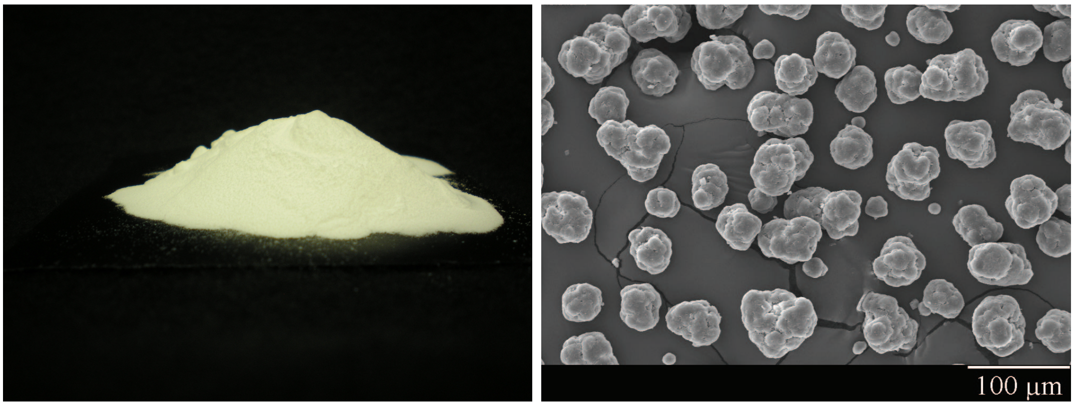
Figura 4.15: Perfis de velocidade longitudinal para vários intervalos de tempo entre impulsos.

Outra variável que o operador pode controlar no sistema de aquisição é a frequência de aquisição, que corresponde ao número de pares de imagens que se regista na unidade de tempo. O grau de detalhe com que se consegue visualizar as estruturas turbulentas é tanto maior quanto maior for a frequência de aquisição, pelo que se utilizou o equipamento na máxima frequência, 15 Hz.

4.4.3 Caracterização dos alvos artificiais (*seeding*)

Neste conjunto de ensaios laboratoriais optou-se por utilizar como *seeding* um material comercializado pela *Dantec Dynamics*® designado por *Polyamide Seeding Particles* (PSP) (Figura 4.16). O PSP é um material microporoso com massa volúmica igual a 1.03 g/cm^3. Como tem uma densidade muito semelhante à da água, quando é colocado em água em movimento tende a seguir o escoamento sem se depositar ou sem flutuar à superfície. Este *seeding* é constituído por partículas produzidas através de um processo de polimerização apresentando forma arredondada mas não exactamente esférica. Estas partículas têm uma dimensão média de 50 μm dentro de uma gama que varia de 30 a 70 μm e têm um índice de refracção de 1.5.

Para avaliar se o *seeding* utilizado tem capacidade para acompanhar o escoamento de uma forma adequada aplicou-se a solução de Hjemfelt & Mockros (1996) para o caso limite em que a densidade das partículas de *seeding* é muito maior que a densidade da água



(a) (b)

Figura 4.16: Partículas artificiais adicionadas ao escoamento (PSP).

$\left(s^{(p)} \gg s^{(w)}\right)$:

$$\frac{\overline{V_p^2}}{\overline{V^2}} \equiv r_p = \left(1 + \frac{2\pi f_c}{C}\right)^{-1} \tag{4.2}$$

onde

$$C = \frac{18\nu^{(w)}}{s^{(p)} d_p^2} \tag{4.3}$$

e V_p é o módulo da velocidade das partículas, V é o módulo da velocidade do escoamento, f_c é a frequência das estruturas turbulentas do escoamento do fluido e d_p é o diâmetro médio das partículas (Melling 1997). O rácio r_p traduz a aptidão que as partículas de *seeding* revelam para seguir um fluido em movimento, sendo esta aptidão tanto maior quanto mais próximo da unidade for o rácio r_p. Segundo Melling (1997) considera-se que valores de r_p superiores a 0.95 correspondem a partículas de aptidão aceitável.

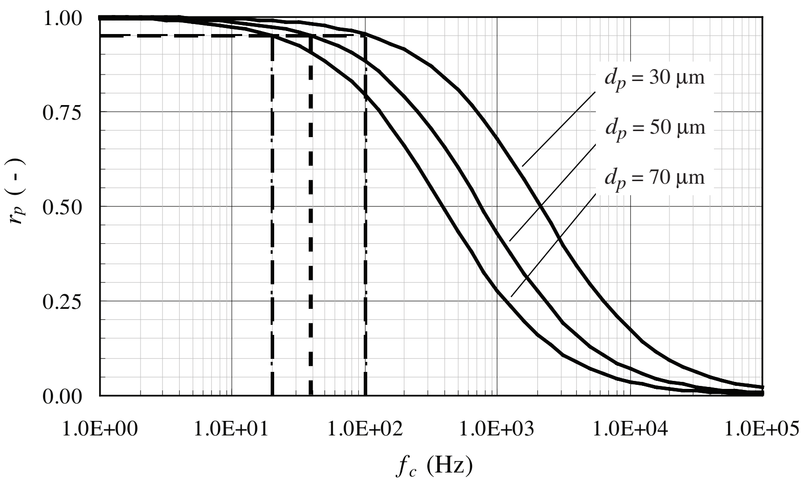


Figura 4.17: Rácio r_p em função da frequência para particulas de PSP com 30, 50 e 70 μm.

Aplicando a equação (4.2) para o PSP (*seeding* utilizado neste trabalho) cuja densidade é $s^{(p)} = 1.03$ e o diâmetro varia entre 30 e 70 μm sendo o diâmetro médio igual a 50 μm, obtém-se a variação do rácio r_p em função da frequência que se apresenta na Figura 4.17. Com os gráficos apresentados na Figura 4.17, conclui-se que este *seeding* é adequado para utilizar em escoamentos turbulentos numa gama de frequências de 0 até cerca de 100 Hz.

Como a frequência de aquisição do PIV é de 15 Hz, e, consequentemente, as maiores frequências susceptíveis de serem caracterizadas são de 7.5 Hz, conclui-se que o *seeding* utilizado é adequado a este trabalho experimental.

4.4.4 Análise dos dados de PIV

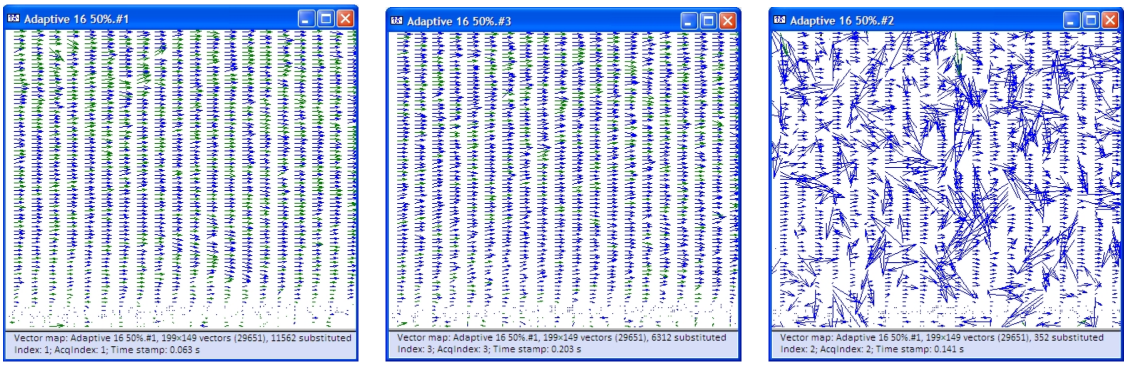
Para confirmar que a correlação adaptativa era o tipo de correlação que conduzia aos melhores resultados, analisaram-se os mapas de vectores obtidos com os diferentes métodos de correlação, a partir do mesmo conjunto de dados. Estes mapas, que se apresentam na Figura 4.18, mostram que o mapa correspondente à correlação adaptativa apresenta menos erros, pelo que se decidiu utilizar este tipo de correlação no tratamento dos dados recolhidos.

(a) (b) (c)

Figura 4.18: Mapas de vectores obtidos com o método de correlação adaptativa (a), simples (b) ou média (c).

Para o tipo de correlação escolhida, a validação dos mapas de vectores instantâneos pode ser efectuada com os modelos que usam o operador média móvel ou os que usam a mediana local (Figura 4.19). Optou-se por utilizar o método de validação com base na mediana local, porque como já se referiu este é mais robusto e eficiente que os métodos baseados na média móvel.

Da correlação de todas as áreas de interrogação resulta um mapa de vectores de deslocamento nas unidades da câmara (pixel) que é necessário converter para unidades do Sistema Internacional (m). Se existir paralelismo entre os planos da imagem e de medição, esta conversão é feita através da multiplicação dos deslocamentos em unidades de câmara



(a) (b) (c)

Figura 4.19: Mapas instantâneos obtidos com validação com a) mediana local, b) média móvel e c) sem validação.

(pixel) por um factor de calibração:

$$\Delta d[\mathrm{m}] = f_p \Delta d[\mathrm{px}] \tag{4.4}$$

O factor de calibração corresponde à relação entre uma dada distância em unidades SI e em unidades de câmara e determina-se através de uma imagem que contém um objecto graduado. Apresenta-se na Figura 4.20 um exemplo de uma imagem de calibração.

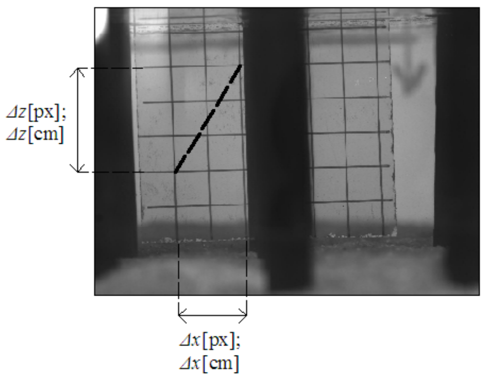


Figura 4.20: Imagem de calibração a 20.5 cm de distância da parede direita do canal.

Capítulo 5

Procedimento experimental e tratamento de dados

5.1 Considerações gerais

Neste capítulo apresenta-se as condições em que foi realizado o trabalho laboratorial, descrevendo-se os procedimentos efectuados para a preparação e realização dos ensaios. Apresenta-se ainda, a descrição do tratamento dos dados obtidos nos ensaios experimentais. Foram realizados três conjuntos de ensaios experimentais:

i) ensaio SV - onde se simulou o escoamento sobre um leito de areia sem vegetação;

ii) ensaio V1 - no qual se simulou o escoamento numa zona povoada por vegetação de hastes rígidas com uma densidade de 231 hastes/m^2;

iii) ensaio V2 - semelhante ao ensaio V1 com uma densidade de hastes maior, de 399 hastes/m^2.

Apresenta-se na Tabela 5.1 um resumo das características do escoamento de cada um dos ensaios.

Na Tabela 5.1, Q representa o caudal, h corresponde à altura do escoamento médio na secção de medição, dh/dx ao seu gradiente longitudinal, u_* é a velocidade de atrito, U representa a velocidade longitudinal média na coluna de água da velocidade longitudinal média temporal e espacial, Re_p corresponde ao número de Reynolds associado às hastes, n representa o número de hastes por unidade de área e ϕ representa a fracção sólida da área de controlo.

A velocidade de atrito apresentada na Tabela 5.1 foi determinada com base na distribuição vertical das tensões de Reynolds para o ensaio SV. O objectivo do cálculo da velocidade de atrito no ensaio SV é aplicar a este escoamento as equações apresentadas por Nezu & Nakagawa (1993, pp. 53 e 54) para os escoamentos turbulentos sobre fronteiras lisas.

Tabela 5.1: Características do escoamento e densidade de vegetação em cada ensaio.

	SV	**V1**	**V2**
Q (l/s)	2.33	2.33	2.33
h (m)	0.048	0.050	0.055
dh/dx (-)	-0.00148	-0.00310	-0.00560
u_* (-)	0.012	-	-
U (m/s)	0.1360	0.1208	0.106
Re_p (-)	-	1329	1162
n (hastes/m^2)	-	231	399
ϕ (-)	-	0.022	0.038

Os valores do caudal, da densidade de hastes e, consequentemente, de ϕ, foram objecto de escolha e impostos antes de se realizarem medições. Os valores da profundidade do escoamento e do gradiente da superfície livre na zona onde se realizaram as medições de velocidade foram medidos no decurso do procedimento laboratorial.

Escolheu-se um valor de caudal para o qual o escoamento seria turbulento mas a superfície livre pouco perturbada. Estas condições são típicas de escoamentos em zonas povoadas com vegetação emersa. Acresce que a superfície livre pouco perturbada é uma condição necessária para a utilização de técnicas PIV (ver discussão em Ferreira *et al.* 2008a). Pretendia-se ainda que o leito fosse imóvel, na situação sem vegetação.

No ensaio SV, a velocidade média na secção é $U = 0.136$ m/s pelo que os números de Reynolds e Froude e o parâmetro de Shields são $Re = 4169$, $Fr = 0.127$, $Re_* = \frac{u_* D_{50}}{\nu^{(w)}} = 10$ e $\frac{u_*^2}{g(s-1)D_{50}} = 0.011$, respectivamente. Os valores destes números expressam as condições acima enumeradas.

Os valores escolhidos para a densidade de hastes correspondem a densidade intermédias-baixas, típicas em trabalhos de investigação em vegetação emersa (Nepf 1999). São representativos de planícies de inundação e zonas húmidas com baixa densidade de plantas.

Nas secções seguintes descreve-se procedimento experimental, incluindo o cálculo da profundidade do escoamento e do gradiente da superfície livre.

5.2 Procedimento experimental

O trabalho experimental iniciou-se com o ensaio V2 e prosseguiu com os ensaios V1 e SV, por esta ordem.

O procedimento experimental teve inicio com a preparação do leito. O fundo do canal, que apresentava uma camada de seixos, foi coberto com uma camada de areia de quartzo. A areia, cuja curva granulométrica se apresenta na Figura 5.1, era caracterizada por diâmetro mediano, D_{50}, igual a 0.837 mm e densidade, s, igual a 2.65.

Com a ajuda de uma placa de PVC cortada em bisel, suportada pelo suporte móvel que desliza sobre os varões do canal, garantiu-se que a camada de areia, com cerca de 7 cm de espessura, conduzia a um leito plano horizontal e liso. De seguida, cravaram-se as hastes metálicas, apresentadas no capítulo anterior, de forma a que ficassem na vertical. Foram colocadas cerca de 500 hastes numa extensão de 3.1 m, em toda a largura do canal. Para que a densidade de hastes fosse uniforme em toda zona povoada, distribuíram-se cerca de 40 hastes por cada 25 cm do comprimento total. Na zona em que se efectuaram as medições, as hastes foram colocadas de forma a obter um campo de visão adequado, mas tentando não alterar a densidade, em relação à restante área. Após a realização do

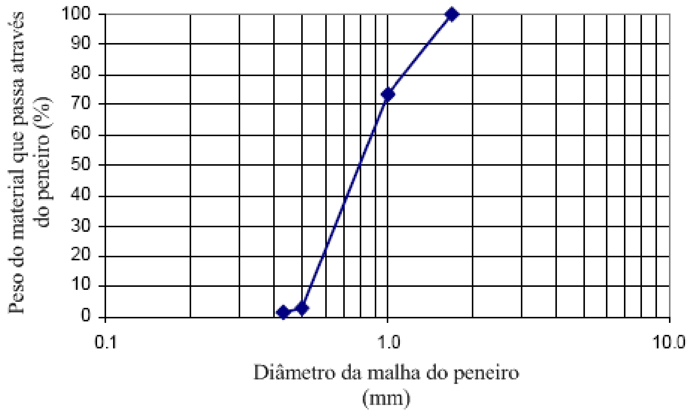


Figura 5.1: Curva granulométrica do material granular utilizados no leito (Adaptado de Nogueira 2007, p. 24).

ensaio V2, retirou-se cerca de um terço das hastes existentes no leito, para dar inicio ao ensaio V1. E após a realização deste, retiraram-se as restantes hastes e efectuaram-se as medições do ensaio SV. Por efeito da erosão localizada junto às hastes, nos ensaios V1 e V2 surgiram pequenas cavidades a montante e deposições a jusante das hastes. Assim, no ensaio SV, efectuaram-se medições do escoamento sobre um leito sem vegetação mas com oscilações de forma no fundo.

Para caracterizar a variação espacial das quantidades turbulentas, as medições do campo de velocidades foram realizadas em cinco posições laterais do laser, a 15.0, 18.0, 20.5, 23.0 e 29.5 cm da parede do lado direito do canal. Estas laterais estão identificadas na Figura 5.2 por P1, P2, P3, P4 e P5, para cada ensaio. O procedimento experimental para a realização das medições do campo de velocidades, com o sistema PIV, foi semelhante nos três ensaios. No início de cada ensaio estabeleceu-se o caudal e colocou-se a câmara na posição correcta, isto é, perpendicularmente à parede do canal e de forma a captar a secção de medição. Para garantir que a secção de medição era sempre a mesma, colocou-se uma placa de PVC na parede do canal e ajustou-se o posicionamento da câmara de forma a que esta captasse as marcas inscritas na placa. O ponto central da zona em que se observou o escoamento estava situado a 7.659 m do início do canal no ensaio SV e a 7.669 m nos

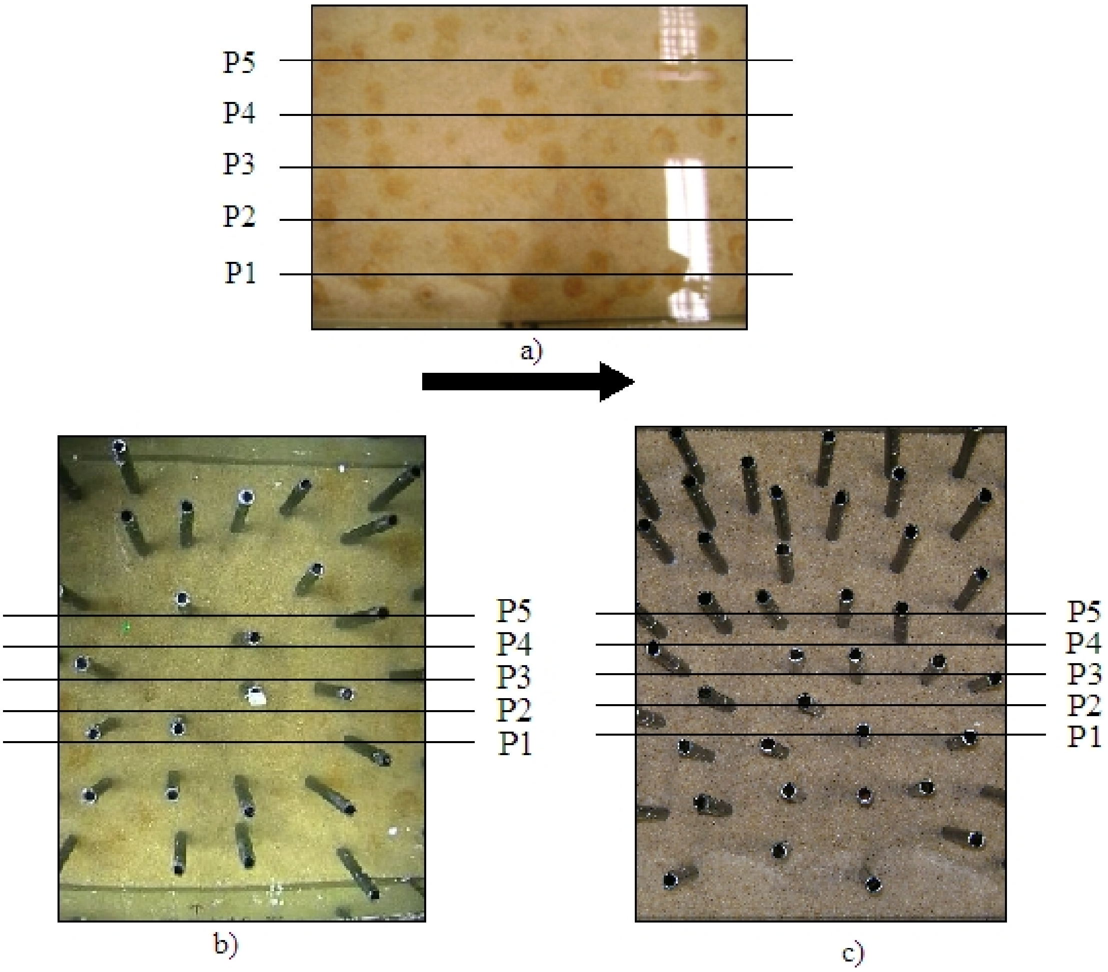


Figura 5.2: Posições laterais onde se efectuaram as medições: a) ensaio SV, b) ensaio V1 e c) ensaio V2. A seta representa o sentido do escoamento.

ensaios V1 e V2.

