

# **Encurvadura Confinada de Placas Retangulares**

**João Manuel Vasconcelos Magalhães Pereira de Figueiredo**

Dissertação para obtenção de Grau de Mestre em

## **Engenharia Civil**

Orientadores:

Professor Doutor António Manuel Figueiredo Pinto da Costa

Professor Doutor Fernando Manuel Fernandes Simões

## **Júri**

Presidente: Professor Doutor Orlando José Barreiros D'Almeida Pereira

Orientador: Professor Doutor António Manuel Figueiredo Pinto da Costa

Vogais: Professor Doutor José Paulo Baptista Moitinho de Almeida

**Outubro 2023**



Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.

## **Agradecimentos**

Esta dissertação foi um longo desafio, com muitas “pedras” no caminho, o momento mais penoso foi o falecimento do meu querido Pai, a quem endereço este trabalho e agradeço todo o seu apoio ao longo do meu percurso académico, sem ele certamente esta jornada teria sido ainda mais difícil.

À minha mãe, que sempre me apoiou e que sempre vibrou com as minhas vitórias e conquistas, que me “aguentou” quando o “meu mundo” desabava e por sempre ser o meu Porto seguro.

Aos meus irmãos que sempre estiveram lá para mim e que em conjunto com os pais sempre me fizeram crer que conseguiria conquistar o que sonhasse.

Ao meu psicólogo, Dr. Gonçalo Moura, a quem deixo um especial agradecimento, por me ter conseguido motivar no período mais difícil da minha vida e por continuar a ser um grande apoio nesta jornada.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram e que todos os dias estão comigo de diferentes formas.

Ao Técnico, por me proporcionar os melhores docentes e meios para atingir a excelência no meu percurso profissional, e por todas as atividades e convívios organizados com grandes empresas e palestrantes.

À Transfor, em particular aos meus colegas da obra AHED, que me permitiram tirar dias de férias para terminar este projeto e sempre foram compreensivos quando saía mais cedo para a ida às reuniões com os meus orientadores.

Um obrigado a todos os que, de uma maneira ou outra contribuíram para que hoje esteja a entregar este documento.

Gostaria também de agradecer ao Prof. Carlos Tiago pela disponibilização de informações sobre elementos finitos de placa fina.

Por fim e não menos especial, quero endereçar um especial agradecimento aos meus orientadores, António Pinto da Costa e Fernando Simões, pelo apoio incondicional, pelas tardes alongadas que se permitiram passar comigo para que este documento fosse realizado a tempo e pela paciência tida em caminhar a um ritmo pouco normal e com todas as limitações existentes. Pela análise constante de todos os dados, de forma minuciosa, para obtermos os melhores resultados e representá-los de uma forma clara. E pelas conversas motivacionais que tiveram comigo e preocupação constante com a minha situação e com o caminhar desta dissertação; decerto que seria muito mais difícil a realização deste projeto sem a vossa ajuda.

## Resumo

Nesta dissertação aborda-se a análise pelo método dos elementos finitos de placas finas com esforços de membrana uniformes sujeitas ao fenómeno de encurvadura, tendo em conta a presença de obstáculos pontuais unilaterais. São analisadas placas retangulares e quadradas submetidas a vários tipos de carregamentos de membrana uniformes, incluindo compressão e corte. Utilizam-se dois tipos de elementos finitos, o ACM e o BFS, para calcular as cargas de bifurcação e os modos de instabilidade em cenários com e sem obstáculos unilaterais.

Utilizou-se um algoritmo adequado para resolver o problema de valores e vetores próprios de complementaridade, com base na extensão do método de Newton-Raphson para sistemas não lineares do tipo complementaridade. Para cada placa e tipo de carregamento, calculam-se os seis modos mais baixos e as correspondentes cargas de bifurcação para diferentes níveis de refinamento das malhas.

A dissertação confirmou que a convergência das cargas de bifurcação obtidas pelo elemento BFS é monotónica, à medida que a malha é mais refinada. Por outro lado, a convergência geralmente não é monótona quando se usa o elemento finito não conforme ACM.

Também se confirmou que quando existem obstáculos unilaterais a carga de bifurcação mais baixa, conhecida como carga crítica, nunca pode ser menor do que a do caso homólogo sem esses obstáculos.

**Palavras-chave:** Encurvadura, Placas finas, Obstáculos unilaterais, Cargas críticas, Elementos finitos.

## **Abstract**

In this dissertation, the analysis by the finite element method of thin plates under uniform membrane internal forces subjected to the buckling phenomenon considering the presence of unilateral point obstacles is addressed. Rectangular and square plates are analysed under various membrane uniform loadings, including compression and shear. Two types of finite elements, ACM and BFS, are employed to compute the bifurcation loads and instability modes in scenarios with and without unilateral obstacles.

An appropriate algorithm was used to solve the complementarity problem of eigenvalues and eigenvectors, based on the extension of the Newton-Raphson method for nonlinear complementarity systems. For each plate and type of loading, the six lowest bifurcation loads, and corresponding modes are computed for different levels of mesh refinement.

The dissertation confirmed that the convergence of bifurcation loads obtained using the BFS element is monotonically decreasing as the mesh is refined. In contrast, convergence is generally non-monotonic when using the non-conforming ACM element.

It was also confirmed that, when unilateral obstacles are present the lowest bifurcation load, known as the critical load, can never be lower than the one of the homologous cases without unilateral obstacles.

**Keywords:** Buckling, Thin plates, Unilateral obstacles, Critical loads, Finite elements.

## Índice

<b>1- Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2- Estudo da encurvadura de placas pelo método dos elementos finitos</b>	<b>3</b>
2.1 – Energia Potencial	3
2.2 – Discretização pelo método dos elementos finitos	6
2.3 – Princípio da Estacionaridade da energia potencial	7
2.4 – Tipos de elemento finito usados	9
<b>3- Análise da instabilidade confinada de placas pelo Método dos Elementos Finitos</b>	<b>11</b>
3.1 – Introdução	11
3.2 – A numeração dos graus de liberdade globais e a construção das matrizes globais	13
3.3 – Formulação do problema	15
3.4 – Algoritmo	17
<b>4- Resultados Numéricos</b>	<b>20</b>
4.1 – Placa retangular com os quatro bordos SA submetida a esforços de compressão	21
4.1.1 – Sem restrições unilaterais	21
4.1.2 – Com restrições unilaterais em sentidos opostos	32
4.2 – Placa retangular com os quatro bordos SA submetida a esforços de corte	43
4.2.1 – Sem restrições unilaterais	43
4.2.2 – Com restrições unilaterais em sentidos iguais	51
4.3 – Placa quadrada com os três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecional	59
4.3.1 – Sem restrições unilaterais	59
4.3.2 – Com restrições unilaterais em sentidos opostos	67
<b>5- Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>75</b>
<b>Referências</b>	<b>76</b>
<b>Anexo – Matrizes de rigidez e geométrica elementares dos elementos ACM e BFS</b>	<b>77</b>

## Lista de Figuras

FIGURA 1- EXEMPLO DE PLACA RETANGULAR DEFINIDA NO DOMÍNIO $(x_1, x_2) \in [0, A] \times [0, B]$ , DESIGNADO PELA LETRA GREGA $\Omega$ .	3
FIGURA 2- ELEMENTO INFINITESIMAL DE PLACA NA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA DE PÓS ENCURVADURA. COLOCAÇÃO EM EVIDÊNCIA DA CINEMÁTICA RELEVANTE PARA O CÁLCULO DO TRABALHO DOS ESFORÇOS DE MEMBRANA.	5
FIGURA 3- REPRESENTAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS DOS ELEMENTOS FINITOS RETANGULARES ACM (A) E BFS (B).	9
FIGURA 4- ILUSTRAÇÃO DA NÃO CONFORMIDADE DO ELEMENTO ACM. DESCONTINUIDADE DO DECLIVE NA DIREÇÃO NORMAL AO BORDO COMUM A DOIS ELEMENTOS ADJACENTES.	9
FIGURA 5- PLACA QUADRADA DISCRETIZADA EM 4 ELEMENTOS FINITOS E CONFINADA UNILATERALMENTE NOS NÓS 5 E 8. O BORDO [7 9] É LIVRE ENQUANTO OS OUTROS SÃO SIMPLEMENTE APOIADOS.	11
FIGURA 6- NUMERAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS GLOBAIS DA PLACA DA FIGURA 5.	12
FIGURA 7- RENUMERAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS GLOBAIS DA PLACA DA FIGURA 6, DE FORMA, A QUE OS DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS DOS NÓS 8 E 5 FIQUEM RESPECTIVAMENTE COM OS NÚMEROS DE ORDEM 1 E 2.	14
FIGURA 8- PLACA RETANGULAR COM OS QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO DE MODO A ANULAR O EFEITO DE POISSON SEM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS.	22
FIGURA 9- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 8 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO ACM).	23
FIGURA 10- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR FIGURA 8. COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. A) MODO 1 $\lambda_1 = 5.1268 \times 10^2 \text{ kN/m}$ B) MODO 2 $\lambda_2 = 5.5389 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .	24
FIGURA 11- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR FIGURA 8. COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. C) MODO 3 $\lambda_3 = 7.4448 \times 10^2 \text{ kN/m}$ D) MODO 4 $\lambda_4 = 10.4406 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .	25
FIGURA 12- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR FIGURA 8. COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. E) MODO 5 $\lambda_5 = 14.4050 \times 10^2 \text{ kN/m}$ F) MODO 6 $\lambda_6 = 19.2975 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .	26
FIGURA 13- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 8 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO BFS).	28
FIGURA 14- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR FIGURA 8. COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. A) MODO 1 $\lambda_1 = 5.1353 \times 10^2 \text{ kN/m}$ B) MODO 2 $\lambda_2 = 5.5619 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .	29
FIGURA 15- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR FIGURA 8. COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. C) MODO 3 $\lambda_3 = 7.4875 \times 10^2 \text{ kN/m}$ D) MODO 4 $\lambda_4 = 10.5096 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .	30
FIGURA 16- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR FIGURA 8. COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. E) MODO 5 $\lambda_5 = 14.5063 \times 10^2 \text{ kN/m}$ F) MODO 6 $\lambda_6 = 19.4388 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .	31
FIGURA 17- PLACA RETANGULAR COM OS QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO DE MODO A ANULAR O EFEITO DE POISSON COM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS DE SENTIDOS OPOSTOS LOCALIZADOS A 0.5M DOS BORDOS.	33
FIGURA 18- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 17 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO ACM).	34
FIGURA 19- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 17 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. A) MODO 1 $\lambda_1 = 5.3465 \times 10^2 \text{ kN/m}$ B) MODO 2 $\lambda_2 = 5.5389 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .	35

FIGURA 20- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 17 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. C) MODO 3 $\lambda_3 = 10.4406 \times 10^2 \text{ kN/M}$ D) MODO 4 $\lambda_4 = 17.0925 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	36
FIGURA 21- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 17 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. E) MODO 5 $\lambda_5 = 18.4163 \times 10^2 \text{ kN/M}$ F) MODO 6 $\lambda_6 = 19.2975 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	37
FIGURA 22- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 17 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO BFS).	39
FIGURA 23- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 17 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. A) MODO 1 $\lambda_1 = 5.3626 \times 10^2 \text{ kN/M}$ B) MODO 2 $\lambda_2 = 5.5619 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	40
FIGURA 24- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 17 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. C) MODO 3 $\lambda_3 = 10.5096 \times 10^2 \text{ kN/M}$ D) MODO 4 $\lambda_4 = 17.2300 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	41
FIGURA 25- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 17 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO NAS DUAS DIREÇÕES SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. E) MODO 5 $\lambda_5 = 18.5550 \times 10^2 \text{ kN/M}$ F) MODO 6 $\lambda_6 = 19.4388 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	42
FIGURA 26- PLACA RETANGULAR COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE SEM RESTRIÇÕES UNILATERAIS.	44
FIGURA 27- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 26 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO ACM).	45
FIGURA 28- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 26 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. A) MODO 1 $\lambda_1 = 1.1765 \times 10^3 \text{ kN/M}$ B) MODO 2 $\lambda_2 = 1.1795 \times 10^3 \text{ kN/M}$ .	46
FIGURA 29- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 26 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. C) MODO 3 $\lambda_3 = 1.7711 \times 10^3 \text{ kN/M}$ D) MODO 4 $\lambda_4 = 2.0176 \times 10^3 \text{ kN/M}$ .	47
FIGURA 30- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 26 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. E) MODO 5 $\lambda_5 = 3.0227 \times 10^3 \text{ kN/M}$ F) MODO 6 $\lambda_6 = 3.3133 \times 10^3 \text{ kN/M}$ .	48
FIGURA 31- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 26 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO BFS).	50
FIGURA 32- PLACA RETANGULAR COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE COM DUAS RESTRIÇÕES UNILATERAIS EM SENTIDOS IGUAIS LOCALIZADOS A 0.5M DOS BORDOS.	52
FIGURA 33- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 32 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO ACM).	53
FIGURA 34- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 32 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE COM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS NO MESMO SENTIDO, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. A) MODO 1 $\lambda_1 = 1.1765 \times 10^3 \text{ kN/M}$ B) MODO 2 $\lambda_2 = 1.1771 \times 10^3 \text{ kN/M}$ .	54
FIGURA 35- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 32 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE COM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS NO MESMO SENTIDO, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. C) MODO 3 $\lambda_3 = 1.2442 \times 10^3 \text{ kN/M}$ D) MODO 4 $\lambda_4 = 1.3829 \times 10^3 \text{ kN/M}$ .	55
FIGURA 36- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA RETANGULAR DA FIGURA 32 COM QUATRO BORDOS SA SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE COM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS NO MESMO SENTIDO, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 16x32. E) MODO 5 $\lambda_5 = 1.7711 \times 10^3 \text{ kN/M}$ F) MODO 6 $\lambda_6 = 2.6454 \times 10^3 \text{ kN/M}$ .	56
FIGURA 37- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 32 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO BFS).	58

FIGURA 38- PLACA QUADRADA COM OS TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE SUBMETIDA A COMPRESSÃO UNIDIRECIONAL SEGUNDO $x_1$ SEM RESTRIÇÕES UNILATERAIS.	59
FIGURA 39- GRÁFICO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 38 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO ACM).	61
FIGURA 40- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA QUADRADA DA FIGURA 38 COM TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAIS SEGUNDO $x_1$ SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 32X32. A) MODO 1 $\lambda_1 = 2.5338 \times 10^2 \text{ kN/M}$ B) MODO 2 $\lambda_2 = 7.8761 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	62
FIGURA 41- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA QUADRADA DA FIGURA 38 COM TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAIS SEGUNDO $x_1$ SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 32X32. C) MODO 3 $\lambda_3 = 14.2825 \times 10^2 \text{ kN/M}$ D) MODO 4 $\lambda_4 = 16.1550 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	63
FIGURA 42- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA QUADRADA DA FIGURA 38 COM TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAIS SEGUNDO $x_1$ SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 32X32. E) MODO 5 $\lambda_5 = 16.8225 \times 10^2 \text{ kN/M}$ F) MODO 6 $\lambda_6 = 24.4063 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	64
FIGURA 43- GRÁFICO DO COMPORTAMENTO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 38 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO BFS).	66
FIGURA 44- PLACA QUADRADA COM OS TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE SUBMETIDA A COMPRESSÃO UNIDIRECIONAL SEGUNDO $x_1$ COM RESTRIÇÕES UNILATERAIS NO CENTRO DA PLACA E A MEIO DO BORDO LIVRE.	68
FIGURA 45- GRÁFICO DO COMPORTAMENTO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 44 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO ACM).	69
FIGURA 46- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA QUADRADA DA FIGURA 44 COM TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAIS SEGUNDO $x_1$ SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 32X32. A) MODO 1 $\lambda_1 = 6.4578 \times 10^2 \text{ kN/M}$ B) MODO 2 $\lambda_2 = 6.7626 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	70
FIGURA 47- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA QUADRADA DA FIGURA 44 COM TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAIS SEGUNDO $x_1$ SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 32X32. C) MODO 3 $\lambda_3 = 7.8761 \times 10^2 \text{ kN/M}$ D) MODO 4 $\lambda_4 = 14.2825 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	71
FIGURA 48- MODOS DE ENCURVADURA DA PLACA QUADRADA DA FIGURA 44 COM TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAIS SEGUNDO $x_1$ SEM CONSTRANGIMENTOS UNILATERAIS, OBTIDOS COM UMA MALHA DE 32X32. E) MODO 5 $\lambda_5 = 16.1550 \times 10^2 \text{ kN/M}$ D) MODO 6 $\lambda_6 = 23.3050 \times 10^2 \text{ kN/M}$ .	72
FIGURA 49- GRÁFICO DO COMPORTAMENTO DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DA PLACA DA FIGURA 44 EM FUNÇÃO DA DIMENSÃO H DOS ELEMENTOS FINITOS (ELEMENTO FINITO BFS).	74

## Lista de Quadros

TABELA 1- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR SEM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, QUATRO BORDOS SA, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO ACM.....	22
TABELA 2- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR SEM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, QUATRO BORDOS SA, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO BFS.....	27
TABELA 3- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR COM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, QUATRO BORDOS SA, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO ACM.....	33
TABELA 4- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR COM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, QUATRO BORDOS SA, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA (PARA O ELEMENTO BFS.....	38

TABELA 5- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR COM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS COM SENTIDOS OPOSTOS, QUATRO BORDOS SA, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO ACM.....	44
TABELA 6- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR COM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS EM SENTIDOS OPOSTOS, QUATRO BORDOS SA, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO BFS.....	49
TABELA 7- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR SEM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, QUATRO BORDOS SA, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO ACM.....	52
TABELA 8- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR SEM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, QUATRO BORDOS SA, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE CORTE, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO BFS.....	57
TABELA 9- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR SEM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAL, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO ACM. ....	60
TABELA 10- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR SEM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAL, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO BFS. ....	65
TABELA 11- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR COM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAL, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO ACM. ....	68
TABELA 12- RESULTADOS DAS CARGAS DE BIFURCAÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR COM IMPEDIMENTOS UNILATERAIS, TRÊS BORDOS SA E UM LIVRE, SUBMETIDA A ESFORÇOS DE COMPRESSÃO UNIDIRECIONAL, EM FUNÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA PARA O ELEMENTO BFS. ....	73

## Lista de abreviações

SA: Bordo simplesmente apoiado

BE: Bordo encastrado

SABE: Barra apoiada e encastrada

SNM: Semismooth Newton Method

## Lista de Símbolos

$E$  – Modulo de Elasticidade [kPa].

$t$  – Espessura da placa [m].

$a$  – Comprimento segundo X do elemento finito (e) [m].

$b$  – Comprimento segundo Y do elemento finito (e) [m].

$\psi$  – Funções de forma do elemento (ACM ou BFS) [-].

$\mathbf{K}$  – Matriz de rigidez elástica.

$\mathbf{G}$  – Matriz de rigidez geométrica.

$l_0$  – Comprimento de encurvadura

## 1- Introdução

Esta dissertação trata do fenómeno de encurvadura de placas (peças laminares planas em que duas dimensões são muito maiores que uma terceira, a espessura) sujeitas a esforços de membrana (esforços contidos no plano médio). A instabilidade por encurvadura de uma coluna, estudada em Resistência dos Materiais II, ocorre para um esforço normal de compressão suficientemente elevado e faz com que a coluna abandone a sua forma retilínea (que passa a ser não estável), procurando uma outra configuração de equilíbrio não retilínea, mas estável. O estudo da encurvadura implica o abandono da hipótese da linearidade geométrica. A hipótese da linearidade geométrica assume que as equações de equilíbrio se podem escrever na configuração indeformada. O fenómeno da encurvadura (de colunas, placas ou cascas) só é detetado analítica ou numericamente se abandonarmos a hipótese da linearidade geométrica, ou seja, se escrevermos as equações de equilíbrio do elemento finito e da estrutura completa na sua configuração deformada.

Este estudo da encurvadura teve início com a investigação de Leonard Euler, em 1744, sobre a instabilidade elástica de barras isoladas comprimidas. No seu famoso estudo sobre linhas elásticas Euler introduziu o conceito de carga crítica que é o esforço axial mínimo para o qual uma barra esbelta comprimida se mantém deformada lateralmente. Mais ainda, demonstrou que para uma coluna perfeita sujeita a um esforço axial de compressão inferior ao crítico, ao aplicar-se uma perturbação lateral, a coluna apresenta uma ligeira deformação, mas retorna à posição inicial quando a perturbação é retirada (a hipótese da linearidade geométrica é válida). Já quando se atinge a carga crítica a peça esbelta não retorna à configuração inicial, ou seja, instabiliza. Ainda assim, dada a simplicidade das equações, no caso da encurvadura de colunas, a maioria dos casos tem solução exata.

No caso de placas, a instabilidade por encurvadura também ocorre quando esforços de membrana suficientemente elevados fazem com que a placa abandone a sua forma plana. No entanto, já se torna mais difícil a obtenção de soluções exatas para as cargas de bifurcação e respetivos modos. Contudo, existem alguns estudos [1] para tipos genéricos de placas retangulares sem constrangimentos unilaterais, tendo em conta algumas combinações de condições de fronteira onde se obtiveram soluções exatas para as cargas críticas de bifurcação e dos respetivos modos de encurvadura.

Neste trabalho calculam-se as cargas de bifurcação e os modos de instabilidade de placas sujeitas a apoios pontuais unilaterais, isto é, apoios que permitem o deslocamento da placa num sentido, mas que o impedem no sentido oposto.

A análise de encurvadura unilateral de placas pode ser importante no estudo do reforço de vigas e pilares de betão armado através do seu encamisamento com chapas de aço. Devido à ação das forças compressivas ou de corte, pode ocorrer a encurvadura destas chapas que será do tipo unilateral devido à presença do elemento mais rígido de betão armado.

A análise da instabilidade por encurvadura em colunas e pórticos com constrangimentos unilaterais já foi efetuada utilizando quer métodos analíticos quer métodos numéricos ([2], [3]). Tanto

quanto é do nosso conhecimento, a encurvadura de placas com constrangimentos unilaterais ainda não foi estudada. Dado que, nestes casos, não existem soluções exatas, a análise dos resultados obtidos pode ser feita por comparação com os resultados obtidos nos casos em que não existem apoios unilaterais.

A compreensão do fenómeno da encurvadura, permite o projeto e a construção de estruturas metálicas esbeltas, leves, fáceis de construir e económicas, assegurando sempre a segurança estrutural. Na Europa é o Eurocódigo 3 (EC3) [4] que agrupa e sistematiza o conjunto de procedimentos para o dimensionamento de estruturas de aço à encurvadura. A encurvadura unilateral pode ocorrer, por exemplo, quando existe um reforço de um pilar de betão armado por encamisamento com um perfil metálico em caixão, no qual o pilar submetido a esforços de compressão, pode provocar a instabilidade do encamisamento que será unilateral, devido à presença do elemento mais rígido de betão armado.

Nesta dissertação focamo-nos no estudo da encurvadura de placas finas na presença de constrangimentos unilaterais pontuais. Assim, no capítulo 2 apresenta-se a formulação pelo método dos elementos finitos do problema da determinação de cargas de bifurcação e modos de instabilidade de placas, bem como, os tipos de elementos finitos (ACM e BFS) utilizados.

No capítulo 3 apresenta-se toda a teoria relacionada com a instabilidade de placas confinadas unilateralmente, bem como, o algoritmo do *Semi-Smooth Newton Method* que é utilizado na construção de um programa em *MATLAB* para cálculo de cargas de bifurcação e correspondentes modos de instabilidade de placas finas com constrangimentos cinemáticos unilaterais.

No capítulo 4 apresentam-se resultados numéricos de cargas de bifurcação e modos de instabilidade em vários exemplos em que as placas têm, ou não, apoios unilaterais e discutem-se os resultados obtidos.

Por fim, no capítulo 5 resumem-se as conclusões retiradas da análise destes resultados e sugerem-se possíveis desenvolvimentos futuros.

## 2- Estudo da encurvadura de placas pelo método dos elementos finitos

### 2.1 – Energia Potencial

Admitimos que o problema que estamos a tratar tem um carácter conservativo. Quer isto dizer, que o trabalho de todas as forças (elásticas e exteriores) não depende do caminho percorrido, mas sim apenas das configurações final e inicial. Por isso, admitimos que existe uma função energia potencial total da qual se podem obter todas as forças por mera derivação em ordem aos deslocamentos generalizados.

A energia potencial compõe-se de uma parcela devida à deformação elástica das fibras que compõem a placa e de uma parcela de energia potencial das forças exteriores. Estas forças exteriores produzem o campo de esforços de membrana responsável pelo fenómeno da encurvadura que queremos quantificar. Assumimos, pois, que não há forças exteriores transversais ao plano médio da placa, pelo que, sendo a placa isenta de imperfeições geométricas, antes da encurvadura não há quaisquer esforços de flexão.

Em Resistência dos Materiais, a energia potencial elástica de um meio contínuo é dada por:

$$V_{el} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad (1)$$

em que  $V$  designa o volume da placa,  $\sigma_{ij}$  o tensor das tensões e  $\varepsilon_{ij}$  o tensor das deformações. Um índice repetido indica que esse índice é somado de 1 a 3. Uma vez que nos restringimos a placas finas, as deformações por flexão e por torção devidas à encurvadura só produzem tensões de membrana  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ). Então, designando a espessura da placa por  $t$

$$V_{el} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} d\Omega dx_3, \quad (2)$$

em que  $\Omega$  designa o domínio ocupado pelo plano médio da placa no plano coordenado  $(0, x_1, x_2)$  (Figura 1).

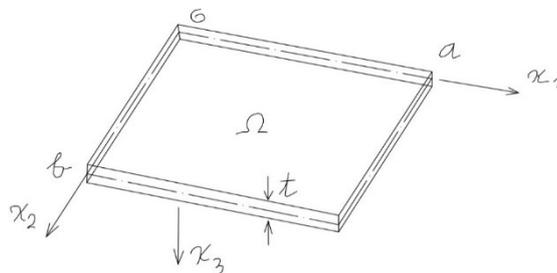


Figura 1- Exemplo de placa retangular definida no domínio  $(x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b]$ , designado pela letra grega  $\Omega$ .

A função integranda é:

$$\sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{\sigma\beta} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} = \mathbf{s}^T \mathbf{e}, \quad (3)$$

em que,  $\mathbf{s} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$  e  $\mathbf{e} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12})^T$ . Por sua vez as extensões em planos paralelos ao plano médio da placa variam linearmente na altura,

$$\mathbf{e} = x_3 \boldsymbol{\chi}, \quad (4)$$

em que o vetor das curvaturas,

$$\boldsymbol{\chi} = (\chi_{11}, \chi_{22}, 2\chi_{12})^T = (-w_{,11}, -w_{,22}, -2w_{,12})^T = \mathbf{L}_f w. \quad (5)$$

Nesta dissertação segue-se a notação usada em [5]. Na equação anterior  $w(x_1, x_2)$  representa o deslocamento transversal e o operador diferencial linear

$$\mathbf{L}_f = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, -2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^T. \quad (6)$$

A lei de Hooke para estados planos de tensão é

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e}, \quad (7)$$

em que

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Assim sendo,

$$V_{el} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{\Omega} \mathbf{s}^T \mathbf{e} \, d\Omega dx_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\chi} \, d\Omega, \quad (9)$$

em que

$$\mathbf{D}_f = D_f \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \text{ e } D_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (10)$$

A energia potencial devida ao carregamento exterior advém do trabalho realizado pelos esforços de membrana  $N_{ij}$ , esforços normais e de corte distribuídos atuando nas direções do plano da placa.

Para o caso de uma placa, a energia potencial devida ao carregamento exterior, é mais complexa do que numa coluna pois na coluna há apenas um esforço de membrana (o esforço normal) enquanto numa placa há três esforços de membrana. A Figura 2, ilustra a configuração deformada [P'Q'R'S'] de um elemento infinitesimal retangular [PQRS] do domínio da placa sujeita a um campo de esforços de membrana,

$$\mathbf{N}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} N_{11}(x_1, x_2) & N_{12}(x_1, x_2) \\ N_{12}(x_1, x_2) & N_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} N_{11}^0(x_1, x_2) & N_{12}^0(x_1, x_2) \\ N_{12}^0(x_1, x_2) & N_{22}^0(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

dependentes de um único parâmetro de carga  $\lambda$ , que são os causadores do abandono da configuração plana para um valor  $\lambda \geq \lambda_{cr}$ . Note-se que  $N_{21}(x_1, x_2) = N_{12}(x_1, x_2)$ .

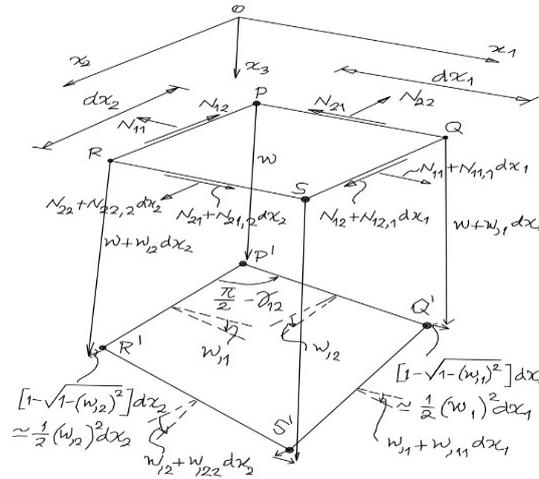


Figura 2- Elemento infinitesimal de placa na configuração deformada de pós encurvadura. Colocação em evidência da cinemática relevante para o cálculo do trabalho dos esforços de membrana.

Temos então

$$V_{ext} = \int_{\Omega} N_{11} \varepsilon_{11}^{NL} d\Omega + \int_{\Omega} N_{22} \varepsilon_{22}^{NL} d\Omega + \int_{\Omega} N_{12} (2\varepsilon_{12}^{NL}) d\Omega, \quad (12)$$

em que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{NL} &= 1 - \sqrt{1 - (w_{,1})^2} \approx \frac{1}{2} (w_{,1})^2, & \varepsilon_{22}^{NL} &= 1 - \sqrt{1 - (w_{,2})^2} \approx \frac{1}{2} (w_{,2})^2, \\ 2\varepsilon_{12}^{NL} &= \gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - (\hat{\text{ângulo entre}} \overrightarrow{P'Q'} \text{ e } \overrightarrow{P'R'}) \approx \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\hat{\text{Ângulo entre}} \overrightarrow{P'Q'} \text{ e } \overrightarrow{P'R'})\right) = \\ \cos(\hat{\text{Ângulo entre}} \overrightarrow{P'Q'} \text{ e } \overrightarrow{P'R'}) &= \frac{\overrightarrow{P'Q'} \cdot \overrightarrow{P'R'}}{\|\overrightarrow{P'Q'}\| \|\overrightarrow{P'R'}\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - (w_{,1})^2} \\ 0 \\ w_{,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 - (w_{,1})^2} \\ w_{,2} \end{pmatrix} = w_{,1} w_{,2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Em resumo,

$$V = V_{el} + V_{ext} =$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\chi} \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [N_{11}(w_{,1})^2 + N_{22}(w_{,2})^2 + 2N_{12}w_{,1}w_{,2}] \, d\Omega = \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\chi} \, d\Omega - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} [N_{11}^0(w_{,1})^2 + N_{22}^0(w_{,2})^2 + 2N_{12}^0w_{,1}w_{,2}] \, d\Omega.$$

## 2.2 – Discretização pelo método dos elementos finitos

Consideremos agora uma partição do domínio  $\Omega$  em  $N$  subdomínios  $\Omega^{(e)}$ ,  $\Omega = \cup_{e=1}^N \Omega^e$ . Em cada subdomínio  $\Omega^{(e)}$  (isto é, em cada elemento finito) o campo de deslocamentos transversais  $w(x_1, x_2)$  é aproximado por uma combinação linear de  $n_e$  funções polinomiais  $\psi_i^e(x_1, x_2)$  ( $i = 1, \dots, n_e$ ) de  $x_1$  e  $x_2$ :

$$w^{(e)}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n_e} \psi_i^{(e)}(x_1, x_2) d_i^{(e)} = \boldsymbol{\Psi}^{(e)}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{d}^{(e)} \quad (15)$$

$$= \left( \psi_1^{(e)}(x_1, x_2) \dots \psi_{n_e}^{(e)}(x_1, x_2) \right) \begin{pmatrix} d_1^{(e)} \\ \vdots \\ d_{n_e}^{(e)} \end{pmatrix},$$

em que os  $n_e$  coeficientes  $d_i^{(e)}$  têm o significado geométrico de deslocamentos generalizados. Em geral  $d_i^{(e)}$  é um deslocamento, uma rotação ou uma curvatura num determinado ponto chamado nó. O conjunto dos elementos finitos designa-se por malha de elementos finitos.