Para cada posição lateral, colocou-se o laser na posição pretendida e alinhou-se o feixe de luz. De seguida, com a ajuda de um objecto graduado, procedeu-se à focagem manual da câmara e ao registo da imagem para calibração (Figura 4.20). Antes de dar início às medições, em cada instância de aquisição, estabeleceu-se os valores adequados das características do laser e da aquisição e colocou-se à entrada do canal, imediatamente a jusante do estabilizador de superfície livre, a quantidade de *seeding* necessária. Para cada um dos ensaios, efectuaram-se 12 instâncias de aquisição (*run*, na terminologia do software de aquisição). Em cada instância foram recolhidas 490 imagens, com uma frequência de aquisição de 15 Hz e um intervalo entre impulsos de 1500 μs.

Para melhorar a qualidade das imagens adquiridas, as medições PIV foram efectuadas ao final da tarde, quando a luminosidade natural é menor, e utilizou-se a câmara com o diafragma na posição de menor abertura (f_{32}) para aumentar o contraste entre o fundo negro e as partículas iluminadas.

Em cada instância de aquisição efectuou-se o registo da temperatura da água.

5.3 Tratamento dos dados

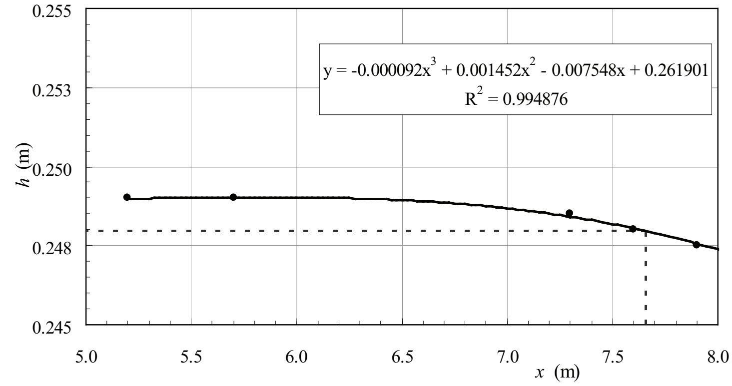
5.3.1 Altura do escoamento

Como se indicou no Capítulo 4, face às oscilações da superfície livre que se verificaram devido à presença das hastes, recorreu-se à filmagem de várias secções ao longo do canal, para determinar a altura média do escoamento e o seu gradiente. Com os valores médios identificados no registo vídeo, determinou-se a altura do escoamento na secção de medição por interpolação. A Figura 5.3 apresenta a altura do escoamento nas secções registadas bem como a respectiva linha de tendência, para os três ensaios.

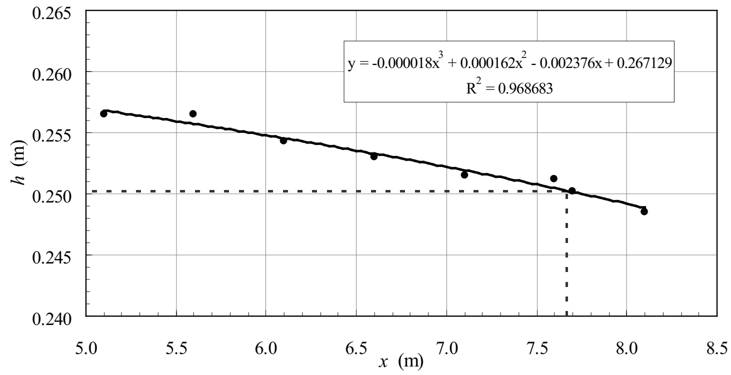
Desta forma determinou-se a altura do escoamento na secção de medição, que corresponde a 4.80, 5.02 e 5.50 cm para o ensaio SV, V1 e V2, respectivamente. A partir da interpolação apresentada foi, também, calculado o gradiente longitudinal da cota da superfície livre na secção de medição, cujos valores são -0.00148, -0.00310 e -0.00560, para o ensaio SV, V1 e V2, respectivamente. Assim, conclui-se que se estava na presença de um escoamento ligeiramente acelerado nos três ensaios.

5.3.2 Topografia do leito

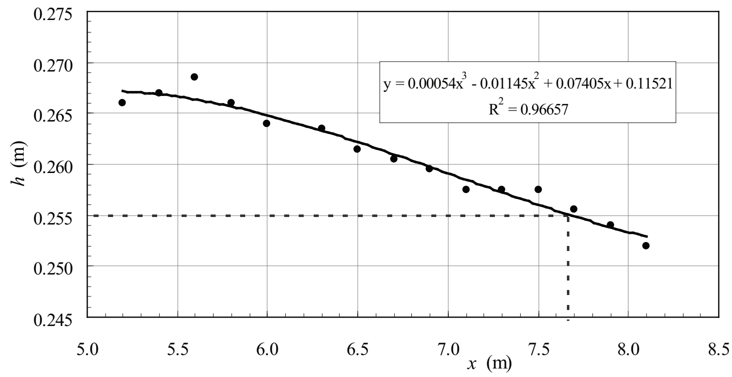
Com a finalidade de determinar a função de vazios, $\psi(z)$, efectuaram-se medições da topografia do leito sem hastes, sobre cada uma das posições laterais (P1 a P5). Em cada uma das laterais, foram medidas as cotas de pontos afastados de 1 cm, numa extensão total de 20 cm (Figura 4.8b). Apresenta-se na Figura 5.4 a sobreposição do perfil da superfície do fundo em cada uma das laterais.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.3: Altura do escoamento nas secções registadas nos ensaios SV (a), V1 (b) e V2 (c) e a respectiva linha de tendência utilizada para estimar a altura do escoamento na secção de medição (linhas a tracejado).

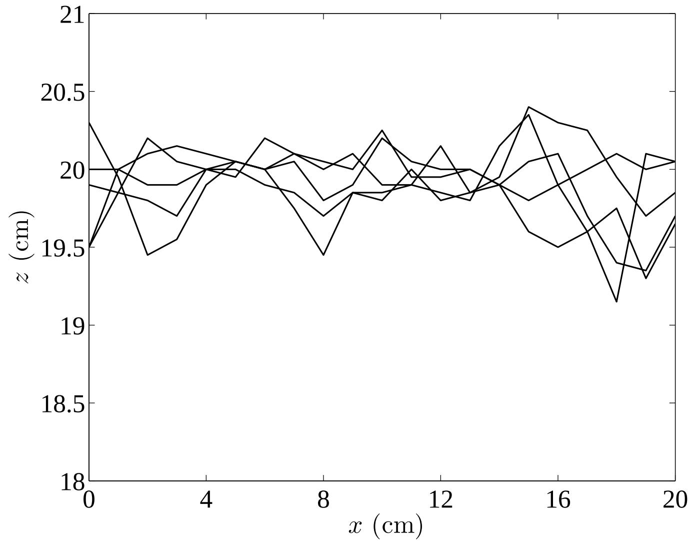


Figura 5.4: Sobreposição dos perfis da superfície do fundo em cada lateral.

Calculando, a cada cota, a relação entre o área ocupada por fluido e a área total, A_f/A, determinou-se a função de vazios das oscilações do fundo, que se apresenta na Figura 5.5.

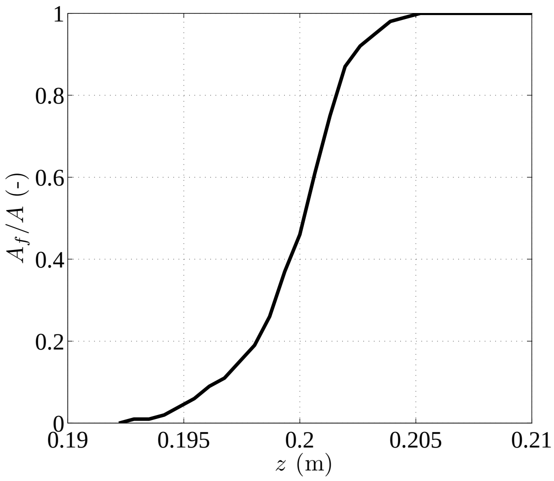


Figura 5.5: Função de vazios das oscilações do leito.

5.3.3 Velocidades instantâneas

Depois de realizadas as medições dos campos de velocidades é necessário proceder a um tratamento dos dados com o software DynamicStudio®, designado por tratamento de base. O tratamento de base consiste na correlação de cada par de imagens e na aplicação de métodos de validação, de acordo com o que se explicou na secção 4.4.4. O produto resultante do tratamento de base são os mapas de velocidades instantâneas em unidades de câmara, i.e., pixel/s. Para obter estes mapas de velocidades em unidades do SI, é necessário determinar o factor de calibração e aplicar a equação (4.4). Na Tabela 5.2 apresenta-se o factor de calibração cada posição lateral dos três ensaios realizados, calculado pela equação (4.4).

Ensaio/Posição	P1	P2	P3	P4	P5
SV	6.6888	6.8796	7.0998	7.2882	7.5346
V1	6.6667	6.8447	6.9185	7.2975	7.4960
V2	6.5061	6.7768	7.0223	7.3095	7.5321

Tabela 5.2: Valores do factor de calibração ($\times 10^{-5}$ m/pixel).

Apresenta-se na Figura 5.6 um mapa de velocidades instantâneas para as cinco posições laterais de cada ensaio.

5.3.4 Velocidades e tensões tangenciais de Reynolds médias temporais

Os campos de velocidades médias temporais, $\bar{v}(x,z)$ são determinados com

$$\bar{v}(x,z) = \frac{1}{NI}\sum_{i=1}^{NI} v_i(x,z) \tag{5.1}$$

onde NI é o número de mapas instantâneos recolhidos em cada instâncias de aquisição e $v_i(x,z)$ é o campo de velocidades instantâneas i.

Na Figura 5.7 apresenta-se o campo de velocidades médias temporais em cada posição lateral dos vários ensaios.

A tensão tangencial de Reynolds, τ_{Re}, é, como se apresentou no Capítulo 2, dada por

$$\tau_{Re} = -\rho^{(w)}\overline{u'w'} \tag{5.2}$$

Assim, para calcular as tensões de Reynolds é necessário conhecer as componentes de flutuação da velocidade em relação ao seu valor médio temporal, u' e w'. Relembrando que $\overline{u'w'}$ é dado por

$$\overline{u'w'} = \frac{1}{NI}\sum_{i=1}^{NI}\left(u_i - \bar{u}\right)\left(w_i - \bar{w}\right) \tag{5.3}$$

e sabendo que o conceito de covariância não enviesada de uma amostra finita é expresso por

$$Cov_{u,w} = \frac{1}{NI-1}\sum_{i=1}^{NI}\left(u_i - \bar{u}\right)\left(w_i - \bar{w}\right) \tag{5.4}$$

conclui-se que

$$\overline{u'w'} = \frac{NI-1}{NI}Cov_{u,w} \tag{5.5}$$

A covariância também pode ser definida em função dos desvios padrão de cada variável,σ_u e σ_w, e do coeficiente de correlação, ρ_{corr}, através de

$$Cov_{u,w} = \rho_{corr}\sigma_u\sigma_w \tag{5.6}$$

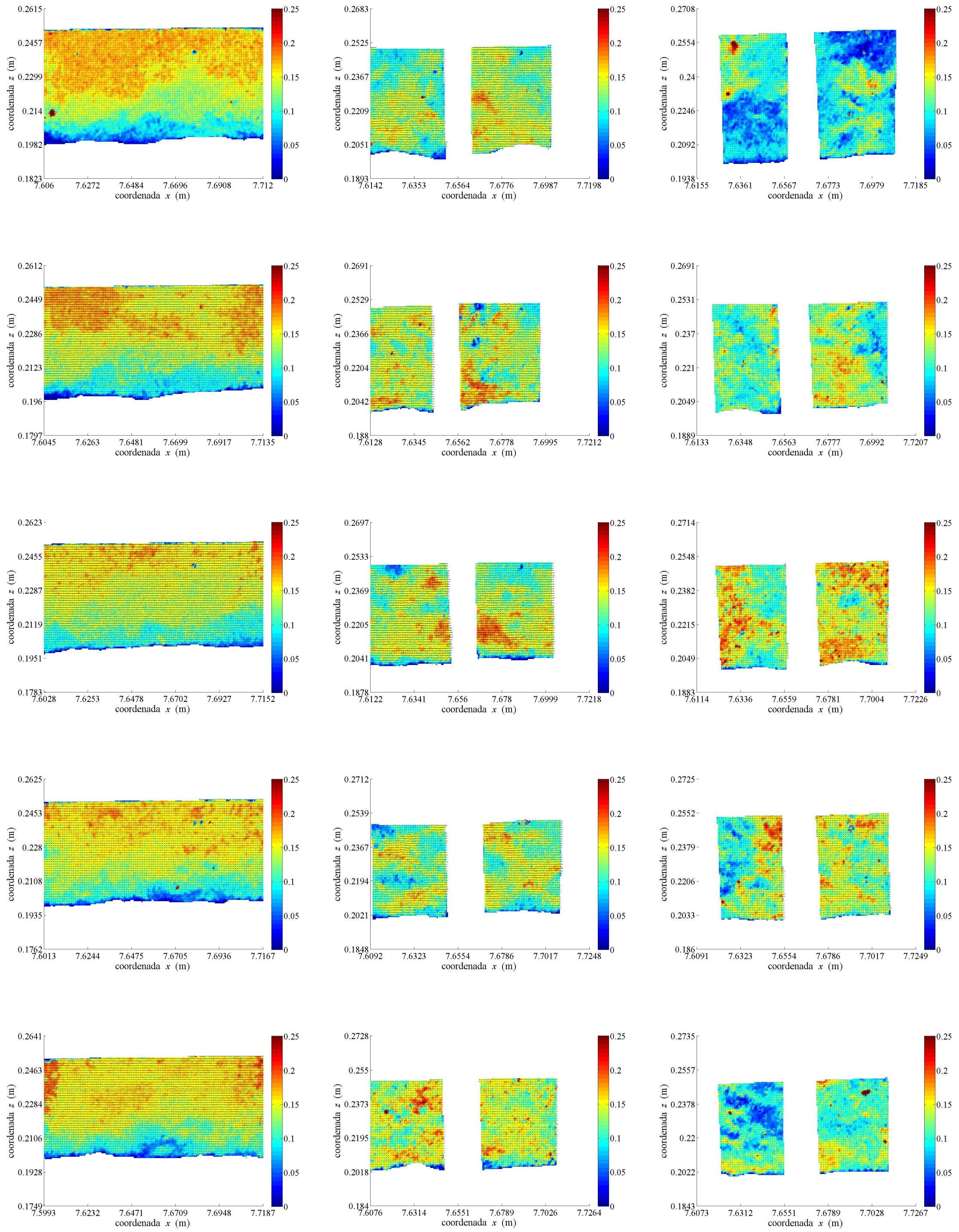


Figura 5.6: Mapas de velocidades instantâneas. Colunas: Ensaios SV, V1 e V2 (da esquerda para a direita). Linhas: Posições laterais de P1 a P5 (de cima para baixo).

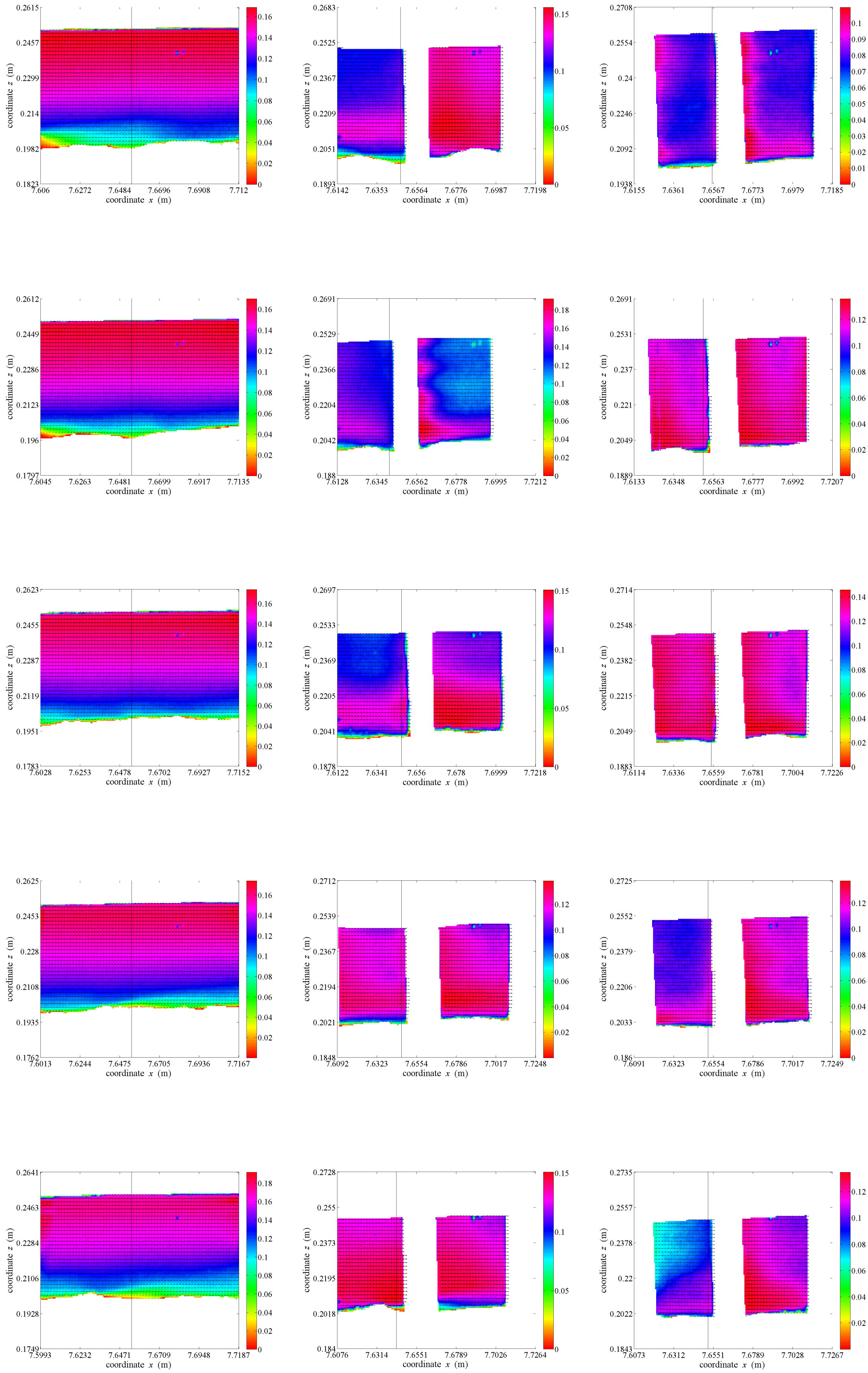


Figura 5.7: Mapas de velocidades médias temporais. Colunas: Ensaios SV, V1 e V2 (da esquerda para a direita). Linhas: Posições laterais de P1 a P5 (de cima para baixo).

Como σ_u, σ_w e ρ_{corr} são valores calculados pelo software de aquisição e tratamento de dados DynamicStudio® e exportados juntamente com as componentes médias da velocidade, calculou-se a tensão de Reynolds por

$$\tau_{Re} = -\rho^{(w)} \frac{NI - 1}{NI} Cov_{u,w} \tag{5.7}$$

Apresenta-se na Figura 5.8 os mapas de tensões de Reynolds em cada posição lateral para os ensaios SV, V1 e V2.

5.3.5 Perfis de velocidades médias temporais

Para aplicar a metodologia *Double-Average* é necessário seleccionar, na área de estudo, pontos que ficarão afectos a uma dada área de influência e para os quais se identificam as velocidades médias ao longo da coluna de água, através dos mapas de velocidades médias apresentados na Figura 5.7.

A escolha da localização dos perfis foi feita de forma a que a caracterização da variabilidade espacial fosse a mais adequada possível. Assim, os pontos para a localização dos perfis foram colocados, lateral a lateral, com afastamento semelhante e com o cuidado de não apanharem zonas que constituíssem uma possível fonte de erro. Esta selecção de pontos foi feita com base na observação dos mapas de velocidades e tensões de Reynolds médios temporais, como se exemplifica na Figura 5.9. O número de perfis escolhido é analisado na secção 6.1.

Depois de identificadas as coordenadas de todos os pontos onde se considerou um perfil de velocidades médias, calcularam-se as áreas de influência de cada perfil pelo método dos polígonos de Voronoï. Note-se que, para os ensaios V1 e V2, se considerou uma área fictícia na zona das hastes. Se este procedimento não tivesse sido executado, as áreas de influência dos pontos mais próximos das hastes não seria adequada. Nesse caso, os perfis de velocidades desses pontos seriam afectos a uma área maior, pelo que iriam enviesar os resultados da média espacial. A Figura 5.10 apresenta um exemplo do resultado do cálculo da áreas de influência pelo método dos polígonos de Voronoï.

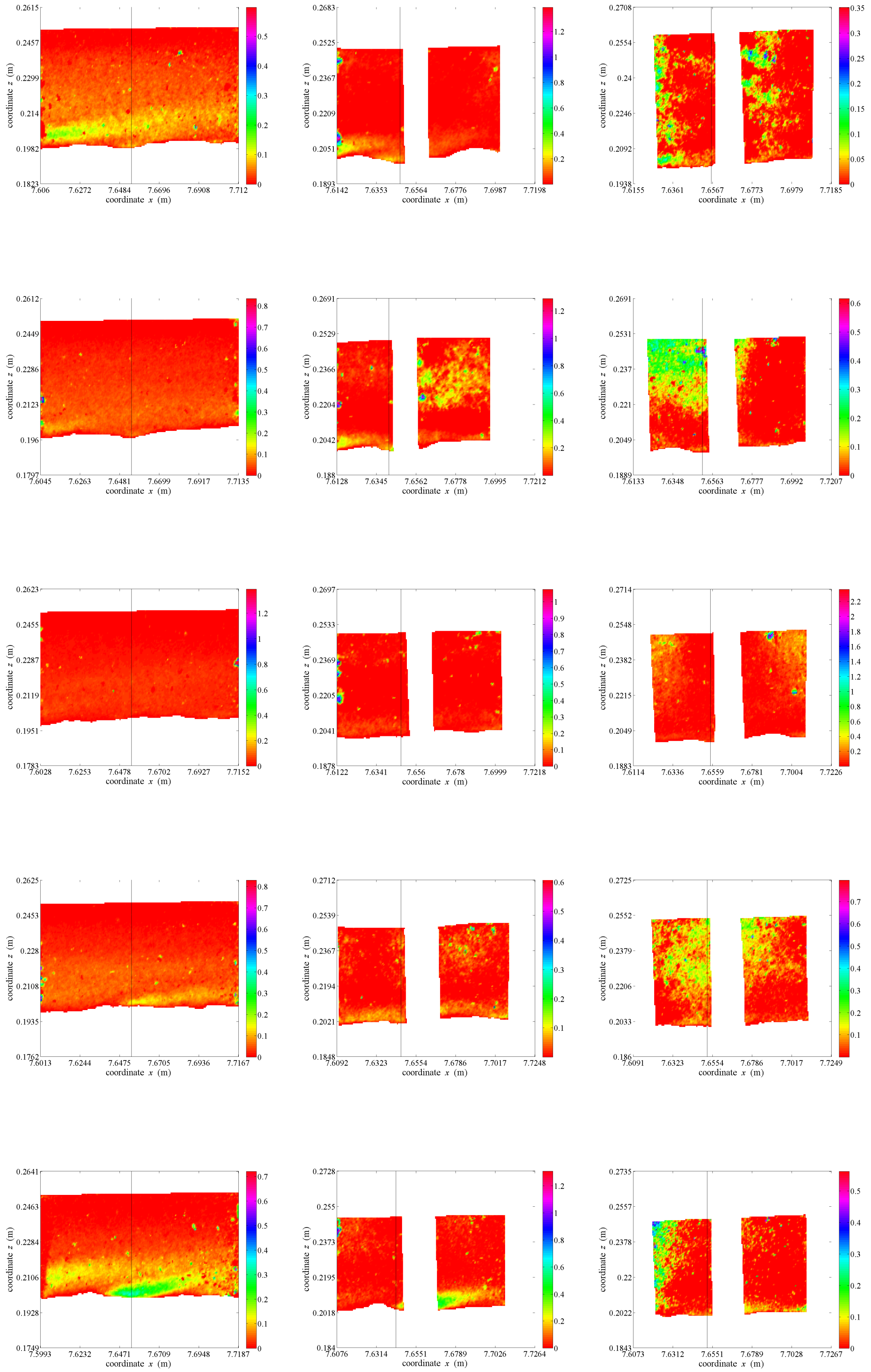


Figura 5.8: Mapas de tensões tangenciais de Reynolds médias temporais. Colunas: Ensaios SV, V1 e V2 (da esquerda para a direita). Linhas: Posições laterais de P1 a P5 (de cima para baixo).

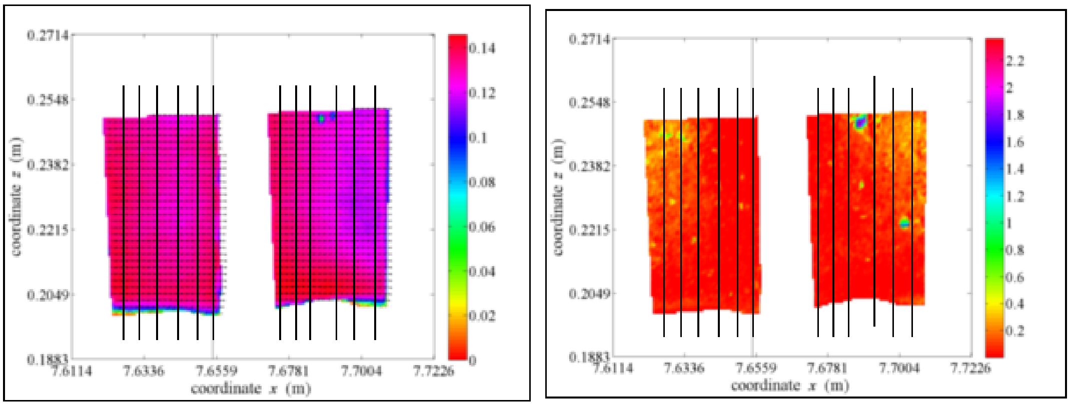


Figura 5.9: Mapas médios temporais da velocidade (a) e da tensão de Reynolds (b) sobre os quais se identificaram as posições longitudinais dos pontos para a localização dos perfis de velocidade média temporal.

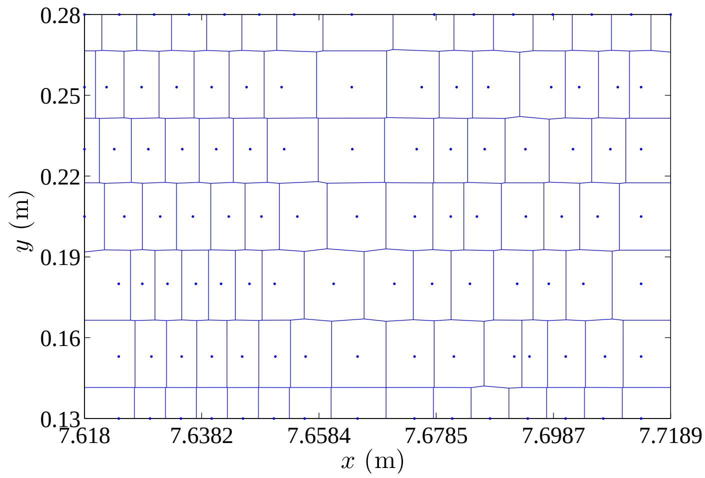
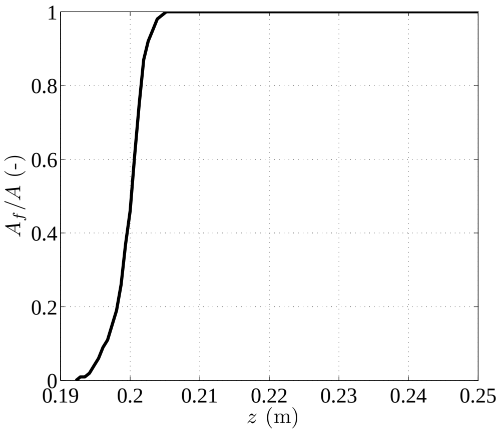


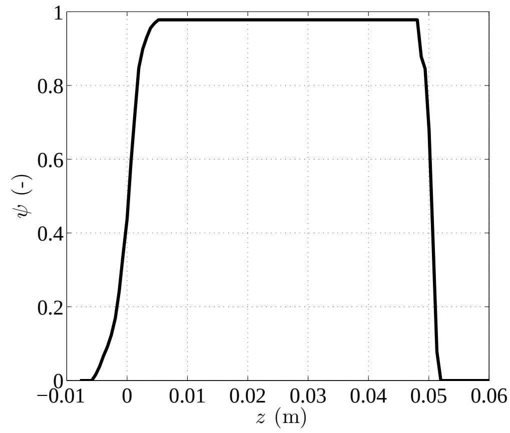
Figura 5.10: Exemplo de um diagrama de polígonos de Voronoï para um conjunto de 60 pontos. Os pontos centrais, na horizontal, correspondem à localização das hastes e dão origem a áreas fictícias que não serão consideradas no cálculo da média espacial.

5.3.6 Função de vazios

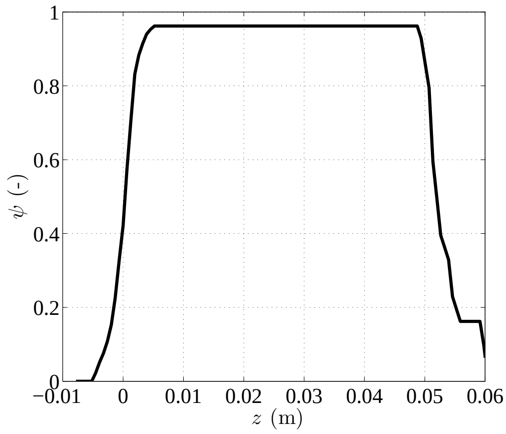
Para finalizar a descrição do tratamento de dados, apresenta-se, nas Figuras 5.11, as funções de vazios de cada ensaio.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.11: Função de vazios correspondente ao ensaio SV.

As funções de vazios apresentadas são a composição das funções de vazios das oscilações do leito (Figura 5.5), da densidade das hastes (Tabela 5.1) e da distribuição acumulada das oscilações na superfície livre, de acordo com a definição (2.28).

Capítulo 6

Resultados e discussão

6.1 Análise de sensibilidade

6.1.1 Considerações iniciais

Antes de calcular as variáveis que permitirão caracterizar o escoamento no interior de uma zona povoada por hastes rígidas e emersas, é necessário avaliar as várias possibilidades de organização dos dados, no sentido de conseguir escolher a que conduz a resultados com menor erro.

Referiu-se, na discussão do procedimento experimental (capítulo 4), que o número de mapas de velocidade instantânea susceptíveis de serem capturados pelo sistema de aquisição é limitado pela dimensão da memória RAM alocada ao sistema: não é possível capturar mais que 490 imagens em cada instância de aquisição (*run* na terminologia do programa de aquisição). Existem também condicionantes em relação ao tempo disponível para recolher e processar os dados e também em relação ao espaço disponível para os guardar. Em relação aos primeiros, o tempo total de processamento (aquisição, gravação em disco, tratamento primário, análise e exportação) é de cerca de 3.0 h (tempo de utilização ininterrupta e exclusiva do CPU) por cada conjunto de 490 mapas num PC de duplo processador a 2.5 GHz.

Assim, procurou-se adquirir uma base de dados suficientemente grande para garantir a qualidade dos resultados mas ainda susceptível de ser tratada em prazos aceitáveis. Optou-se por executar 12 instâncias de aquisição em cada posição lateral da câmara, o que corresponde a cerca de 36 h de tempo de processamento para cada posição da câmara e 180 h para cada ensaio com vegetação. Refira-se que, considerando 8 horas úteis diárias para o processamento, o tempo dedicado a esta tarefa, para o conjunto dos ensaios realizados foi de aproximadamente 2.25 meses.

As séries temporais para cada ponto de cada perfil de velocidades têm que ser independentes. Caso contrário, a média espacial perderia qualidade por enviesamento já que a mesma informação estaria presente em mais que um perfil. Deste modo, o número de perfis susceptível de ser obtido de uma base de dados com 12 instâncias é $NP = 12/NR$, em que NR é o número de instâncias de aquisição pretendidas para cada perfil. Naturalmente, quanto maior o número de instâncias por perfil maior será a qualidade da média temporal. No entanto, será menor o número total de perfis médios temporais, pelo que a qualidade das médias espaciais decrescerá. Este aspecto não tem merecido a devida relevância em estudos que fazem uso da metodologia DAM no âmbito da hidráulica fluvial.

De acordo com estas premissas, procede-se, de seguida, à apresentação da análise de sensibilidade à dimensão da janela temporal e ao número de perfis utilizados para calcular as variáveis médias temporais e espaciais.

6.1.2 Janela temporal

A caracterização de escoamentos turbulentos requer a utilização de janelas temporais suficientemente alargadas para captar todas as escalas do escoamento, nomeadamente as flutuações com grande comprimento de onda e baixa frequência. No entanto, quanto maior for a janela temporal utilizada maior será o tempo necessário para o processamento dos dados e o espaço necessário para o seu armazenamento. Como em qualquer situação prática existem limites no que concerne à disponibilidade de tempo e de espaço, pelo que é necessário encontrar um compromisso entre estes aspectos e a largura da janela temporal para a definição das grandezas médias temporais.

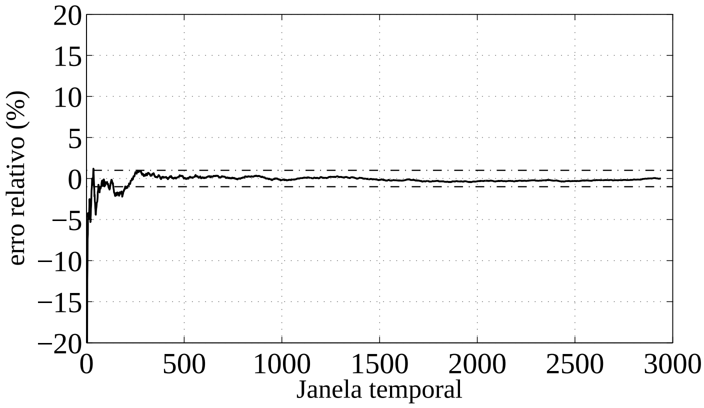
Neste sentido, procedeu-se à analise de sensibilidade da média temporal da componente longitudinal da velocidade face ao número de mapas instantâneos utilizados na sua definição. Com este objectivo, calculou-se o erro relativo em função da dimensão da janela temporal em três posições longitudinais: i) a montante de uma haste e a uma distância desta de cerca de $1d$, ii) a jusante de uma haste, à distância desta de $1d$ e, portanto, ainda na sua zona de sombra (White & Nepf 2003) e iii) a jusante de uma haste, a cerca de $2d$ de distância desta e, presumivelmente, no encontro das esteiras turbulentas por ela projectadas. Para cada uma destas posições procurou-se calcular o erro relativo junto ao leito onde o escoamento é perturbado pelas oscilações do fundo, sensivelmente a meio da coluna de água e nas proximidades da superfície livre, onde o escoamento é bastante perturbado por oscilações na superfície livre. Apresenta-se nas Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 o erro relativo em função da janela temporal, para as diferentes cotas, em cada uma das posições referidas.

O erro relativo, ϵ_t é definido através da expressão

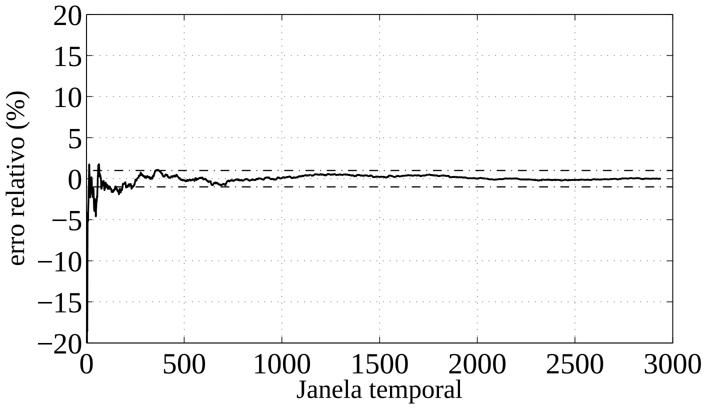
$$\epsilon_t = \frac{\bar{u}_t - \bar{u}_m}{\bar{u}_m} \times 100 \tag{6.1}$$

onde $\bar{u}_t$ representa o valor médio da velocidade para uma dada janela temporal e $\bar{u}_m$ é o valor médio da velocidade correspondente à maior janela temporal. Os dados utilizados para calcular os erros relativos foram adquiridos na situação de maior densidade de hastes e na secção que corresponde ao centro do canal (afastada de 20.5 cm da parede do canal).

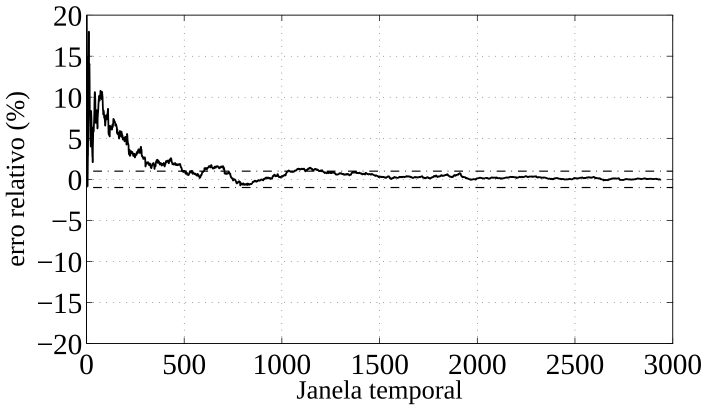
A análise das Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 permite concluir que, em geral, o erro relativo é da ordem de 1% para janelas temporais constituídas por mais de 490 mapas instantâneos, o



(a)

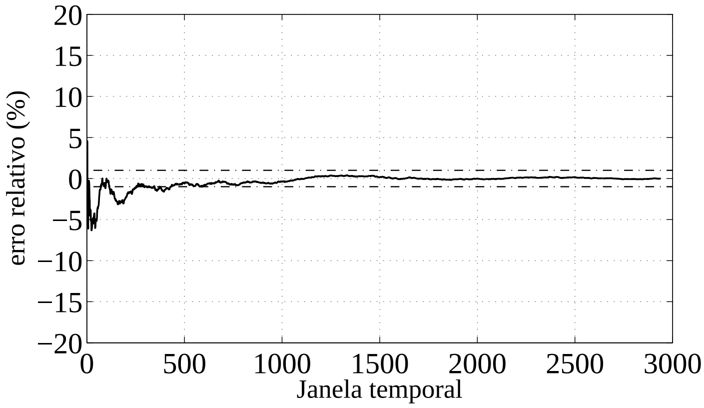


(b)

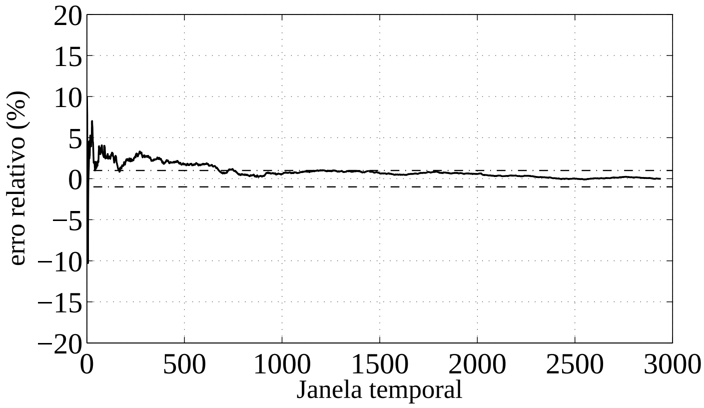


(c)

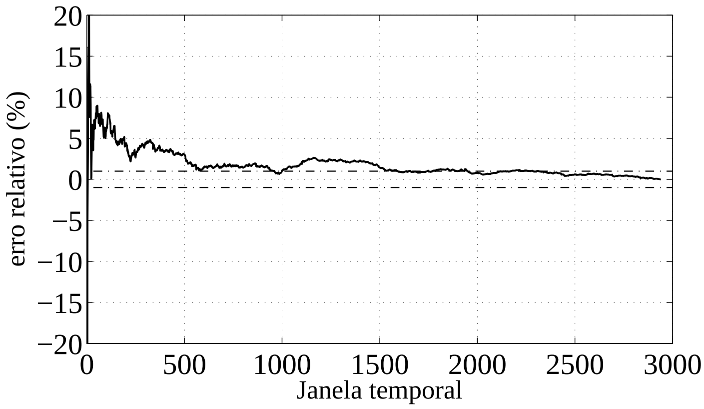
Figura 6.1: Erro relativo em função da janela temporal, numa posição a montante de uma haste, a cerca de 1.3 cm (a), 3.5 cm (b) e 5.0 cm (c) a cima do nível médio do leito. As linhas a traço ponto delimitam a faixa onde o erro é inferior a 1%.