Atendendo a (14), a expressão da energia potencial total de um elemento finito  $\Omega^{(e)}$  é dada por

$$V^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\chi}^{(e)T}(x_1, x_2) \mathbf{D}_f \boldsymbol{\chi}^{(e)}(x_1, x_2) d\Omega^{(e)} - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla w^{(e)})^T \mathbf{N}^o(x_1, x_2) \nabla w^{(e)} \, d\Omega^{(e)}, \quad (16)$$

em que

$$\nabla w^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} w^{(e)}(x_1, x_2). \quad (17)$$

Na expressão analítica (16) (recordar (5) e (14)), por substituição obtém-se

$$\boldsymbol{\chi}^{(e)} = \mathbf{L}_f w^{(e)}(x_1, x_2) = \mathbf{L}_f \boldsymbol{\Psi}^{(e)}(x_1, x_2) \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}(x_1, x_2) \mathbf{d}^{(e)} \quad (18)$$

$$= \begin{pmatrix} -\psi_{1,11}^{(e)} & \dots & -\psi_{n_e,11}^{(e)} \\ -\psi_{1,22}^{(e)} & \dots & -\psi_{n_e,22}^{(e)} \\ -2\psi_{1,12}^{(e)} & \dots & -2\psi_{n_e,12}^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{(e)} \\ d_2^{(e)} \\ \vdots \\ d_{n_e}^{(e)} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla w^{(e)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Psi^{(e)}(x_1, x_2) \mathbf{d}^{(e)} = \nabla \Psi^{(e)}(x_1, x_2) \mathbf{d}^{(e)} = \\ &= \begin{pmatrix} \psi_{1,1}^{(e)}(x_1, x_2) & \dots & \psi_{n_e,1}^{(e)}(x_1, x_2) \\ \psi_{1,2}^{(e)}(x_1, x_2) & \dots & \psi_{n_e,2}^{(e)}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \mathbf{d}^{(e)} = \nabla \Psi^{(e)}(x_1, x_2) \mathbf{d}^{(e)}, \end{aligned} \quad (19)$$

peço que a energia potencial elementar se escreve na forma

$$\begin{aligned} V^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)})^T \mathbf{D}_f (\mathbf{B}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)}) d\Omega - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla \Psi^{(e)} \mathbf{d}^{(e)})^T \mathbf{N}^o (\nabla \Psi^{(e)} \mathbf{d}^{(e)}) d\Omega \\ &= \mathbf{d}^{(e)T} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{K}^{(e)} - \lambda \mathbf{G}^{(e)}) \mathbf{d}^{(e)} \end{aligned} \quad (20)$$

em que

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}_f \mathbf{B}^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (21)$$

é a matriz de rigidez elástica do elemento finito  $\Omega^{(e)}$  e

$$\mathbf{G}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \nabla \Psi^{(e)T} \mathbf{N}^o \nabla \Psi^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (22)$$

é a matriz de rigidez geométrica ou matriz de estabilidade do elemento finito  $\Omega^{(e)}$ . Notar que  $\mathbf{K}^{(e)}$  e  $\mathbf{G}^{(e)}$  são matrizes simétricas, isto é,  $K_{ij}^{(e)} = K_{ji}^{(e)}$  e  $G_{ij}^{(e)} = G_{ji}^{(e)}$ .

### 2.3 – Princípio da Estacionaridade da energia potencial

As equações que regem o fenómeno da encurvadura de um sistema conservativo podem obter-se por estacionarização da energia potencial total em relação ao sistema de deslocamentos generalizados:

$$\frac{\partial V^{(e)}}{\partial \mathbf{d}^{(e)}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(e)}}{\partial d_1^{(e)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial V^{(e)}}{\partial d_{n_e}^{(e)}} \end{pmatrix} \quad (23)$$

em que  $V^{(e)}$  é dada por (20). Escrevendo  $V^{(e)}$  na forma indicial

$$V^{(e)} = \frac{1}{2} (K_{ij}^{(e)} - \lambda G_{ij}^{(e)}) d_i^{(e)} d_j^{(e)} \quad (24)$$

e derivando em ordem a  $d_k^{(e)}$  obtemos

$$\frac{\partial V^{(e)}}{\partial d_k^{(e)}} = \frac{1}{2} (K_{ij}^{(e)} - \lambda G_{ij}^{(e)}) \frac{\partial d_i^{(e)}}{\partial d_k^{(e)}} d_j^{(e)} + \frac{1}{2} (K_{ij}^{(e)} - \lambda G_{ij}^{(e)}) d_i^{(e)} \frac{\partial d_j^{(e)}}{\partial d_k^{(e)}}. \quad (25)$$

Uma vez que os deslocamentos generalizados são independentes, isto é,

$$\frac{\partial d_i^{(e)}}{\partial d_k^{(e)}} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial d_j^{(e)}}{\partial d_k^{(e)}} = \delta_{jk} \quad (26)$$

em que,

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se } u = v \\ 0, & \text{se } u \neq v \end{cases} \quad (27)$$

representa o símbolo de Kronecker, obtém-se

$$\frac{\partial V^{(e)}}{\partial d_k^{(e)}} = \frac{1}{2} (K_{kl}^{(e)} - \lambda G_{kl}^{(e)}) d_l^{(e)} + \frac{1}{2} (K_{lk}^{(e)} - \lambda G_{lk}^{(e)}) d_l^{(e)}. \quad (28)$$

Atendendo à simetria das matrizes  $\mathbf{K}^{(e)}$  e  $\mathbf{G}^{(e)}$  as equações de equilíbrio do elemento finito ( $e$ ) podem escrever-se na forma indicial,

$$\frac{\partial V^{(e)}}{\partial d_k^{(e)}} = (K_{kl}^{(e)} - \lambda G_{kl}^{(e)}) d_l^{(e)} = 0, \quad (29)$$

ou na forma matricial

$$\frac{\partial V^{(e)}}{\partial \mathbf{d}^{(e)}} = (\mathbf{K}^{(e)} - \lambda \mathbf{G}^{(e)}) \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{0}, \quad (30)$$

em que  $\mathbf{0}$  representa o vetor nulo com uma dimensão igual à do número de deslocamentos generalizados independentes do elemento finito.

## 2.4 – Tipos de elemento finito usados

Usaremos dois tipos de elementos finitos retangulares: o ACM (de Adini- Clough- Melosh) [6] e o BFS (de Bogner- Fox- Schmitt) [7]. Ambos são de quatro nós, mas enquanto o elemento ACM tem três graus de liberdade por nó (tem  $4 \times 3 = 12$  graus de liberdade ao todo, Figura 3(a)), o elemento BFS tem quatro graus de liberdade por nó (tem  $4 \times 4 = 16$  graus de liberdade ao todo, Figura 3(b)).

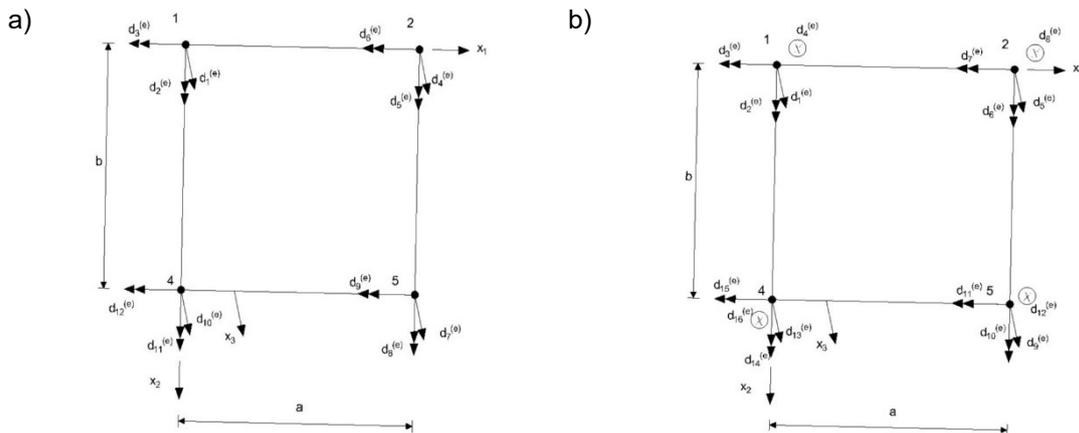


Figura3- Representação dos deslocamentos generalizados dos elementos finitos retangulares ACM (a) e BFS (b).

Uma discretização por elementos ACM proporciona um campo de deslocamentos transversais contínuo (por outras palavras, conforme). Contudo o campo de declives nas direções normais dos bordos do elemento finito não é contínuo (não é conforme), como ilustrado na Figura 4.

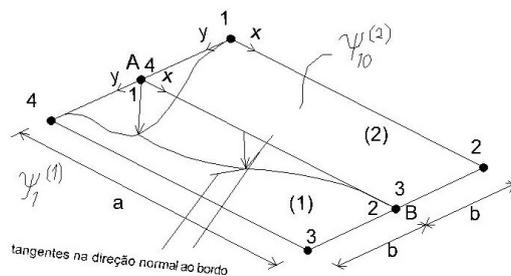


Figura 4- Ilustração da não conformidade do elemento ACM. Descontinuidade do declive na direção normal ao bordo comum a dois elementos adjacentes.

Nesta figura representa-se uma malha de dois elementos ACM em que um dos nós comuns (o nó 1 do elemento 1 e simultaneamente o nó 4 do elemento 2) sofre um deslocamento unitário positivo. As funções de forma envolvidas na definição do campo de deslocamentos dessas malhas são  $\psi_1^{(1)}(x, y)$  e a  $\psi_{10}^{(2)}(x, y)$ . Em vez de usarmos  $x_1$  e  $x_2$  como coordenadas cartesianas usamos  $x$  e  $y$  por simplicidade de notação. Notar que o par  $(x, y)$  de cada elemento finito tem origem no nó 1 (de cada elemento finito). De acordo com as funções de aproximação (funções de forma) página 77 do anexo ,

$$\psi_1^{(1)}(x, y) = \frac{1}{a^3 b^3} \{(a-x)(b-y)[a^2(b-y)(b+2y) + ab^2x - 2b^2x^2]\}, \quad (31)$$

$$\psi_{10}^{(2)}(x, y) = \frac{1}{a^3 b^3} \{y(a-x)[3a^2by - 2a^2y^2 + b^2x(a-2x)]\}. \quad (32)$$

Então, é possível mostrar que as derivadas direcionais na direção perpendicular ao bordo AB dos elementos que partilham o bordo são diferentes, isto é, que

$$\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial y}(x, 0) \neq \frac{\partial \psi_{10}^{(2)}}{\partial y}(x, b), \quad (33)$$

o que mostra que o elemento finito ACM não assegura a continuidade dos declives na direção perpendicular aos bordos.

A matriz elementar  $\mathbf{K}^{(e)}$  dos elementos ACM e BFS encontra-se em anexo. A matriz de rigidez elástica elementar do elemento finito ACM está nas páginas 78 e 79; a do elemento BFS está nas páginas 83 a 87. Para esforços de membrana uniformes as matrizes  $\mathbf{G}^{(e)}$  obtêm-se de,

$$\mathbf{G}^{(e)} = N_{11}^o \mathbf{M}_{11}^{(e)} + N_{22}^o \mathbf{M}_{22}^{(e)} + N_{12}^o \mathbf{M}_{12}^{(e)}. \quad (34)$$

As matrizes  $\mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(e)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) estão nas páginas 80 a 82 (elemento ACM) e nas páginas 83 e 88 a 91 (elemento BFS) do mesmo anexo.

Após formar as matrizes de rigidez elástica ( $\mathbf{K}$ ) e geométrica ( $\mathbf{G}$ ) globais, a determinação das cargas de bifurcação ( $\lambda$ ), e respetivos modos de instabilidade ( $\mathbf{x}$ ) de uma placa sem restrições cinemáticas unilaterais consiste na resolução do problema de valores e vetores próprios:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (35)$$

### 3- Análise da instabilidade confinada de placas pelo Método dos Elementos Finitos

#### 3.1 – Introdução

O objetivo na análise de encurvadura de placas com constrangimentos unilaterais pelo método dos elementos finitos é calcular cargas críticas e modos de encurvadura de modelos de elementos finitos de placas confinadas unilateralmente pontualmente em nós da malha. De modo a fixarmos ideias, consideraremos a placa quadrada simplesmente apoiada em três bordos, e livre no quarto bordo, com dois apoios unilaterais: um no centro da placa que não permite movimento para cima e um no meio do bordo livre que não permite movimento para baixo. A placa e a respetiva malha de elementos finitos representam-se na Figura 5. O nó 5 está impedido de ter deslocamentos descendentes (para baixo do plano do papel) enquanto o nó 8 está impedido de ter deslocamentos ascendentes (para cima do plano do papel).

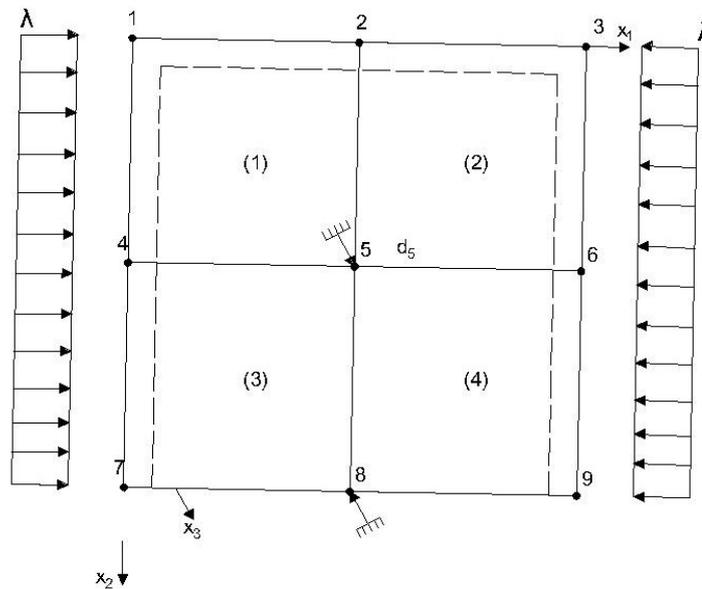


Figura 5- Placa quadrada discretizada em 4 elementos finitos e confinada unilateralmente nos nós 5 e 8. O bordo [7 9] é livre enquanto os outros são simplesmente apoiados.

O problema da encurvadura desta placa reduz-se à resolução de um problema de valores e vetores próprios de complementaridade misto, diferente do problema (35), que se pode escrever na forma:

Calcular  $\lambda > 0$  e  $(\mathbf{x}_F, \mathbf{x}_C) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  e  $\mathbf{y}_C$  tal que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{CC} - \lambda \mathbf{G}_{CC} & \mathbf{K}_{CF} - \lambda \mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{K}_{FC} - \lambda \mathbf{G}_{FC} & \mathbf{K}_{FF} - \lambda \mathbf{G}_{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (36)$$

com

$$\mathbf{0} < \mathbf{x}_C \perp \mathbf{y}_C \geq \mathbf{0}. \quad (37)$$

No problema anterior os índices inferiores  $F$  e  $C$  denotam os deslocamentos generalizados sem e com constrangimentos cinemáticos unilaterais;  $F$  é a primeira letra da palavra inglesa “Free” e  $C$  é a primeira letra de “Contact”. Em (37) as desigualdades  $\mathbf{x}_C \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{y}_C \geq \mathbf{0}$  indicam que todas as componentes de  $\mathbf{x}_C$  e de  $\mathbf{y}_C$  são sempre não negativas e a expressão  $\mathbf{x}_C \perp \mathbf{y}_C$  indica que o produto interno entre  $\mathbf{x}_C$  e  $\mathbf{y}_C$  é nulo, sendo que  $\mathbf{y}_C$  representa o vetor de reações nos apoios com constrangimentos unilaterais.

Admitindo que cada nó tem três graus de liberdade (duas rotações (em torno de  $x_1$  e  $x_2$ ) e um deslocamento transversal na direção  $x_3$ , representa-se uma possível numeração dos deslocamentos generalizados globais na Figura 6.

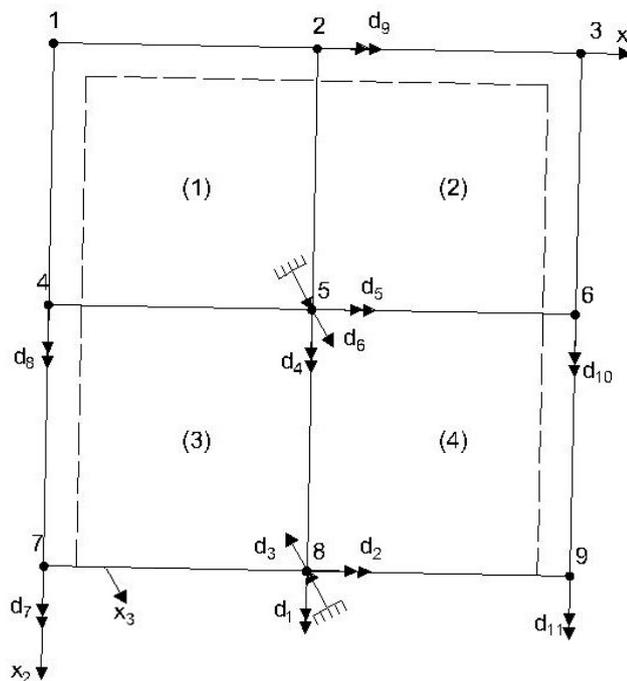


Figura 6- Numeração dos deslocamentos generalizados globais da placa da Figura 5.

Para esta numeração os conjuntos de índices dos deslocamentos generalizados livres e sujeitas a constrangimentos unilaterais são:

$$\mathbf{P}_F = \{1,2,4,5,7,8,9,10,11\}, \quad \mathbf{P}_C = \{3,6\}, \quad (38)$$

peço que,

$$\mathbf{x}_C = \{d_3, d_6\}^T, \quad \mathbf{x}_F = \{d_1, d_2, d_4, d_5, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}\}^T. \quad (39)$$

O vetor  $\mathbf{y}_C$  representa as forças de reação por parte dos obstáculos unilaterais (representados pelas setas  $\uparrow$  e  $\downarrow$  na Figura 6 no caso de os contactos estarem fechados (isto é, a placa, nos nós 5 e 8, estar em contacto com o obstáculo),

$$\mathbf{y}_C = \{Q_3, Q_6\}^T. \quad (40)$$

As condições de complementaridade (36) indicam que os constrangimentos unilaterais impedem o movimento num dos sentidos ( $d_3 \geq 0, d_6 \geq 0$ ), as forças generalizadas de reação dos obstáculos unilaterais só podem empurrar a placa nos pontos de contacto, nunca a podendo puxar ( $Q_3 \geq 0, Q_6 \geq 0$ ) e que em cada obstáculo pontual unilateral as quantidades cinemáticas (algum  $d_i$ ) e estáticas (o  $Q_j$  correspondente ao  $d_i$ , isto é, em que  $j = i$ ) não podem ser simultaneamente não nulas ( $d_3 Q_3 = 0, d_6 Q_6 = 0$ ).

### 3.2 – A numeração dos graus de liberdade globais e a construção das matrizes globais

É muito importante que a numeração dos deslocamentos generalizados globais comece nos deslocamentos generalizados que têm constrangimentos de tipo unilateral por forma a que o problema de valores e vetores próprios de complementaridade a resolver tenha a estrutura indicada em (36) e (37), porque o algoritmo que usaremos para o resolver pressupõe que as variáveis sujeitas às condições de complementaridade (37) sejam as primeiras, ficando no segundo grupo as variáveis livres de constrangimentos. Os sentidos positivos dos deslocamentos nos nós com constrangimentos unilaterais devem ser arbitrados por forma a que os movimentos admissíveis para esses nós, sejam positivos (o algoritmo que veremos mais à frente está concebido para tratar variáveis de complementaridade não negativas, ou seja, a situação das condições (37)). A forma mais sistemática e automática de construir as matrizes globais a partir das matrizes elementares requer a construção de uma matriz auxiliar (a que poderemos chamar de matriz de conectividades) que designaremos por  $jk$ . A matriz  $jk$  tem tantas linhas quantos os elementos finitos da malha ( $n_{elem}$ ) e tantas colunas quantos os deslocamentos generalizados de cada elemento finito ( $n_{tipo} \times n_{glpn}$ , em que  $n_{tipo} = 4$  é o número de nós do elemento finito e  $n_{glpn} = 3$  (elemento ACM) ou  $n_{glpn} = 4$  (elemento BFS) é o número de deslocamentos generalizados por nó). A matriz  $jk$  será preenchida da forma seguinte:

- Quando o deslocamento generalizado  $d_i^{(e)}$  tiver o mesmo sentido que o deslocamento generalizado global  $d_l$  então  $jk(e, i) = l$ ;
- Quando o deslocamento generalizado  $d_i^{(e)}$  tiver o sentido oposto ao deslocamento generalizado global  $d_l$  então  $jk(e, i) = -l$ ;
- Quando o deslocamento generalizado  $d_i^{(e)}$  não corresponder a qualquer deslocamento generalizado global então  $jk(e, i) = 0$  (zero).

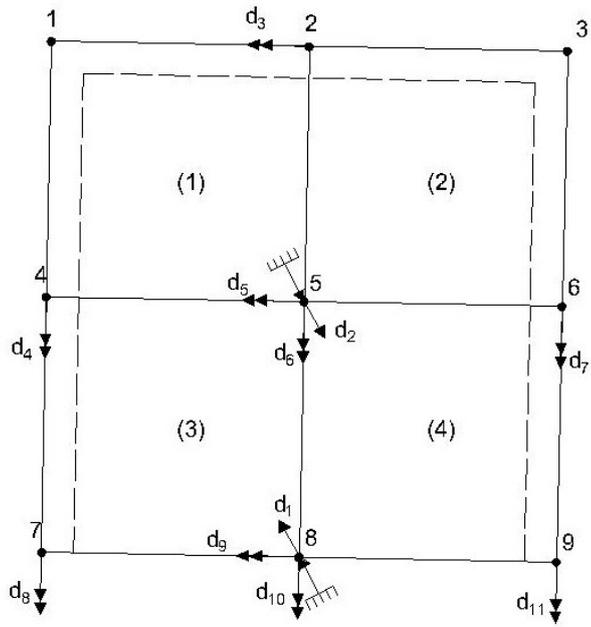


Figura 7- Renumeração dos deslocamentos generalizados globais da placa da Figura 6, de forma, a que os deslocamentos transversais dos nós 8 e 5 fiquem respetivamente com os números de ordem 1 e 2.

Consideremos então a malha da Figura 6 (de elemento ACM). A numeração dos deslocamentos generalizados da Figura 6 não é adequada para o algoritmo que tratará do cálculo da solução do problema de valores e vetores próprios porque os deslocamentos transversais dos nós 5 e 8 que estão sujeitos a constrangimentos unilaterais não têm os primeiros números de ordem. Na Figura 7 apresenta-se uma nova numeração dos deslocamentos generalizados globais em que os números de ordem dos deslocamentos transversais dos nós 8 e 5 são, respetivamente, 1 e 2. Os deslocamentos generalizados do elemento finito ACM estão indicados na Figura 6 a sobreposição com cada um dos elementos finitos da Figura 7 permite-nos fazer as correspondências entre os deslocamentos generalizados locais e globais e, portanto, construir a matriz  $jk$ :

$$\begin{matrix}
 & d_1^{(e)} & d_2^{(e)} & d_3^{(e)} & d_4^{(e)} & d_5^{(e)} & d_6^{(e)} & d_7^{(e)} & d_8^{(e)} & d_9^{(e)} & d_{10}^{(e)} & d_{11}^{(e)} & d_{12}^{(e)} & \\
 jk = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 6 & 5 & 0 & 4 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 2 & 6 & 5 & \\
 & 0 & 4 & 0 & 2 & 6 & 5 & -1 & 10 & 9 & 0 & 8 & 0 & \\
 & 2 & 6 & 5 & 0 & 7 & 0 & 0 & 11 & 0 & -1 & 10 & 9 & 
 \end{matrix}
 \tag{41}$$

Após a utilização de um algoritmo de espalhamento dos elementos das matrizes de rigidez e geométrica elementares respetivamente pelas matrizes de rigidez e geométrica globais, na malha da Figura 7, obtém-se a matriz de rigidez elástica global (a matriz apresenta-se em blocos):

$$\mathbf{K}_{1a4,1a4} = \begin{pmatrix} K_{7,7}^{(3)} + K_{10,10}^{(4)} & -K_{4,7}^{(3)} - K_{1,10}^{(4)} & 0 & -K_{2,7}^{(3)} \\ -K_{4,7}^{(9)} - K_{1,10}^{(4)} & K_{7,7}^{(1)} + K_{10,10}^{(2)} + K_{4,4}^{(3)} + K_{1,1}^{(4)} & K_{6,7}^{(1)} + K_{3,10}^{(2)} & K_{7,11}^{(1)} + K_{2,4}^{(3)} \\ 0 & K_{6,7}^{(1)} + K_{3,10}^{(2)} & K_{6,6}^{(1)} + K_{3,3}^{(2)} & K_{6,11}^{(1)} \\ -K_{2,7}^{(3)} & K_{7,11}^{(1)} + K_{2,4}^{(3)} & K_{6,1}^{(1)} & K_{11,11}^{(1)} + K_{2,2}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$\mathbf{K}_{1a4,5a8}$

$$= \begin{pmatrix} -K_{6,7}^{(3)} - K_{3,10}^{(4)} & -K_{5,7}^{(3)} - K_{2,10}^{(4)} & -K_{5,10}^{(4)} & -K_{7,11}^{(3)} \\ K_{7,9}^{(1)} + K_{10,12}^{(2)} + K_{4,6}^{(3)} + K_{1,3}^{(4)} & K_{7,8}^{(1)} + K_{10,11}^{(2)} + K_{4,5}^{(3)} + K_{1,2}^{(4)} & K_{8,10}^{(2)} + K_{1,5}^{(4)} & K_{4,11}^{(2)} \\ K_{6,9}^{(1)} + K_{3,12}^{(2)} & K_{6,8}^{(1)} + K_{3,11}^{(2)} & K_{3,8}^{(2)} & 0 \\ K_{9,11}^{(1)} + K_{2,6}^{(3)} & K_{8,11}^{(1)} + K_{2,5}^{(3)} & 0 & K_{2,11}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\mathbf{K}_{1a4,9a11} = \begin{pmatrix} -K_{7,9}^{(3)} - K_{10,12}^{(4)} & -K_{7,8}^{(3)} & -K_{8,10}^{(4)} \\ K_{4,9}^{(3)} + K_{1,12}^{(4)} & K_{4,8}^{(3)} + K_{1,11}^{(4)} & K_{1,8}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{2,9}^{(3)} & K_{2,8}^{(3)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$\mathbf{K}_{5a8,5a8}$

$$= \begin{pmatrix} K_{9,9}^{(1)} + K_{12,12}^{(2)} + K_{6,6}^{(3)} + K_{3,3}^{(4)} & K_{8,9}^{(1)} + K_{11,12}^{(2)} + K_{5,6}^{(3)} + K_{2,3}^{(4)} & K_{8,12}^{(2)} + K_{3,5}^{(4)} & K_{6,11}^{(3)} \\ K_{8,9}^{(1)} + K_{11,12}^{(2)} + K_{5,6}^{(3)} + K_{2,3}^{(4)} & K_{8,8}^{(1)} + K_{11,11}^{(2)} + K_{5,5}^{(3)} + K_{2,2}^{(4)} & K_{8,11}^{(2)} + K_{2,5}^{(4)} & K_{5,11}^{(3)} \\ K_{8,12}^{(2)} + K_{3,5}^{(4)} & K_{8,11}^{(2)} + K_{2,5}^{(4)} & K_{8,8}^{(2)} + K_{5,5}^{(4)} & 0 \\ K_{6,11}^{(3)} & K_{5,11}^{(3)} & 0 & K_{11,11}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\mathbf{K}_{5a8,9a11} = \begin{pmatrix} K_{6,9}^{(3)} + K_{3,12}^{(4)} & K_{6,8}^{(3)} + K_{3,11}^{(4)} & K_{3,8}^{(4)} \\ K_{5,9}^{(3)} + K_{2,12}^{(4)} & K_{5,8}^{(3)} + K_{2,11}^{(4)} & K_{2,8}^{(4)} \\ K_{5,12}^{(4)} & K_{5,11}^{(4)} & K_{5,8}^{(4)} \\ K_{9,11}^{(3)} & K_{8,11}^{(3)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\mathbf{K}_{9a11,9a11} = \begin{pmatrix} K_{9,9}^{(3)} + K_{12,12}^{(4)} & K_{8,9}^{(3)} + K_{11,12}^{(4)} & K_{8,12}^{(4)} \\ K_{8,9}^{(3)} + K_{11,12}^{(4)} & K_{8,8}^{(3)} + K_{11,11}^{(4)} & K_{8,11}^{(4)} \\ K_{8,12}^{(4)} & K_{8,11}^{(4)} & K_{8,8}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

A matriz de rigidez geométrica global  $\mathbf{G}$  tem a mesma estrutura.

### 3.3 – Formulação do problema

O problema que queremos resolver é (recordar (36) e (37)) calcular  $\lambda > 0, \mathbf{x}_C \in R^m, \mathbf{x}_F \in R^{n-m}$  e  $\mathbf{y}_C \in R^m$  tal que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{CC} - \lambda \mathbf{G}_{CC} & \mathbf{K}_{CF} - \lambda \mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{K}_{FC} - \lambda \mathbf{G}_{FC} & \mathbf{K}_{FF} - \lambda \mathbf{G}_{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

com

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x}_C \perp \mathbf{y}_C \geq \mathbf{0}. \quad (49)$$

Na equação (48)  $\mathbf{K}_{CC} - \lambda \mathbf{G}_{CC} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{K}_{CF} - \lambda \mathbf{G}_{CF} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ ,  $\mathbf{K}_{FC} - \lambda \mathbf{G}_{FC} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ ,  $\mathbf{K}_{FF} - \lambda \mathbf{G}_{FF} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  e  $\mathbf{0}$  representa o vetor nulo com  $n - m$  componentes. No caso da malha da Figura 7,  $n = 11$  e  $m = 2$ : há 11 graus de liberdade dos quais apenas dois (representados pelos deslocamentos generalizados  $d_1$  e  $d_2$ ) estão sujeitos às condições de complementaridade. O problema de valores e vetores próprios de complementaridade (48), (49) será resolvido como um sistema de equações não lineares pelo método de Newton; para isso, teremos de transformar (49) num sistema de equações. O conjunto de três condições  $x \geq 0, y \geq 0, xy = 0$ , simbolicamente representado por  $0 \leq x \perp y \geq 0$  pode ser tornado equivalente a uma equação não linear  $\varphi(x, y) = 0$  desde que  $\varphi(x, y)$  seja uma função com propriedades especiais a que se dá o nome de função de complementaridade. Há muitas funções de complementaridade definidas na literatura. Neste trabalho apenas iremos usar uma:

$$\varphi_{min}(x, y) = \min(x, y). \quad (50)$$

O problema de valores e vetores próprios de complementaridade (49), (50), pode então ser escrito na forma equivalente,

$$\mathbf{U}_\varphi(\mathbf{x}_C, \mathbf{y}_C) = \mathbf{0} \quad (51)$$

$$(\mathbf{K}_{CC} - \lambda \mathbf{G}_{CC})\mathbf{x}_C + (\mathbf{K}_{CF} - \lambda \mathbf{G}_{CF})\mathbf{x}_F - \mathbf{y}_C = \mathbf{0} \quad (52)$$

$$(\mathbf{K}_{FC} - \lambda \mathbf{G}_{FC})\mathbf{x}_C + (\mathbf{K}_{FF} - \lambda \mathbf{G}_{FF})\mathbf{x}_F = \mathbf{0} \quad (53)$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 - 1 = 0 \quad (54)$$

em que,

$$\mathbf{U}_\varphi(\mathbf{x}_C, \mathbf{y}_C) = \begin{pmatrix} \varphi_{min}(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \varphi_{min}(x_m, y_m) \end{pmatrix} \quad (55)$$

e  $\|\mathbf{x}\|_2 - 1 = 0$  é uma condição de normalização da solução uma vez que o problema (48), (49) é homogéneo, pelo que se  $(\mathbf{x}_C, \mathbf{y}_C, \mathbf{x}_F)$  for solução então  $(a\mathbf{x}_C, a\mathbf{y}_C, a\mathbf{x}_F)$  com  $a \in R \setminus \{0\}$ , também será solução. Optou-se assim por normalizar a solução impondo uma norma Euclidiana unitária à “parte  $\mathbf{x}$ ”, isto é, à “parte cinemática” das variáveis de complementaridade, isto é

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 1, \Leftrightarrow \sqrt{\mathbf{x}_C \cdot \mathbf{x}_C + \mathbf{x}_F \cdot \mathbf{x}_F} - 1 = 0. \quad (56)$$

O sistema (51) – (54) pode agora escrever-se como um sistema de  $m+n+1$  equações

$$\Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (57)$$

em que

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_F \\ \mathbf{y}_C \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (58)$$

e

$$\Phi(\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_F, \mathbf{y}_C, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_\varphi(\mathbf{x}_C, \mathbf{y}_C) \\ (\mathbf{K}_{CC} - \lambda \mathbf{G}_{CC})\mathbf{x}_C + (\mathbf{K}_{CF} - \lambda \mathbf{G}_{CF})\mathbf{x}_F - \mathbf{y}_C \\ (\mathbf{K}_{FC} - \lambda \mathbf{G}_{FC})\mathbf{x}_C + (\mathbf{K}_{FF} - \lambda \mathbf{G}_{FF})\mathbf{x}_F \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} - 1 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

O primeiro grupo de equações,  $\mathbf{U}_\varphi(\mathbf{x}_C, \mathbf{y}_C) = \mathbf{0}$ , não é diferenciável no sentido usual em alguns pontos ou linhas; contudo é-o em quase toda a parte. Uma vez que a probabilidade de, no processo iterativo do método de Newton, uma iterada  $(\mathbf{x}_C^k, \mathbf{x}_F^k, \mathbf{y}_C^k, \lambda^k)$  coincidir com um dos pontos em que  $\mathbf{U}_\varphi$  não é diferenciável é nula, podemos aplicar o algoritmo do método de Newton a (57) - (59).