(a)

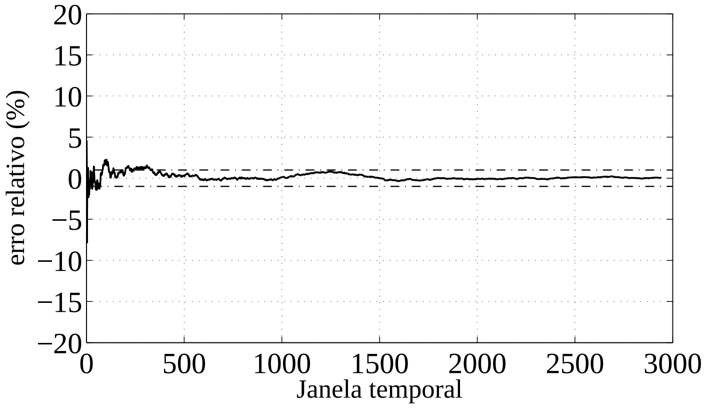


(b)

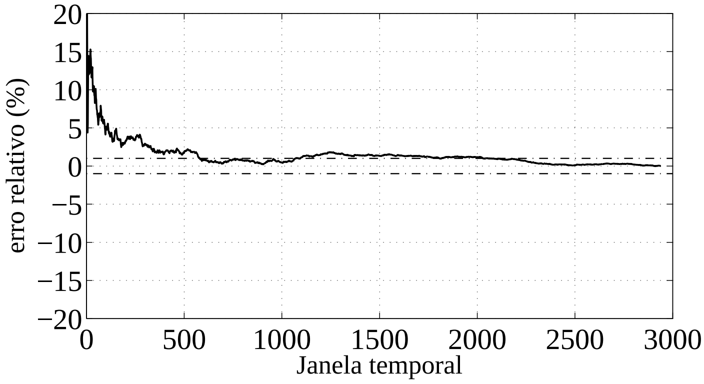


(c)

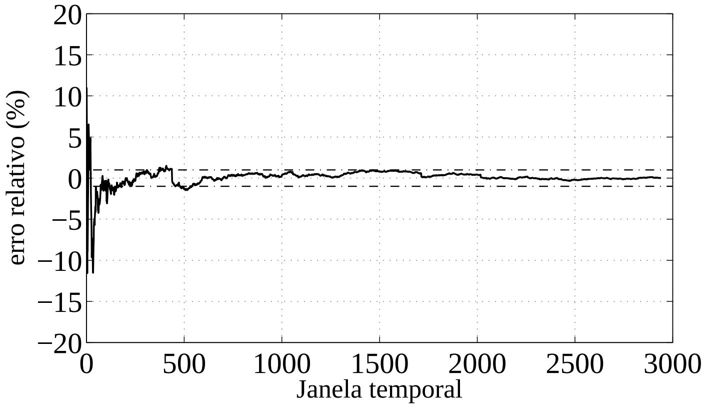
Figura 6.2: Erro relativo em função da janela temporal, numa posição a jusante de uma haste, a cerca de 1.3 cm (a), 3.5 cm (b) e 5.0 cm (c) a cima do nível médio do leito. As linhas a traço ponto delimitam a faixa onde o erro é inferior a 1%



(a)



(b)



(c)

Figura 6.3: Erro relativo em função da janela temporal, numa posição a cerca de $2d$ a jusante da haste, a cerca de 1.3 cm (a), 3.5 cm (b) e 5.0 cm (c) a cima do nível médio do leito. As linhas a traço ponto delimitam a faixa onde o erro é inferior a 1%.

que se considera ser aceitável. Para janelas temporais cuja dimensão se situa entre 490 e 980 mapas, não se regista uma acentuada convergência da média temporal. Pelo contrário, verifica-se que os erros obtidos com 490 e 980 mapas têm, em geral, a mesma ordem de grandeza. Os valores mais elevados do erro relativo registam-se na cota mais próxima da superfície livre, o que se deve às oscilações que nela se observaram. Neste caso, são necessárias séries temporais com mais que 2500 mapas para garantir a convergência da média para erros menores que 0.5%.

6.1.3 Densidade de amostragem de perfis

Sendo a DAM uma técnica ainda pouco aplicada aos escoamentos por entre hastes rígidas simulando zonas com vegetação emersa, é importante fazer uma análise à resposta do processo de determinação da média espacial face ao número de perfis utilizados na definição (2.24).

Para avaliar a sensibilidade ao número de perfis, escolheu-se recorrer à tensão dispersiva normal longitudinal porque esta quantidade é, de entre as tensões dispersivas, a que apresenta valores mais elevados e a mais sensível a perturbações no escoamento. A sua sensibilidade é comprovada pelo facto de vários autores recorrerem a esta quantidade para determinar o topo da camada influenciada pela rugosidade do fundo em escoamentos sobre fronteiras rugosas (Aberle 2006).

Quanto mais perfis de velocidade média temporal estiverem disponíveis maior será a qualidade da caracterização do escoamento através da DAM. Verificou-se que, se $NR = 1$, poderiam obter-se 12 perfis em cada posição lateral da câmara. Tendo sido medidas 5 posições laterais, é possível, para $NR = 1$, obter 60 perfis de velocidade média. Recorde-se que o erro na média temporal é da ordem de 1%. Considera-se que esta é a maior densidade de amostragem de perfis. Comparou-se esta alternativa com o uso de 30 perfis, correspondente a $NR = 2$. Dada que a heterogeneidade espacial do escoamento era expectavelmente elevada, considerou-se pouco razoável testar valores mais elevados de NR. Apresenta-se na Figura 6.4 a diferença relativa associada ao cálculo das quantidades médias espaciais e temporais com 30 perfis face à possibilidade de utilizar 60. Esta diferença adimensional, ϵ_s foi calculada da seguinte forma

$$\epsilon_s = \frac{\left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle_{30} - \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle_{60}}{\left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle_{60}} \times 100 \tag{6.2}$$

onde $\left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle_{30}$ e $\left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle_{60}$ corresponde ao valor médio temporal e espacial da tensão dispersiva normal longitudinal calculada com 30 e 60 perfis.

A análise da Figura 6.4 revela que a diferença entre os resultados correspondentes a amostragens com 30 e 60 perfis é menor que 5% na zona intermédia do escoamento com maior densidade de vegetação e menor que 10% na zona intermédia do escoamento com menor densidade de vegetação. Junto ao fundo e junto à superfície livre, a diferença relativa é, em ambos os casos, muito superior. Neste caso, a elevada diferença registada

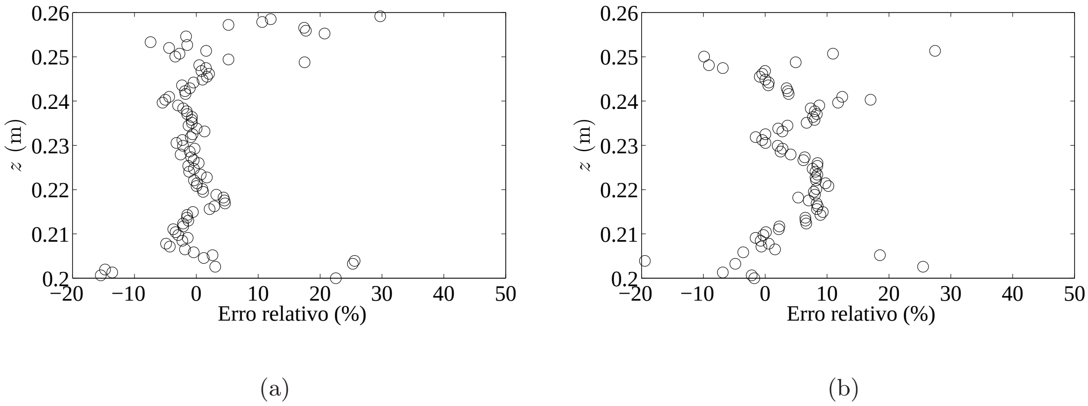


Figura 6.4: Análise de sensibilidade ao número de perfis utilizado para aplicar a DAM, nos ensaios a) V2 e b) V1.

pode indicar erros possivelmente acumulados desde o processo de aquisição mas só agora identificados.

Considerando que os erros na média temporal são da mesma ordem de grandeza para as duas densidades de amostragem e que há diferenças nos valores da média espacial, é legítimo considerar-se que a amostragem de 60 perfis conduz a médias espaciais de melhor qualidade. É de salientar que esta conclusão é especialmente válida no caso do escoamento com a menor densidade de hastes.

6.1.4 Discussão da análise de sensibilidade

Os resultados da análise de sensibilidade à densidade de amostragem podem explicar-se com os argumentos que se apresentam de seguida. O maior afastamento das hastes conduz a uma maior heterogeneidade espacial no escoamento. Neste caso, junto e a jusante de cada estaca o escoamento é muito perturbado e apresenta uma configuração semelhante à de um obstáculo emerso e isolado (Howells 1974, Koch & Ladd 1997, Zang & Zhou 2001, White & Nepf 2003). Assim, para representar esta elevada variabilidade espacial é necessário recorrer a uma malha densa de pontos de amostragem de perfis ou, deliberadamente, escolher perfis nas zonas que evidenciam maiores gradientes espaciais. Naturalmente esta última opção é pouco prática pois carece o conhecimento prévio do escoamento.

Em relação à maior densidade, como o afastamento entre as hastes é menor, a dispersão não turbulenta é mais eficaz, tornando-se o escoamento menos heterogéneo. Deste modo, uma amostragem menos densa de pontos permite calcular, com uma margem de erro menor que 5% na zona intermédia da coluna de água, as médias espaciais das grandezas que caracterizam o escoamento no interior da zona povoada pelas hastes.

Com base na análise de sensibilidade à dimensão da janela temporal e ao número de perfis, conclui-se que é preferível caracterizar o escoamento com uma malha de 60 pontos de amostragem de perfis, pois os erros associados ao uso de uma malha com apenas 30 pontos são demasiado elevados, no caso do ensaio V1. Assim, cada um dos perfis de velocidade média temporal será obtido com 490 mapas instantâneos. Relembre-se que o erro nas médias temporais cometido com 490 e com 980 mapas é da mesma ordem de grandeza, pelo que o procedimento adoptado não incrementará os erros provindos do cálculo da média temporal.

6.2 Perfis do escoamento médio temporal

Pela análise de sensibilidade apresentada na secção anterior, concluiu-se que, para caracterizar adequadamente as variações espaciais do escoamento, se deve calcular a média espacial das quantidades turbulentas com 60 perfis médios temporais. Estes perfis, que constituem os dados para a aplicação da metodologia DAM, apresentam-se nas Figuras 6.5, 6.7 e 6.9 para os ensaios SV, V1 e V2, respectivamente. Nestas figuras apresentam-se os perfis médios temporais da velocidade longitudinal ($\bar{u}$), velocidade vertical ($\bar{w}$), intensidade turbulenta longitudinal $\left(\sqrt{\overline{u'^2}}\right)$, intensidade turbulenta vertical $\left(\sqrt{\overline{w'^2}}\right)$, tensão tangencial de Reynolds $-\rho^{(w)}\overline{u'w'}$ e do gradiente vertical da velocidade longitudinal $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$.

As Figuras 6.6, 6.8 e 6.10 apresentam as áreas de influência de cada um dos 60 perfis médios temporais considerados, determinadas pelo método dos poligonos de Voronoï, como se explicou em 5.3.5.

As Figuras 6.5, 6.7 e 6.9 mostram que o escoamento numa zona com hastes rígidas emersas apresenta grande variabilidade espacial. De forma geral, nota-se que a variabilidade das quantidades apresentadas aumenta com o aumento da densidade de hastes no seio do escoamento. Os perfis do ensaio SV apresentam-se bastante concentrados ao passo que nos ensaios V1 e V2 ocupam uma faixa relativamente larga de valores.

Os perfis da velocidade longitudinal no ensaio SV (Figura 6.5) apresentam uma forma aparentemente logarítmica o que indicia que, para as condições do ensaio, o escoamento era um escoamento turbulento de camada limite bem desenvolvida. Nota-se ainda que, junto ao fundo, estes perfis apresentam um andamento quase linear o que revela uma subsistência da camada viscosa. A fraca variabilidade espacial neste ensaio é bem identificada nos perfis de velocidade vertical, onde a maior variabilidade se regista junto ao fundo pela influência das oscilações da forma do leito.

Nos ensaios com hastes (Figuras 6.7 e 6.9), no perfil de velocidade longitudinal já não é identificável a forma logarítmica e identifica-se uma forte aceleração do escoamento no fundo, que revela um comportamento semelhante ao dos escoamentos com aspecto de jacto de parede. Apesar de em ambos os ensaios ser notória a forte variabilidade espacial induzida pela presença das hastes, verifica-se que, no caso de maior densidade, esta apresenta uma distribuição muito mais uniforme que no ensaio com menor densidade. Comparando os perfis da velocidade e da intensidade turbulenta longitudinais do ensaio V1 e V2, nota-se que, no segundo, a faixa de variação está completamente preenchida ao passo que no primeiro existe uma concentração de perfis numa faixa relativamente estreita e uma zona

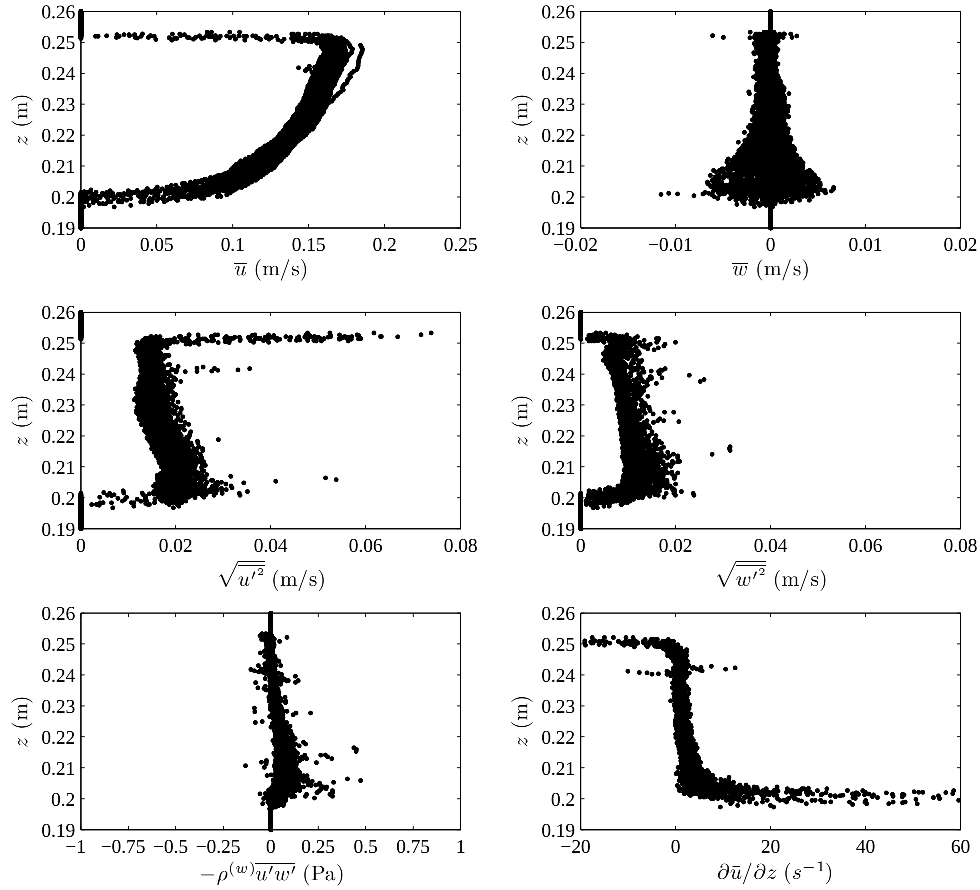


Figura 6.5: Quantidades médias temporais dos 60 perfis utilizados na DAM, correspondentes ao ensaio SV.

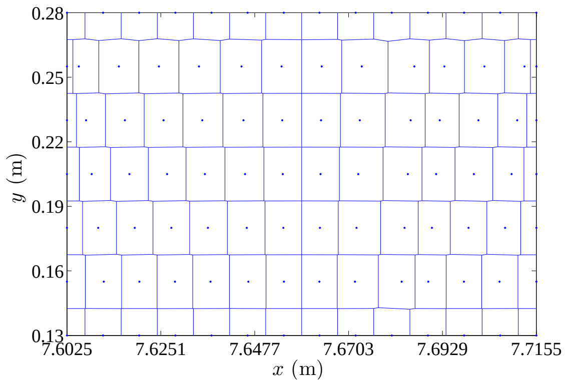


Figura 6.6: Localização espacial dos 60 perfis médios temporais e a correspondente área de influência, no ensaio SV.

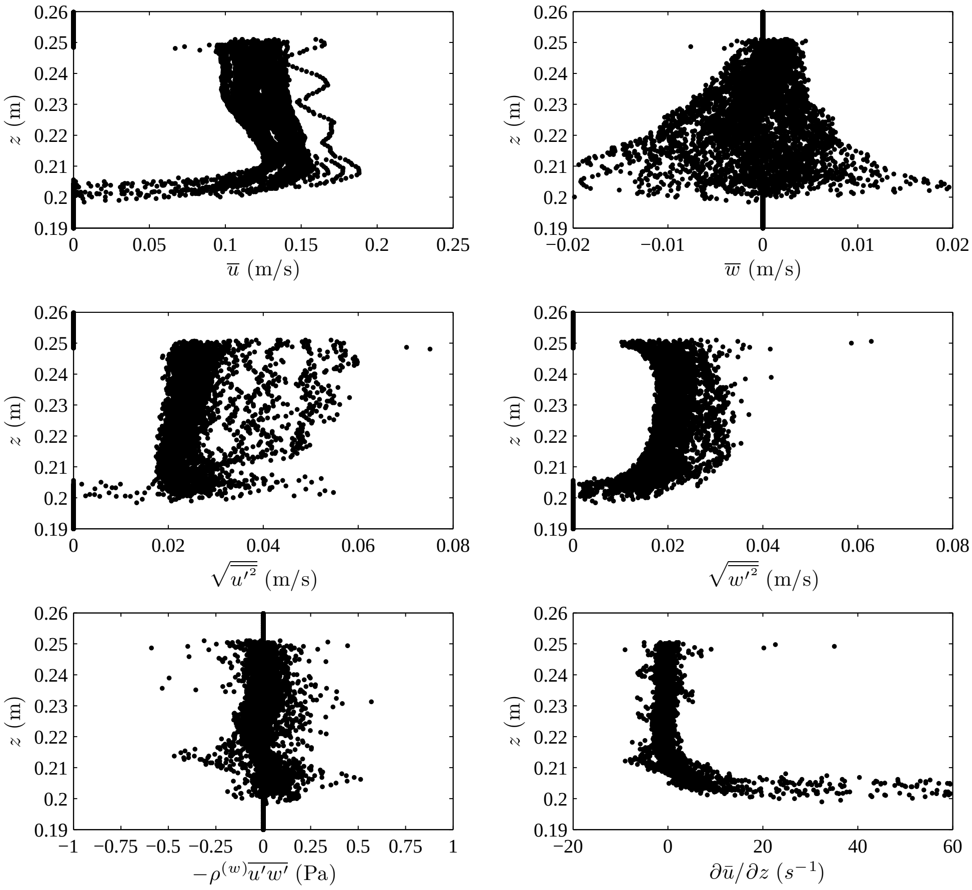


Figura 6.7: Quantidades médias temporais dos 60 perfis utilizados na DAM, correspondentes ao ensaio V1.

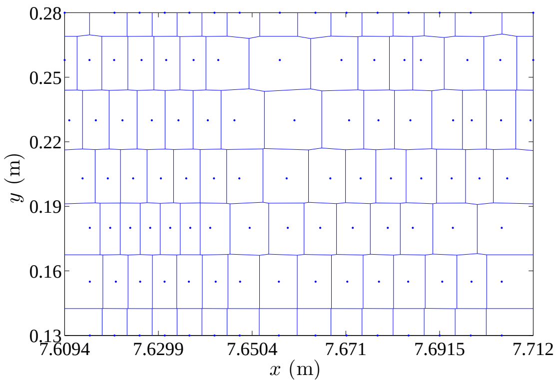


Figura 6.8: Localização espacial dos 60 perfis médios temporais e a correspondente área de influência, no ensaio V1.

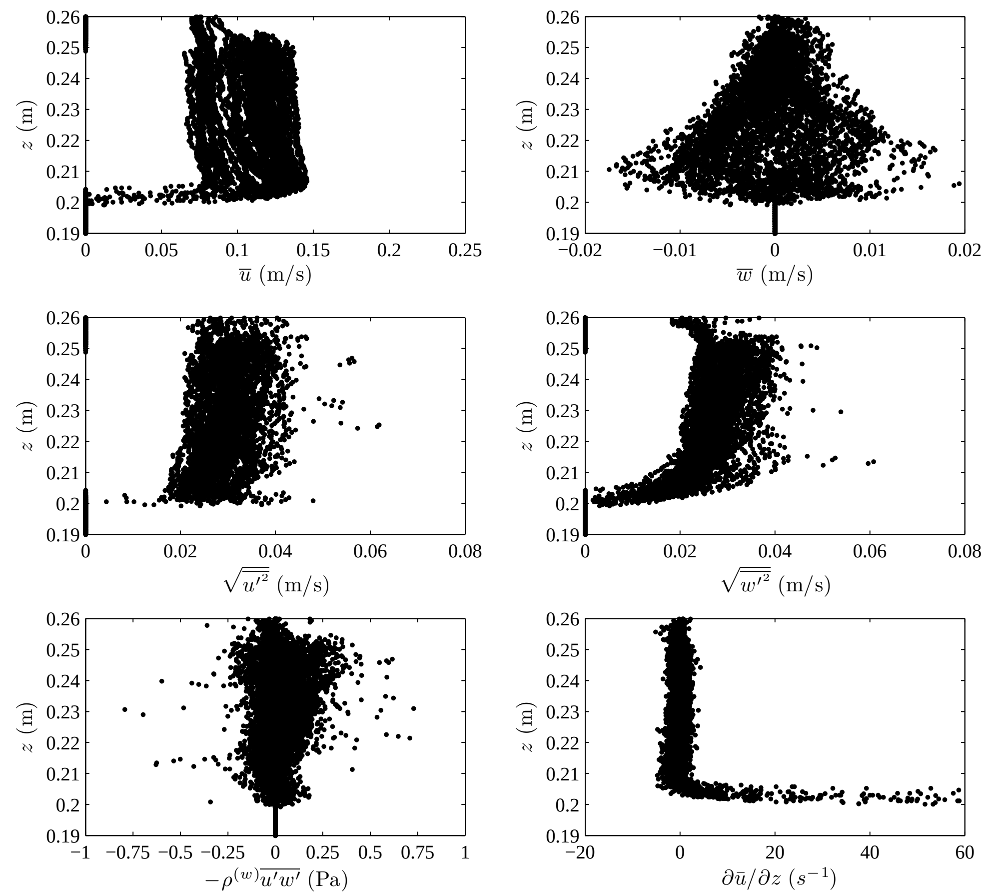


Figura 6.9: Quantidades médias temporais dos 60 perfis utilizados na DAM, correspondentes ao ensaio V2.

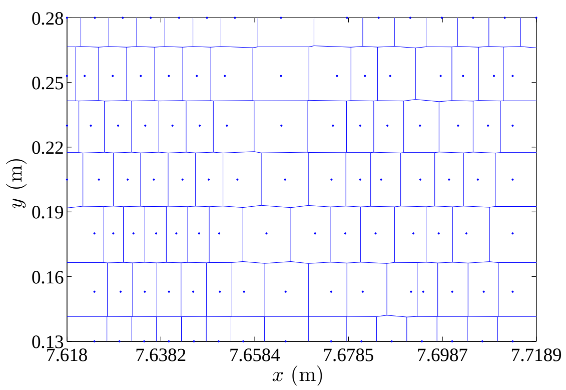


Figura 6.10: Localização espacial dos 60 perfis médios temporais e a correspondente área de influência, no ensaio V2.

de dispersão. Aparentemente, no caso de a densidade de hastes ser pequena, a heterogeneidade concentra-se nas zonas de esteira. Estas observações vêm corroborar a explicação apresentada em 6.1.4 para a significativa diferença entre os resultados obtidos com 30 e 60 perfis. Assim, conclui-se que a aplicação da DAM a escoamentos com elementos rígidos e emersos é extremamente sensível à localização dos perfis e esta questão é tanto mais importante quanto menor for a densidade desses elementos. Para ser possível caracterizar um escoamento nestas condições é imperativo que se disponha de um número suficiente de perfis e que estes sejam devidamente localizados, especialmente nas zonas de maior heterogeneidade, isto é, junto aos elementos emersos.

6.3 Caracterização detalhada do escoamento médio

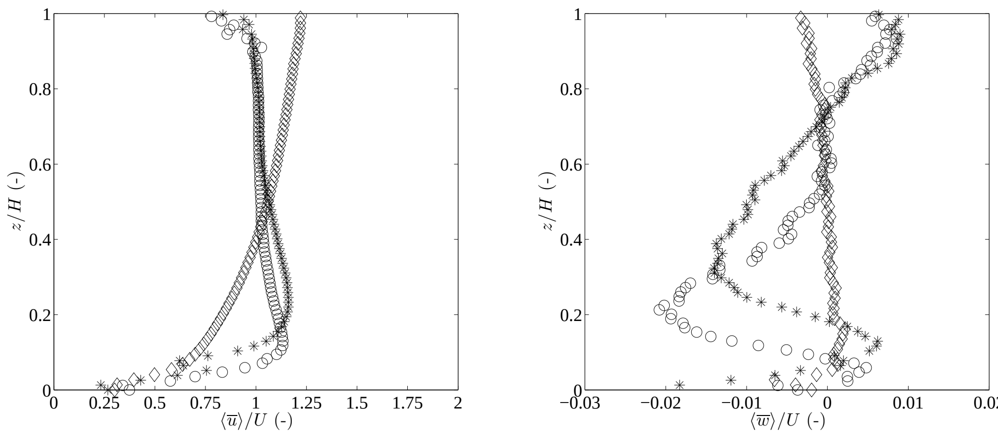
Nesta secção apresentam-se as quantidades turbulentas, que permitem caracterizar o escoamento, em termos médios temporais e espaciais como resultado da aplicação DAM aos dados apresentados na secção anterior.

Doravante, quando se invocar o conceito de média estará subjacente que este se refere à média temporal e espacial e usa-se a notação

$$[\langle \bar{u} \rangle] = U$$

para simplificar a referência à média na coluna de água das quantidades médias temporais e espaciais.

Da Figura 6.11 à 6.16 apresentam-se, para cada ensaio, as quantidades turbulentas médias calculadas para caracterizar o escoamento. A observação do andamento dos perfis



(a) (b)

Figura 6.11: Componentes longitudinal (a) e vertical (b) da velocidade média. Os losangos, asteriscos e círculos correspondem, respectivamente, aos ensaios SV, V1 e V2.

da velocidade média, longitudinal e vertical, para os três ensaios mostra que estes tendem para valores próximos de zero com a aproximação ao fundo do canal. Tratando-se de um escoamento com a fronteira fixa, pela condição de não escorregamento, as velocidades têm de ser exactamente nulas no fundo. Como a cota identificada nos gráficos como zero corresponde ao plano médio das oscilações do fundo, o facto de a velocidade não aparecer nula para esta cota revela que existe escoamento dentro das cavidades de erosão.

A Figura 6.11a evidencia que o escoamento turbulento de camada limite do ensaio SV se transforma num escoamento com aspecto de jacto de parede (Schlichting 1968), junto ao fundo, nos ensaios V1 e V2. Se não existissem oscilações do fundo, os perfis de velocidades longitudinais médias dos ensaios com hastes seriam praticamente constantes, exprimindo uma força de arrastamento continua ao longo da coluna de água. Nestes perfis, a redução da velocidade junto à superfície livre traduz um equilíbrio de massa que está relacionado com a existência das fortes oscilações da superfície livre.

Em relação à componente vertical da velocidade média, os perfis são compatíveis com o escoamento acelerado que se verificou em todos os ensaios, na medida em que apresentam valores essencialmente negativos. A existência de cotas onde a velocidade vertical é positiva, revela que nem sempre o escoamento ultrapassa os obstáculos com velocidades descendentes. Suspeita-se, sem grande certeza, que este fenómeno possa estar relacionado com o facto deste tipo de escoamentos apresentar carácter tridimensional. No entanto, seria necessário observar o escoamento na direcção transversal para explicar com mais certeza este fenómeno.

Também os perfis das tensões normais de Reynolds médias (Figura 6.12), para o escoamento do ensaio SV, apresentam aspecto de escoamento turbulento de parede lisa influenciado pela camada limite (Nezu & Nakagawa 1993, pp. 52-55).

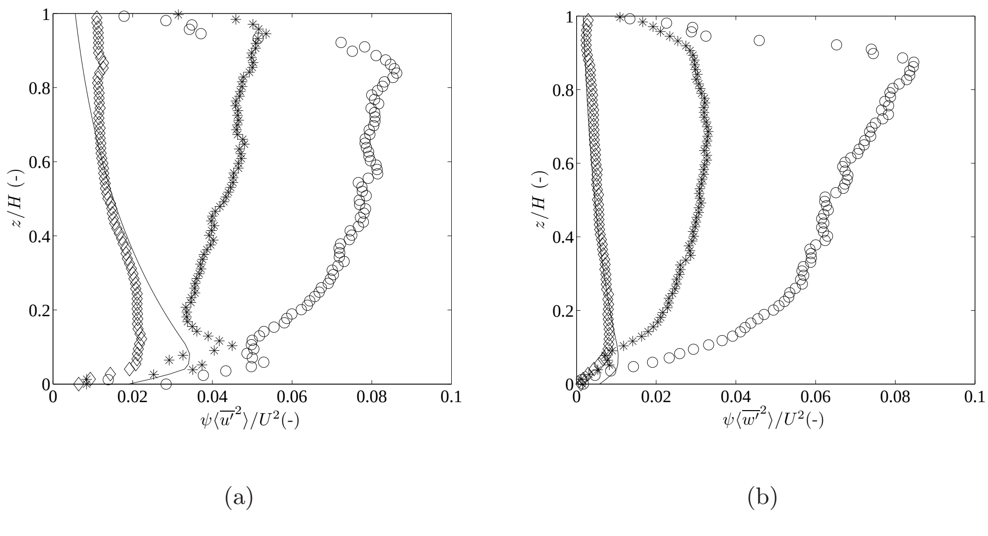
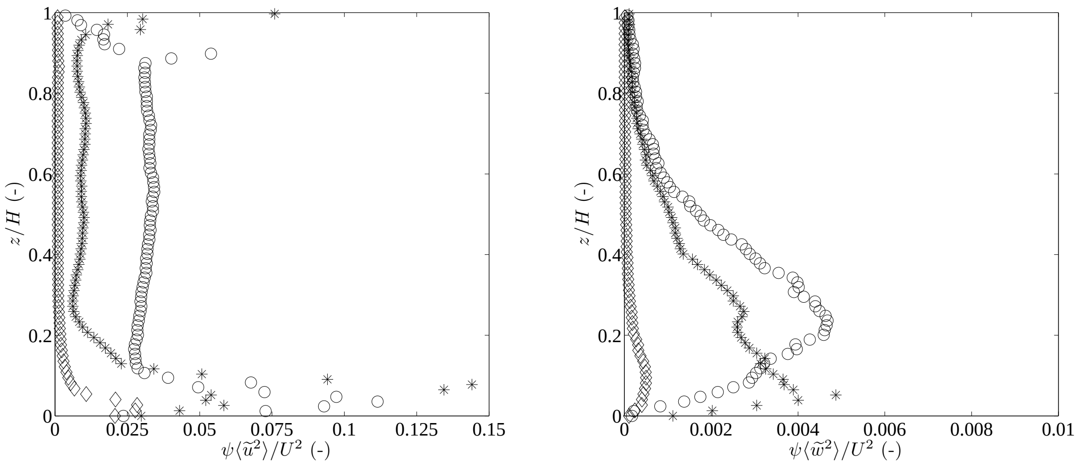


Figura 6.12: Tensão normal longitudinal (a) e vertical (b) de Reynolds média. Os losangos, asteriscos e círculos correspondem, respectivamente, aos ensaios SV, V1 e V2. As linhas continuas em a) e b) correspondem, respectivamente, às equações $\langle\overline{u'}\rangle/u_* = 2.30e^{-z/h}$ e $\langle\overline{w'}\rangle/u_* = 1.27e^{-z/h}$ apresentadas por Nezu & Nakagawa (1993) pp. 53 e 54.

As diferenças entre os perfis desta quantidade na ausência e na presença de elementos de rugosidade emersos, destacam que para nos últimos o escoamento deixa de ser afectado pela camada limite junto ao fundo e regista-se um significativo aumento dos valores das tensões normais de Reynolds médias. Verifica-se, assim que, a presença das hastes constitui uma fonte de turbulência. Comparando os três ensaios, conclui-se que a tensão normal de Reynolds, longitudinal e vertical, aumenta com a densidade de hastes no interior do escoamento. Nota-se, ainda, que as oscilações da superfície livre conduzem a um amortecimento da turbulência.

Quanto às tensões normais dispersivas, verifica-se que, de facto, a tensão normal longitudinal dispersiva média é um parâmetro adequado para a detecção da influência do fundo no escoamento. É muito claro, pela observação dos gráficos da Figura 6.13a, o valor da cota até à qual faz sentir o efeito da heterogeneidade do fundo.



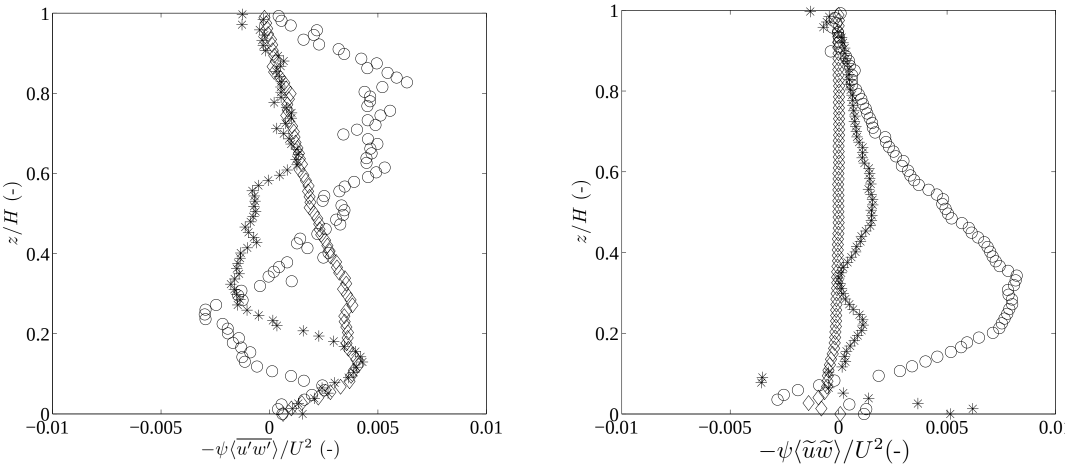
(a) (b)

Figura 6.13: Tensão normal dispersiva média, longitudinal (a) e vertical (b). Os losangos, asteriscos e círculos correspondem, respectivamente, aos ensaios SV, V1 e V2.

Nota-se que os escoamento na presença de hastes emersas apresentam maior dispersão na direcção longitudinal do que na direcção vertical. Comparando as primeiras com a tensão normal de Reynolds na mesma direcção, conclui-se que as tensões dispersivas não são desprezáveis, e aparentemente, este facto será tão mais evidente quanto maior for a densidade de hastes.

A Figura 6.13b indica que a tensão normal vertical dispersiva média será praticamente nula junto à fronteira, vai aumentado devido às oscilações do fundo e, com a proximidade à superfície livre, tende a anular-se.

Verifica-se, pela observação da Figura 6.14a, que a vegetação consegue induzir maior isotropia na turbulência junto ao fundo e maior anisotropia da turbulência nas proximidades da superfície livre.



(a) (b)

Figura 6.14: a) Tensão tangencial de Reynolds média, b) tensão tangencial dispersiva média. Os losangos, asteriscos e círculos correspondem, respectivamente, aos ensaios SV, V1 e V2.

Comparando as Figuras 6.14a e 6.14b, conclui-se que os fluxos dispersivos da quantidade de movimento não podem ser considerados desprezáveis face aos fluxos turbulentos. Como se observa nas Figuras 6.15 e 6.16, as tensões tangenciais dispersivas são da mesma ordem de grandeza ou, eventualmente, maiores que as tensões tangenciais de Reynolds nos escoamentos no interior de uma zona densamente povoada com hastes rígidas.

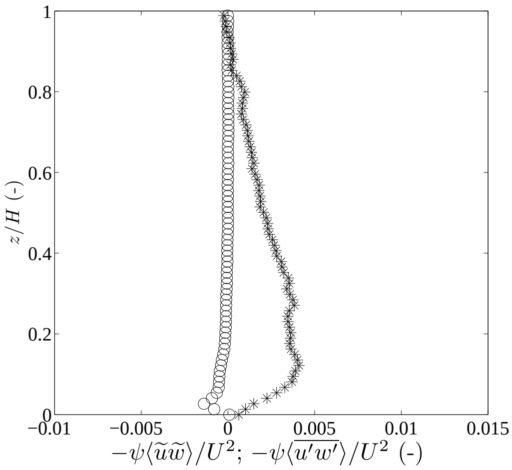
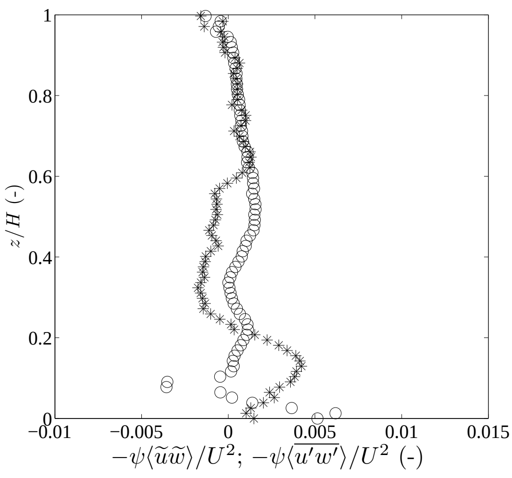
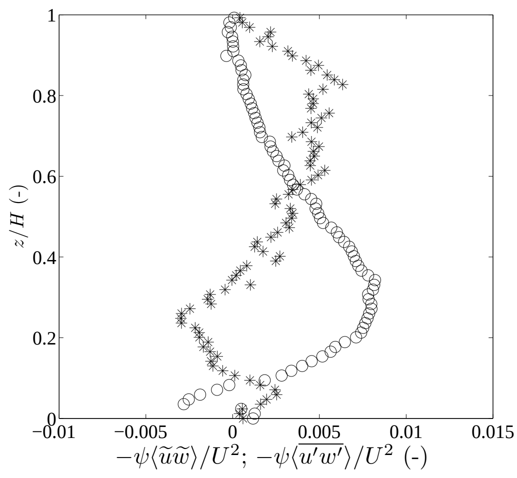


Figura 6.15: Sobreposição das tensões tangenciais dispersivas (círculos) e de Reynolds (asterisco), para o ensaio SV.



(a)



(b)

Figura 6.16: Sobreposição das tensões tangenciais dispersivas (círculos) e de Reynolds (asterisco), para o ensaio: a) V1 e b) V2.

Verifica-se que, em geral, a magnitude das tensões dispersivas não é desprezável face às tensões de Reynolds. Este facto é particularmente evidente no que diz respeito às tensões de corte (Figura 6.15 e 6.16), mas também é aparente nas tensões normais longitudinais. A importância relativa das tensões dispersivas acentua-se com o aumento da densidade da vegetação. Este resultado contradiz a convicção geralmente aceite (eg. Tanino & Nepf 2008), fundada em medições pouco detalhadas, que as tensões dispersivas seriam desprezáveis face às tensões de Reynolds.

6.4 Cálculo das forças de arrastamento nas hastes e no fundo

6.4.1 Distribuição de pressões

Para determinar a distribuição de pressões, em cada uma das camadas, é necessário quantificar a função $\varkappa(x,z)$, definida nas equações (3.49), (3.51) e (3.53). Para quantificar esta equação foram feitas algumas simplificações uma vez que muitos dos termos desta função apresentavam valores significativamente pequenos.

Começando pela análise da camada junto à superfície livre, verifica-se que o primeiro termo da equação (3.49) pode ser desenvolvido da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle}(h-z)\right)=\frac{\partial\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle}}{\partial x}(h-z)+\frac{\partial h}{\partial x}\left[\psi\left\langle\overline{u'w'}\right\rangle\right]_z^{\langle\bar{h}\rangle} \tag{6.3}$$

Na Figura 6.17 pode verificar-se que o gradiente longitudinal das tensões tangenciais de Reynolds é praticamente nulo no ensaio V1. No ensaio V2, este gradiente não é nulo, mas apresenta um valor cuja ordem de grandeza é três vezes menor que a ordem de grandeza da aceleração gravítica. O segundo termo da equação (6.3) também pode ser desprezado uma vez que é o produto de duas grandezas relativamente pequenas. Por exemplo no ensaio V2, $\frac{\partial h}{\partial x} = -0.00560$ e o valor máximo de $\psi \left\langle \overline{u'w'} \right\rangle$, na camada C, é da ordem de 5×10^{-5}, logo o produto destas grandezas é consideravelmente inferior a $g \left(\langle \bar{h} \rangle - z \right)$. Desta forma, comparando com o termo que, na distribuição de pressões, corresponde à pressão hidrostática, primeiro termo da definição (3.49) é perfeitamente desprezável.