### 3.4 – Algoritmo

O algoritmo que se apresenta seguidamente baseia-se nos artigos [8] e [9]. Assumindo que já calculámos a k-ésima iteração ( $\mathbf{z}^k$ ), pretendemos calcular ( $\mathbf{z}^{k+1}$ ) a partir da aproximação linear de  $\Phi$ ,

$$\mathbf{0} = \Phi(\mathbf{z}^k) + \partial\Phi(\mathbf{z}^k)(\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k), \quad (60)$$

em que  $\partial\Phi(\mathbf{z}^k)$  é a matriz jacobiana generalizada de  $\Phi$  avaliada na k-ésima iteração. O sistema de equações lineares (60) pode escrever-se na forma

$$\partial\Phi(\mathbf{z}^k)\mathbf{z}^{k+1} = -\Phi(\mathbf{z}^k) + \partial\Phi(\mathbf{z}^k)\mathbf{z}^k, \quad (61)$$

onde o vetor incógnita é a aproximação  $\mathbf{z}^{k+1}$ .

#### Algoritmo SNM [8] [9]

- Inicialização: Escolha um ponto inicial  $\mathbf{z}^0$  e tome  $k = 0$ , com  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .
- Iteração: Conhece-se a aproximação  $\mathbf{z}^k$ . Escolher uma matriz  $\mathbf{M}^k$  que pertença ao jacobiano generalizado  $\partial\Phi$  avaliado em  $\mathbf{z}^k$ , isto é,  $\mathbf{M}^k \in \partial\Phi(\mathbf{z}^k)$  e calcular  $\mathbf{z}^{k+1}$  resolvendo o sistema de equações lineares

$$\mathbf{M}^k \mathbf{z}^{k+1} = -\Phi(\mathbf{z}^k) + \mathbf{M}^k \mathbf{z}^k. \quad (62)$$

- Incremente  $k$  em uma unidade ( $k \leftarrow k + 1$ ) e continue o processo iterativo até que  $|\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k| < \varepsilon$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Vamos agora concretizar (62) para a função vetorial  $\Phi$  definida em (59). Teremos então

$$\begin{pmatrix} \partial \mathbf{x}_c \mathbf{U}_\varphi & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} & \partial \mathbf{y}_c \mathbf{U}_\varphi & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{K}_{CC} - \lambda^k \mathbf{G}_{CC} & \mathbf{K}_{CF} - \lambda^k \mathbf{G}_{CF} & -\mathbf{I}_m & -\mathbf{G}_{CC} \mathbf{x}_C^k - \mathbf{G}_{CF} \mathbf{x}_F^k \\ \mathbf{K}_{FC} - \lambda^k \mathbf{G}_{FC} & \mathbf{K}_{FF} - \lambda^k \mathbf{G}_{FF} & \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & -\mathbf{G}_{FC} \mathbf{x}_C^k - \mathbf{G}_{FF} \mathbf{x}_F^k \\ \frac{\mathbf{x}_c^{kT}}{\|\mathbf{x}^k\|_2} & \frac{\mathbf{x}_F^{kT}}{\|\mathbf{x}^k\|_2} & \mathbf{0}_m^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_C^{k+1} \\ \mathbf{x}_F^{k+1} \\ \mathbf{y}_C^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathbf{U}_\varphi(\mathbf{x}_C^k, \mathbf{y}_C^k) + \partial \mathbf{x}_c \mathbf{U}_\varphi \mathbf{x}_C^k + \partial \mathbf{y}_c \mathbf{U}_\varphi \mathbf{y}_C^k \\ -(\mathbf{G}_{CC} \mathbf{x}_C^k + \mathbf{G}_{CF} \mathbf{x}_F^k) \lambda^k \\ -(\mathbf{G}_{FC} \mathbf{x}_C^k + \mathbf{G}_{FF} \mathbf{x}_F^k) \lambda^k \\ 1 \end{pmatrix} \in R^{n+m+1}. \quad (63)$$

O primeiro bloco de equações de (63) escreve-se

$$(\partial \mathbf{x}_c \mathbf{U}_\varphi) \mathbf{x}_C^{k+1} + (\partial \mathbf{y}_c \mathbf{U}_\varphi) \mathbf{y}_C^{k+1} = -\mathbf{U}_\varphi(\mathbf{x}_C^k, \mathbf{y}_C^k) + (\partial \mathbf{x}_c \mathbf{U}_\varphi) \mathbf{x}_C^k + (\partial \mathbf{y}_c \mathbf{U}_\varphi) \mathbf{y}_C^k. \quad (64)$$

Considerando a função de complementaridade

$$\varphi_{\min}(a, b) = \min\{a, b\}, \quad (65)$$

tem-se

$$\mathbf{U}_\varphi(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) = \begin{pmatrix} \min\{x_1^k, y_1^k\} \\ \min\{x_2^k, y_2^k\} \\ \vdots \\ \min\{x_m^k, y_m^k\} \end{pmatrix} = \begin{cases} \{x_1^k, \text{ se } x_1^k \leq y_1^k \\ y_1^k, \text{ se } x_1^k > y_1^k \\ x_2^k, \text{ se } x_2^k \leq y_2^k \\ y_2^k, \text{ se } x_2^k > y_2^k \\ \dots \\ x_m^k, \text{ se } x_m^k \leq y_m^k \\ y_m^k, \text{ se } x_m^k > y_m^k \end{cases} \quad (66)$$

$$\partial \mathbf{x}_c \mathbf{U}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial U_{\varphi_m}}{\partial x_1} & \frac{\partial U_{\varphi_m}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial U_{\varphi_m}}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{cases} 1, \text{ se } x_1^k \leq y_1^k \\ 0, \text{ se } x_1^k > y_1^k \end{cases} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{cases} 1, \text{ se } x_2^k \leq y_2^k \\ 0, \text{ se } x_2^k > y_2^k \end{cases} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{cases} 1, \text{ se } x_m^k \leq y_m^k \\ 0, \text{ se } x_m^k > y_m^k \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{y_c} \mathbf{U}_\varphi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y_1} & \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial U_{\varphi_m}}{\partial y_1} & \frac{\partial U_{\varphi_m}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial U_{\varphi_m}}{\partial y_m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{cases} 0, \text{ se } x_1^k \leq y_1^k \\ 1, \text{ se } x_1^k > y_1^k \end{cases} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{cases} 0, \text{ se } x_2^k \leq y_2^k \\ 1, \text{ se } x_2^k > y_2^k \end{cases} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{cases} 0, \text{ se } x_m^k \leq y_m^k \\ 1, \text{ se } x_m^k > y_m^k \end{cases} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Consequentemente pode mostrar-se que o 2º membro de (63) é nulo (não se apresentam os cálculos):

$$-\mathbf{U}_\varphi(\mathbf{x}_c^k, \mathbf{y}_c^k) + (\partial \mathbf{x}_c \mathbf{U}_\varphi) \mathbf{x}_c^k + (\partial \mathbf{y}_c \mathbf{U}_\varphi) \mathbf{y}_c^k = \mathbf{0}, \tag{69}$$

pele que, em resumo o sistema de equações (63) escreve-se

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \partial \mathbf{x}_c \mathbf{U}_\varphi & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} & \partial \mathbf{y}_c \mathbf{U}_\varphi & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{K}_{CC} - \lambda^k \mathbf{G}_{CC} & \mathbf{K}_{CF} - \lambda^k \mathbf{G}_{CF} & -\mathbf{I}_m & -\mathbf{G}_{CC} \mathbf{x}_C^k - \mathbf{G}_{CF} \mathbf{x}_F^k \\ \mathbf{K}_{FC} - \lambda^k \mathbf{G}_{FC} & \mathbf{K}_{FF} - \lambda^k \mathbf{G}_{FF} & \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & -\mathbf{G}_{FC} \mathbf{x}_C^k - \mathbf{G}_{FF} \mathbf{x}_F^k \\ \frac{\mathbf{x}_C^k{}^T}{\|\mathbf{x}^k\|_2} & \frac{\mathbf{x}_F^k{}^T}{\|\mathbf{x}^k\|_2} & \mathbf{0}_m^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_C^{k+1} \\ \mathbf{x}_F^{k+1} \\ \mathbf{y}_C^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ -(\mathbf{G}_{CC} \mathbf{x}_C^k + \mathbf{G}_{CF} \mathbf{x}_F^k) \lambda^k \\ -(\mathbf{G}_{FC} \mathbf{x}_C^k + \mathbf{G}_{FF} \mathbf{x}_F^k) \lambda^k \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+1},
\end{aligned} \tag{70}$$

em que as matrizes  $\partial \mathbf{x}_c \mathbf{U}_\varphi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\partial \mathbf{y}_c \mathbf{U}_\varphi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  devem ser substituídas respetivamente por (67) e (68). Note-se que a matriz dos coeficientes do sistema (70) não é simétrica.

## 4- Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentam-se os resultados numéricos de vários exemplos de aplicação do programa de elementos finitos desenvolvido em ambiente Matlab no âmbito desta dissertação. Mostraremos no subcapítulo referente a cada caso, os respetivos gráficos de convergência das soluções numéricas, as respetivas representações gráficas dos modos de encurvadura e as tabelas com as soluções em função das discretizações efetuadas.

Cada exemplo terá quatro níveis (ou três níveis) de refinamento para que se observe a convergência das cargas críticas. Todos os resultados apresentados foram obtidos com recurso ao “*MATLAB*”, pela programação do algoritmo apresentado no capítulo 3.

Antes de prosseguir, é importante salientar que para todos os casos estudados de placas, foram usadas as seguintes variáveis:

- $E=200$  [GPa];                    - Modulo de elasticidade
- $\nu = 0.3$ ;                            - Coeficiente de Poisson
- $t = 0.01$  [m];                        - Espessura da placa
- $h$  [m];                                - Medida do lado do elemento finito quadrado ( $e$ ):  
    Variável entre 0.0625m e 0.50m
- Dimensões das placas quadradas    -  $1 \times 1$  [m<sup>2</sup>]
- Dimensões das placas retangulares -  $2 \times 1$  [m<sup>2</sup>]

## 4.1 – Placa retangular com os quatro bordos SA submetida a esforços de compressão

### 4.1.1 – Sem restrições unilaterais

No exemplo 4.1 estuda-se a encurvadura de uma placa retangular com os quatro bordos SA submetida a esforços de compressão como indicado na Figura 8 de modo a anular o efeito de Poisson. Nesta secção 4.1.1 a placa não tem restrições unilaterais. O estudo foi feito utilizando o elemento ACM e o elemento BFS. Na Tabela 1 e na Figura 9 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento ACM e quatro malhas de diferentes graus de refinamento.

Nas Figuras 10, 11 e 12 apresentam-se os correspondentes modos de encurvadura obtidos com a malha mais refinada (16x32). Dado que o elemento ACM não é conforme, não se verifica uma evolução monotónica das cargas de bifurcação com a diminuição do tamanho dos elementos finitos utilizados.

Na Tabela 2 e na Figura 13 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento BFS e quatro malhas de diferentes graus de refinamento. Neste caso as cargas de bifurcação evoluem monotonicamente com a diminuição do tamanho dos elementos finitos utilizados. Nas Figuras 14, 15 e 16, apresentam-se os correspondentes modos de encurvadura obtidos com a malha mais refinada.

A carga crítica teórica desta placa é dada por [1] ,

$$\lambda_{cr} = k_c \frac{\pi^2 D_f}{b^2}, \quad (71)$$

em que

$$k_c = \frac{\left[ \left( m \frac{b}{a} \right)^2 + n^2 \right]^2}{\left( m \frac{b}{a} \right)^2 + n^2} \quad (72)$$

e  $m$  e  $n$  são respetivamente o número de semi-ondas segundo  $x_1$  e segundo  $x_2$ . Neste caso obtém-se  $\lambda_{cr} = 5.135 \times 10^2 \text{ kN/m}$ . É possível, portanto, concluir que as cargas de bifurcação utilizando elementos ACM ou elementos BFS são muito semelhantes no caso de se usarem malhas mais refinadas e são próximas da carga crítica teórica, especialmente no caso do elemento BFS. No caso da malha menos refinada, é possível observar na Figura 9 e na Tabela 1, que para o elemento ACM a carga associada à forma esperada do 2º modo (duas semi-ondas na maior direção) é inferior à carga associada à forma esperada do 1º modo (uma semi-onda na maior direção). Este fenómeno deve-se certamente também ao facto de este elemento não ser conforme. Os modos de instabilidade obtidos com o elemento ACM e com o elemento BFS são igualmente muito semelhantes, para as malhas mais refinadas.

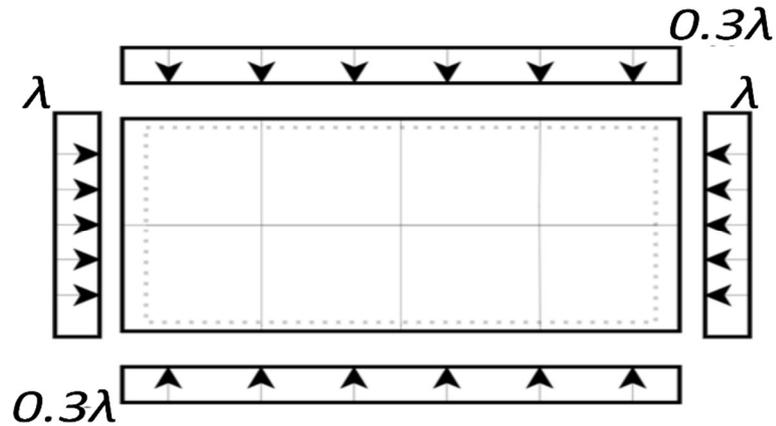


Figura 8- Placa Retangular com os quatro bordos SA submetida a esforços de compressão de modo a anular o efeito de Poisson sem impedimentos unilaterais.

Tabela 1- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular sem impedimentos unilaterais, quatro bordos SA, submetida a esforços de compressão, em função do refinamento da malha para o elemento ACM.

Nº Elementos Finitos	2x4	4x8	8x16	16x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625
$ \log_2(h) $	1	2	3	4
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$
$\lambda_1$	4.7311	5.0090	5.1018	5.1268
$\lambda_2$	4.6005	5.2338	5.4720	5.5389
$\lambda_3$	6.0363	6.9190	7.3231	7.4448
$\lambda_4$	10.8883	9.6846	10.2510	10.4406
$\lambda_5$	15.2863	13.4750	14.1388	14.4050
$\lambda_6$	24.9113	18.3513	18.9600	19.2975

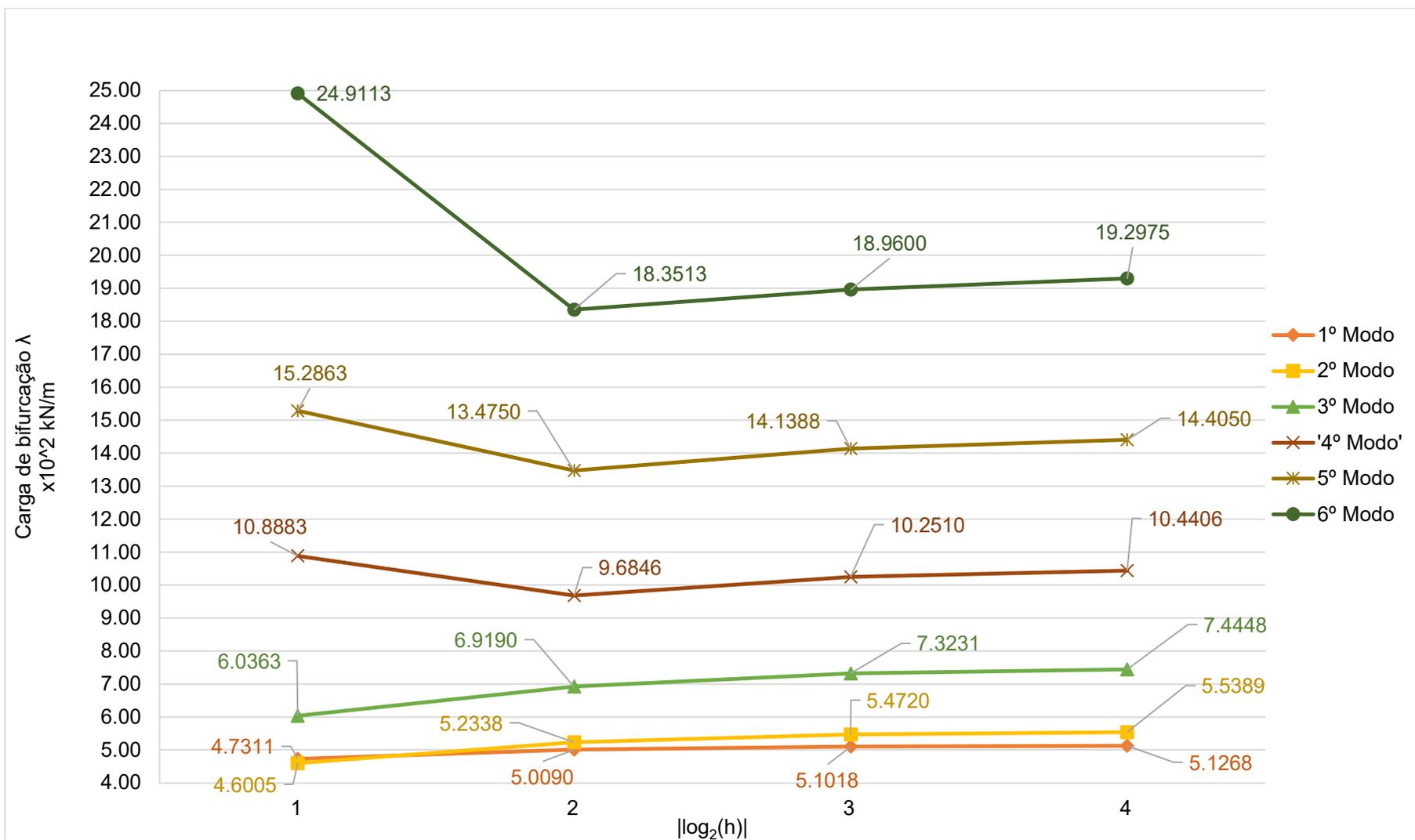
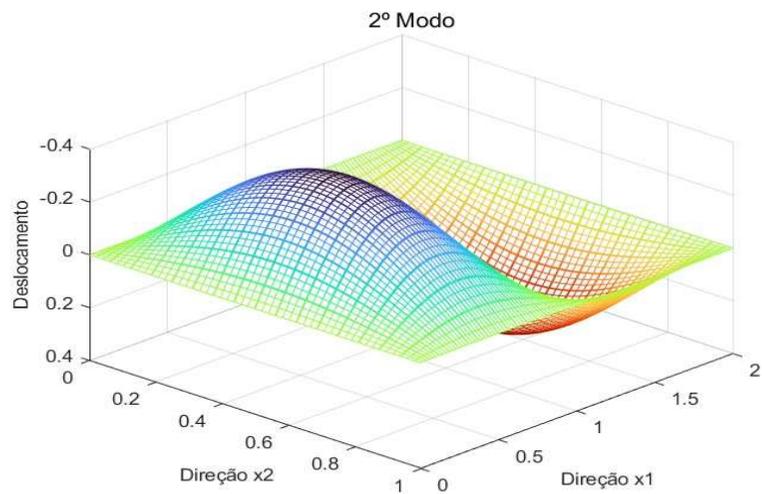
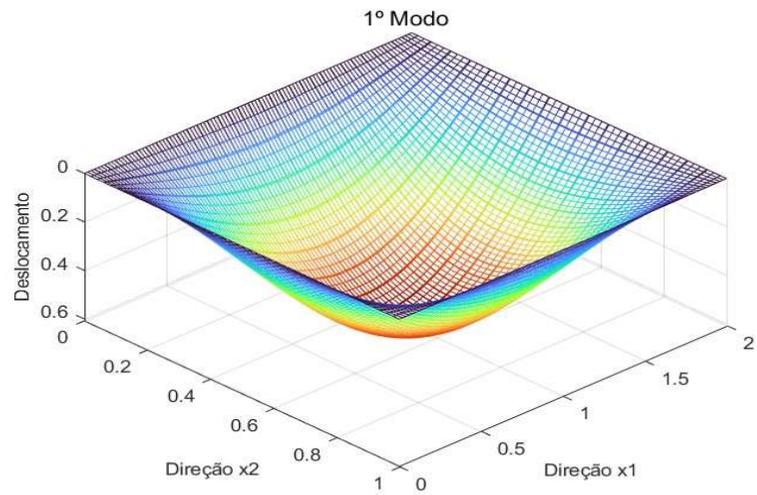
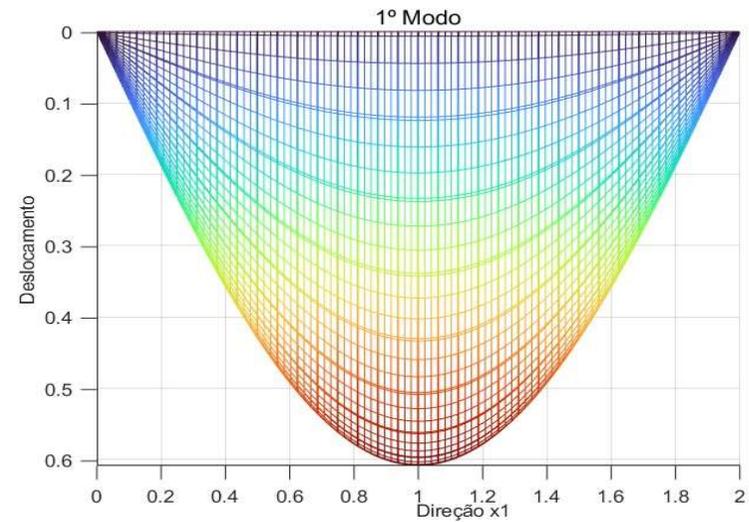


Figura 9- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 8 em função da dimensão h dos elementos finitos (elemento finito ACM).



a)



b)

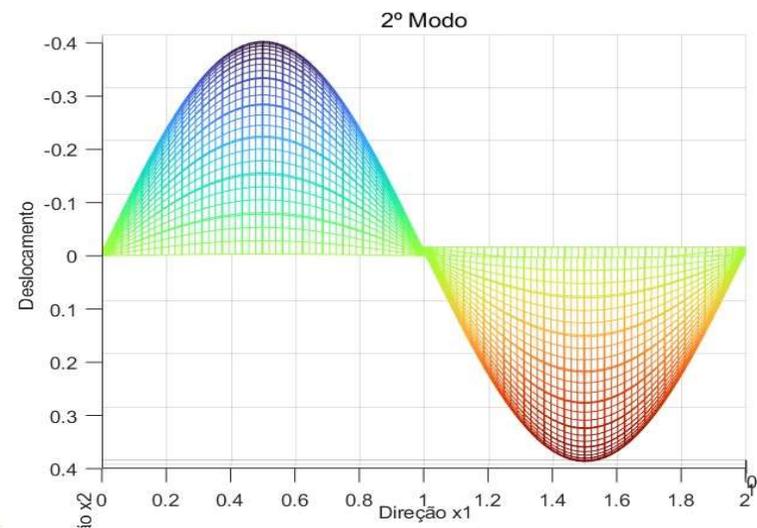
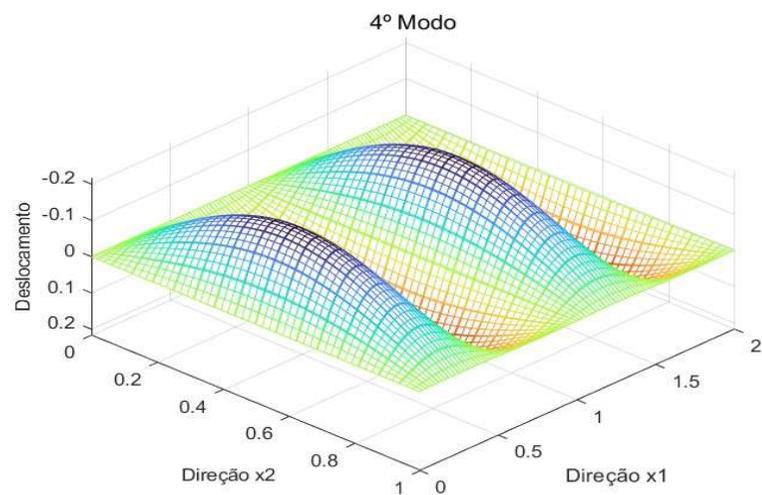
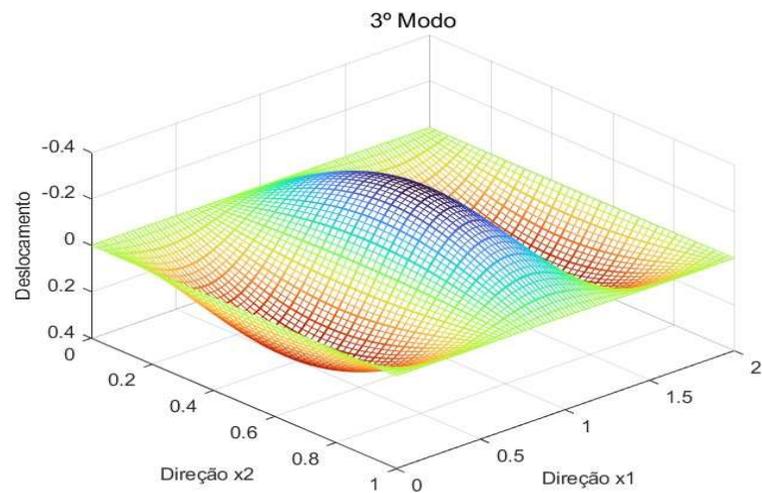
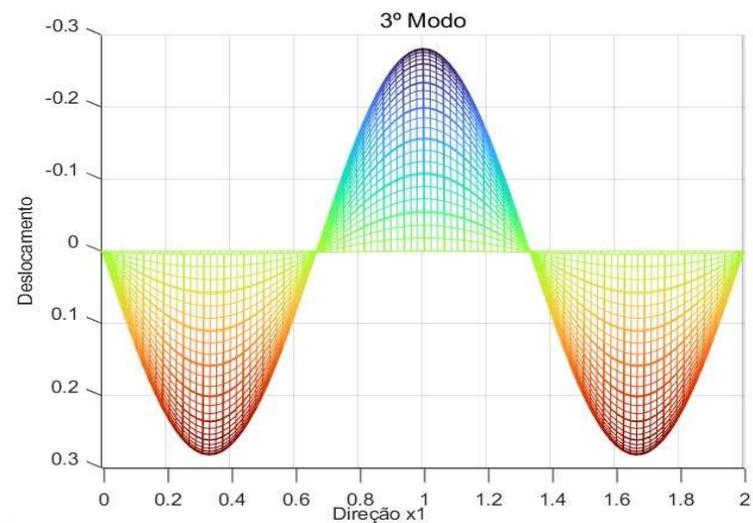


Figura 10- Modos de encurvadura da placa retangular Figura 8. com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. a) Modo 1  $\lambda_1 = 5.1268 \times 10^2 \text{ kN/m}$  b) Modo 2  $\lambda_2 = 5.5389 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



c)



d)

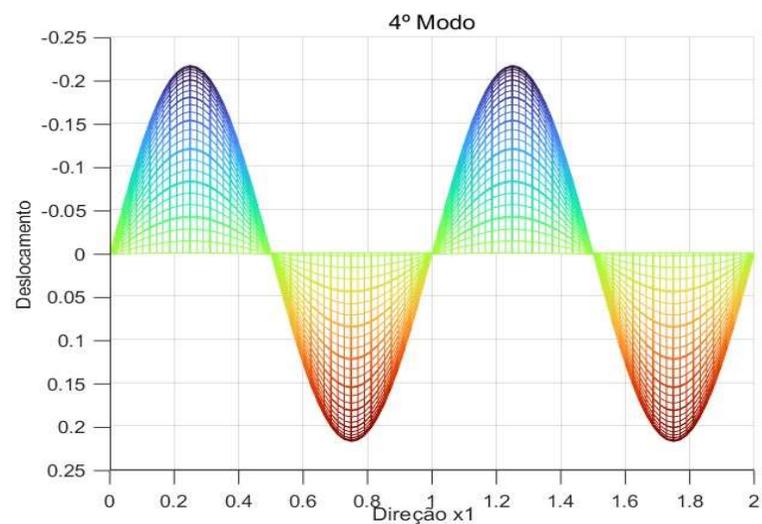
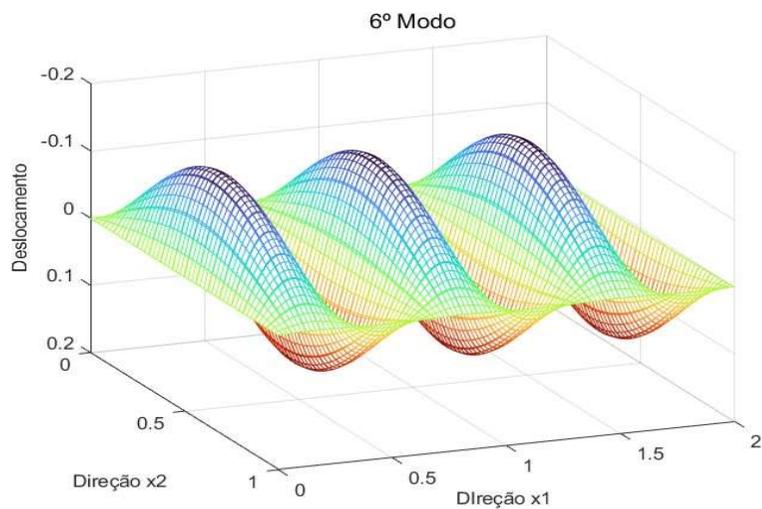
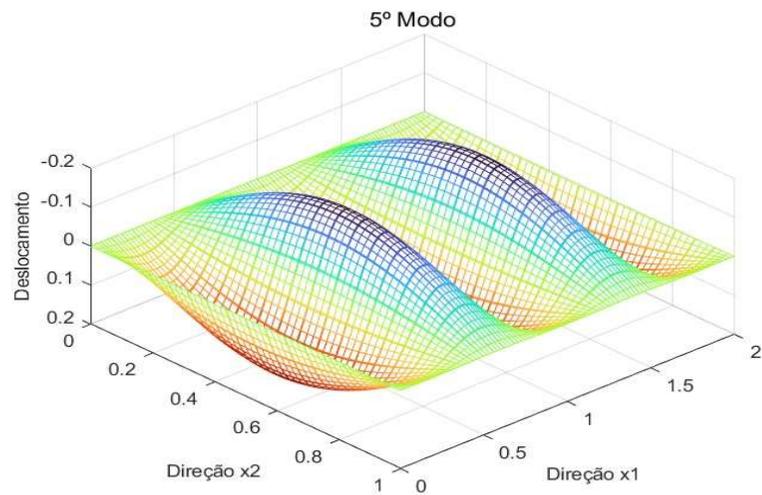
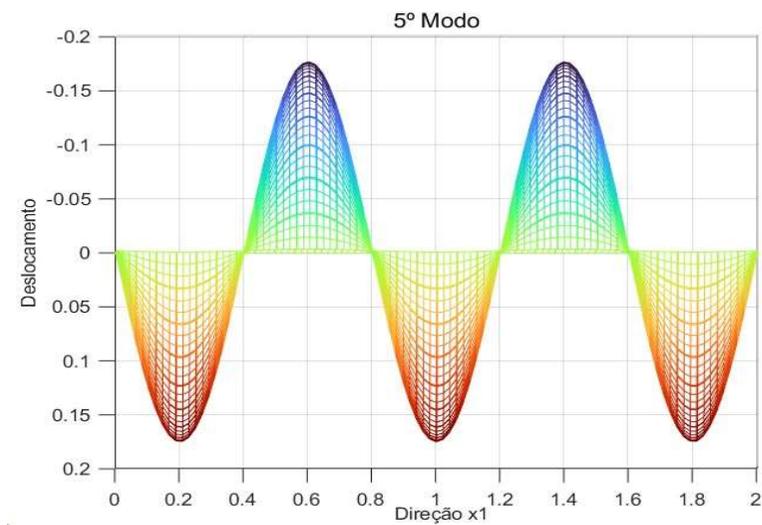


Figura 11- Modos de encurvadura da placa retangular Figura 8. com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. c) Modo 3  $\lambda_3 = 7.4448 \times 10^2 \text{ kN/m}$  d) Modo 4  $\lambda_4 = 10.4406 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



e)



f)

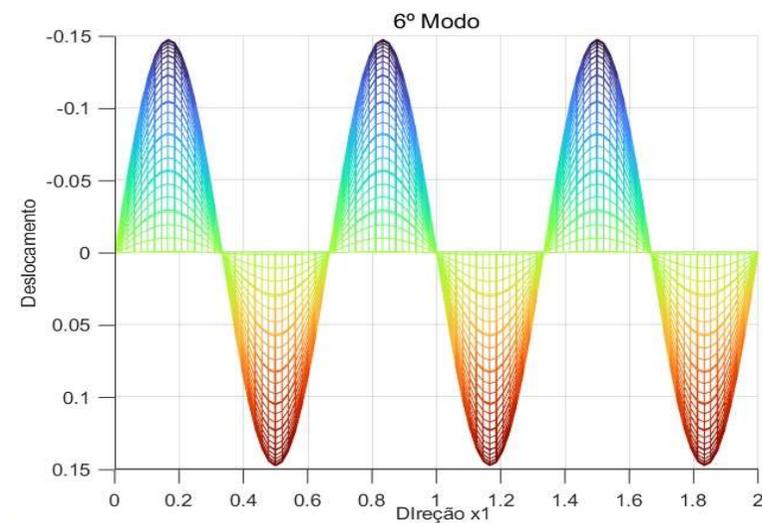


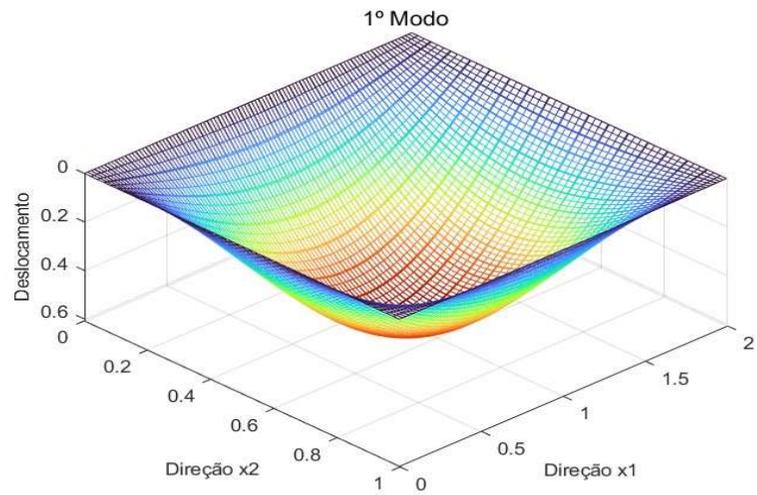
Figura 12- Modos de encurvadura da placa retangular Figura 8. com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. e) Modo 5  $\lambda_5 = 14.4050 \times 10^2 \text{ kN/m}$  f) Modo 6  $\lambda_6 = 19.2975 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .

Tabela 2- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular sem impedimentos unilaterais, quatro bordos SA, submetida a esforços de compressão, em função do refinamento da malha para o elemento BFS.

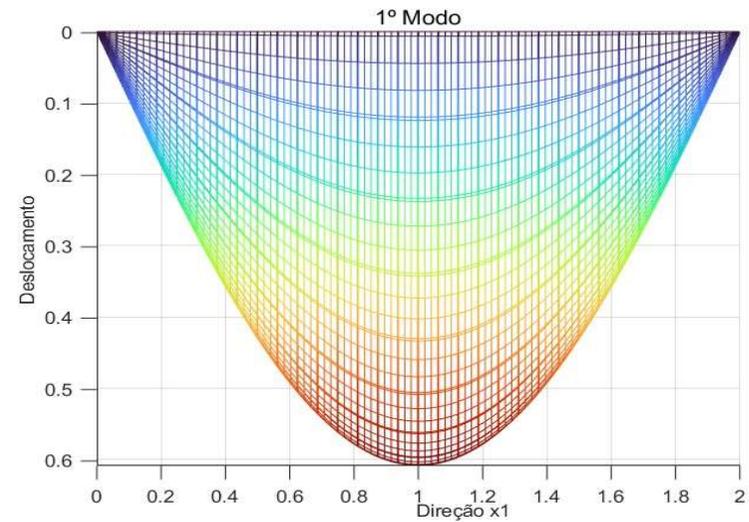
Nº Elementos Finitos	2x4	4x8	8x16	16x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625
$ \log_2(h) $	1	2	3	4
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$
$\lambda_1$	5.1609	5.1370	5.1354	5.1353
$\lambda_2$	5.5839	5.5634	5.5620	5.5619
$\lambda_3$	7.6141	7.4968	7.4880	7.4875
$\lambda_4$	11.9709	10.5604	10.5129	10.5096
$\lambda_5$	17.2050	14.6925	14.5188	14.5063
$\lambda_6$	26.5475	19.9625	19.4763	19.4388



Figura 13- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 8 em função da dimensão  $h$  dos elementos finitos (elemento finito BFS).



a)



b)

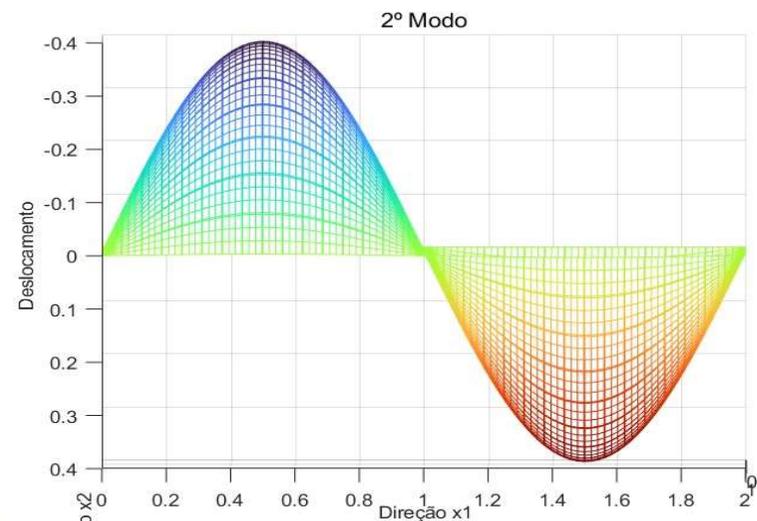
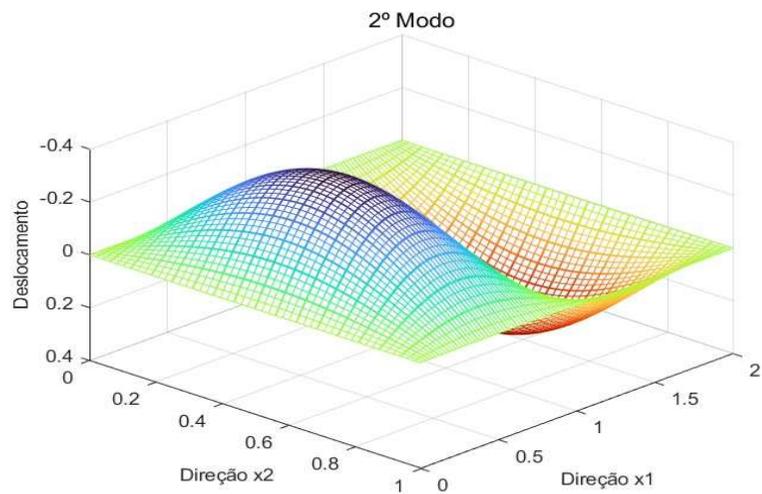
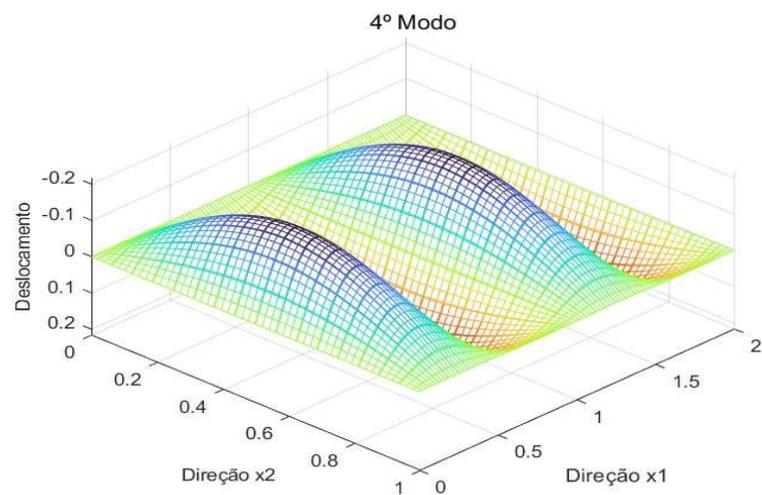
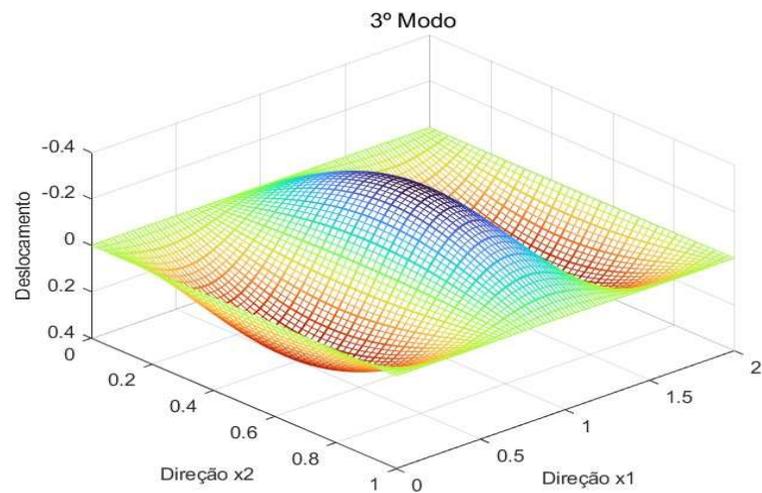
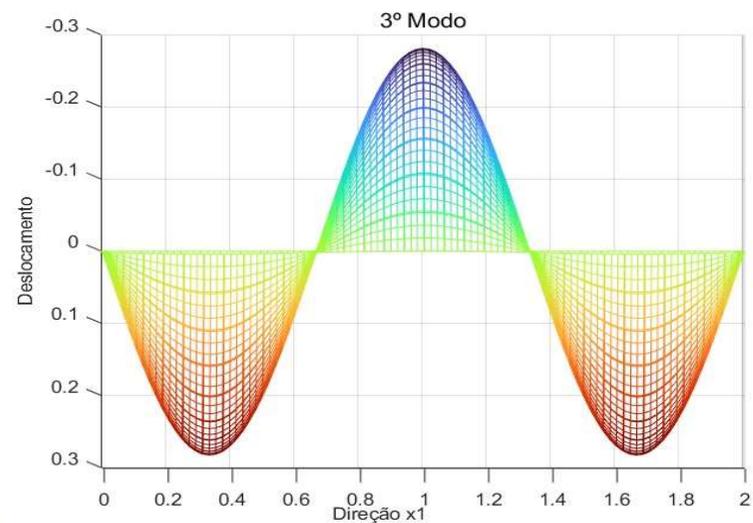


Figura 14- Modos de encurvadura da placa retangular Figura 8. com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. a) Modo 1  $\lambda_1 = 5.1353 \times 10^2 \text{ kN/m}$  b) Modo 2  $\lambda_2 = 5.5619 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



c)



d)

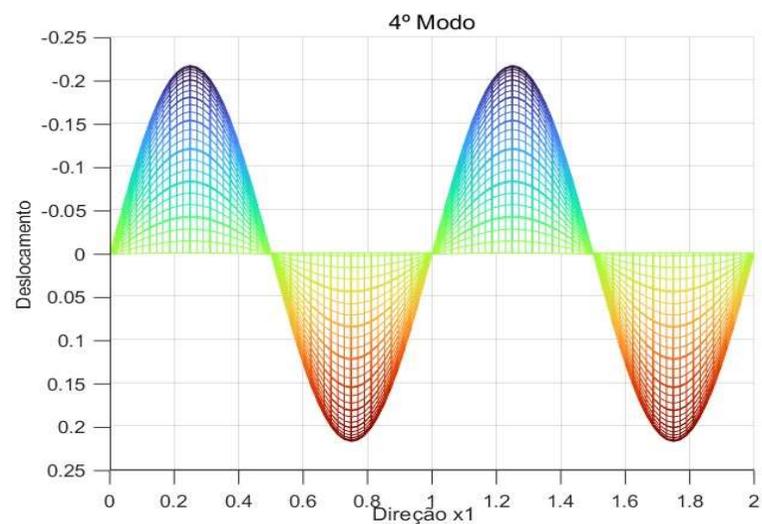
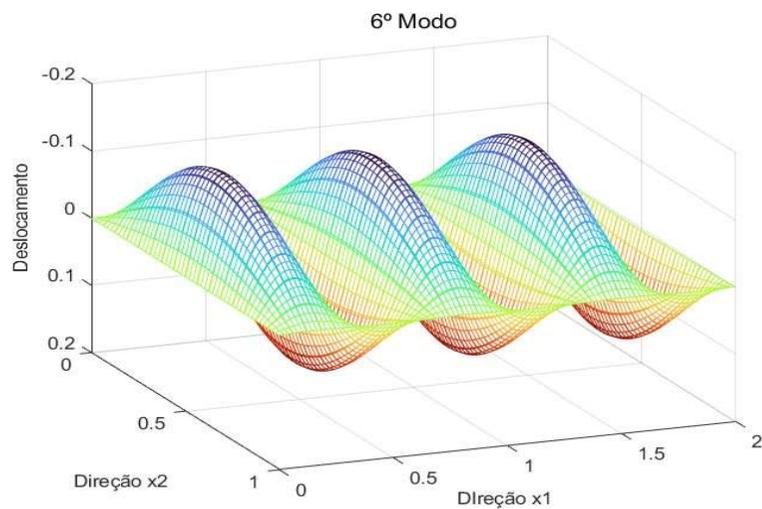
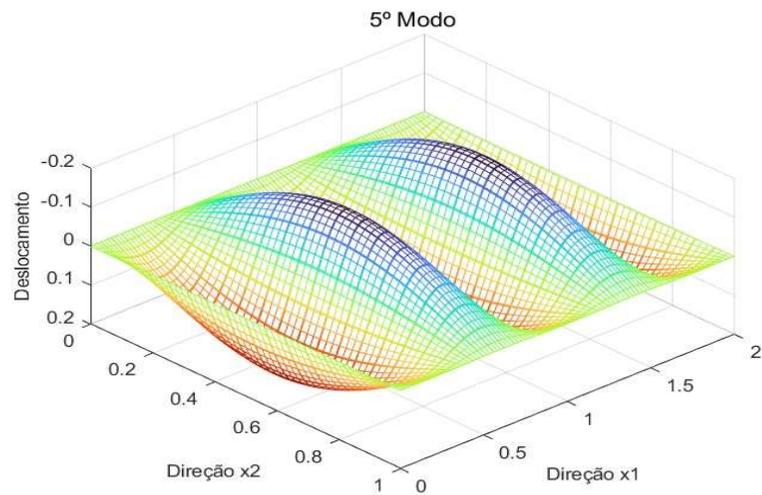
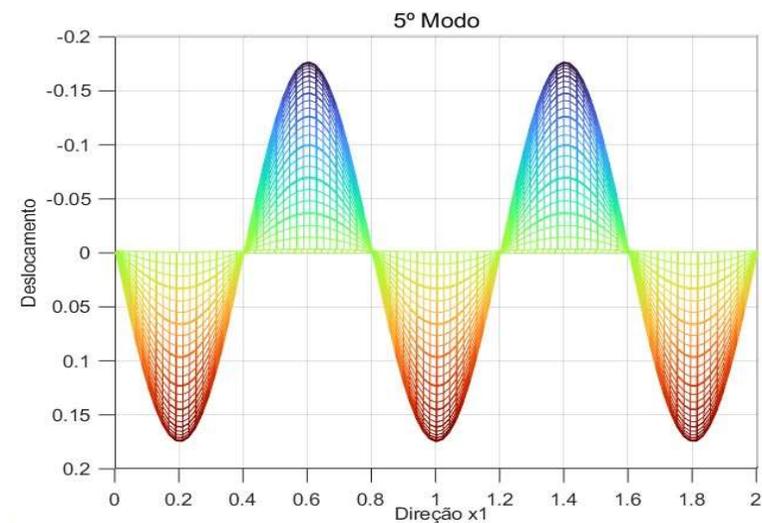


Figura 15- Modos de encurvadura da placa retangular Figura 8. com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. c) Modo 3  $\lambda_3 = 7.4875 \times 10^2 \text{ kN/m}$  d) Modo 4  $\lambda_4 = 10.5096 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



e)



f)

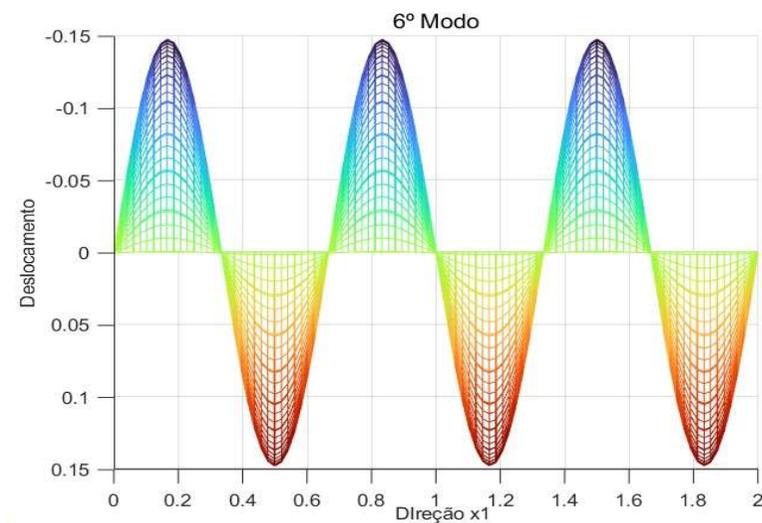


Figura 16- Modos de encurvadura da placa retangular Figura 8. com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. e) Modo 5  $\lambda_5 = 14.5063 \times 10^2 \text{ kN/m}$  f) Modo 6  $\lambda_6 = 19.4388 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .

#### 4.1.2 – Com restrições unilaterais em sentidos opostos

Nesta secção estuda-se a encurvadura da placa analisada na secção 4.1.1, quando esta possui dois impedimentos unilaterais de sentidos opostos localizados no interior da placa, tal como, indicado na Figura 17. O apoio unilateral da esquerda impede o deslocamento para baixo enquanto o apoio da direita impede o deslocamento apenas para cima. Na Tabela 3 e na Figura 18 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento ACM e quatro malhas de diferentes graus de refinamento.

Nas Figuras 19, 20 e 21 apresentam-se os correspondentes modos de encurvadura obtidos com a malha mais refinada (16x32).

Na Tabela 4 e na Figura 22 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento BFS e quatro malhas de diferentes graus de refinamento. Nas Figuras 23, 24 e 25, apresentam-se os correspondentes modos de encurvadura obtidos com a malha mais refinada.

Verifica-se novamente que a evolução das cargas de bifurcação com a diminuição do tamanho do elemento finito é monotónica apenas no caso do elemento BFS. Verifica-se igualmente que as cargas de bifurcação e os modos de instabilidade obtidos com o elemento ACM e com o elemento BFS são muito semelhantes para as malhas mais refinadas. Verifique-se novamente que, para malhas pouco refinadas o elemento ACM não é um bom elemento finito, visto que se volta a verificar a troca entre o primeiro e o segundo modo no caso da malha menos refinada (2x4 elementos).

Note-se que devido aos apoios unilaterais os modos 1,3 e 5 da placa sem apoios unilaterais (ver secção 4.1.1) não são possíveis neste caso. No entanto, os modos 2,4 e 6 (e as correspondentes cargas de bifurcação) obtidas na secção 4.1.1 são ainda possíveis para a disposição de impedimentos unilaterais da Figura 17 (e correspondem respetivamente aos modos 2, 3 e 6).

Em suma conclui-se que o primeiro modo de bifurcação neste caso, que ativa o apoio unilateral da direita, possui uma carga de bifurcação maior do que a apresentada pelo primeiro modo da placa sem apoios unilaterais (ver secção 4.1.1). Assim a carga crítica desta placa com apoios unilaterais é superior à carga crítica da placa sem apoios unilaterais. Verifica-se igualmente que as cargas de bifurcação dos modos 4 e 5 são também superiores às dos modos 3 e 5 da placa sem apoios unilaterais (ver secção 4.1.1).

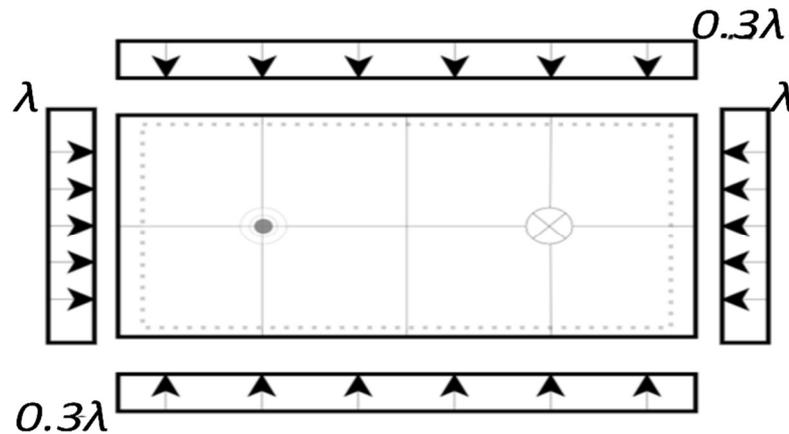


Figura 17- Placa Retangular com os quatro bordos SA submetida a esforços de compressão de modo a anular o efeito de Poisson com impedimentos unilaterais de sentidos opostos localizados a 0.5m dos bordos.

Tabela 3- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular com impedimentos unilaterais, quatro bordos SA, submetida a esforços de compressão, em função do refinamento da malha para o elemento ACM.

Nº Elementos Finitos	2x4	4x8	8x16	16x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625
$ \log_2(h) $	1	2	3	4
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$
$\lambda_1$	4.6613	5.1294	5.2993	5.3465
$\lambda_2$	4.6005	5.2338	5.4720	5.5389
$\lambda_3$	10.8883	9.6846	10.2510	10.4406
$\lambda_4$	23.5413	16.1013	16.7750	17.0925
$\lambda_5$	24.3525	17.4350	18.0863	18.4163
$\lambda_6$	24.9113	18.3513	18.9600	19.2975

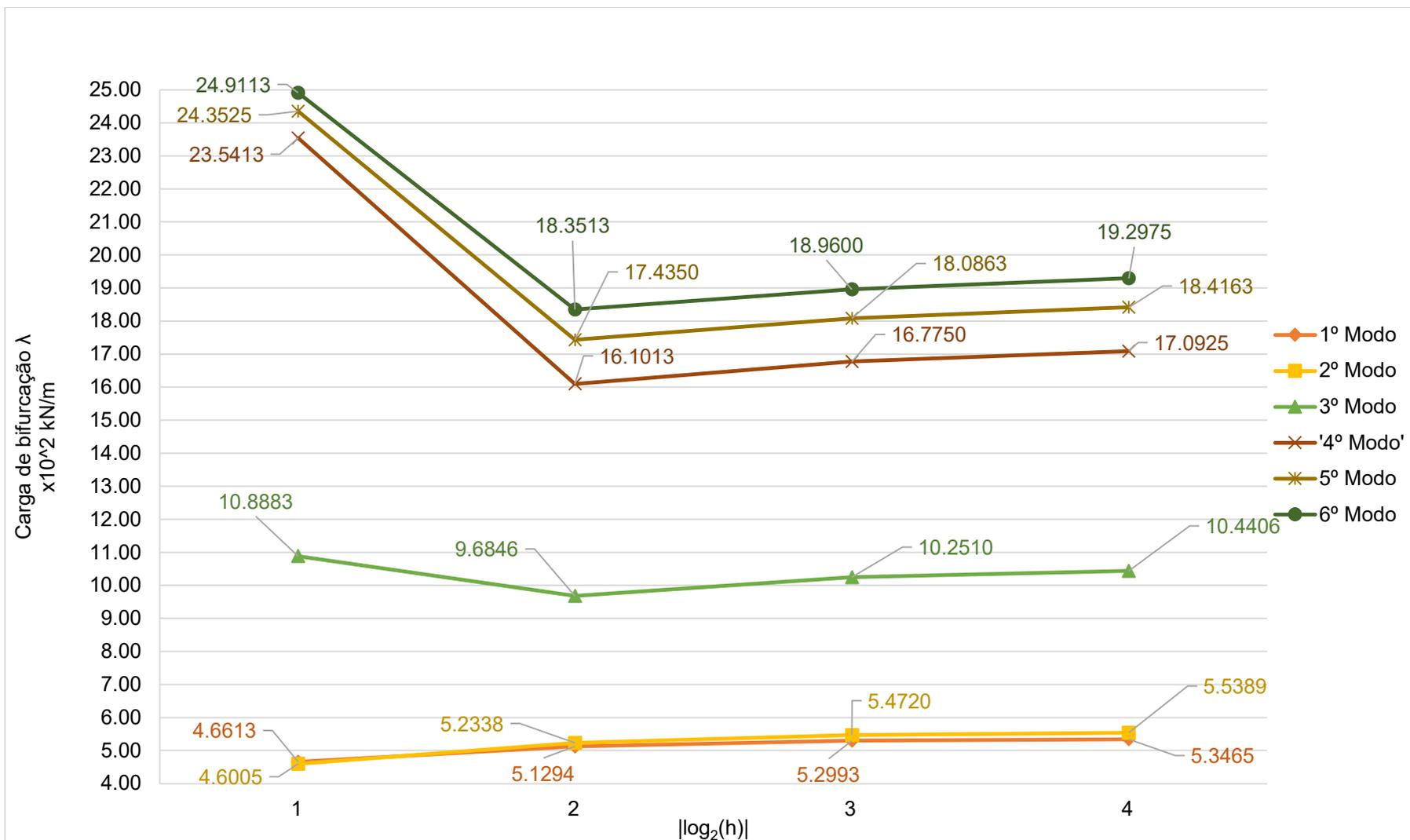
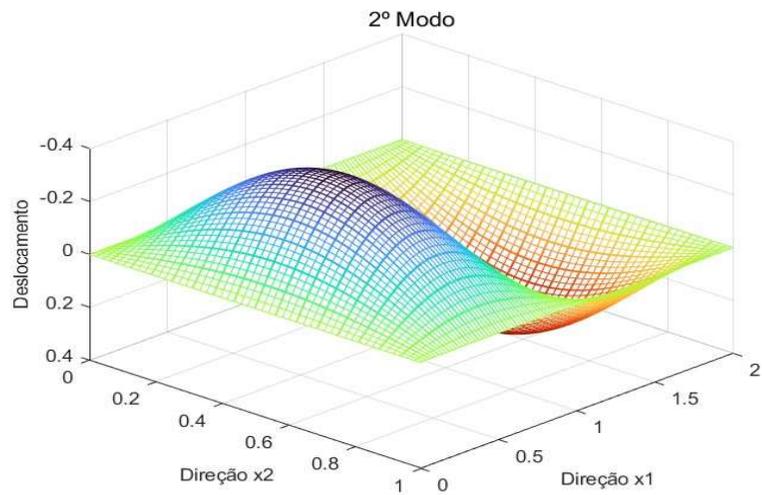
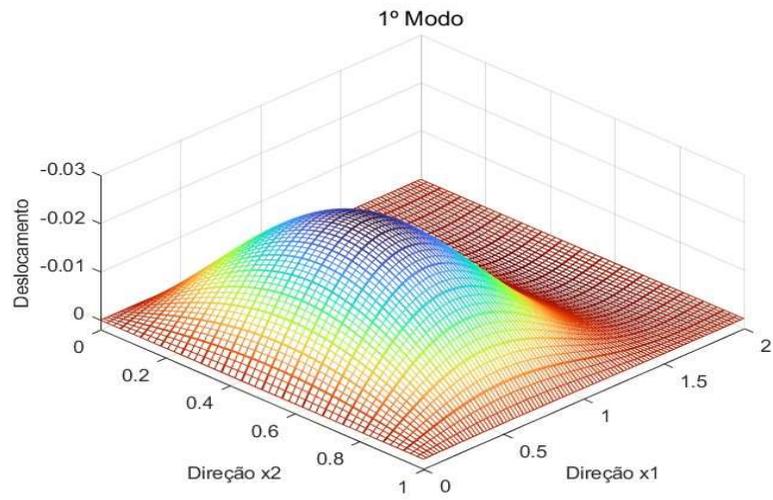
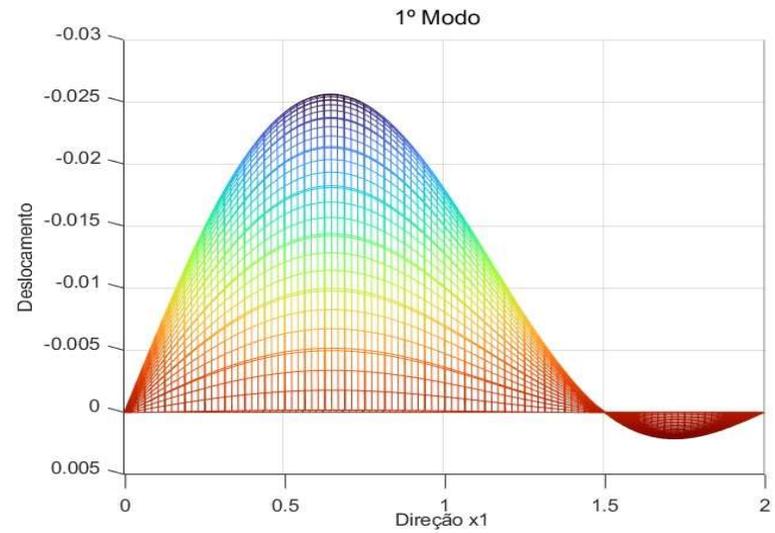


Figura 18- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 17 em função da dimensão h dos elementos finitos (elemento finito ACM).



a)



b)