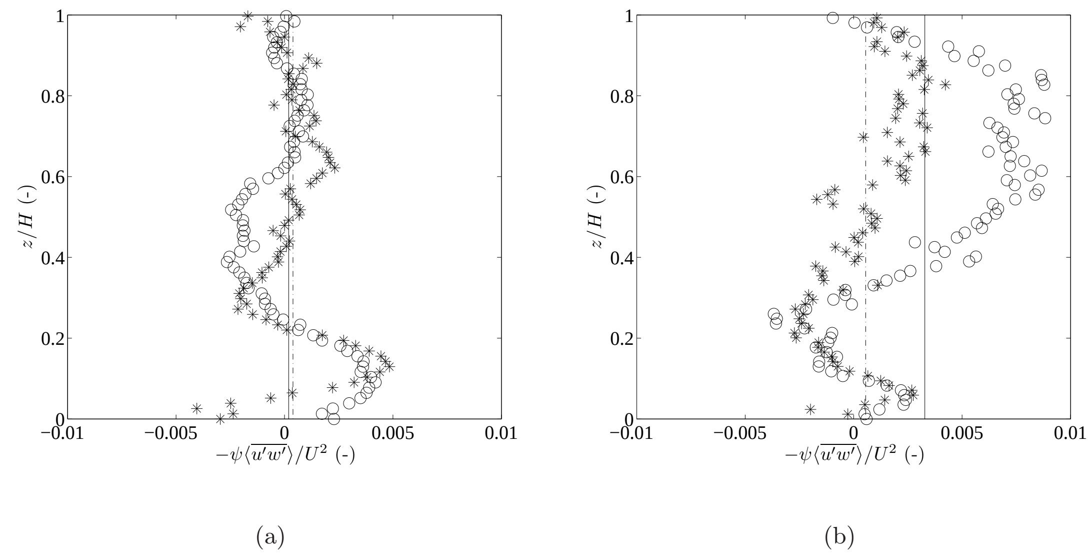


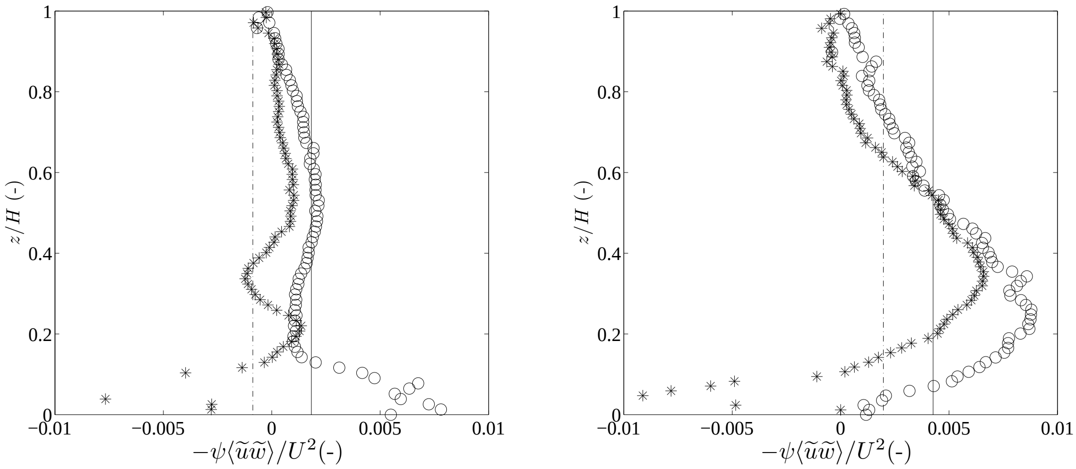
Figura 6.17: Tensão tangencial de Reynolds média e a respectiva média na coluna de água, para o ensaio V1 (a) e V2 (b). Os círculos e a linha continua correspondem à zona de montante. Os asteriscos e a linha a traço-ponto correspondem à zona de jusante.

À semelhança da análise anterior, também o termo $\frac{\partial}{\partial x} \left([\psi \langle \tilde{w}\tilde{u} \rangle] \left(\langle \bar{h} \rangle - z \right) \right)$ pode ser desprezado face à pressão hidrostática, uma vez que as tensões tangenciais dispersivas são da ordem de grandeza das tensões tangenciais de Reynolds (Figuras 6.17 e 6.18).

A Figura 6.14 mostra que as tensões tangenciais dispersivas e de Reynolds junto à superfície livre são praticamente nulas, pelo que os termos $\frac{\partial h}{\partial x} \left(\psi \langle \tilde{w}\tilde{u} \rangle \right)\big|_h$ e $\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \overline{u'w'} \right\rangle \right)\big|_h$ também desaparecem.

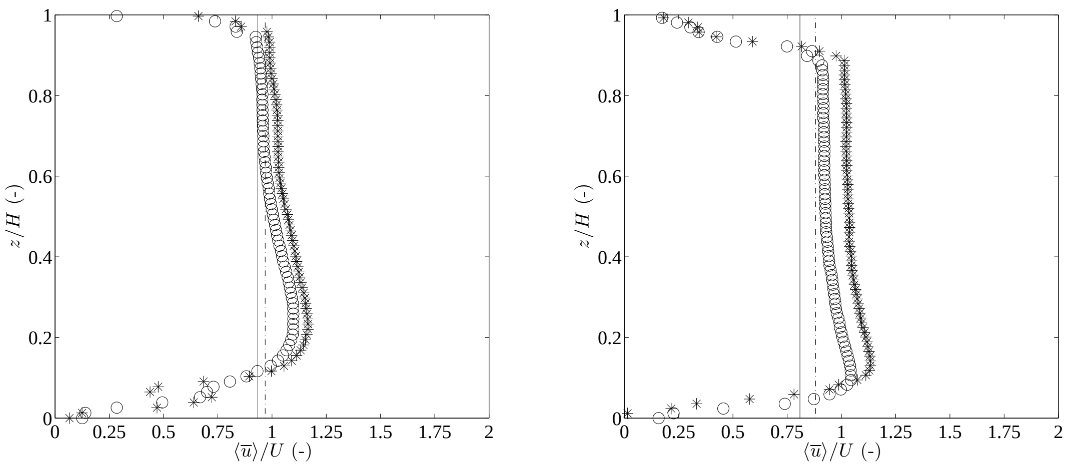
A Figura 6.13b confirma que as tensões normais verticais dispersivas são muito pequenas em toda a coluna de água tendendo para zero com a aproximação à superfície livre. Assim podem desprezar-se os termos $\left(\psi \left\langle \tilde{w}^2 \right\rangle \right)\big|_z$ e $\left(\psi \left\langle \tilde{w}^2 \right\rangle \right)\big|_{\langle \bar{h} \rangle}$ da equação (3.49). Quanto aos termos da tensão normal vertical de Reynolds, a Figura 6.12b mostra que à superfície estas tensões são nulas pelo que $\left(\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle \right)\Big|_{\langle \bar{h} \rangle} \approx 0$.

A Figura 6.19 permite verificar que a velocidade média longitudinal apresenta uma variação longitudinal relativamente pequena e a Figura 6.20 além de mostrar que a velocidade vertical média também não varia significativamente mostra que esta grandeza apresenta valores bastante reduzidos. Assim, pode considerar-se que os termos



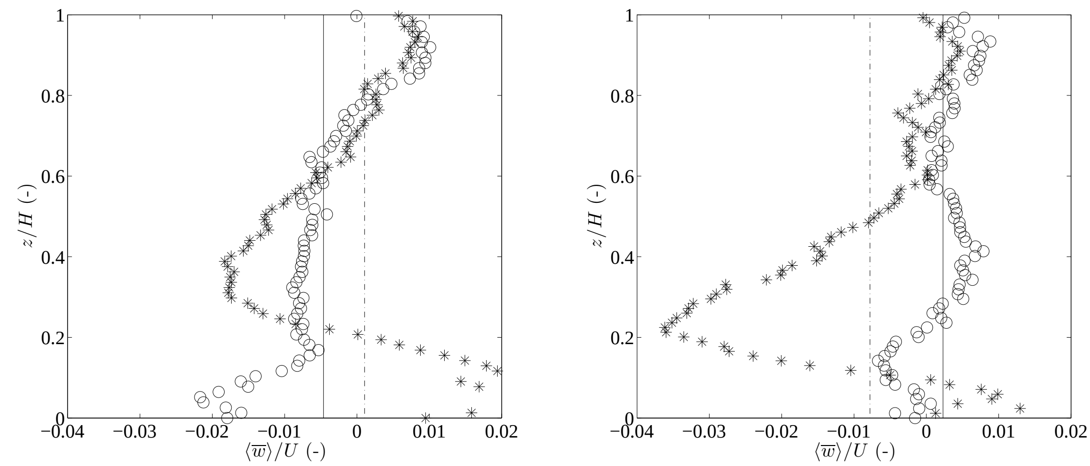
(a) (b)

Figura 6.18: Tensão tangencial dispersiva média e a respectiva média na coluna de água, para o ensaio V1 (a) e V2 (b). Os círculos e a linha continua correspondem à zona de montante. Os asteriscos e a linha a traço-ponto correspondem à zona de jusante.



(a) (b)

Figura 6.19: Velocidade longitudinal média e a respectiva média na coluna de água, para o ensaio V1 (a) e V2 (b). Os círculos e a linha continua correspondem à zona de montante. Os asteriscos e a linha a traço-ponto correspondem à zona de jusante.



(a) (b)

Figura 6.20: Velocidade vertical média e a respectiva média na coluna de água, para o ensaio V1 (a) e V2 (b). Os círculos e a linha continua correspondem à zona de montante. Os asteriscos e a linha a traço-ponto correspondem à zona de jusante.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi \left\langle \bar{w} \right\rangle \left\langle \bar{u} \right\rangle\right]_z^{\langle \bar{h} \rangle}\left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z\right)\right)$ e $\left[\left\langle \bar{w} \right\rangle^2 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_z^{\langle \bar{h} \rangle}\left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z\right)$ presentes na função $\varkappa^{(C)}(x,z)$ são desprezáveis.

Com argumentos deste tipo para as outras duas camadas, conclui-se que a distribuição de pressões num escoamento sobre um leito horizontal povoado com elementos rígidos e emersos é determinada por

$$\psi \left\langle \bar{p} \right\rangle (z) = \rho^{(w)} g \left[\psi\right] (h - z) - \rho^{(w)} \left.\left(\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle\right)\right|_z \tag{6.4}$$

$$\psi(z) \left\langle \bar{p} \right\rangle (z) = \rho^{(w)} g \left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z_{BC}\right) + \rho^{(w)} g \left[\psi\right]_z^{z_{BC}} \left(z_{BC} - z\right) - \rho^{(w)} \left.\left(\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle\right)\right|_z \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}\psi(z) \left\langle \bar{p} \right\rangle (z) = {} & \rho^{(w)} g \left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z_{BC}\right) + \rho^{(w)} g \left[\psi\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \left(z_{BC} - z_{AB}\right) \\ & + \rho^{(w)} g \left[\psi\right]_z^{z_{AB}} \left(z_{AB} - z\right) - \rho^{(w)} \left.\left(\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle\right)\right|_z + \rho^{(w)} \int_z^{z_{AB}} \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{pz}^{(A,b)} \mathrm{d}z\end{aligned} \tag{6.6}$$

na camada C, B e A, respectivamente.

O afastamento à distribuição hidrostática de pressões é pouco relevante para as densidades de hastes e geometria do fundo estudadas. No entanto, é expectável que, com o aumento da densidade de hastes, se possa registar um desvio mensurável em relação à distribuição hidrostática.

6.4.2 Cálculo da força e coeficiente de arrastamento devido às hastes

Introduzindo nas equações (3.57), (3.58) e (3.59) várias simplificações que já foram identificadas anteriormente para o escoamento que foi estudado, a força de arrastamento exercida nas hastes por unidade de área é dada por

$$\left\langle \overline{f_x} \right\rangle = \rho^{(w)} \left(- \left[\frac{\partial \left\langle \bar{U} \right\rangle^2}{\partial x} H \right]_e - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\left\langle \bar{U} \right\rangle^2 \right]_e - g \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} H - \left[\frac{\partial \left\langle \overline{W'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e \right.$$

$$- \left[\frac{\partial \left\langle \overline{U'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\left\langle \overline{U'^2} \right\rangle \right]_e + \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\left\langle \overline{U'^2} \right\rangle \Big|_h \right]_e - \left[\frac{\partial \left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle}{\partial x} H \right]_e$$

$$\left. - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \right]_e + \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \Big|_h \right]_e - \frac{1}{\rho^{(w)}} \left\langle \overline{f_x^{(\nu\, b\, A)}} \right\rangle \right) \quad (6.7)$$

onde cada termo corresponde à soma dos termos idênticos em cada camada. Note-se que a equação anterior foi escrita desta forma para facilitar a leitura. No anexo I apresenta-se o significado de cada um dos termos da equação (6.7).

Para ser mais clara a importância relativa entre os vários termos que contribuem para a força de arrastamento, pode-se normalizar a equação anterior pelo termo dominante, $g \left\langle \bar{h} \right\rangle$, obtendo-se

$$\frac{\left\langle \overline{f_x} \right\rangle}{\rho^{(w)} g \left\langle \bar{h} \right\rangle} = - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\frac{1}{g \left\langle \bar{h} \right\rangle \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x}} \left[\frac{\partial \left\langle \bar{U} \right\rangle^2}{\partial x} H \right]_e + \frac{\left[\left\langle \bar{U} \right\rangle^2 \right]_e}{g \left\langle \bar{h} \right\rangle} + \frac{H}{\left\langle \bar{h} \right\rangle} \right.$$

$$+ \frac{1}{g \left\langle \bar{h} \right\rangle \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x}} \left[\frac{\partial \left\langle \overline{W'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e + \frac{1}{g \left\langle \bar{h} \right\rangle \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x}} \left[\frac{\partial \left\langle \overline{U'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e + \frac{1}{g \left\langle \bar{h} \right\rangle \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x}} \left[\frac{\partial \left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle}{\partial x} H \right]_e$$

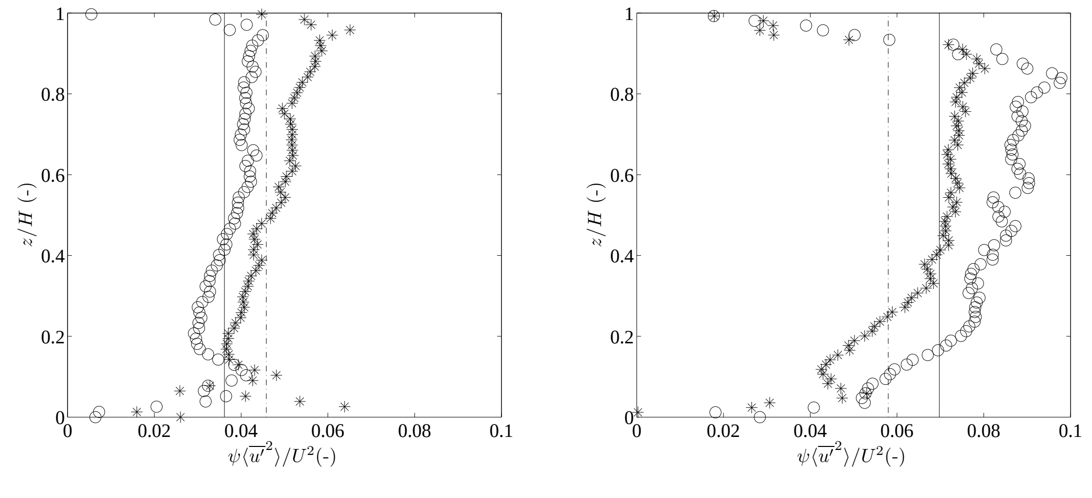
$$\left. - \frac{\left[\left\langle \overline{U'^2} \right\rangle \Big|_h \right]_e - \left[\left\langle \overline{U'^2} \right\rangle \right]_e + \left[\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \Big|_h \right]_e - \left[\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \right]_e}{g \left\langle \bar{h} \right\rangle} \right) - \frac{\left\langle \overline{f_x^{(\nu\, b\, A)}} \right\rangle}{\rho^{(w)} g \left\langle \bar{h} \right\rangle} \quad (6.8)$$

Com estas equações e com as Figuras 6.21 a 6.23, obtém-se os valores apresentados na Tabela 6.1 para cada termo da equação anterior, para os ensaios V1 e V2.

Com os valores da Tabela 6.1 obtém-se uma força de arrastamento, por unidade de área, devido às hastes, $\left\langle \overline{f_x} \right\rangle$, igual a 1.232 Pa no ensaio V1 e 4.078 Pa no ensaio V2. A ordem de grandeza destes resultados está de acordo com resultados existentes na literatura (eg. Nepf 1999, Tanino & Nepf 2008). Nestes trabalhos afirma-se que o aumento da densidade de hastes traduz-se num aumento da força de arrastamento nas hastes.

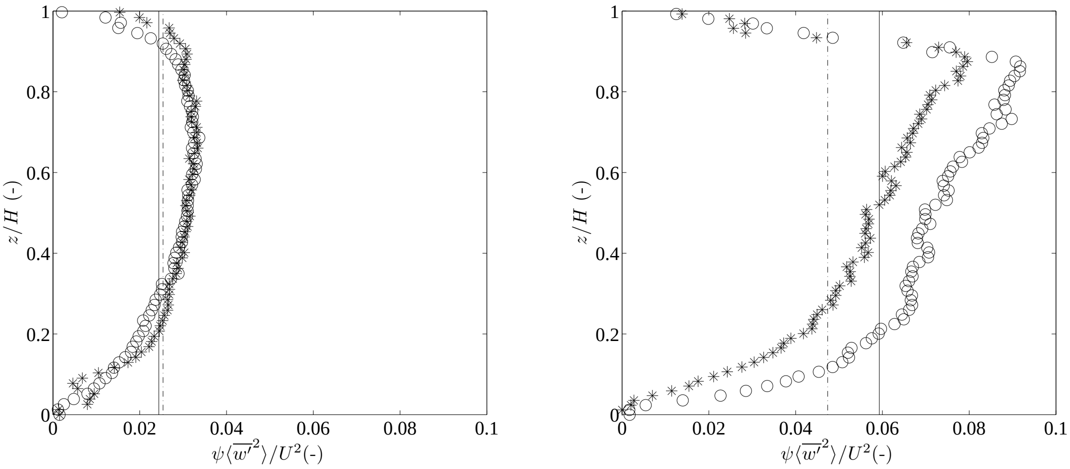
Tabela 6.1: Valores do termos da equação 6.8, para os ensaios V1 e V2.