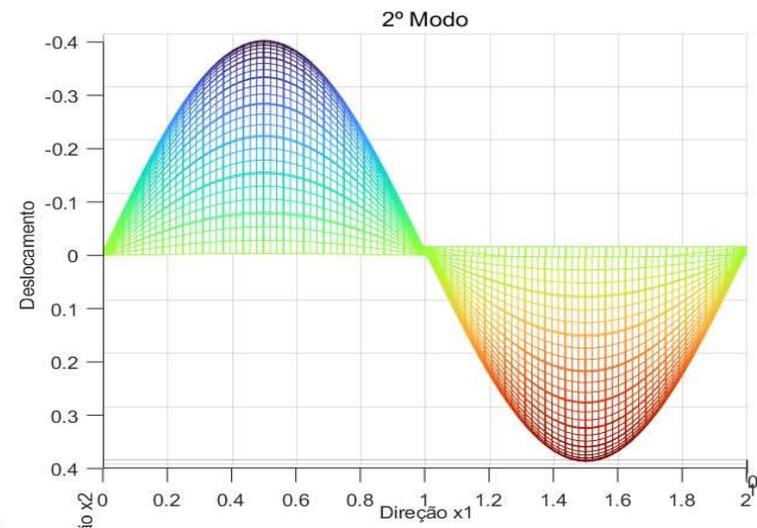
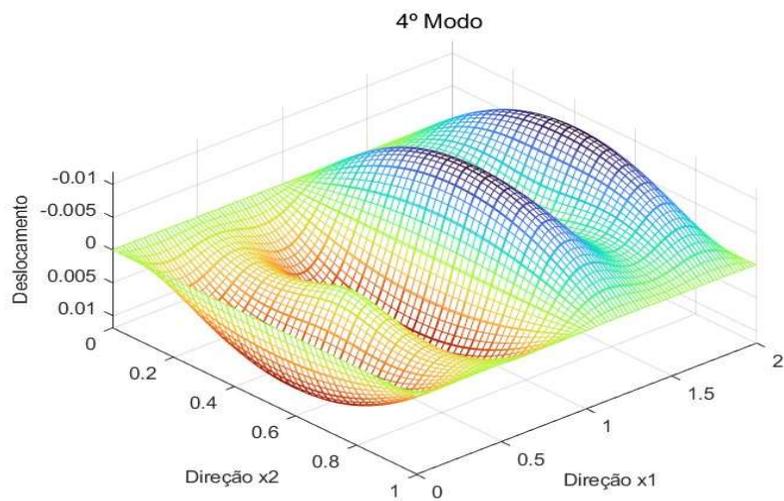
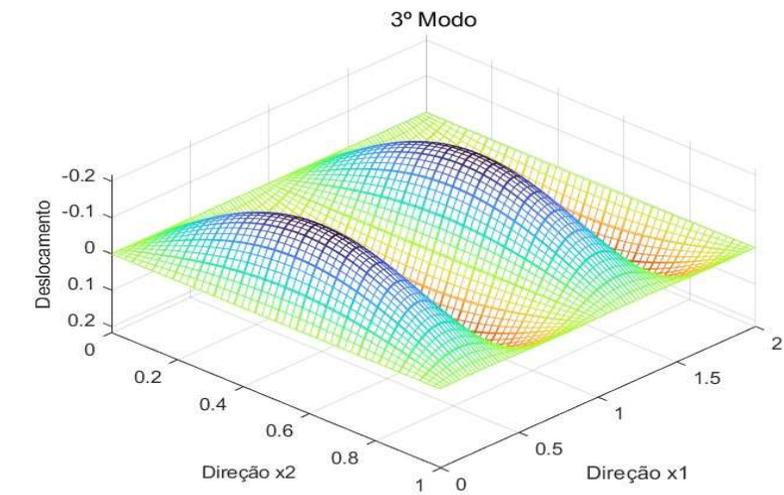
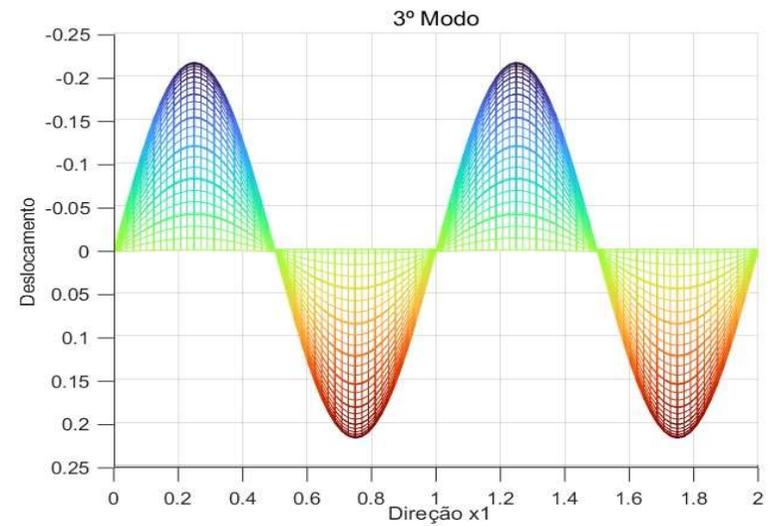


Figura 19- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 17 com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. a) Modo 1  $\lambda_1 = 5.3465 \times 10^2 \text{ kN/m}$  b) Modo 2  $\lambda_2 = 5.5389 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



c)



d)

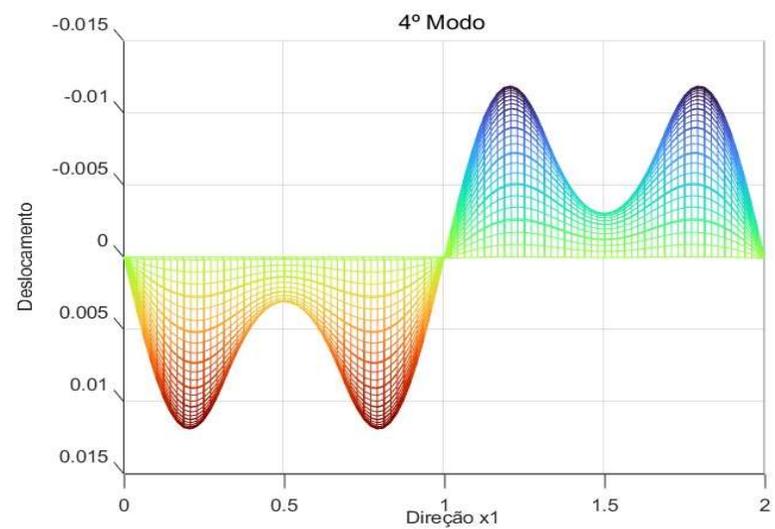
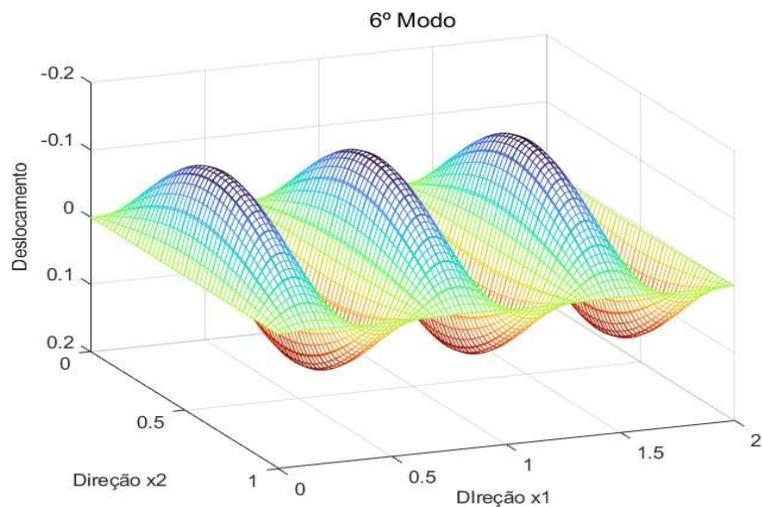
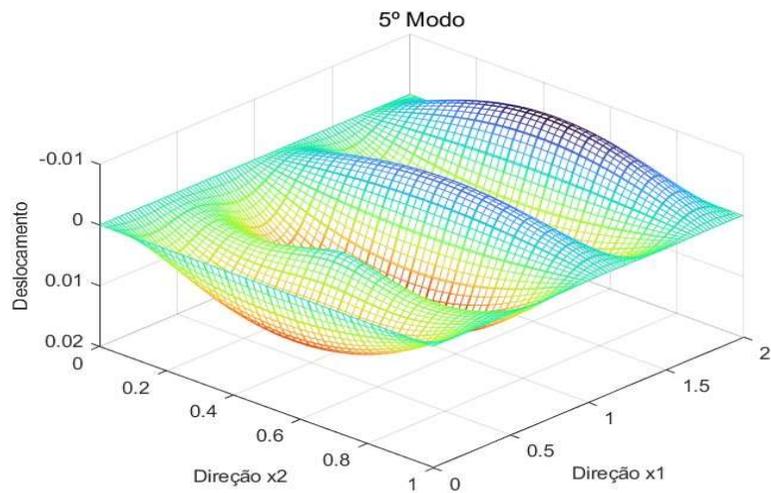
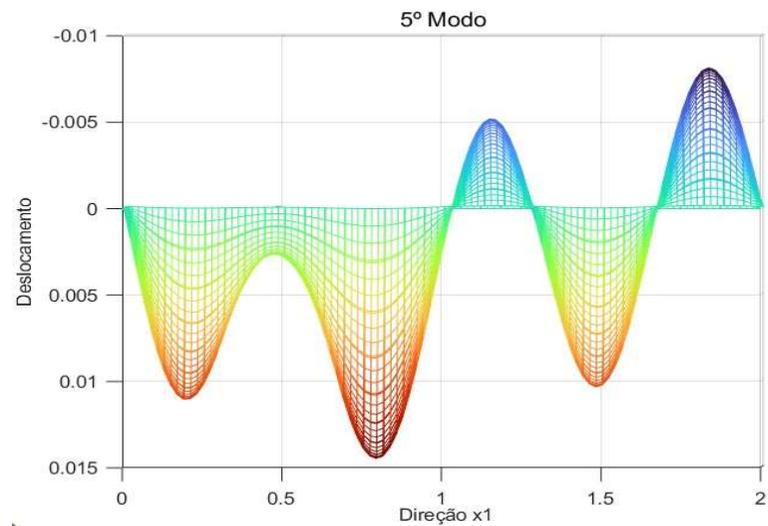


Figura 20- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 17 com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. c) Modo 3  $\lambda_3 = 10.4406 \times 10^2 \text{ kN/m}$  d) Modo 4  $\lambda_4 = 17.0925 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



e)



f)

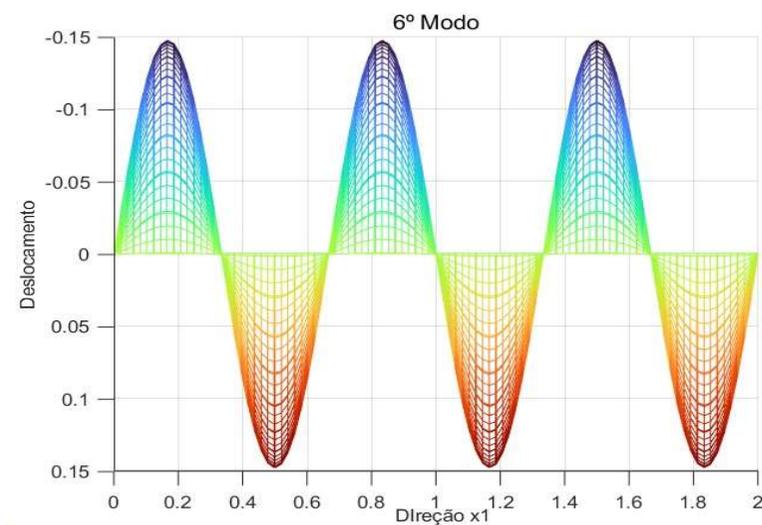


Figura 21- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 17 com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. e) Modo 5  $\lambda_5 = 18.4163 \times 10^2 \text{ kN/m}$  f) Modo 6  $\lambda_6 = 19.2975 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .

Tabela 4- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular com impedimentos unilaterais, quatro bordos SA, submetida a esforços de compressão, em função do refinamento da malha (para o elemento BFS).

Nº Elementos Finitos	2x4	4x8	8x16	16x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625
$ \log_2(h) $	1	2	3	4
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$
$\lambda_1$	5.3855	5.3643	5.3628	5.3626
$\lambda_2$	5.5839	5.5634	5.5620	5.5619
$\lambda_3$	11.9709	10.5604	10.5129	10.5096
$\lambda_4$	24.3125	17.5813	17.2625	17.2300
$\lambda_5$	25.6525	18.9938	18.5900	18.5550
$\lambda_6$	26.5475	19.9625	19.4763	19.4388

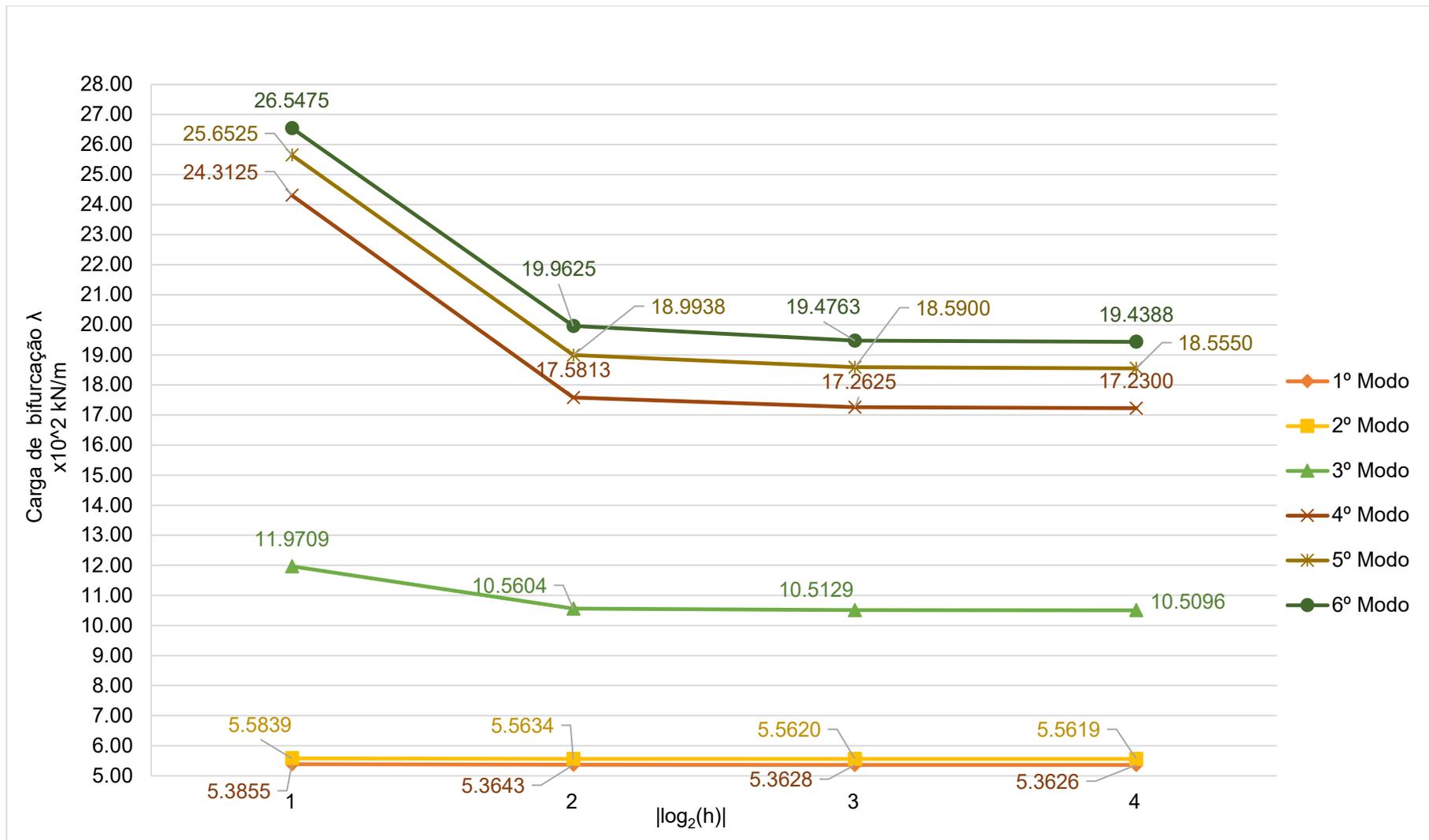
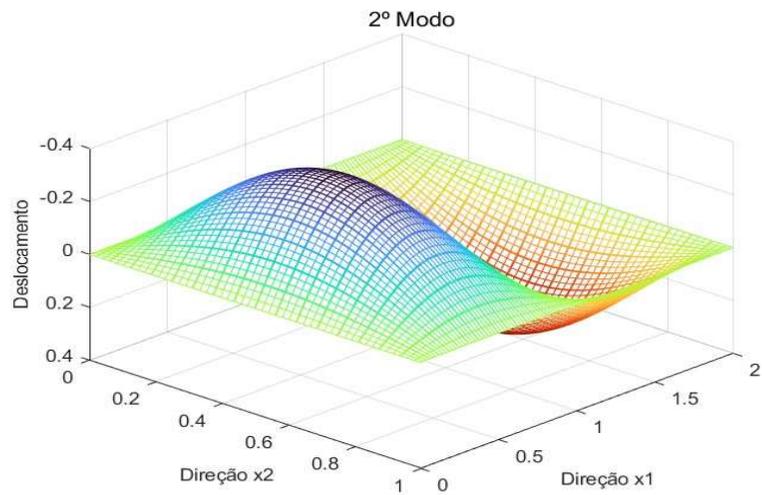
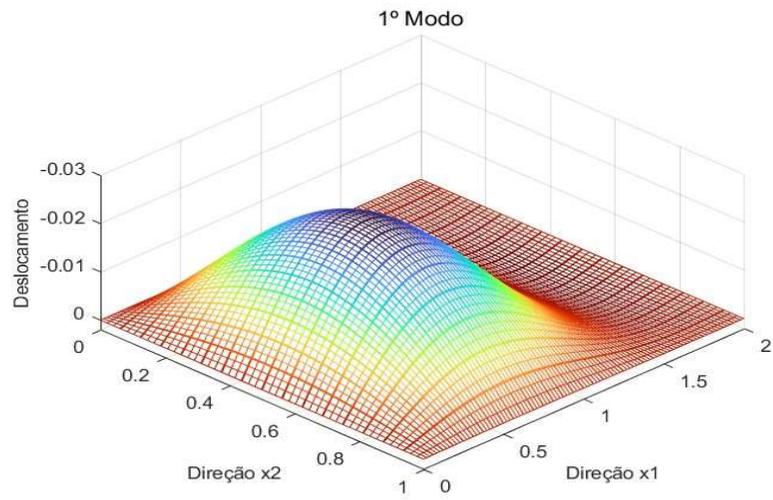
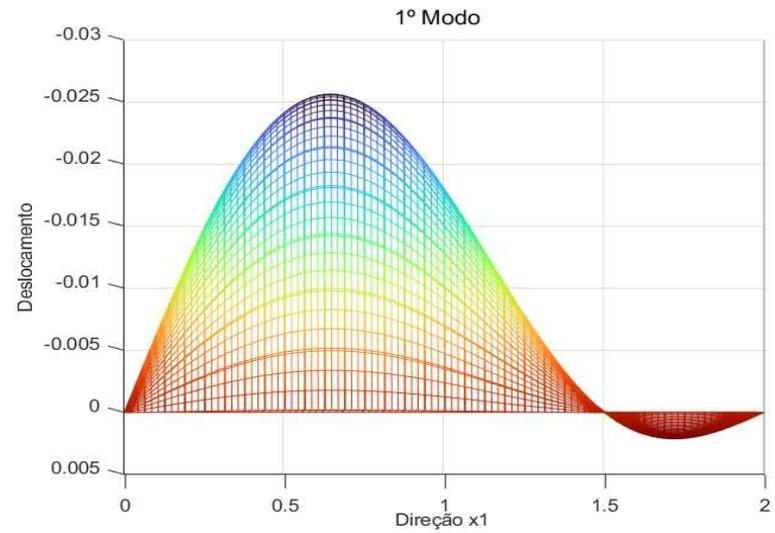


Figura 22- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 17 em função da dimensão  $h$  dos elementos finitos (elemento finito BFS).



a)



b)

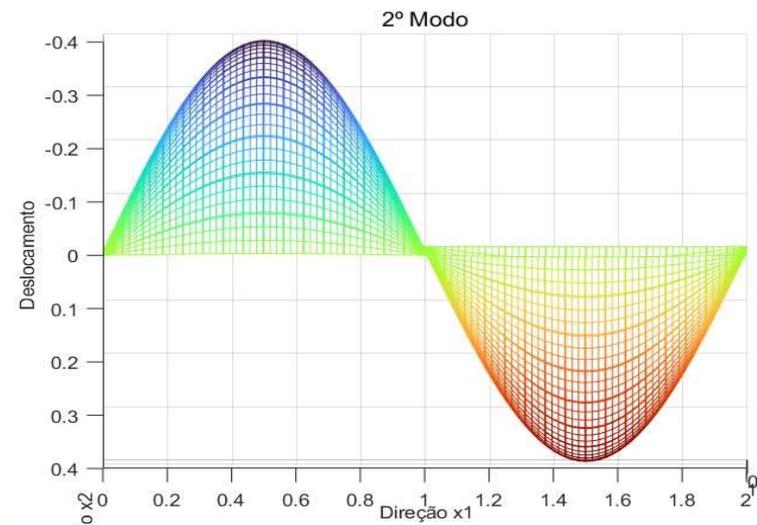
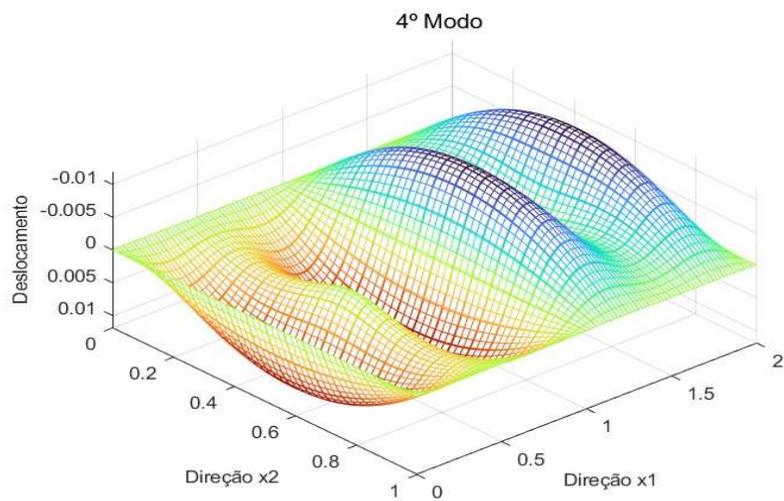
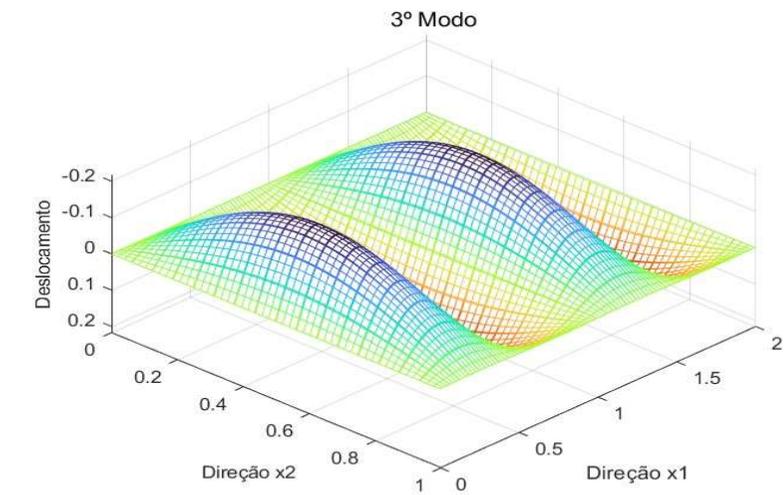
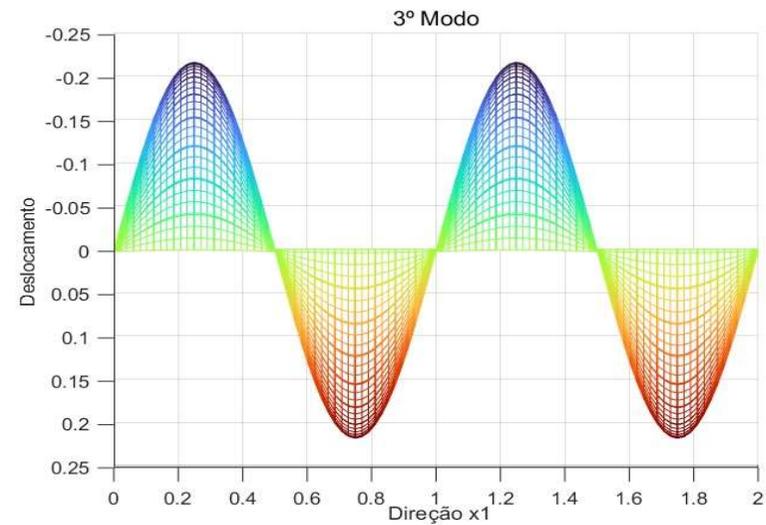


Figura 23- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 17 com quatro b6rdos SA submetida a esfor6os de compress6o nas duas dire66es sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. a) Modo 1  $\lambda_1 = 5.3626 \times 10^2$  kN/m b) Modo 2  $\lambda_2 = 5.5619 \times 10^2$  kN/m.



c)



d)

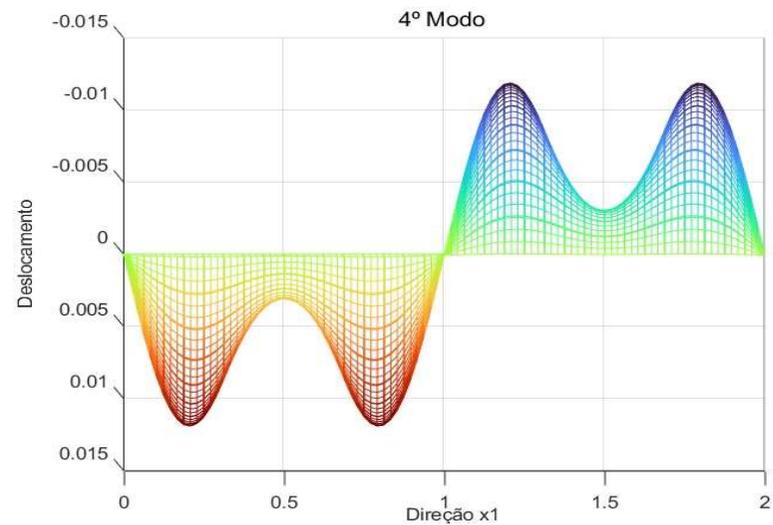
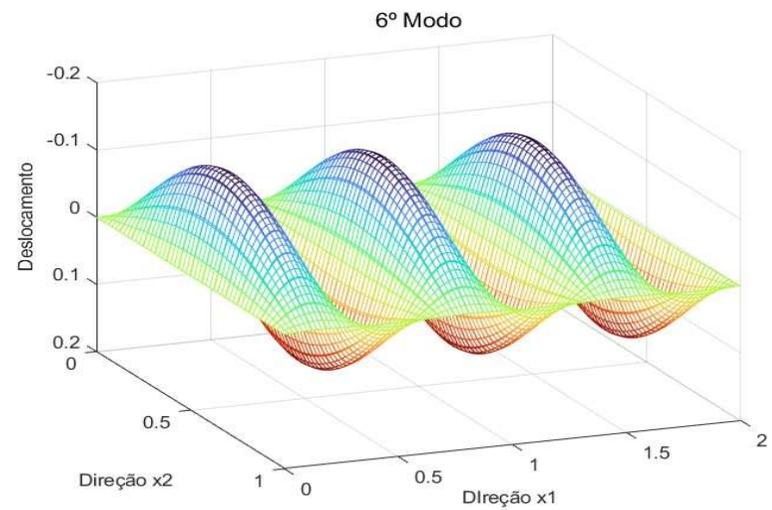
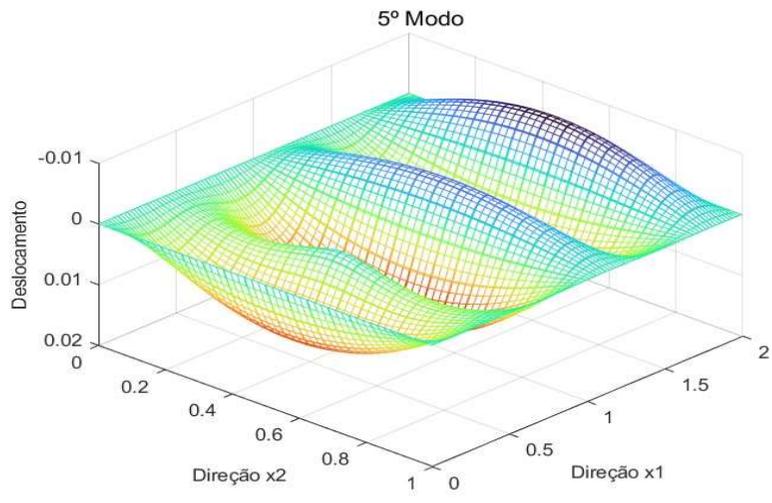
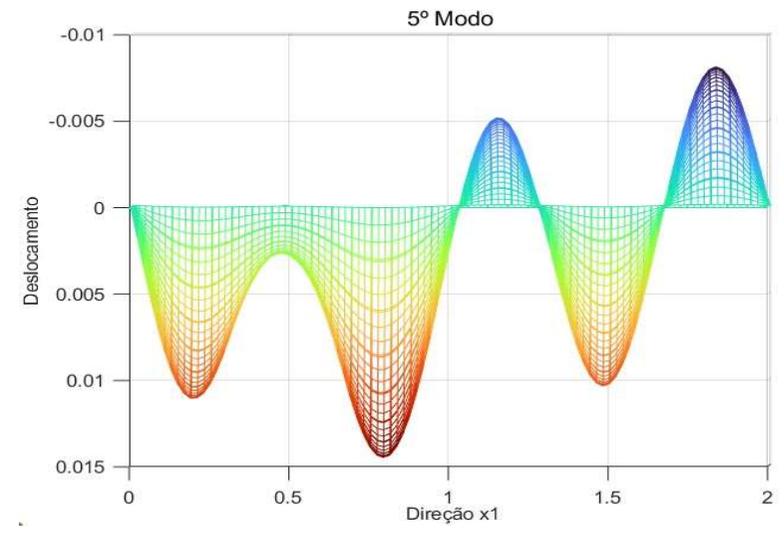


Figura 24- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 17 com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. c) Modo 3  $\lambda_3 = 10.5096 \times 10^2 \text{ kN/m}$  d) Modo 4  $\lambda_4 = 17.2300 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



e)



f)

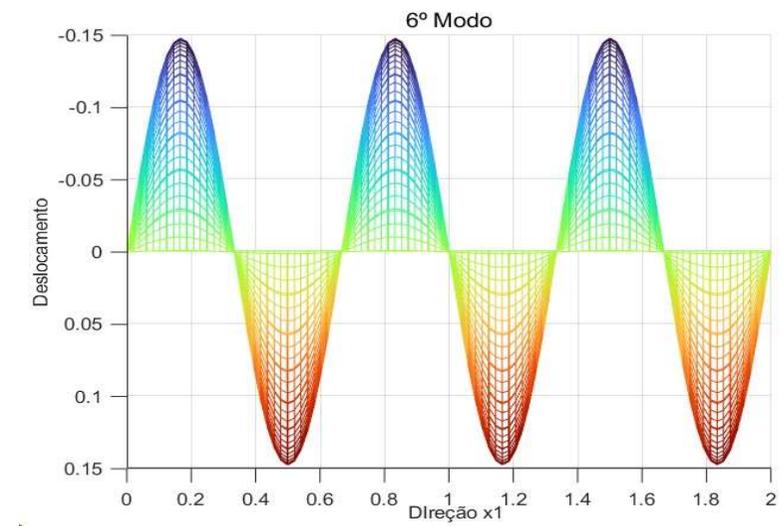


Figura 25- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 17 com quatro bordos SA submetida a esforços de compressão nas duas direções sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. e) Modo 5  $\lambda_5 = 18.5550 \times 10^2$  kN/m f) Modo 6  $\lambda_6 = 19.4388 \times 10^2$  kN/m.

## 4.2 – Placa retangular com os quatro bordos SA submetida a esforços de corte

### 4.2.1 – Sem restrições unilaterais

Estuda-se agora a encurvadura de uma placa retangular com os quatro bordos SA submetida a esforços de corte como indicado na Figura 26, de modo a verificar o efeito do corte nos modos e a sua influência no valor da carga crítica. Nesta secção a placa não tem restrições unilaterais. O estudo foi feito utilizando o elemento ACM e o elemento BFS.

Na Tabela 5 e na Figura 27 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento ACM e três malhas de diferentes graus de refinamento. Nas Figuras 28, 29 e 30 apresentam-se os correspondentes modos de encurvadura obtidos com a malha mais refinada (16x32). Não se considerou uma malha de 2x4 elementos finitos, pois esta, no caso do elemento ACM, aproxima muito mal os modos superiores.

Na Tabela 6 e na Figura 31 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento BFS e quatro malhas de diferentes graus de refinamento. Neste elemento as cargas de bifurcação evoluem monotonicamente com a diminuição do tamanho dos elementos finitos utilizados. Optou-se por não se apresentarem os modos obtidos com o elemento BFS pois eles são muito semelhantes aos obtidos com o elemento ACM.

A carga crítica teórica pode ser obtida a partir de um ábaco em [10]. Neste caso obteve-se,

$$\lambda_{cr} \cong 6.6 \frac{\pi^2 D_f}{b^2} = 1,193 \times 10^3 \text{ kN/m.} \quad (73)$$

Em suma, é possível concluir novamente que as cargas de bifurcação utilizando elementos ACM ou elementos BFS são muito semelhantes no caso de se usarem malhas mais refinadas e são também muito semelhantes à carga crítica teórica, especialmente no caso do elemento BFS.

A comparação dos valores das cargas críticas das Tabelas 5 e 6 (placa sujeita a um estado de corte puro) com os das Tabelas 1 e 2 (a mesma placa retangular sujeita a compressão biaxial) levamos a concluir que é bastante mais difícil levar uma placa à encurvadura por corte do que por compressão.

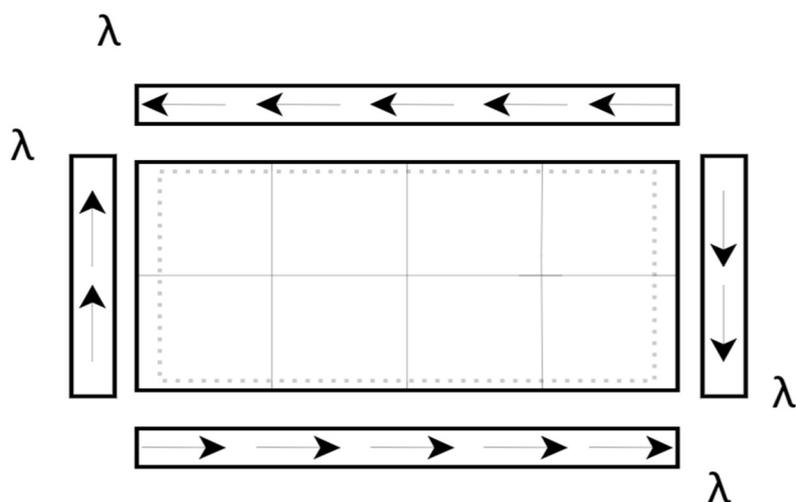


Figura 26- Placa Retangular com quatro bordos SA submetida a esforços de corte sem restrições unilaterais.

Tabela 5- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular com impedimentos unilaterais com sentidos opostos, quatro bordos SA, submetida a esforços de corte, em função do refinamento da malha para o elemento ACM.

Nº Elementos Finitos	4x8	8x16	16x32
h [m]	0,25	0,125	0,0625
$ \log_2(h) $	2	3	4
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$
$\lambda_1$	1.0932	1.1560	1.1765
$\lambda_2$	1.1068	1.1578	1.1795
$\lambda_3$	1.5910	1.7119	1.7711
$\lambda_4$	1.8059	1.9455	2.0176
$\lambda_5$	2.6955	2.8642	3.0227
$\lambda_6$	2.9841	3.1334	3.3133

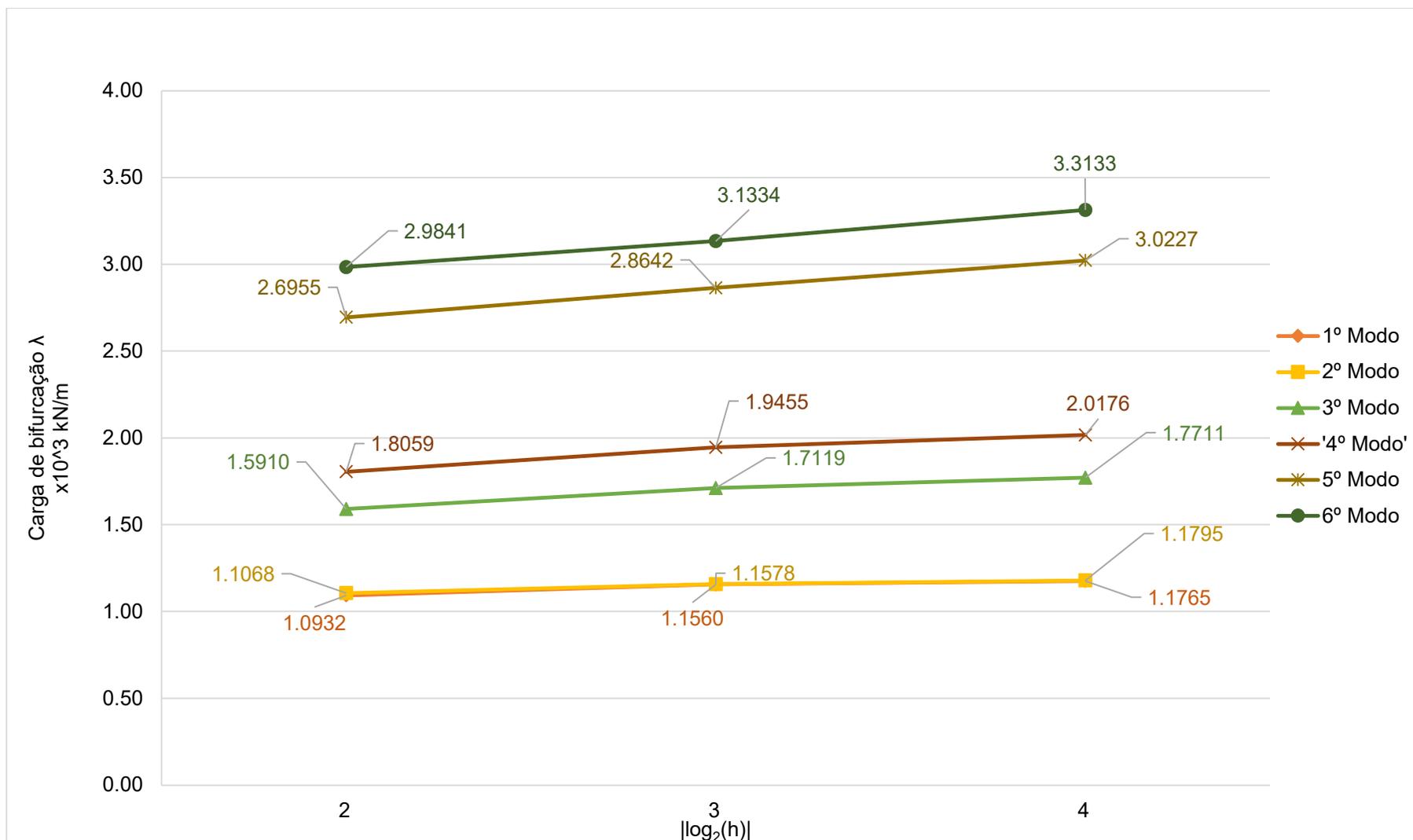
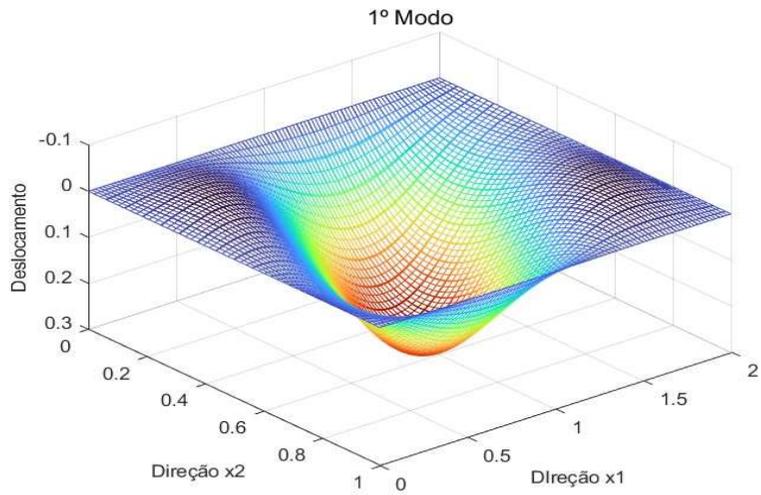
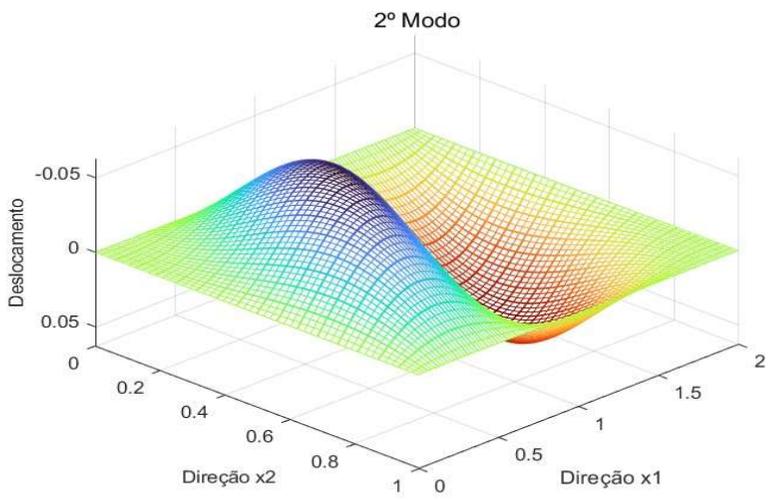
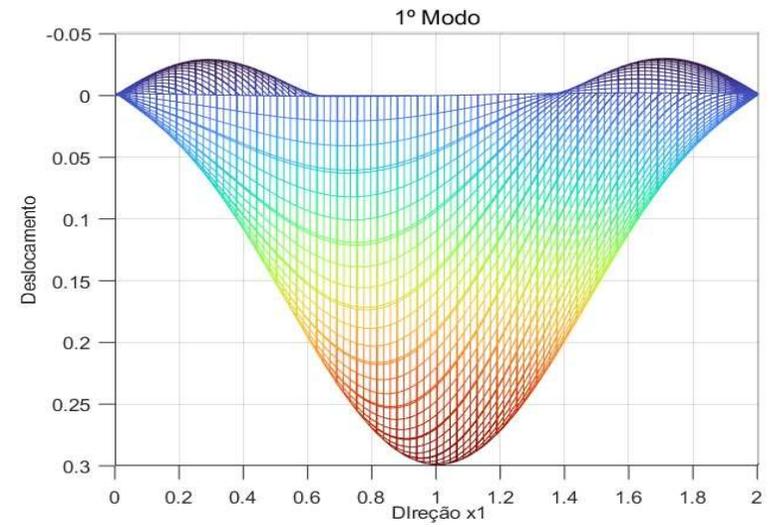


Figura 27- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 26 em função da dimensão  $h$  dos elementos finitos (elemento finito ACM).



a)



b)

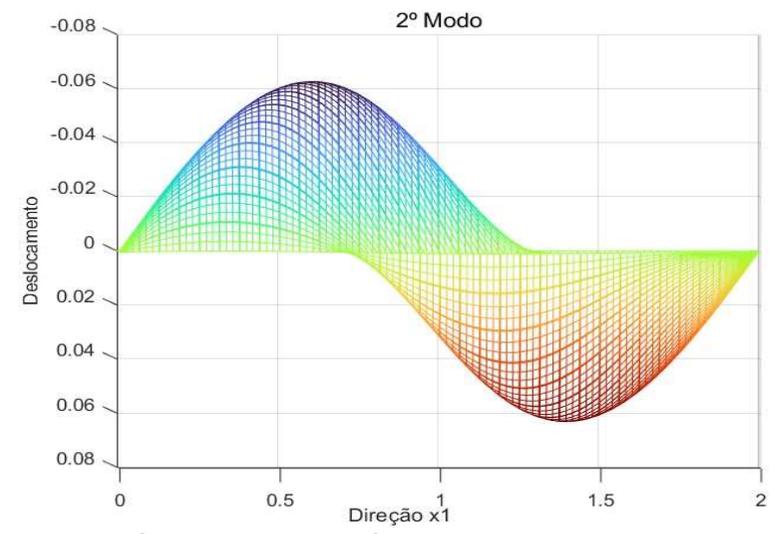
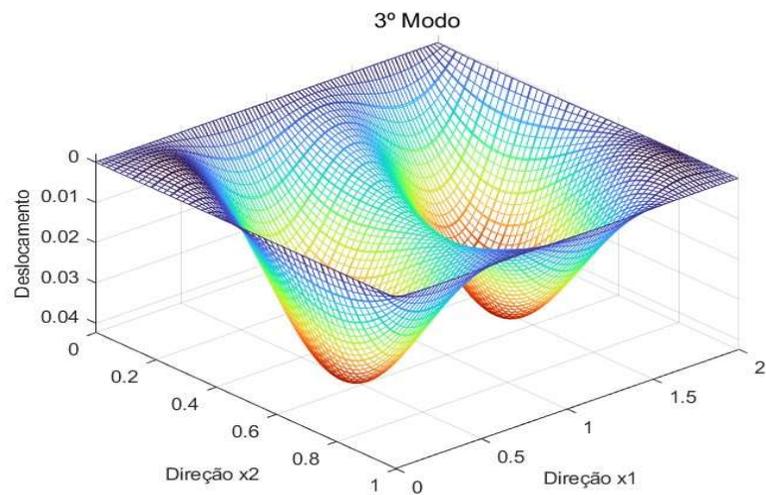
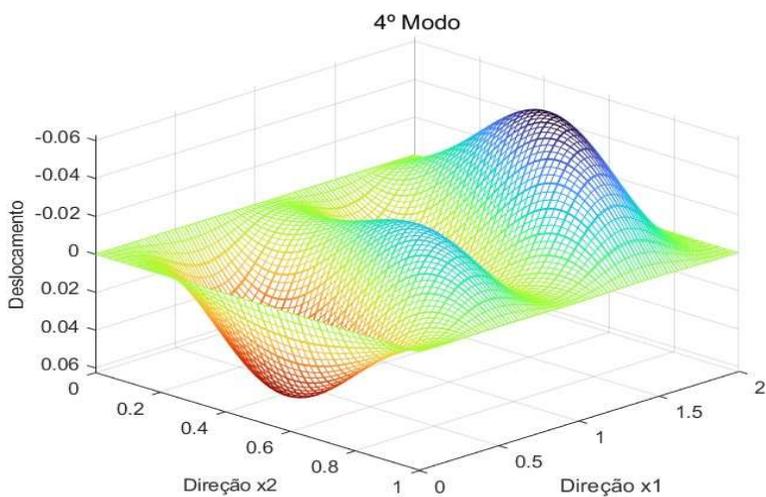
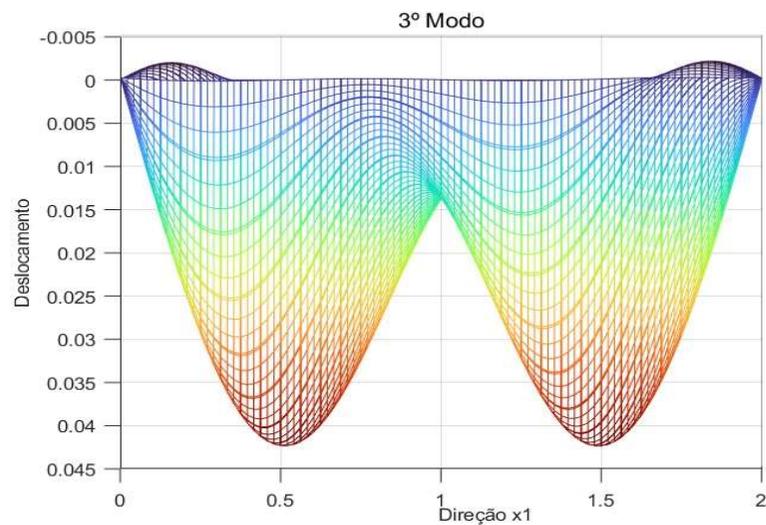


Figura 28- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 26 com quatro bordos SA submetida a esforços de corte sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. a) Modo 1  $\lambda_1 = 1.1765 \times 10^3 \text{ kN/m}$  b) Modo 2  $\lambda_2 = 1.1795 \times 10^3 \text{ kN/m}$ .



c)



d)

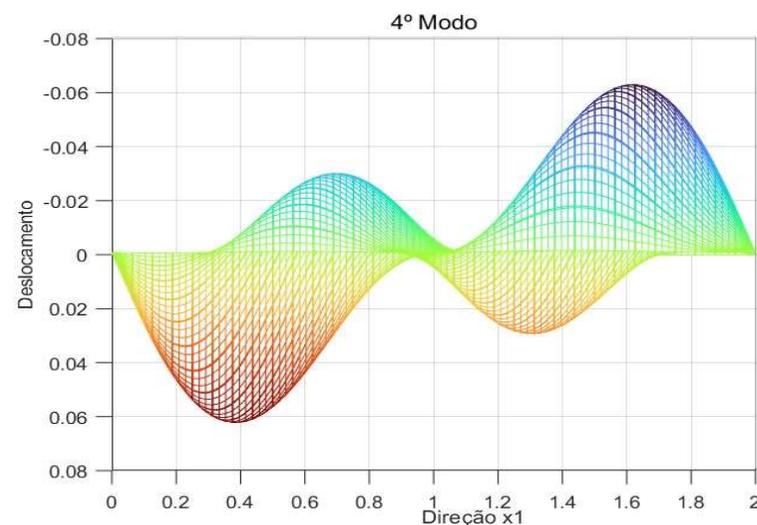
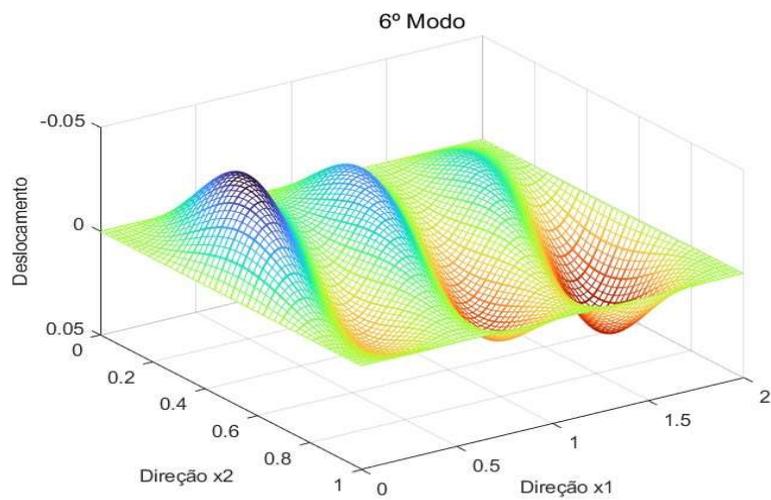
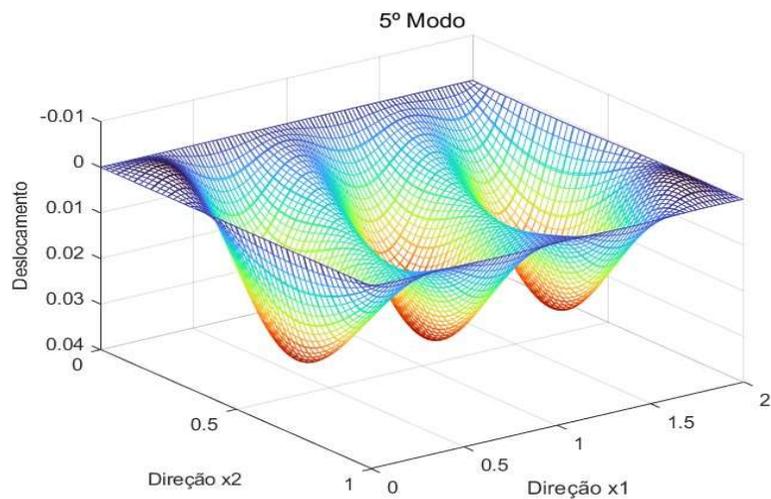
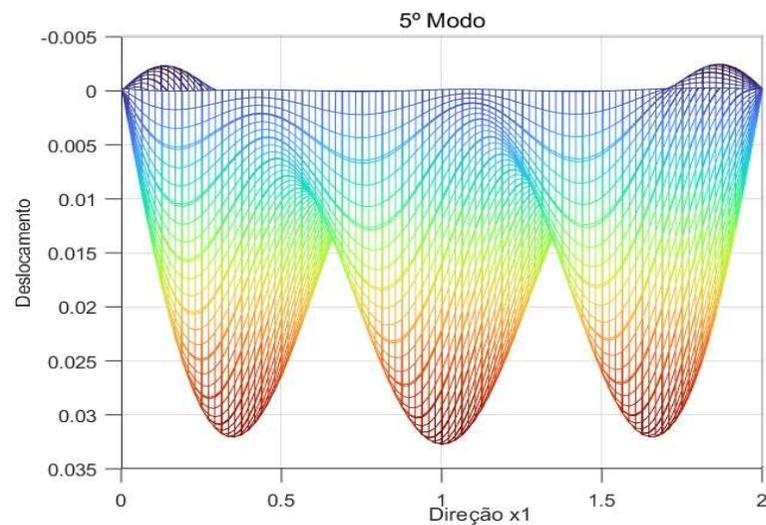


Figura 29- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 26 com quatro bordos SA submetida a esforços de corte sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. c) Modo 3  $\lambda_3 = 1.7711 \times 10^3 \text{ kN/m}$  d) Modo 4  $\lambda_4 = 2.0176 \cdot x 10^3 \text{ kN/m}$ .



e)



f)

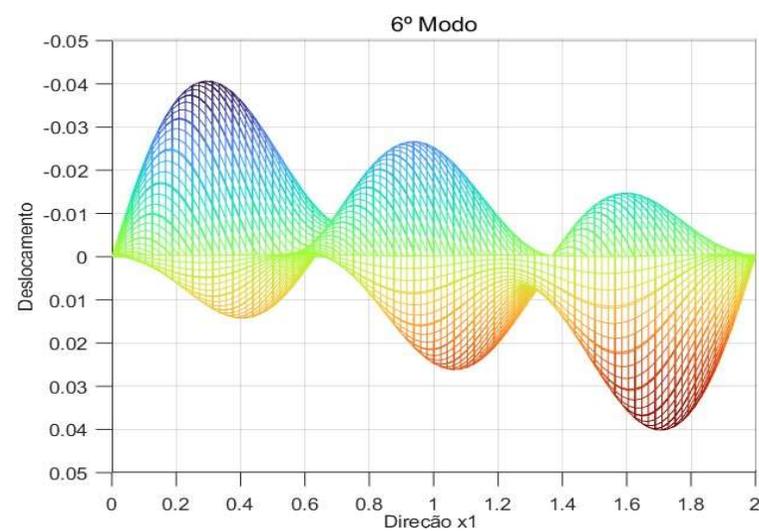


Figura 30- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 26 com quatro bordos SA submetida a esforços de corte sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 16x32. e) Modo 5  $\lambda_5 = 3.0227 \times 10^3 \text{ kN/m}$  f) Modo 6  $\lambda_6 = 3.3133 \times 10^3 \text{ kN/m}$ .

Tabela 6- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular com impedimentos unilaterais em sentidos opostos, quatro bordos SA, submetida a esforços de corte, em função do refinamento da malha para o elemento BFS.

Nº Elementos Finitos	2x4	4x8	8x16	16x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625
$ \log_2(h) $	1	2	3	4
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$
$\lambda_1$	1.2772	1.1914	1.1838	1.1833
$\lambda_2$	1.2804	1.1964	1.1887	1.1882
$\lambda_3$	1.9476	1.8127	1.7955	1.7943
$\lambda_4$	2.3513	2.0745	2.0478	2.0460
$\lambda_5$	4.0469	3.1812	3.0968	3.0906
$\lambda_6$	4.6890	3.5095	3.3996	3.3917

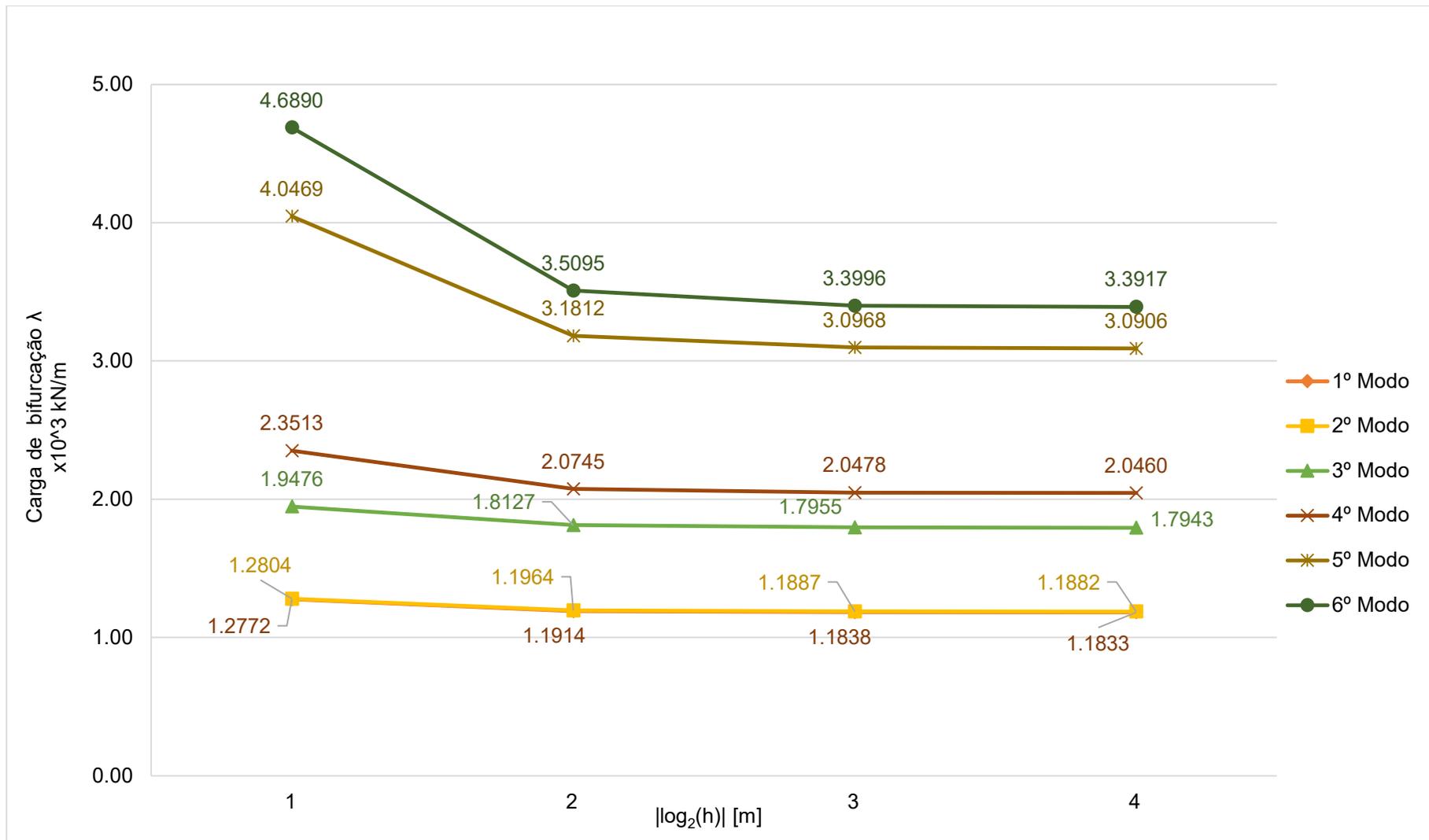


Figura 31- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 26 em função da dimensão  $h$  dos elementos finitos (elemento finito BFS).

## 4.2.2 – Com restrições unilaterais em sentidos iguais

Nesta secção estuda-se a encurvadura da placa analisada na secção 4.2.1, quando esta possui dois impedimentos unilaterais de sentidos iguais localizados no interior da placa, tal como, indicado na Figura 32. Ambos os apoios impedem o deslocamento para baixo.

Na Tabela 7 e na Figura 33 apresenta-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento ACM e três malhas de diferentes graus de refinamento. Nas Figuras 34, 35 e 36 apresentam-se os correspondentes modos de encurvadura obtidos com a malha mais refinada (16x32).

Na Tabela 8 e na Figura 37 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento BFS e quatro malhas de diferentes graus de refinamento. Os modos de bifurcação correspondentes são semelhantes aos do elemento ACM e por isso não são apresentados.

Verifica-se novamente que a evolução das cargas de bifurcação com a diminuição tamanho do elemento finito é monotónica apenas no caso do elemento BFS. Verifica-se igualmente que as cargas de bifurcação obtidas com o elemento ACM e com o elemento BFS são muito semelhantes para as malhas mais refinadas.

Note-se que devido aos apoios unilaterais os modos 2, 4, 5 e 6 da placa sem apoios unilaterais (ver secção 4.2.1.) não são possíveis neste caso. No entanto, os modos 1 e 3 (e as correspondentes cargas de bifurcação) obtidas na secção 4.2.1 são ainda possíveis neste caso (são os modos 1 e 5 do caso com impedimentos unilaterais).

Em suma, conclui-se que o primeiro modo de bifurcação neste caso, não ativa os apoios unilaterais, pelo que, a carga crítica desta placa é igual à carga crítica da placa sem apoios unilaterais (ver secção 4.2.1). No entanto, neste caso, verifica-se que a carga de bifurcação do modo 2 é inferior à carga de bifurcação do modo 2 da placa sem apoios unilaterais (ver secção 4.2.1).

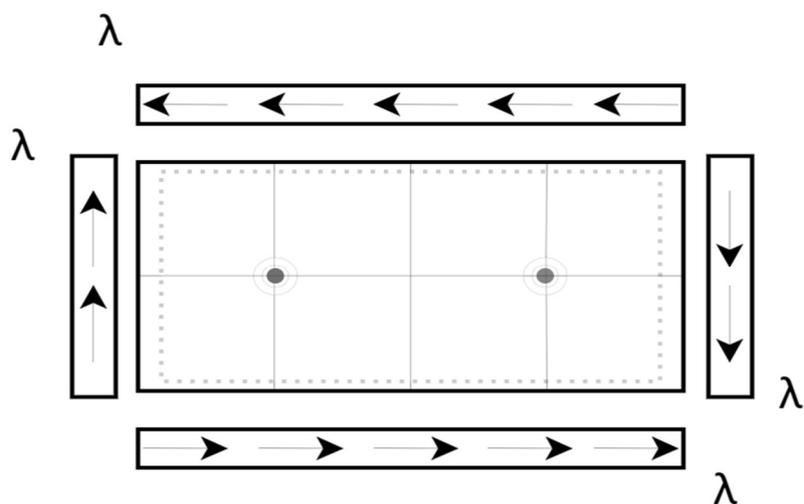


Figura 32- Placa Retangular com quatro bordos SA submetida a esforços de corte com duas restrições unilaterais em sentidos iguais localizados a 0.5m dos bordos.

Tabela 7- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular sem impedimentos unilaterais, quatro bordos SA, submetida a esforços de corte, em função do refinamento da malha para o elemento ACM.