	V1	**V2**
$\frac{1}{g\left\langle\bar{h}\right\rangle\frac{\partial\left\langle\bar{h}\right\rangle}{\partial x}}\left[\frac{\partial\left\langle\bar{U}\right\rangle^{2}}{\partial x}H\right]_{e}$	0.07040	-0.28487
$\frac{\left[\left\langle\bar{U}\right\rangle^{2}\right]_{e}}{g\left\langle\bar{h}\right\rangle}$	0.03325	0.02256
$\frac{H}{\left\langle\bar{h}\right\rangle}$	1.65002	1.70013
$\frac{1}{g\left\langle\bar{h}\right\rangle\frac{\partial\left\langle\bar{h}\right\rangle}{\partial x}}\left[\frac{\partial\left\langle\overline{W'^{2}}\right\rangle}{\partial x}H\right]_{e}$	-0.00262	0.00744
$\frac{1}{g\left\langle\bar{h}\right\rangle\frac{\partial\left\langle\bar{h}\right\rangle}{\partial x}}\left[\frac{\partial\left\langle\overline{U'^{2}}\right\rangle}{\partial x}H\right]_{e}$	-0.03468	0.01281
$\frac{1}{g\left\langle\bar{h}\right\rangle\frac{\partial\left\langle\bar{h}\right\rangle}{\partial x}}\left[\frac{\partial\left\langle\tilde{U}^{2}\right\rangle}{\partial x}H\right]_{e}$	0.02380	0.04781
$\frac{\left[\left\langle\overline{U'^{2}}\right\rangle\big\|_{h}\right]_{e}-\left[\left\langle\overline{U'^{2}}\right\rangle\right]_{e}}{g\left\langle\bar{h}\right\rangle}$	-0.000588	-0.00836
$\frac{\left[\left\langle\tilde{U}^{2}\right\rangle\big\|_{h}\right]_{e}-\left[\left\langle\tilde{U}^{2}\right\rangle\right]_{e}}{g\left\langle\bar{h}\right\rangle}$	-0.00204	-0.00491
$\frac{\left\langle\overline{f_{x}^{(\nu\;b\;A)}}\right\rangle}{\rho^{(w)}g\left\langle\bar{h}\right\rangle}$	0.00003	0.00003



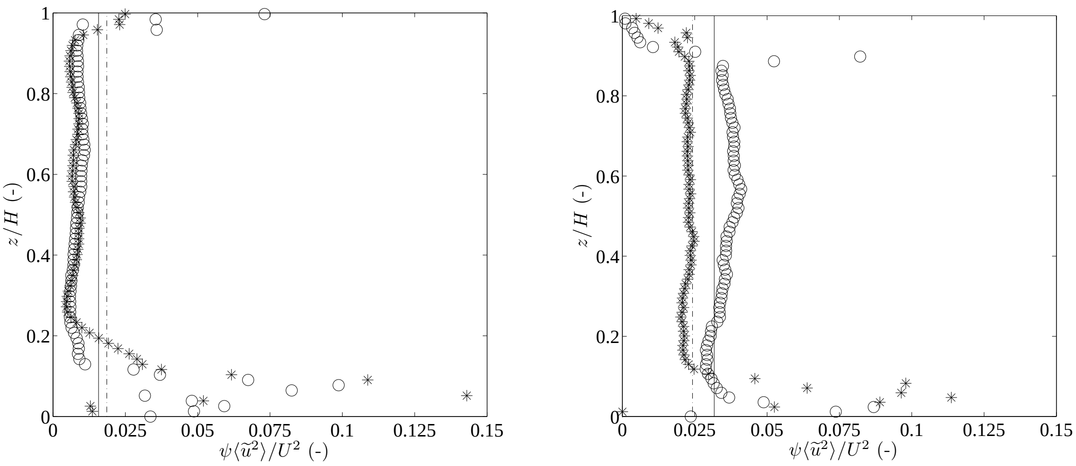
(a) (b)

Figura 6.21: Tensão normal longitudinal de Reynolds média e a respectiva média na coluna de água, para o ensaio V1 (a) e V2 (b). Os círculos e a linha continua correspondem à zona de montante. Os asteriscos e a linha a traço-ponto correspondem à zona de jusante.



(a) (b)

Figura 6.22: Tensão normal vertical de Reynolds média e a respectiva média na coluna de água, para o ensaio V1 (a) e V2 (b). Os círculos e a linha continua correspondem à zona de montante. Os asteriscos e a linha a traço-ponto correspondem à zona de jusante.



(a) (b)

Figura 6.23: Tensão normal longitudinal dispersiva média e a respectiva média na coluna de água, para o ensaio V1 (a) e V2 (b). Os círculos e a linha continua correspondem à zona de montante. Os asteriscos e a linha a traço-ponto correspondem à zona de jusante.

De seguida apresenta-se os respectivos coeficientes de arrastamento (Tabela 6.2), bem como a tensão e o coeficiente de arrastamento do fundo.

Tabela 6.2: Forças e coeficientes de arrastamento das hastes e do fundo.

	SV	V1	V2
$\langle \overline{f_x} \rangle$ (N/ m^2)	-	2.535	4.426
$\langle \overline{f_D} \rangle$ (N/m)	-	0.219	0.202
C_R (-)	-	2.72	3.29
$C_{R\ (eq.6.9)}$ (-)	-	1.213	1.353
τ_b (Pa)	0.038	0.015	0.016
C_f (-)	0.353	0.002	0.003

A Tabela 6.2 apresenta um resumo das várias forças e coeficientes de arrastamento, onde $\langle \overline{f_D} \rangle$ e C_R correspondem, respectivamente, à força e ao coeficiente de arrastamento em cada haste e são determinados a partir das equações (3.43) e (3.44). Os valores dos coeficiente de arrastamento nas hastes, obtidos nos ensaios V1 e V2, foram representados sobre o gráfico que representa a variação deste coeficiente com o número de Reynolds das hastes apresentado por White (1988) (Figura 6.24).

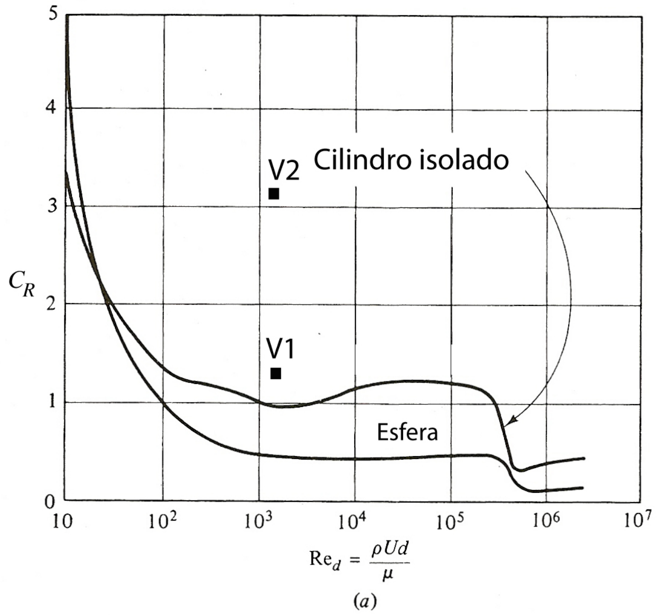


Figura 6.24: Coeficiente de arrastamento de cilindros e esferas lisos em função do número de Reynolds associado aos elementos rígidos (Adaptado de White (1988).

Calculou-se, também, o coeficiente de arrastamento em cada haste pela expressão proposta por Tanino & Nepf (2008)

$$C_R = 2\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_0}{Re_p}\right) \tag{6.9}$$

onde, o coeficiente $\alpha_0 = 83.8$ e $\alpha_1 = 0.46 + 3.8\phi$.

A tensão de arrastamento no fundo, para o ensaio SV é foi calculado com a equação (3.32) com $B'' = 9.6$ e o respectivo coeficiente de arrastamento determinou-se com a aplicação da equação (3.37). Relativamente à tensão de arrastamento no fundo, nos ensaios V1 e V2, considerou-se que a sub-camada viscosa subsistia e recorreu-se à lei que expressa o perfil linear da velocidade na sub-camada viscosa para determinar esta tensão (equação (3.33)). Nos ensaios com hastes, o coeficiente de arrastamento no fundo é determinado pela equação (3.36).

Chama-se a atenção para o facto de os valores do coeficiente C_R calculados pela equação (3.43) e pela equação (6.9) terem a mesma ordem de grandeza. Todavia, o facto de, no ensaio V2, o valor de C_R calculado pela equação (3.43) ser 1.8 vezes superior ao calculado pela equação (6.9) pode ficar a dever-se aos termos adicionais na equação (6.8) ou a erros experimentais neste trabalho ou no de Tanino & Nepf (2008).

O aumento do coeficiente de resistência com a densidade de hastes pode ser explicado pela existência de tensões dispersivas não desprezáveis, nomeadamente as tensões normais longitudinais. Tanino & Nepf (2008), verificaram que o aumento de C_R com a densidade de hastes estaria relacionada com o aumento do coeficiente α_1. A equação (6.8) pode providenciar um argumento racional para este comportamento. Se se substituir, na equação (6.8), $\left\langle \bar{f}_x \right\rangle$ pela equação (3.44), $\left\langle \bar{f}_D \right\rangle$ pela equação (3.43) e C_R pela equação (6.9), obtém-se equação

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha_0}{Re_p} - \frac{g}{[\psi]\, U^2 nd}\frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{1}{g\left\langle \bar{h} \right\rangle \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x}} \left[\frac{\partial \left\langle \bar{U} \right\rangle^2}{\partial x} H \right]_e + \frac{\left[\left\langle \bar{U} \right\rangle^2 \right]_e}{g\left\langle \bar{h} \right\rangle} + \frac{H}{\left\langle \bar{h} \right\rangle} \right.$$

$$+ \frac{1}{g\left\langle \bar{h} \right\rangle \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x}} \left[\frac{\partial \left\langle \overline{W'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e + \frac{1}{g\left\langle \bar{h} \right\rangle \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x}} \left[\frac{\partial \left\langle \overline{U'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e + \frac{1}{g\left\langle \bar{h} \right\rangle \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x}} \left[\frac{\partial \left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle}{\partial x} H \right]_e$$

$$\left. - \frac{\left[\left\langle \overline{U'^2} \right\rangle \Big|_h \right]_e - \left[\left\langle \overline{U'^2} \right\rangle \right]_e + \left[\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \Big|_h \right]_e - \left[\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \right]_e}{g\left\langle \bar{h} \right\rangle} \right) - \frac{\left\langle \overline{f_x^{(\nu\, b\, A)}} \right\rangle}{\rho^{(w)} U^2 H n d} \tag{6.10}$$

Note-se que $\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} < 0$ em escoamentos acelerados, como é o caso. Assim, o segundo termo da equação (6.10) é positivo.

O efeito directo do aumento da densidade de hastes é a diminuição de α_1 devido ao aumento de n. Assim, a responsabilidade para o aumento de α_1 recai nos termos $\frac{1}{\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x}} \frac{\partial \left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right]}{\partial x}$ e $\frac{1}{\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x}} \frac{\partial \left[\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right]}{\partial x}$ da equação (6.10) uma vez que são termos com sinal positivo para densidades elevadas de hastes e que aumentam apreciavelmente com o aumento de n. Conclui-se assim que, o aumento de C_R se poderá ficar a dever não só ao aumento das tensões de

Reynolds mas também ao aumento das tensões dispersivas longitudinais normais.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta dissertação conduziu-se trabalho laboratorial e teórico com o objectivo de caracterizar e quantificar a resistência hidráulica em zonas povoadas com vegetação emersa e rígida. Em particular, procurou-se caracterizar detalhadamente o escoamento no espaço entre-hastes. A componente fundamental do trabalho laboratorial consistiu em medir, de forma não intrusiva, com *Particle Image Velocimetry*, campos de velocidade instantânea em diversas posições no espaço entre-hastes. Mediu-se, ainda, parâmetros macroscópicos do escoamento como a altura do escoamento, o gradiente da superfície livre e a topografia do fundo. Os campos de velocidade instantânea foram transformados em campos de velocidade média temporal e demais grandezas turbulentas médias, como tensões de Reynolds.

Foram seleccionados perfis médios temporais para a aplicação da metodologia DAM, com a qual se quantificaram os perfis das grandezas médias (no espaço e no tempo) intervenientes nas equações de conservação da quantidade de movimento e da massa. Desenvolveu-se um modelo teórico para o cálculo da força, por unidade de área em planta, que o escoamento exerce sobre as hastes e, com base nos resultados do trabalho laboratorial calculou-se independentemente esta força e a força que age sobre o fundo. Sistematizam-se, de seguida as principais conclusões. Quanto à aplicação da metodologia DAM, técnica cuja formalização em escoamentos hidráulicos não está ainda totalmente desenvolvida, a análise de sensibilidade realizada na secção 6.1 revelou que:

- A densidade de amostragem de perfis médios temporais para aplicação da metodologia DAM influencia consideravelmente os resultados. Independentemente da densidade de vegetação, um maior número de pontos de amostragem conduz a perfis médios com melhor qualidade (discussão em 6.1.3 e 6.1.4).
- Quanto menor a densidade de hastes mais criteriosamente terão que ser escolhidos os pontos de amostragem ou, alternativamente, deverá optar-se por uma maior quantidade de pontos de amostragem por unidade de área em planta. Este resultado, revela que a heterogeneidade dos escoamentos com menor densidade de vegetação está concentrada na vizinhança e esteira das hastes. Para que a complexidade do

escoamento seja representada é necessário que haja amostragem de perfis nas zonas que evidenciam gradientes elevados (discussão pp. 81-84). A aplicação da metodologia DAM permitiu calcular grandezas médias e, sempre que relevante, os respectivos gradientes espaciais. Deste processo podem retirar-se as conclusões seguintes:

- As tensões dispersivas não são desprezáveis face às tensões de Reynolds. Este facto acentua-se com o aumento da densidade de hastes. As tensões de corte, em particular, têm ordens de grandeza semelhantes (discussão em 6.3, pp. 86-88).

- A distribuição de pressões é essencialmente hidrostática. No entanto, para valores elevados da densidade de hastes, é expectável que se registem desvios mensuráveis à distribuição hidrostática (discussão na secção 6.4.1).

- Na expressão de cálculo da força de arrastamento exercida sobre as hastes, verifica-se haver termos, indiscutivelmente menores que o termo dominante, que não se podem considerar desprezáveis. Estes termos podem ser responsáveis pelas diferenças registadas entre os valores de C_R calculados nesta dissertação e os valores de C_R apresentados na literatura (discussão em 6.4.2, pp. 92-96).

- A existência de tensões dispersivas não desprezáveis pode ajudar a explicar o aumento do valor de C_R com o aumento da densidade de hastes. Verifica-se que o gradiente longitudinal das tensões normais longitudinais dispersivas pode tornar-se da ordem de grandeza do termo dominante na equação de cálculo de C_R e contribuir para o aumento deste (discussão em 6.4.2, p. 96).

O conjunto de ensaios laboratoriais realizado nesta dissertação foi, necessariamente, limitado devido ao âmbito da mesma. O acréscimo de conhecimento adquirido por intermédio do trabalho laboratorial e teórico realizado deve ser complementado com trabalhos futuros com os seguintes objectivos:

- determinação dos coeficientes de arrastamento em escoamentos com maiores densidades de hastes;

- determinação dos coeficientes de arrastamento com densidade de hastes constante mas diâmetros distintos. Estes ensaios permitirão testar o pressuposto teórico que os gradientes longitudinais das tensões normais longitudinais dispersivas são responsáveis pelo aumento do valor de C_R.

O escoamento deverá ainda ser caracterizado no plano horizontal. Esta caracterização permitirá quantificar directamente as forças viscosas e de pressão sobre as hastes, no âmbito da metodologia DAM.

O estudo de hastes flexíveis é uma extensão evidente do trabalho realizado.

O tipo de metodologia aqui desenvolvido poderá ser aplicado a estudos de dispersão de poluentes em zonas húmidas, para avaliação do potencial de depuração e em estudos de protecção de margens e fundo baseados em soluções de bioengenharia.

Bibliografia

Aberle, J. (2006). Spatially averaged near-bed flow field over rough armor layers. In: *River Flow 2006* (R. M. L. Ferreira, J. G. A. B. L., E. C. L. Alves & Cardoso, A. H., eds.). Taylor and Francis.

Armanini, A., Righetti, M. & Grisenti, P. (2005). Direct measurements of vegetation resistance in prototype scale. *Journal of Hydraulic Research* **43**(5), 481–487.

Brederode, V. (1997). *Fundamentos de aerodinâmica incompressível.* Instituto Superior Técnico, Lisboa: Edição do Autor.

Cameron, S. M. & Nikora, V. I. (2008). Eddy convection velocity for smooth-and rough-bed open-channel flows: Particle Image Velocimetry study. In: *River Flow 2008 - Vol. 1.*

Campbell, L. J. (2005). *Double-Averaged open-channel flow over regular rough beds.* Ph.D. thesis, University of Aberdeen, Aberdeen.

Carollo, F. G., Ferro, V. & Termini, D. (2005). Flow resistance law in channels with flexible submerged vegetation. *Journal of Hydraulic Engineering* **131**(7), 554–564.

Crawley, D. M. & Nickling, W. G. (2003). Drag partition for regularly-arrayed rough surfaces. *Boundary-Layer Meteorology* **107**, 445–468.

Currie, I. G. (1993). *Fundamental Mechanics of Fluids.* Toronto: McGraw Hill.

Defina, A. & Bixio, A. C. (2005). Mean flow and turbulence in vegetated open channel flow. *Water Resources Reseach* **41**(W07006).

Fathi-Maghadam, M. & Kouwen, N. (1997). Nonrigid, nonsubmerged, vegetative roughness on floodplains. *Journal of Hydraulic Engineering* **123**(1), 51–57.

Ferreira, R. L., Ferreira, L. M., Ricardo, A. M. & Franca, M. J. (2008a). Imposed sand transport on gravel-bedded streams. Impacts on flow variables and consequences for salmonid spawning sites. *River Research and Applications* (accepted).

Ferreira, R. M. L. (2005). *River Morphodynamics and Sediment Transport. Conceptual Model and Solutions.* Ph.D. thesis, Instituto Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

Ferreira, R. M. L., Franca, M. J. & Leal, J. G. A. B. (2008b). Flow resistance in open-channel flows with mobile hydraulically rough beds. In: *River Flow 2008 - Vol. 1.*

Finnigan, J. (2000). Turbulence in plant canopies. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 519–571.

Finnigan, J. J. & Shaw, R. H. (2008). Double-averaging methodology and its application to turbulent flow in and above vegetation canopies. *Acta Geophysica* **56**(3), 534–561.

Fischer-Antze, T., Stoesser, T., Bates, P. & Olsen, N. R. B. (2001). 3d numerical modelling of open-channel with submerged vegetation. *Journal of Hydraulic Research* **39**(3), 303–310.

Franca, M. J. (2005). *A field study of turbulent flows in shallow gravel-bed rivers.* Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne.

Franca, M. J., Ferreira, R. M. L. & Lemmin, U. (2008). Parametrization of the logarithmic layer of double-averaged streamwise velocity profiles in gravel-bed river flows. *Advances in Water Resources* **31**, 915–925.

Ghisalberti, M. & Nepf, H. M. (2004). The limited growth of vegetated shear layers. *Water Resources Reseach* **40**(W07502).

Gillies, J. A., Nickling, W. G. & King, J. (2007). Shear stress partitioning in large patches of roughness in the atmospheric inertial sublayer. *Boundary-Layer Meteorology* **122**, 367–396.

Gimenez-Curto, L. A. & Corniero Lera, M. A. (1996). Oscillating turbulent flow over very rough surfaces. *J. Geophys. Res.* **101**(C9), 20745 – 20758.

Graf, W. H. (1998). *Fluvial Hyraulics: Flow and Transport Processes in Channels of Simple Geometry.* Enland: Wiley.

Gray, W. G. & Lee, P. C. Y. (1977). On the theorems for local volume averaging of multiphase systems. *International Journal of Multiphase Flow* **3**, 333–340.

Green, J. C. (2005a). Comparison of blockage factors in modelling the resistance of channels containing submerged macrophytes. *River Research and Applications* **21**, 671–686.

Green, J. C. (2005b). Modelling flow resistance in vegetated streams: review and development of a new theory. *Hydrological Processes* **19**, 1245–1259.

Green, J. C. (2006). Effect of macrophyte spatial variability on channel resistance. *Advances in Water Resources* **29**, 426–438.

Hinze, J. O. (1975). *Turbulence.* McGraw Hill, 2ª ed.

Hirsch, C. (1988). *Numerical Computation of Internal and External Flows: Fundamentals of Numerical Discretization*, vol. 1. Wiley.

Hjemfelt, A. T. & Mockros, L. F. (1996). Motion of discrete particles in a turbulent fluid. *Applied Science Research* **16**, 149–161.

Howells, I. D. (1974). Drag due to the motion of a Newtonian fluid through a sparse random array of small fixed rigid objects. *Journal of Fluid Mechanics* **64**, 449–475.

Huthoff, F., Augustijn, D. C. M. & Hulscher, S. J. M. H. (2006). Depth-averaged flow in presence of submerged cylindrical elements. In: *River Flow 2006* (R. M. L. Ferreira, J. G. A. B. L., E. C. L. Alves & Cardoso, A. H., eds.). Taylor and Francis.

James, C. S., Birkhead, A. L., Jordanova, A. A. & O'Sullivan, J. J. (2004). Flow resistance of emergent vegetation. *Journal of Hydraulic Research* **42**(4), 390–398.

James, C. S., Goldbeck, U. K., Patini, A. & Jordanova, A. A. (2008). Influence of foliage on flow resistance of emergent vegetation. *Journal of Hydraulic Research* **46**(4), 536–542.

Järvelä, J. (2002). Flow resistance of flexible and stiff vegetation: a flume study with naural plants. *Journal of Hydrology* **269**, 44–54.

Järvelä, J. (2004). Determination of flow resistance caused by non-submerged woody vegetation. *International Journal of River Basin Management* **2**(1), 61–70.

Järvelä, J. (2005). Effect of submerged flexible vegetation on flow structure and resistance. *Journal of Hydrology* **307**, 233–241.

Kadlec, R. H. (1990). Overland flow in wetlands: Vegetation resistance. *Journal of Hydraulic Engineering* **116**(5), 691–705.

Kirby, J. T., Durrans, S. R., Pitt, R. & Johnson, P. D. (2005). Hydraulic resistance in grass swales designed for small flow conveyance. *Journal of Hydraulic Engineering* **131**(1), 65–68.