Nº Elementos Finitos	4x8	8x16	16x32
h [m]	0,25	0,125	0,0625
$ \log_2(h) $	2	3	4
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$
$\lambda_1$	1.1068	1.1578	1.1765
$\lambda_2$	1.1042	1.1574	1.1771
$\lambda_3$	1.1492	1.2182	1.2442
$\lambda_4$	1.2598	1.3474	1.3829
$\lambda_5$	1.5910	1.7119	1.7711
$\lambda_6$	2.3586	2.8642	2.6454

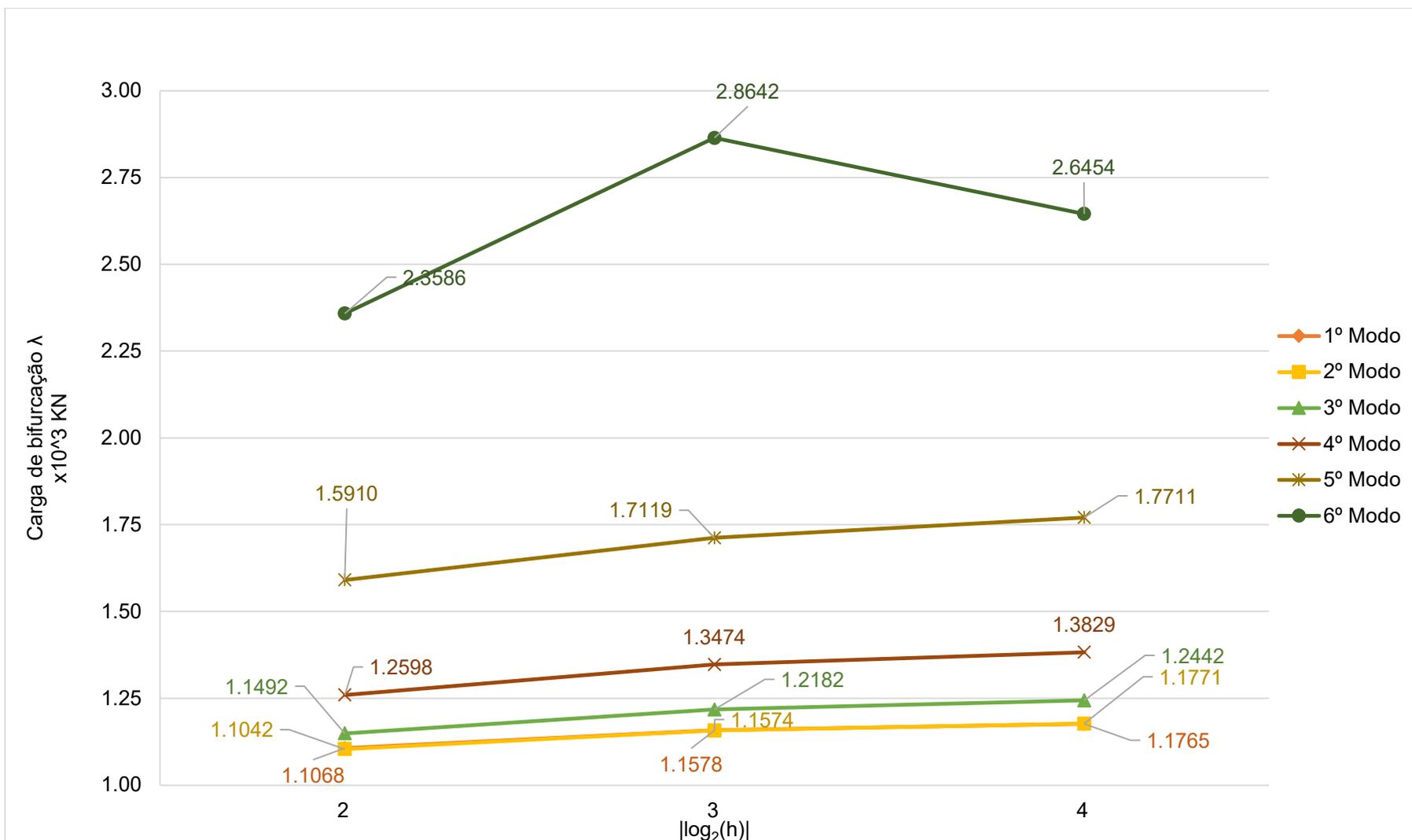
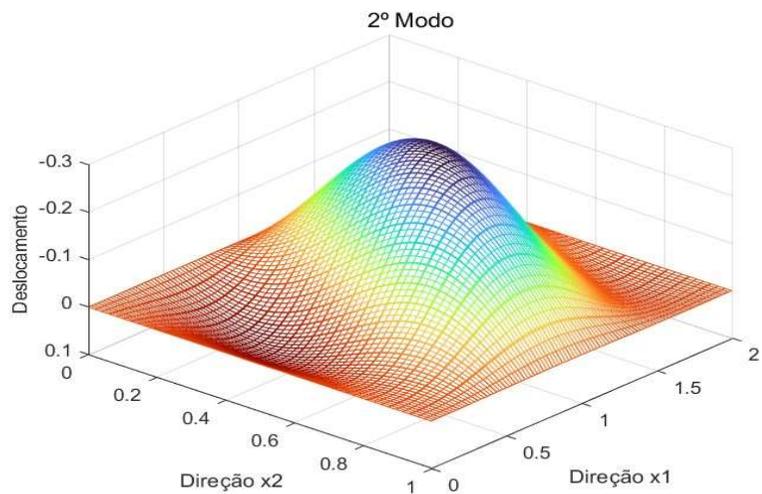
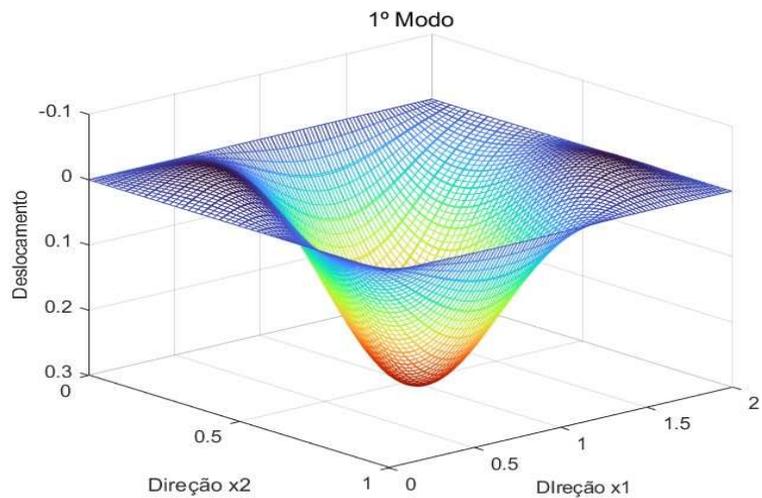
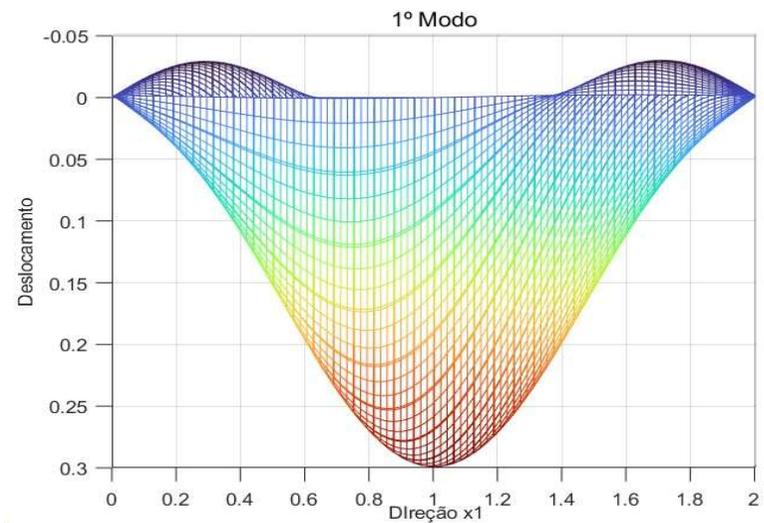


Figura 33- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 32 em função da dimensão  $h$  dos elementos finitos (elemento finito ACM).



a)



b)

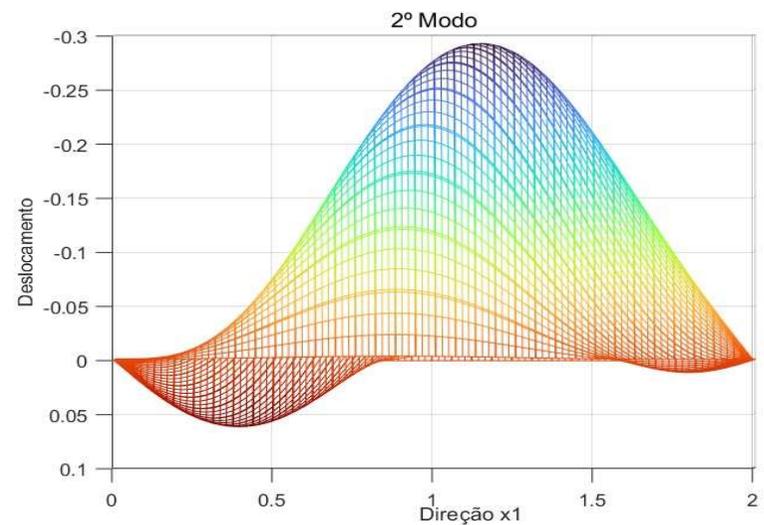
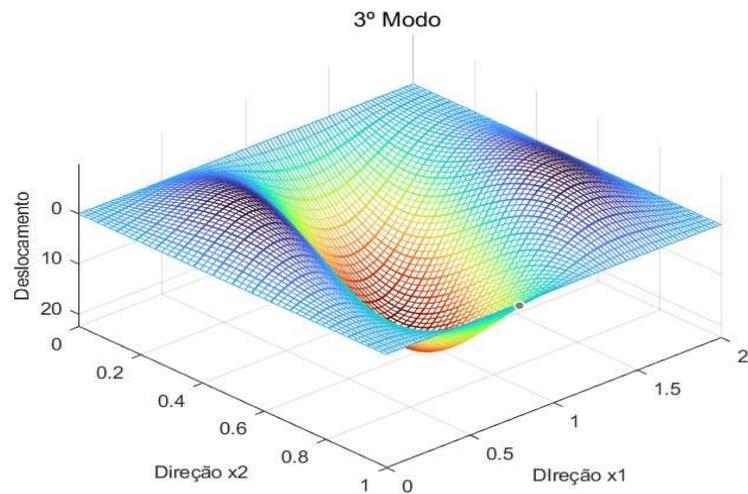
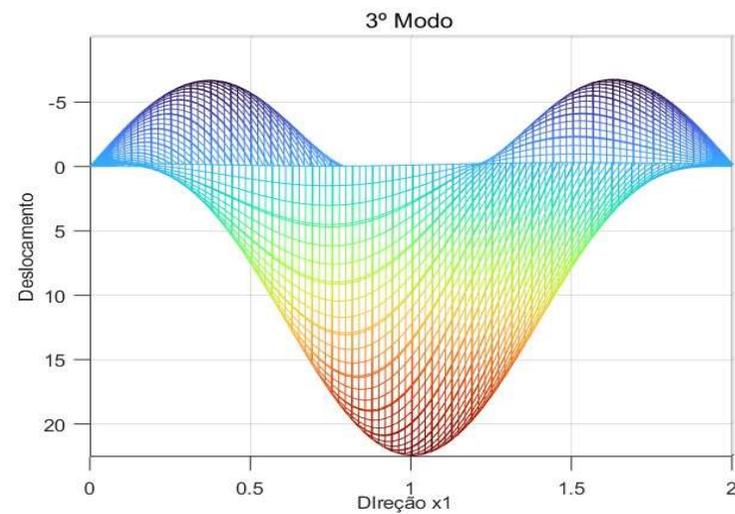


Figura 34- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 32 com quatro bordos SA submetida a esforços de corte com constrangimentos unilaterais no mesmo sentido, obtidos com uma malha de 16x32. a) Modo 1  $\lambda_1 = 1.1765 \times 10^3 \text{ kN/m}$  b) Modo 2  $\lambda_2 = 1.1771 \times 10^3 \text{ kN/m}$ .



c)



d)

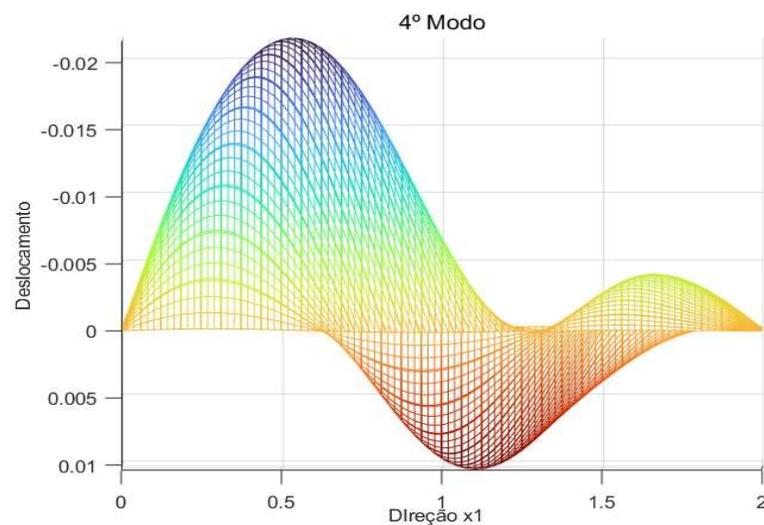
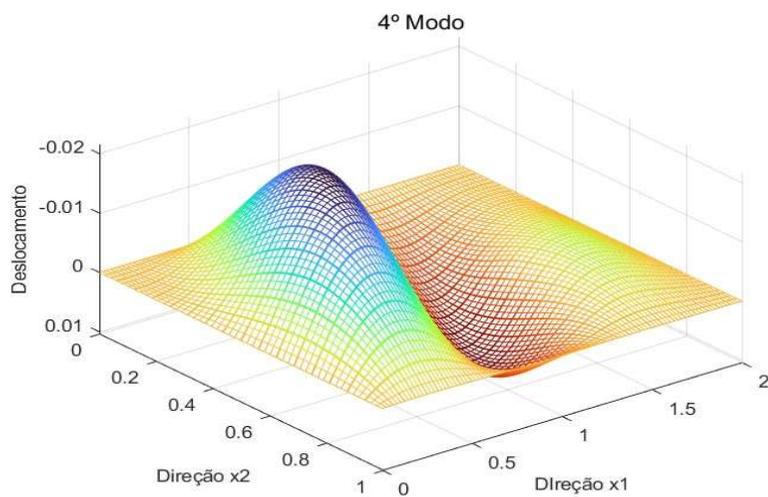
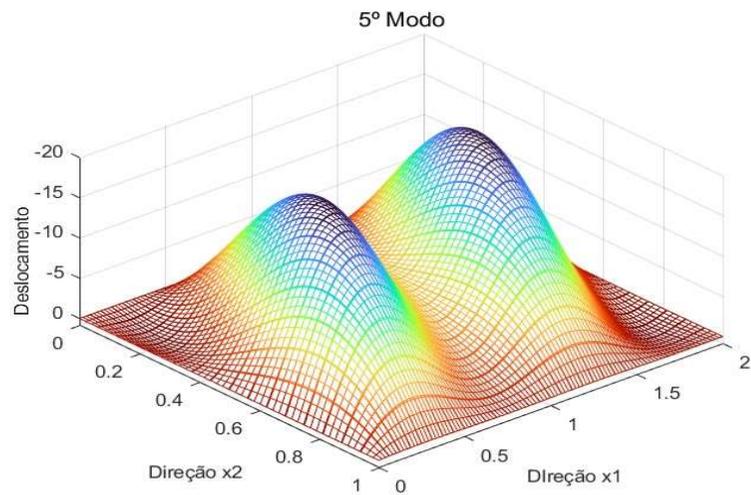
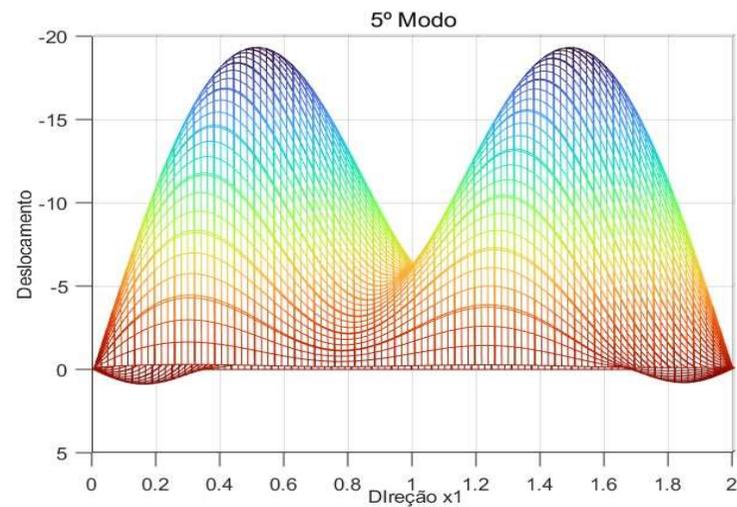


Figura 35- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 32 com quatro bordos SA submetida a esforços de corte com constrangimentos unilaterais no mesmo sentido, obtidos com uma malha de 16x32. c) Modo 3  $\lambda_3 = 1.2442 \times 10^3 \text{ kN/m}$  d) Modo 4  $\lambda_4 = 1.3829 \cdot x 10^3 \text{ kN/m}$ .



e)



f)

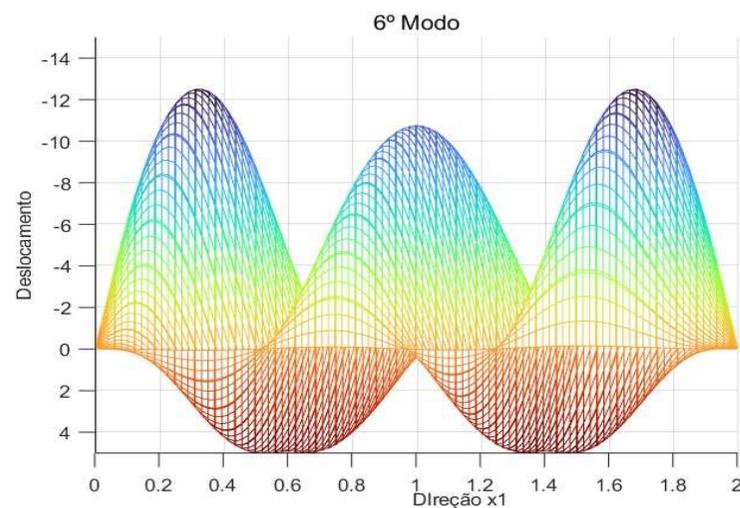
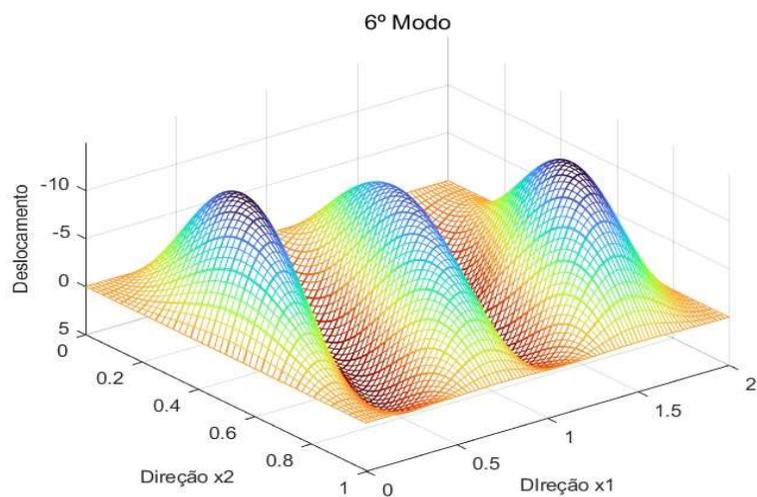


Figura 36- Modos de encurvadura da placa retangular da Figura 32 com quatro bordos SA submetida a esforços de corte com constrangimentos unilaterais no mesmo sentido, obtidos com uma malha de 16x32. e) Modo 5  $\lambda_5 = 1.7711 \times 10^3 \text{ kN/m}$  f) Modo 6  $\lambda_6 = 2.6454 \cdot x 10^3 \text{ kN/m}$ .

Tabela 8- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular sem impedimentos unilaterais, quatro bordos SA, submetida a esforços de corte, em função do refinamento da malha para o elemento BFS.

Nº Elementos Finitos	2x4	4x8	8x16	16x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625
$ \log_2(h) $	1	2	3	4
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$
$\lambda_1$	1.2804	1.1914	1.1838	1.1833
$\lambda_2$	1.2797	1.1925	1.1849	1.1844
$\lambda_3$	1.3601	1.2633	1.2546	1.2539
$\lambda_4$	1.5147	1.4090	1.3974	1.3968
$\lambda_5$	1.9476	1.8127	1.7955	1.7943
$\lambda_6$	3.3557	2.7715	2.7046	2.6991

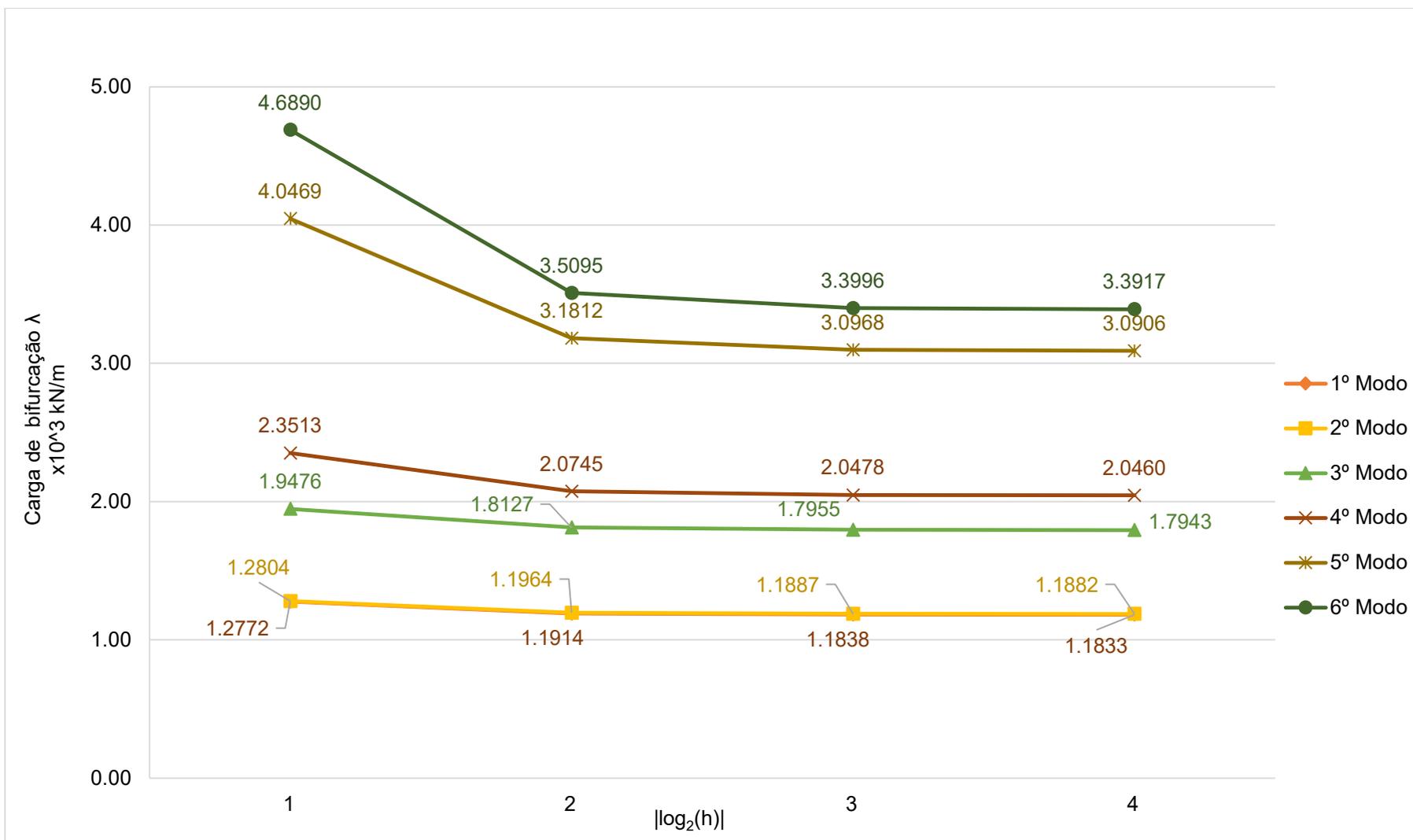


Figura 37- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 32 em função da dimensão  $h$  dos elementos finitos (elemento finito BFS).

## 4.3 – Placa quadrada com os três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecional

### 4.3.1 – Sem restrições unilaterais

Neste exemplo estuda-se a encurvadura de uma placa quadrada com três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecionais como indicado na Figura 38. Nesta secção 4.3.1 a placa não tem restrições unilaterais. O estudo foi feito utilizando o elemento ACM e o elemento BFS.

Na Tabela 9 e na Figura 39 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento ACM e cinco malhas de diferentes graus de refinamento.

Nas Figuras 40, 41 e 42 apresentam-se os correspondentes modos de encurvadura obtidos com a malha mais refinada (32x32).

Na Tabela 10 e na Figura 43 apresenta-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento BFS e cinco malhas de diferentes graus de refinamento. Tal como nos casos anteriores verifica-se a evolução monotónica das cargas de bifurcação para o elemento BFS e não se representam os modos de instabilidade por serem semelhantes aos obtidos com o elemento ACM.

Em suma, é possível concluir que as cargas de bifurcação utilizando elementos ACM ou elementos BFS são muito semelhantes no caso de se usarem malhas mais refinadas. Por outro lado, neste caso de placa quadrada, no caso da malha menos refinada, já não se verifica a troca de ordem das cargas de bifurcação entre os primeiro e o segundo modos.

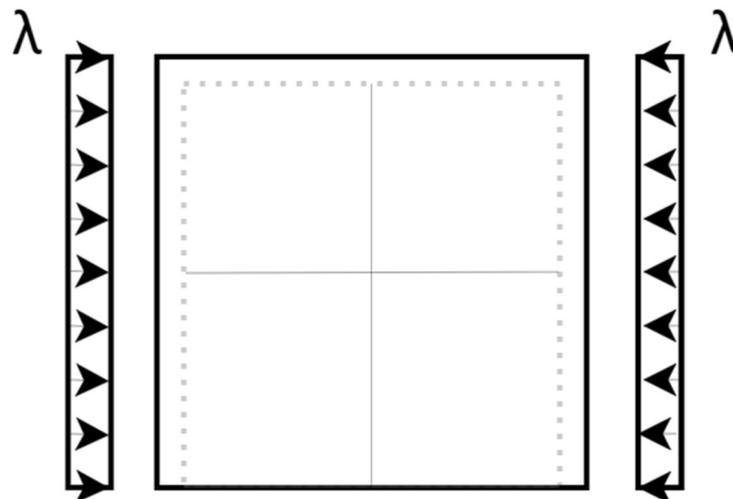


Figura 38- Placa Quadrada com os três bordos SA e um livre submetida a compressão unidirecional segundo  $x_1$  sem restrições unilaterais.

Tabela 9- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular sem impedimentos unilaterais, três bordos SA e um livre, submetida a esforços de compressão unidirecional, em função do refinamento da malha para o elemento ACM.

Nº Elementos Finitos	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625	0.3125
$ \log_2(h) $	1	2	3	4	5
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^2$				
$\lambda_1$	2.5289	2.5390	2.5355	2.5341	2.5338
$\lambda_2$	9.4570	7.9676	7.9094	7.8836	7.8761
$\lambda_3$	12.2275	13.5363	14.0813	14.2413	14.2825
$\lambda_4$	16.9163	14.7300	15.7375	16.0663	16.1550
$\lambda_5$	23.8625	17.2625	16.9700	16.8563	16.8225
$\lambda_6$	30.8738	22.1025	23.6788	24.2463	24.4063

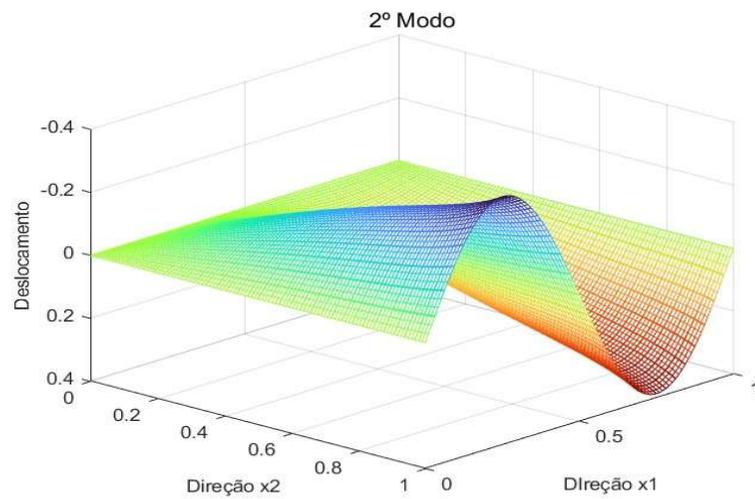
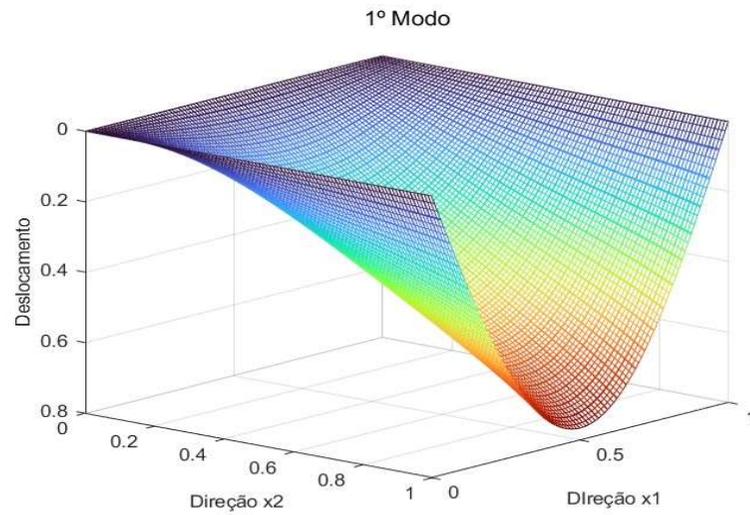
No livro [11] (p. 362) encontra-se a forma de calcular o espaço de membrana crítico de placas retangulares com o carregamento e condições de apoio indicados na Figura 38. Para o coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$  (muito próximo do valor 0.30 adotado nesta dissertação) a carga crítica é dada por:

$$\lambda_{cr} \cong 1.44 \frac{\pi^2 D_f}{b^2} = 2.5266 \times 10^2 \text{ kN/m.} \quad (74)$$

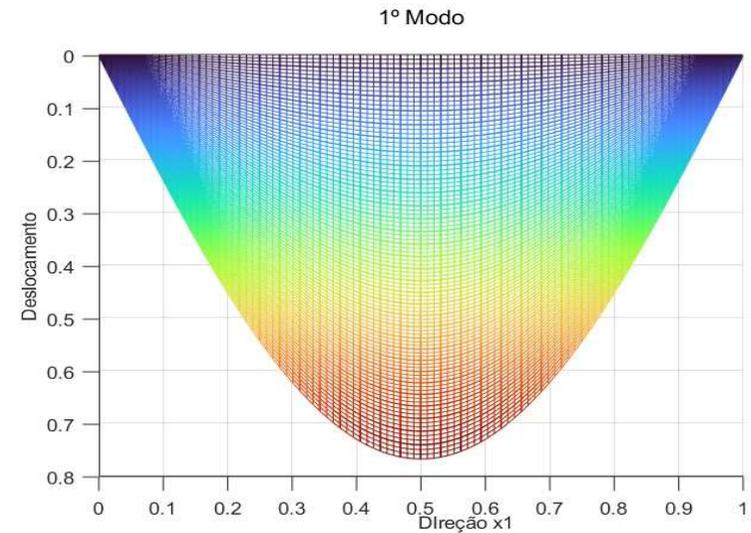
valor que compara muito bem com os valores de  $\lambda_1$  indicados nas Tabelas 9 e 10.