Koch, F. L. & Ladd, A. J. C. (1997). Moderate reynolds number flows through periodic and random arrays of aligned cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **349**, 31–66.

Lee, J. K., Roig, L. C., Jenter, H. L. & Visser, H. M. (2004). Drag coefficients for modeling flow through emergent vegetation in the Florida Everglades. *Ecological Engineering* **22**, 237–248.

Leonard, A. (1974). Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Advances in Geophysics* **18A**, 237–248.

Li, A. & Shao, Y. (2003). Numerical simulation of drag partition over rough surfaces. *Boundary-Layer Meteorology* **108**, 317–342.

Li, R.-M. & Shen, H. W. (1973). Effect of tallvegetations on flow and sediment. *Journal of the Hydraulics Division* **99**(HY5), 793–814.

LOPEZ, F. & GARCÍA, M. (1998). Open-channel flow through simulated vegetation: Suspended sediment transport modeling. *Water Resources Research* **34**(9), 2341–2352.

LOPEZ, F. & GARCIA, M. H. (2001). Mean flow and turbulence structure of open-channel flow trough non-emergent vegetation. *Journal of Hydraulic Engineering* **127**(5), 392–402.

MAHESHWARI, B. L. (1992). Suitability of different flow equations and hydraulic resistance parameters for flows in surface irrigation: A review. *Water Resources Research* **28**(8), 2059–2066.

MANES, C., POKRAJAC, D. & MCEWAN, I. (2007). Double-averaged open-channel flows with small relative submergence. *Journal of Hydraulic Engineering* **133**(8), 896–904.

MAURI, S. (2002). *Numerical simulation and flow analysis of an elbow diffuser*. Ph.D. thesis, École Polytechnique Fédéral de Lausanne.

MELLING, A. (1997). Tracer particles and seeding for particle image velocimetry. *Measurement Science and Technology* **8**, 1406–1416.

MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. (1971). *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, vol. 1, Tradução inglesa por Jonh L. Lumley. The MIT Press. (Versão original: 1965).

NEARY, V. S. (2003). Numerical solution of fully developed flow with vegetative resistance. *Journal of Engineering Mechanics* **129**(5), 558–563.

NEPF, H. (1999). Drag, turbulence, and diffusion in flow through emergent vegetation. *Water Resources Research* **35**(2), 479–489.

NEPF, H. M. & VIVONI, E. R. (1999). Turbulence structure in depth-limited, vegetated flow :. transition between emergent and submerged regimes. In: *Conference Proceedings of the 28th International IARH Conference*. Graz, Autria.

NEZU, I. & NAKAGAWA, H. (1993). *Turbulence in Open-Channel Flows*, vol. Monograph Series. Balkema, Rotterdam: International Association for Hydraulic Research.

NIKORA, V. (2008). Hydrodinamics of rough-bed turbulent flows: spatial averaging perpective. In: *River Flow 2008 - Vol. 1*.

NIKORA, V., GORING, D., MCEWAN, I. & GRIFFITHS, G. (2001). Spatially averaged open-channel flow over rough bed. *Journal of Hydraulic Engineering* **127**(2), 123–133.

NIKORA, V., KOLL, K., MCEWAN, I., MCLEAN, S. & DITTRICH, A. (2004). Velocity distrubution in the roughness layer of rough-bed flows. *Journal of Hydraulic Engineering* **130**(10), 1036–1042.

NIKORA, V., LARNED, S., NIKORA, N., DEBNATH, K., COOPER, G. & REID, M. (2008). Hydraulic resistance due to aquatic vegetation in small streams: Field study. *Journal of Hydraulic Engineering* **134**(9), 1326–1332.

Nikora, V., McEwan, I., McLean, S., Coleman, S., Pokrajac, D. & Walters, R. (2007a). Double-averaging concepts for rough-bed open-channel and overland flows: Theoretical background. *Journal of Hydraulic Engineering* **133**(8), 873–883.

Nikora, V., McLean, S., Coleman, S., Pokrajac, D., McEwan, I., Campbell, L., Aberle, J., Clunie, D. & Koll, K. (2007b). Double-averaging concepts for rough-bed open-channel and overland flows: Applications. *Journal of Hydraulic Engineering* **133**(8), 884–895.

Nogueira, H. (2007). *Pilares de pontes em leitos móveis.* Master's thesis, Instituto Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

Patel, V. C., Nezu, W. & Scheuerer, G. (1985). Turbulence models for near-wall and low reynolds number flows: a review. *AIAA Journal* **23**, 1308–1319.

Petryk, S. & Bosmajian, G. (1975). Analysis of flow through vegetation. *Journal of the Hydraulics Division* **101**(HY7), 871–884.

Poggi, D., Katul, G. & Albertson, J. (2004a). Momentum tranfer and turbulent kinetic energy budgets within a dense model canopy. *Boundary Layer Meteorology* **111**, 589–614.

Poggi, D., Katul, G. & Albertson, J. (2004b). A note on the contribution of dispersive fluxes to momentum transfer within canopies. *Boundary Layer Meteorology* **111**, 615–621.

Poggi, D. & Katul, G. G. (2008). Micro- and macro-disperdive fluxes in canopy flows. *Acta Geophysica* **56**(3), 778–800.

Pokrajac, D., Campbell, L. J., Nikora, V. & Manes, C. (2007). Quadrant analysis of persistent spatial velocity perturbations over square-bar roughness. *Exp Fluids* **42**, 413–423.

Pokrajac, D., McEwan, I. & Nikora, V. (2008). Spatially averaged turbulent stress and its partitioning. *Exp Fluids* **45**, 73–83.

Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows.* Cambridge.

Raffel, M., Willert, C. E. & Kompenhans, J. (1998). *Particle Image Velocimetry: A Pratical Guide.* Germany: Springer.

Raupach, M. R. (1992). Drag and drag partition on rough surfaces. *Boundary-Layer Meteorology* **60**, 375–395.

Raupach, M. R., Antonia, R. A. & Rajagopalan, S. (1991). Rough-wall turbulent boundary layers. *Appl. Mech. Rev.* **44**(1), 1–25.

Raupach, M. R., Coppin, P. A. & Legg, B. J. (1986). Experiments on scalar dispersion within a model plant canopy - part i: turbulence structure. *Boundary Layer Meteorology* **35**, 21–52.

RAUPACH, M. R., FINNIGAN, J. J. & BRUNET, Y. (1996). Coherent eddies and turbulence in vegetation canopies: the mixing-layer analogy. *Boundary-Layer Meteorology* **78**, 351–382.

RAUPACH, M. R. & SHAW, R. H. (1982). Averaging procedures for flow within vegetation canopies. *Boundary-Layer Meteorology* **22**, 79–90.

RIGHETTI, M. & ARMANINI, A. (2002). Flow resistance in open channel flows with sparsely distrubuted bushes. *Journal of Hydrology* **269**, 55–64.

SCHLICHTING, H. (1968). *Boundary - Layer Theory*. McGraw Hill, 6th ed.

SERRA, T., FERNANDO, H. J. S. & RODRÍGUEZ, R. V. (2004). Effects of emergent vegetation on lateral diffusion in wetlands. *Water Research* **38**, 139–147.

SMITH, J. D. & MCLEAN, S. R. (1977). Spatially-averaged flow over a wavy surface. *Journal of Geophysical Research* **82**(12), 1735–1746.

STEPHAN, U. & GUTKNECHT, D. (2002). Hydraulic resistance of submerged flexible vegetation. *Journal of Hydrology* **269**, 27–43.

STONE, B. M. & SHEN, H. T. (2002). Hydraulic resistance of flow in channels with cylindrical roughness. *Journal of Hydraulic Engineering* **128**(5), 500–506.

SVEEN, J. K. & COWEN, E. A. (2004). *Quantitive Imaging Techniques and Their Applications to Waavy Flows*. Capítulo 1. University of Oslo, Noruega.

TANINO, Y. & NEPF, H. M. (2008). Laboratory investigation of mean drag in a random array of rigid, emergent cylinders. *Journal of Hydraulic Engineering* **134**(1), 34–41.

THOMPSON, A. & WILSON, B. (2002). The impact of roughness elements on reducing the shear stress acting on soil particles. Final Report MN/RC - 2002-22, University of Minnesota, St.Paul, Minnesota.

THOMPSON, A. M., WILSON, B. N. & HANSEN, B. J. (2004). Shear stress partitioning for idealized vegetated surfaces. *Transactions of the ASAE* **47**(3), 701–709.

WANG, C. & WANG, P. (2007). Hydraulic resistance characteristics of riparian reed zone in river. *Journal of Hydrologic Engineering* **12**(3), 267–272.

WENG, W., LIAO, G. & FAN, W. (2000). An improved cross-correlation method for (digital) particle image velocimetry. In: *10th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*. Fundação Calouste Gulbenkian/Centro de Estudos em Inovação, Tecnologia e Políticas de Desenvolvimento (IST). (disponível em http://in3.dem.ist.utl.pt/conflaser/).

WERELEY, S. T. & MEINHART, C. D. (2000). Accuracy improvements in particle image velocimetry algorithms. In: *10th International Symposium on Applications of*

Laser Techniques to Fluid Mechanics. Fundação Calouste Gulbenkian/Centro de Estudos em Inovação, Tecnologia e Políticas de Desenvolvimento (IST). (disponível em http://in3.dem.ist.utl.pt/conflaser/).

Westerweel, J. (1993). *Digital particle image velocimetry: theory and application*. Ph.D. thesis, University of Delft, Delt, Netherlands.

Westerweel, J. (1994). Efficient detection of spurious vectors in particle image velocimetry data. *Experiments in Fluids* **16**, 236–247.

Westerweel, J. (1997). The effect of a discrete window offset on the accuracy of cross-correlation analysis of digital piv recordings. *Experiments in Fluids* **23**, 20–28.

Whitaker, S. (1967). Diffusion and dispersion in porous media. *American Institute of Chemical Engineers* **13**(3), 420–427.

White, B. L. & Nepf, H. M. (2003). Scalar transport in random cylinder arrays at moderate reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* **487**, 43–79.

White, B. L. & Nepf, H. M. (2008). A vortex-based model of velocity and shear stress in a partially vegetated shallow channel. *Water Resources Research* **44**(W01412).

White, F. M. (1988). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill.

Wilson, C. A. M. E., Stoesser, T., Bates, P. D. & Pinzen, A. B. (2003). Open channel flow through differente forms of submerged flexible vegetation. *Journal of Hydraulic Engineering* **129**(11), 847–853.

Wilson, N. R. & Shaw, R. H. (1977). A higher order closure model for canopy flow. *Journal of Applied Meteorology* **16**, 1197–1205.

Wolfe, S. A. & Nickling, W. G. (1996). Shear stress partitioning in sparsely vegetated desert canopies. *Earth Surface Processes and Landforms* **21**, 607–619.

Wu, F.-C., Shen, H. W. & Chou, Y.-J. (1999). Variation of roughness coefficients for unsubmerged and submerged vegetation. *Journal of Hydraulic Engineering* **125**(9), 934–942.

Yen, B. C. (2002). Open channel flow resistance. *Journal of Hydraulic Engineering* **128**(1), 20–39.

Zang, H. J. & Zhou, Y. (2001). Effect of unequal cylinder spacing on vortex streets behind three side-by-side cylinders. *Physics of Fluids* **13**(12), 3675–3686.

Anexo I: Força de arrastamento devido às hastes

Este anexo destina-se a apresentar as expressões para o cálculo da força de arrastamento devido às hastes em cada camada.

Na camada C, a força de arrastamento, por unidade de área, exercida sobre as hastes é dada por

$$\left\langle \overline{f_x^{(C)}} \right\rangle = \frac{\rho^{(w)}}{\alpha_c \left[\psi\right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle}} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi \left\langle \bar{u} \right\rangle^2\right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \right) \left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z_{BC}\right) \right.$$

$$- g\frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z_{BC}\right) \left[\left[\psi\right]_z^{\langle \bar{h} \rangle} \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \right) \left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z_{BC}\right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \right) \left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z_{BC}\right) + \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle\right)\Big|_{\langle \bar{h} \rangle} - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle\right)\Big|_{z_{BC}}$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \right) \left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z_{BC}\right) + \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle\right)\Big|_{\langle \bar{h} \rangle} - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle\right)\Big|_{z_{BC}} \right) \quad (1)$$

Esta equação foi obtida a partir da equação (3.58) apresentada na secção 3.3.2 na qual se considerou desprezável o termo $\left[\left\langle \bar{u} \right\rangle \left\langle \bar{w} \right\rangle \frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \left(\left\langle \bar{h} \right\rangle - z_{BC}\right)$ pelo facto da velocidade média vertical ser reduzida. Também não se consideraram os termos das tensões tangenciais de Reynolds e dispersivas por se verificar que junto à superfície livre estas tensões apresentam valores próximos de zero Figura 6.14. A constante α_c foi considerada igual a 0.5 uma vez que a função de vazios, nesta camada, é aproximadamente linear.

Como um procedimento idêntico ao anterior obtém-se a força de arrastamento, por unidade de área, devido às hastes na camada B

$$\left\langle \overline{f_x^{(B)}} \right\rangle = \frac{\rho^{(w)}}{\alpha_b \left[\psi\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \bar{u} \right\rangle^2 \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) (z_{BC} - z_{AB}) - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\psi \left\langle \bar{u} \right\rangle^2 \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right.$$

$$- g \left(\frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} (z_{BC} - z_{AB}) \left[[\psi]_z^{z_{BC}} \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} + z_{BC} \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[[\psi]_z^{z_{BC}} \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[z\, [\psi]_z^{z_{BC}} \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) (z_{BC} - z_{AB}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) (z_{BC} - z_{AB})$$

$$- \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} + \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right) \Big|_{z_{BC}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) (z_{BC} - z_{AB})$$

$$\left. - \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left[\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} + \frac{\partial \left\langle \bar{h} \right\rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right) \Big|_{z_{BC}} \right) \quad (2)$$

Comparando a equação (2) com a equação (3.58) nota-se que na primeira faltam os termos $\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}$ e $\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle \right) \Big|_{z_{BC}}$. Estes termos não foram considerados porque apresentam valores muito semelhante e sinais contrários, pelo que se iriam cancelar. A constante α_b foi considerada igual a 1.0 uma vez que a função de vazios, nesta camada, é constante.

Na camada A, a força de arrastamento, por unidade de área, devido às hastes é calculada a partir da seguinte expressão

$$\left\langle \overline{f_x^{(A)}} \right\rangle = \frac{\rho^{(w)}}{\alpha_a \left[\psi\right]_0^{z_{AB}}} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \bar{u} \right\rangle^2 \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{u'^2} \right\rangle \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \tilde{u}^2 \right\rangle \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} - \frac{1}{\rho^{(w)}} \alpha_a \left[\psi\right]_0^{z_{AB}} \left\langle \overline{f_x^{(\nu\, b\, A)}} \right\rangle \right) \quad (3)$$

Tal como na camada C, nesta camada junto ao fundo a função de vazios apresenta um andamento aproximadamente linear pelo que se considerou $\alpha_a = 0.5$. O último termo da distribuição de pressões na camada junto ao fundo, $\rho^{(w)} \int_z^{z_{AB}} \frac{1}{\rho^{(w)}} I_{pz}^{(A,b)} \mathrm{d}z$, não aparece na equação (3) porque este termo não apresenta variação longitudinal. Considerou-se que a resistência de forma devido às oscilações do fundo são desprezáveis uma vez que a diferença de cotas entre o plano médio do leito e as cristas das irregularidades é muito pequena. Além disso, as tensões dispersivas indicam que não existe separação do escoamento, o que também é uma indicação de que a resistência de forma é desprezável. Assim, em relação à força de arrastamento actuante no fundo, apenas se considerou a de natureza viscosa.

A força de arrastamento, por unidade de área, que o escoamento exerce sobre as hastes corresponde à soma da força de arrastamento em cada uma das camadas em que se dividiu o escoamento

$$\langle \overline{f_x} \rangle = \left\langle \overline{f_x^{(A)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(B)}} \right\rangle + \left\langle \overline{f_x^{(C)}} \right\rangle \tag{4}$$

Somando as equações (1), (2) e (1) e agrupando os termos semelhantes, a força de arrastamento, por unidade de área, devido às hastes pode escrever-se

$$\langle \overline{f_x} \rangle = \rho^{(w)} \Bigg(- \left[\frac{\partial \langle \bar{U} \rangle^2}{\partial x} H \right]_e - \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\langle \bar{U} \rangle^2 \right]_e - g \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} H - \left[\frac{\partial \left\langle \overline{W'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e$$

$$- \left[\frac{\partial \left\langle \overline{U'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e - \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\left\langle \overline{U'^2} \right\rangle \right]_e + \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\left\langle \overline{U'^2} \right\rangle \Big|_h \right]_e - \left[\frac{\partial \left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle}{\partial x} H \right]_e$$

$$- \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \right]_e + \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\left\langle \tilde{U}^2 \right\rangle \Big|_h \right]_e - \frac{1}{\rho^{(w)}} \left\langle \overline{f_x^{(\nu\, b\, A)}} \right\rangle \Bigg) \tag{5}$$

onde

$$\left[\frac{\partial \langle \bar{U} \rangle^2}{\partial x} H \right]_e = \frac{1}{0.5 \, [\psi]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \, \langle \bar{u} \rangle^2 \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \right) \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right)$$

$$+ \frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \, \langle \bar{u} \rangle^2 \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) \left(z_{BC} - z_{AB} \right) + \frac{1}{0.5 \, [\psi]_0^{z_{AB}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \, \langle \bar{u} \rangle^2 \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\langle \bar{U} \rangle^2 \right]_e = \frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}} \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[\psi \, \langle \bar{u} \rangle^2 \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \tag{7}$$

$$g \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} H = \frac{1}{0.5 \, [\psi]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle}} g \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right) \left[[\psi]_z^{\langle \bar{h} \rangle} \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle}$$

$$+ \frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}} g \left(\frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left(z_{BC} - z_{AB} \right) \left[[\psi]_z^{z_{BC}} \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} + z_{BC} \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[[\psi]_z^{z_{BC}} \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} - \frac{\partial \langle \bar{h} \rangle}{\partial x} \left[z \, [\psi]_z^{z_{BC}} \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial \left\langle \overline{W'^2} \right\rangle}{\partial x} H \right]_e = \frac{1}{0.5 \, [\psi]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle \right]_{z_{BC}}^{\langle \bar{h} \rangle} \right) \left(\langle \bar{h} \rangle - z_{BC} \right)$$

$$+ \frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle \right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \right) \left(z_{BC} - z_{AB} \right) + \frac{1}{0.5 \, [\psi]_0^{z_{AB}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\psi \left\langle \overline{w'^2} \right\rangle \right]_0^{z_{AB}} \right) z_{AB} \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial\left\langle\overline{U'^2}\right\rangle}{\partial x}H\right]_e = \frac{1}{0.5\,[\psi]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\right)(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC})$$

$$+\frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}\right)(z_{BC}-z_{AB}) + \frac{1}{0.5\,[\psi]_0^{z_{AB}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right]_0^{z_{AB}}\right)z_{AB} \quad (10)$$

$$\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left[\left\langle\overline{U'^2}\right\rangle\right]_e = \frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}}\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left[\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left[\left\langle\overline{U'^2}\right\rangle\right]_e = \frac{1}{0.5\,[\psi]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}}\left(\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right)\Big|_{\langle\bar{h}\rangle} - \frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right)\Big|_{z_{BC}}\right)$$

$$+\frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}}\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\overline{u'^2}\right\rangle\right)\Big|_{z_{BC}} \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial\left\langle\tilde{U}^2\right\rangle}{\partial x}H\right]_e = \frac{1}{0.5\,[\psi]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}\right)(\langle\bar{h}\rangle - z_{BC})$$

$$+\frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}}\right)(z_{BC}-z_{AB}) + \frac{1}{0.5\,[\psi]_0^{z_{AB}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right]_0^{z_{AB}}\right)z_{AB} \quad (13)$$

$$\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left[\left\langle\tilde{U}^2\right\rangle\right]_e = \frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}}\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left[\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right]_{z_{AB}}^{z_{BC}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left[\left\langle\tilde{U}^2\right\rangle\right]_e = \frac{1}{0.5\,[\psi]_{z_{BC}}^{\langle\bar{h}\rangle}}\left(\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right)\big|_{\langle\bar{h}\rangle} - \frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right)\big|_{z_{BC}}\right)$$

$$+\frac{1}{[\psi]_{z_{AB}}^{z_{BC}}}\frac{\partial\langle\bar{h}\rangle}{\partial x}\left(\psi\left\langle\tilde{u}^2\right\rangle\right)\big|_{z_{BC}} \quad (15)$$