Figura 39- Gráfico das cargas de bifurcação da placa da Figura 38 em função da dimensão  $h$  dos elementos finitos (elemento finito ACM).



a)



b)

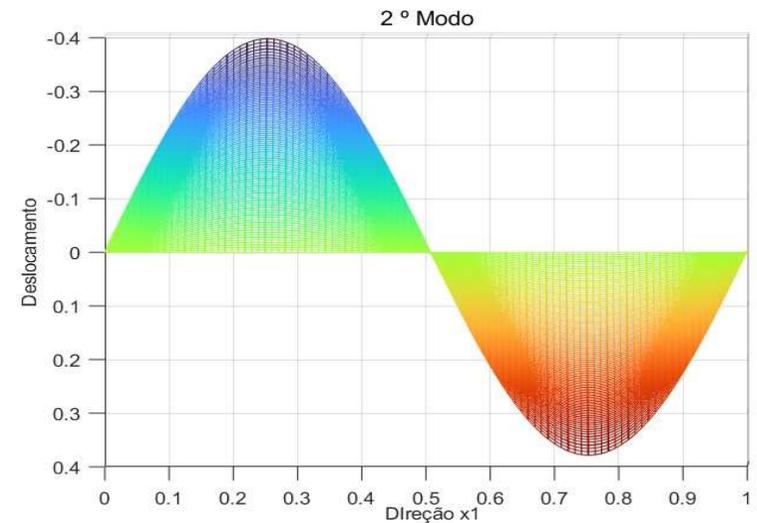
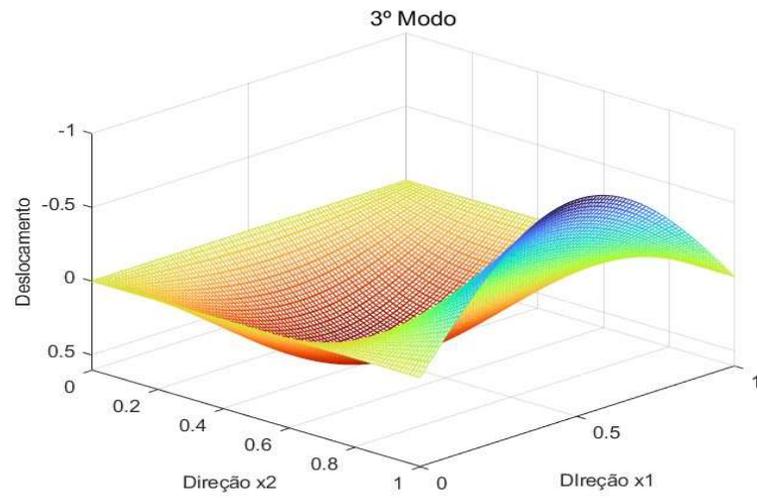
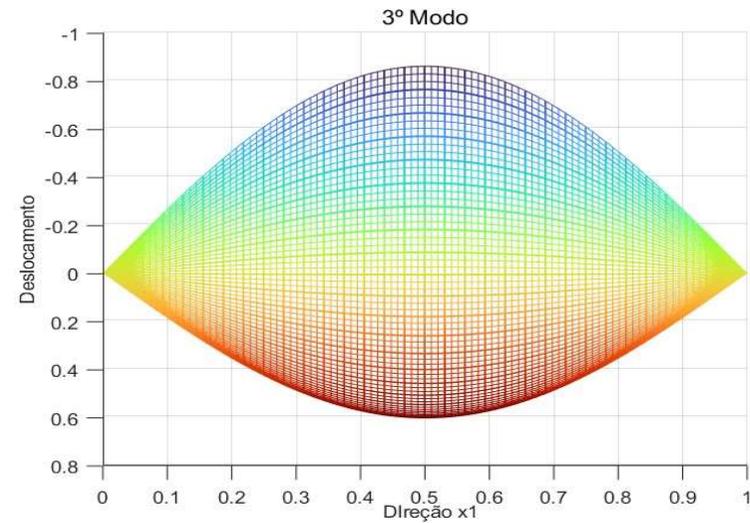


Figura 40- Modos de encurvadura da placa quadrada da Figura 38 com três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecionais segundo  $x_1$  sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 32x32. a) Modo 1  $\lambda_1 = 2.5338 \times 10^2 \text{ kN/m}$  b) Modo 2  $\lambda_2 = 7.8761 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



c)



d)

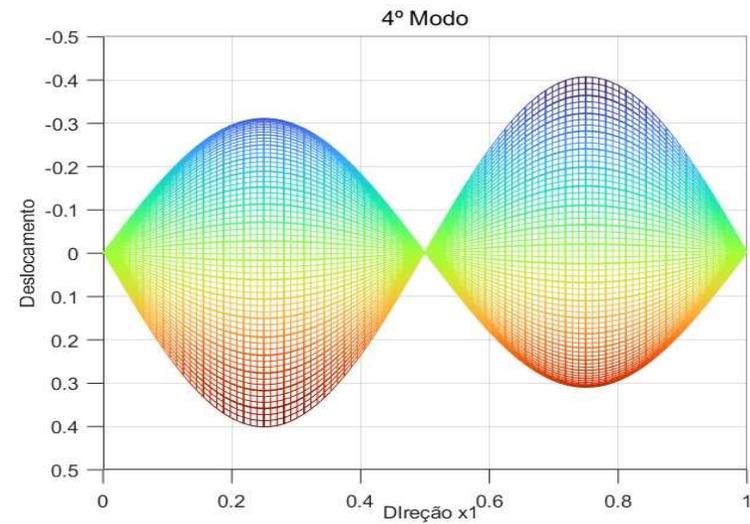
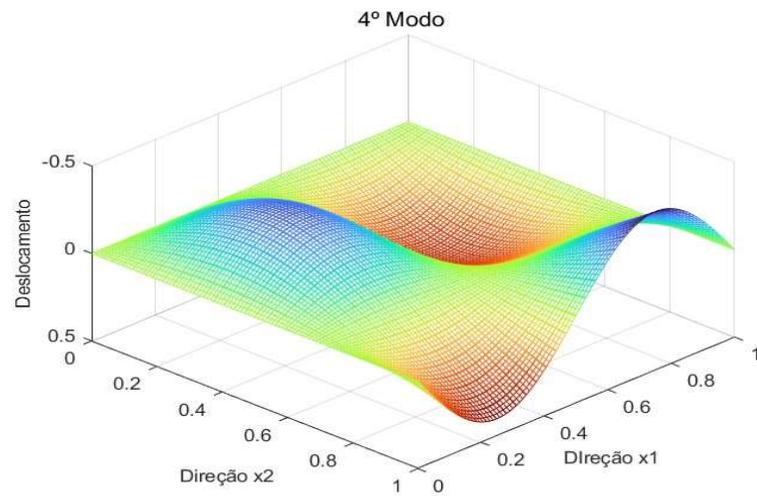
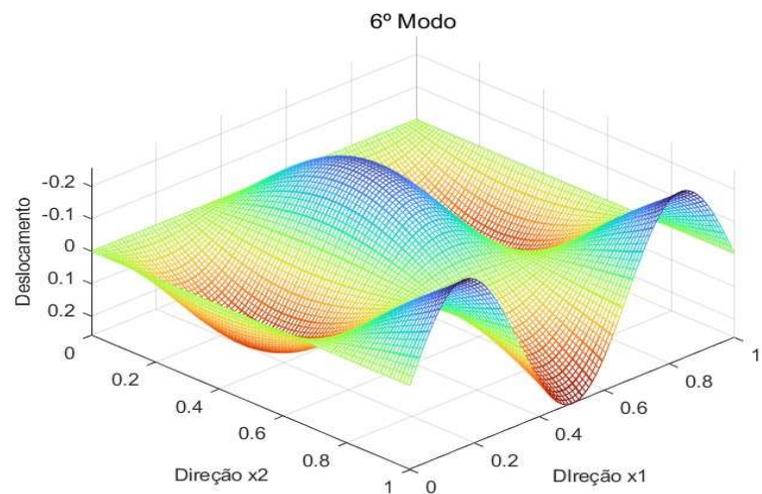
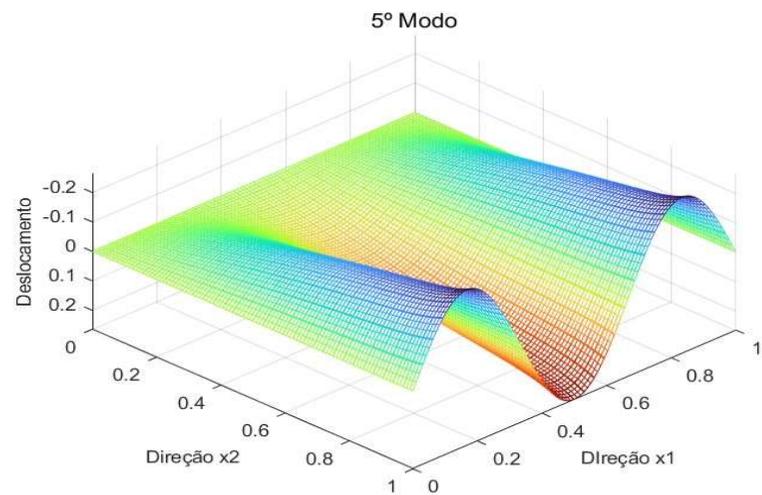
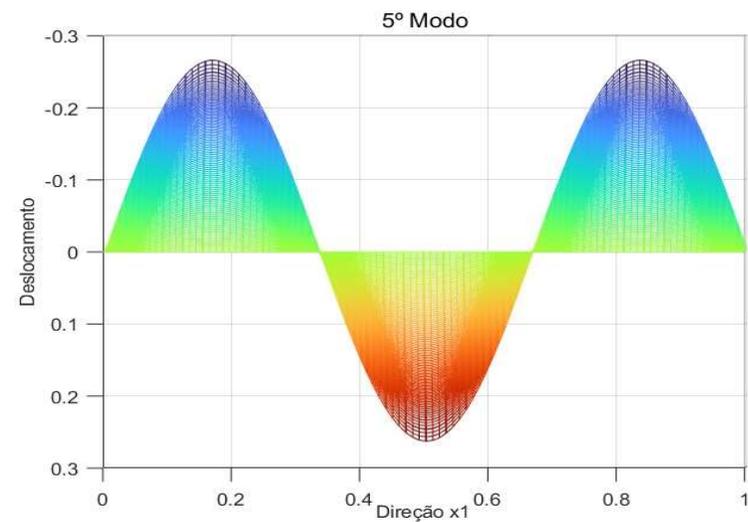


Figura 41- Modos de encurvadura da placa quadrada da Figura 38 com três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecionais segundo  $x_1$  sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de  $32 \times 32$ . c) Modo 3  $\lambda_3 = 14.2825 \times 10^2 \text{ kN/m}$  d) Modo 4  $\lambda_4 = 16.1550 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



e)



f)

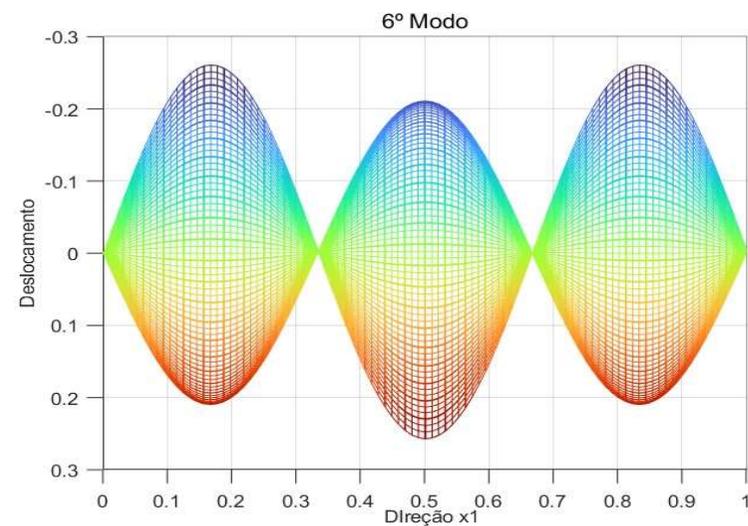


Figura 42- Modos de encurvadura da placa quadrada da Figura 38 com três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecionais segundo  $x_1$  sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de  $32 \times 32$ . e) Modo 5  $\lambda_5 = 16.8225 \times 10^2 \text{ kN/m}$  f) Modo 6  $\lambda_6 = 24.4063 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .

Tabela 10- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular sem impedimentos unilaterais, três bordos SA e um livre, submetida a esforços de compressão unidirecional, em função do refinamento da malha para o elemento BFS.

Nº Elementos Finitos	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625	0.3125
$ \log_2(h) $	1	2	3	4	5
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^2$				
$\lambda_1$	2.5504	2.5348	2.5336	2.5335	2.5335
$\lambda_2$	9.4565	7.9311	7.8775	7.8739	7.8736
$\lambda_3$	14.4900	14.3175	14.2975	14.2966	14.2966
$\lambda_4$	17.9200	16.2663	16.1913	16.1855	16.1851
$\lambda_5$	24.1838	17.3663	16.8525	16.8134	16.8108
$\lambda_6$	31.9613	25.0450	24.5063	24.4638	24.4609

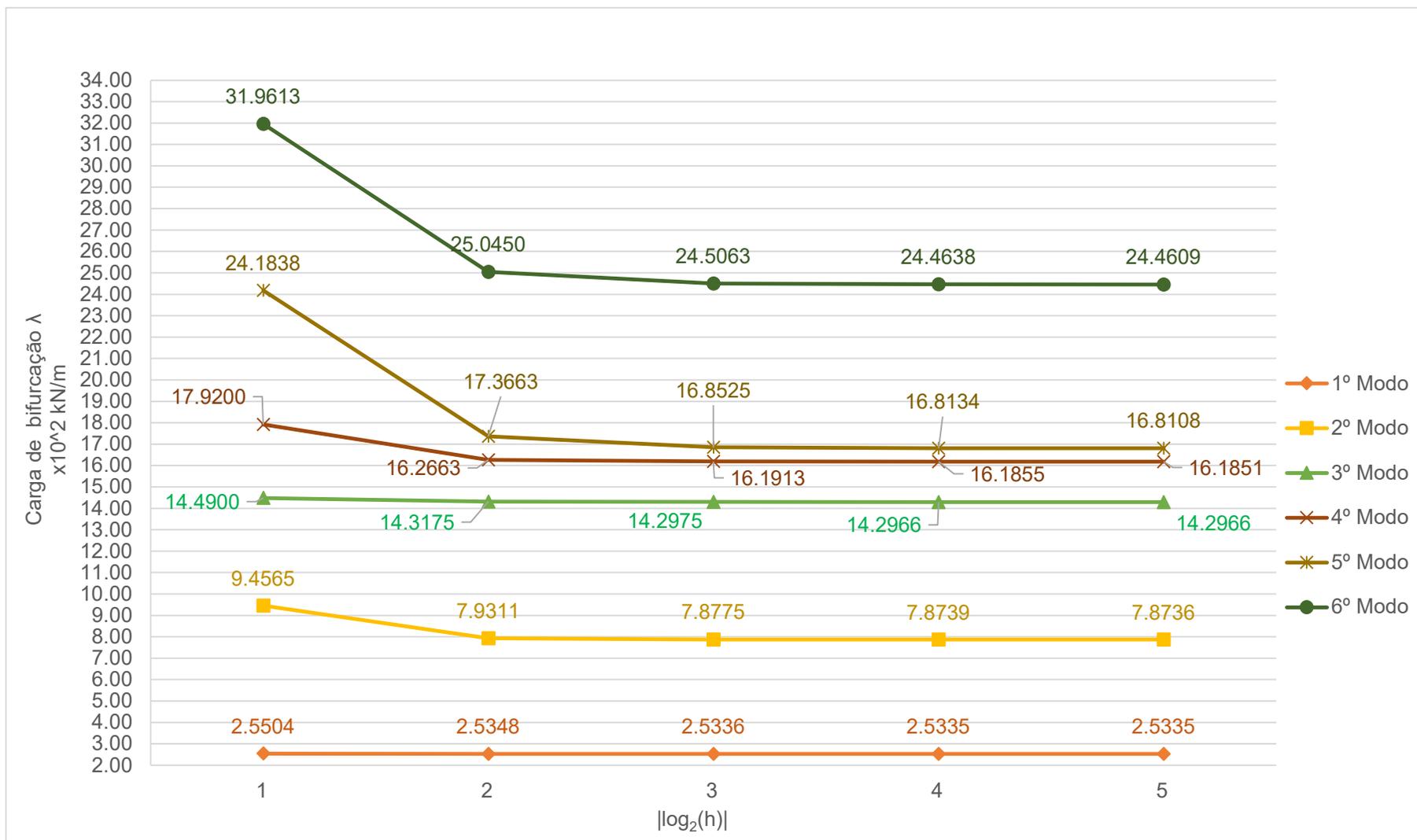


Figura 43- Gráfico do comportamento das cargas de bifurcação da placa da Figura 38 em função da dimensão h dos elementos finitos (elemento finito BFS).

### 4.3.2 – Com restrições unilaterais em sentidos opostos

Nesta secção estuda-se a encurvadura da placa analisada na secção 4.3.1, quando esta possui dois impedimentos unilaterais de sentidos opostos localizados no centro e meio do bordo da placa, tal como, indicado na Figura 44. O apoio interior impede o deslocamento para cima e o apoio de bordo impede o deslocamento para baixo.

Na Tabela 11 e na Figura 45 apresenta-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento ACM e cinco malhas de diferentes graus de refinamento. Nas Figuras 46, 47 e 48 apresenta-se os correspondentes modos de encurvadura obtidos com a malha mais refinada (32x32).

Na Tabela 12 e na Figura 49 apresentam-se as seis primeiras cargas de bifurcação obtidas com o elemento BFS e cinco malhas de diferentes graus de refinamento. Os modos de bifurcação correspondentes são idênticos aos do elemento ACM.

Verifica-se novamente que a evolução das cargas de bifurcação com a diminuição do tamanho do elemento finito é monotónica apenas no caso do elemento BFS. Verifica-se igualmente que as cargas de bifurcação obtidas com o elemento ACM e com o elemento BFS são muito semelhantes para as malhas mais refinadas.

Note-se que devido aos apoios unilaterais os modos 1, 3, 4, 5 e 6 da placa sem apoios unilaterais (ver secção 4.3.1) não são possíveis neste caso. No entanto, os modos 2, 3 e 4 (e as correspondentes cargas de bifurcação) obtidas na secção 4.3.1 são ainda possíveis neste caso.

Em suma conclui-se que o primeiro modo de bifurcação neste caso, ativa o apoio unilateral interior, pelo que, difere do obtido para o caso sem apoios unilaterais (ver secção 4.3.1). Assim, verifica-se um aumento da carga de bifurcação desta placa ao serem introduzidos os apoios unilaterais, pelo que a carga crítica é superior ao caso sem apoios unilaterais. Nota-se também que os dois primeiros modos são bastante próximos, diferentemente do ocorrido no caso sem contacto (ver secção 4.3.1). Para além disso, verifica-se ainda que as cargas de bifurcação dos 1º e 2º modos são ambas inferiores às do 2º modo da placa sem apoios unilaterais (ver secção 4.3.1).

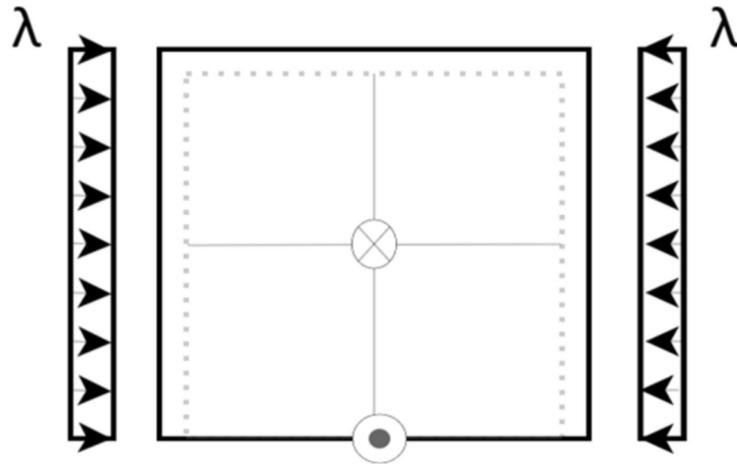


Figura 44- Placa Quadrada com os três bordos SA e um livre submetida a compressão unidirecional segundo  $x_1$  com restrições unilaterais no centro da placa e a meio do bordo livre.

Tabela 11- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular com impedimentos unilaterais, três bordos SA e um livre, submetida a esforços de compressão unidirecional, em função do refinamento da malha para o elemento ACM.

Nº Elementos Finitos	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625	0.3125
$ \log_2(h) $	1	2	3	4	5
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^2$				
$\lambda_1$	5.9463	6.3349	6.4106	6.4455	6.4578
$\lambda_2$	6.3626	6.5061	6.7081	6.7535	6.7626
$\lambda_3$	9.4570	7.9676	7.9094	7.8836	7.8761
$\lambda_4$	12.2275	13.5365	14.0809	14.2408	14.2825
$\lambda_5$	16.9166	14.7305	15.7378	16.0666	16.1550
$\lambda_6$	30.1034	21.2896	22.9238	23.1726	23.3050

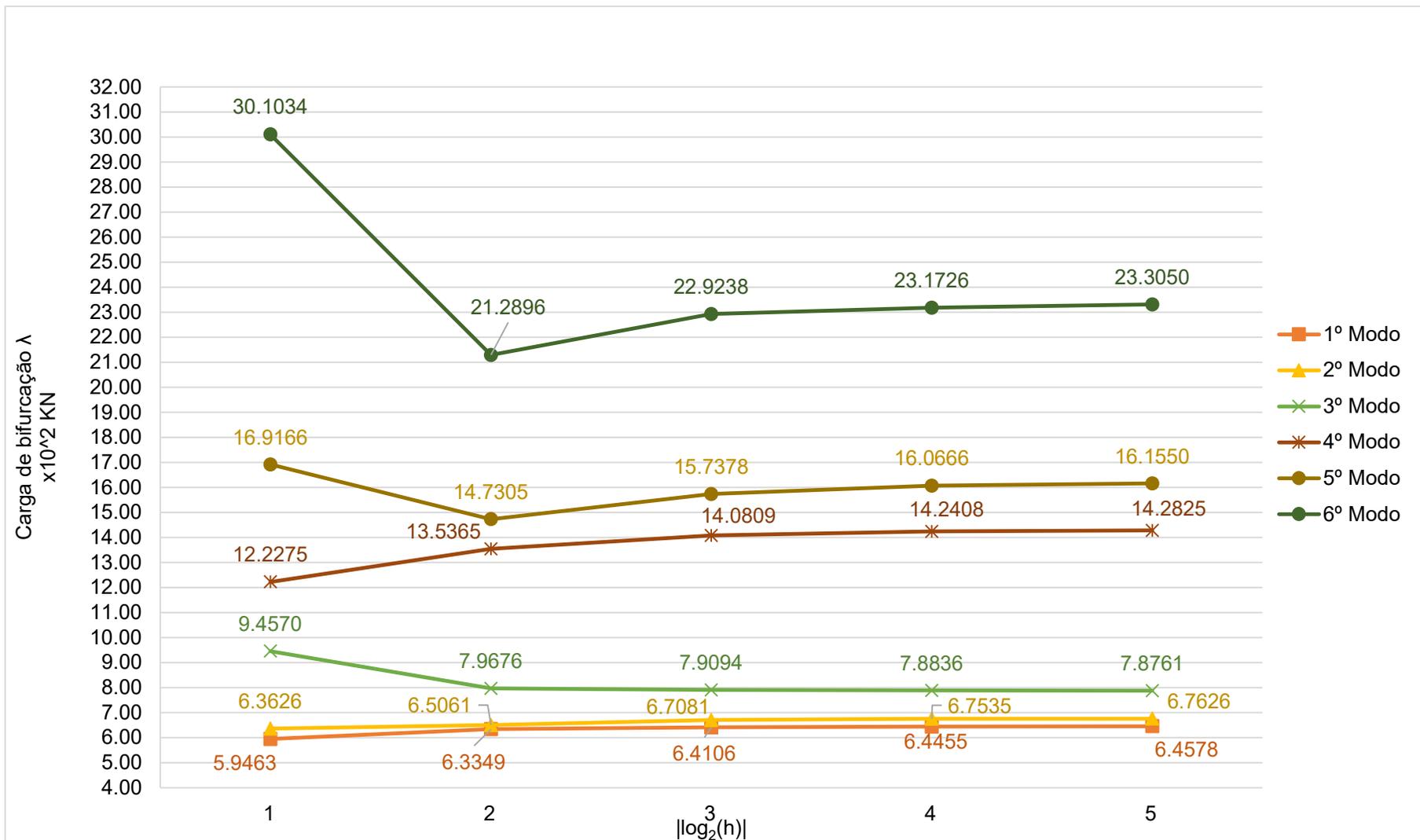
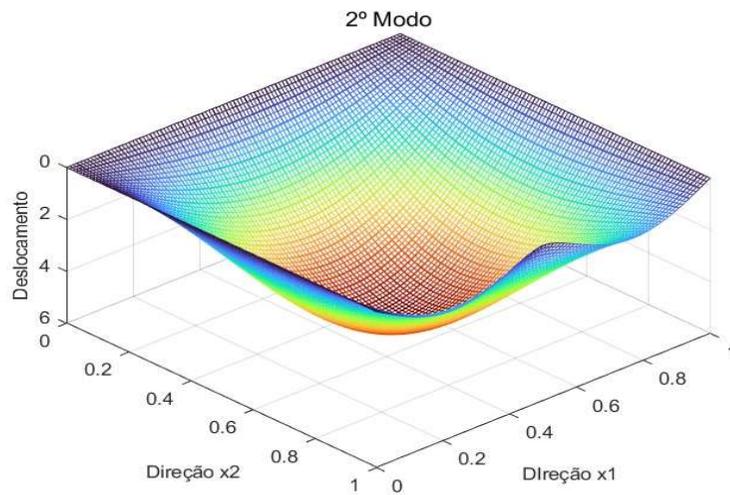
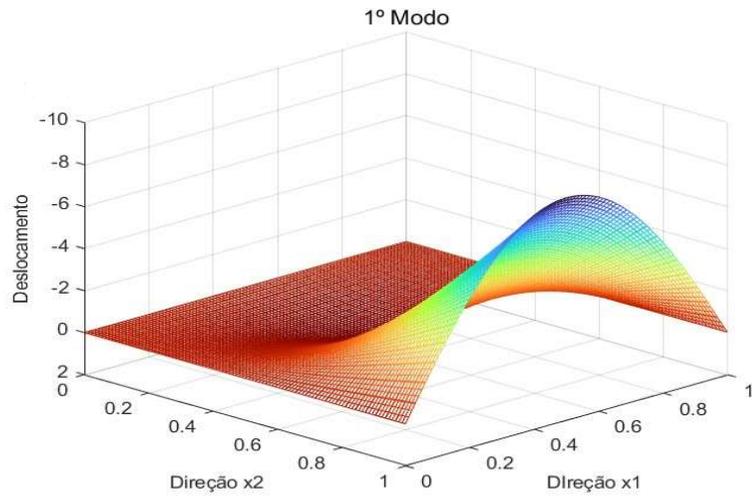
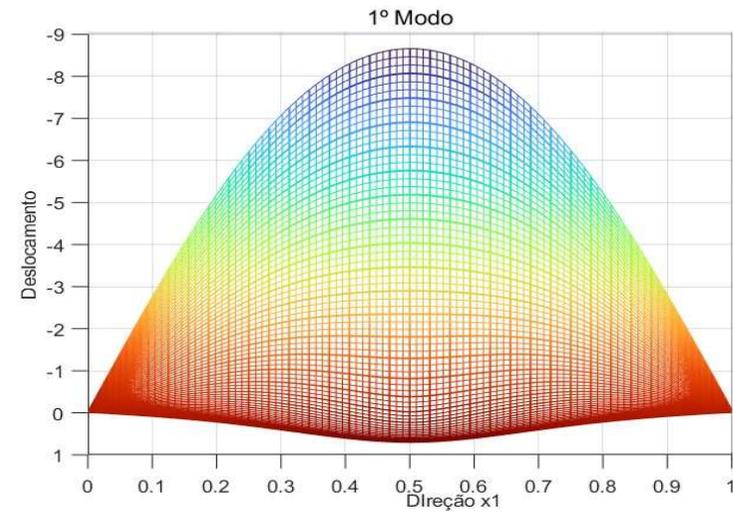


Figura 45- Gráfico do comportamento das cargas de bifurcação da placa da Figura 44 em função da dimensão h dos elementos finitos (elemento finito ACM).



a)



b)

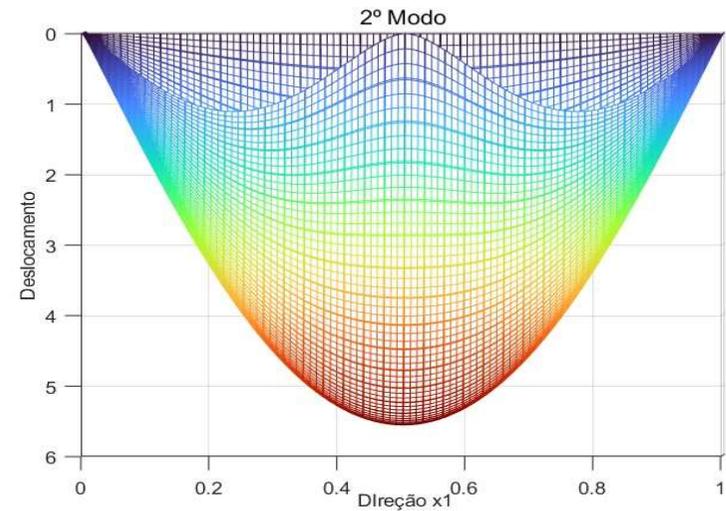
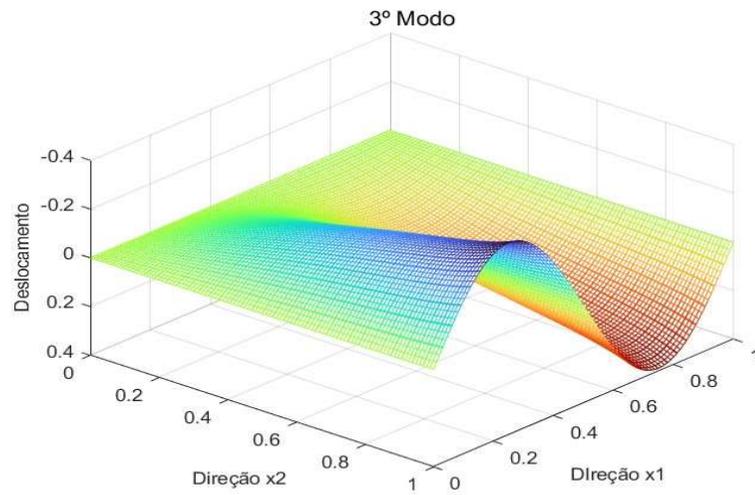
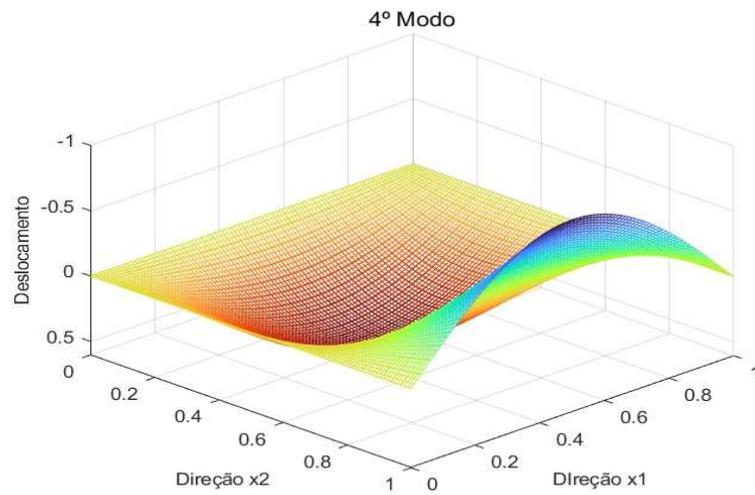
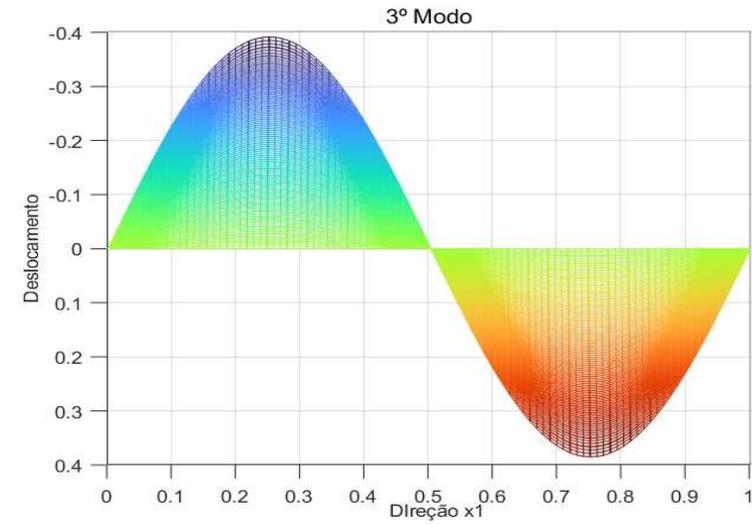


Figura 46- Modos de encurvadura da placa quadrada da Figura 44 com três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecionais segundo  $x_1$  sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 32x32. a) Modo 1  $\lambda_1 = 6.4578 \times 10^2 \text{ kN/m}$  b) Modo 2  $\lambda_2 = 6.7626 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



c)



d)

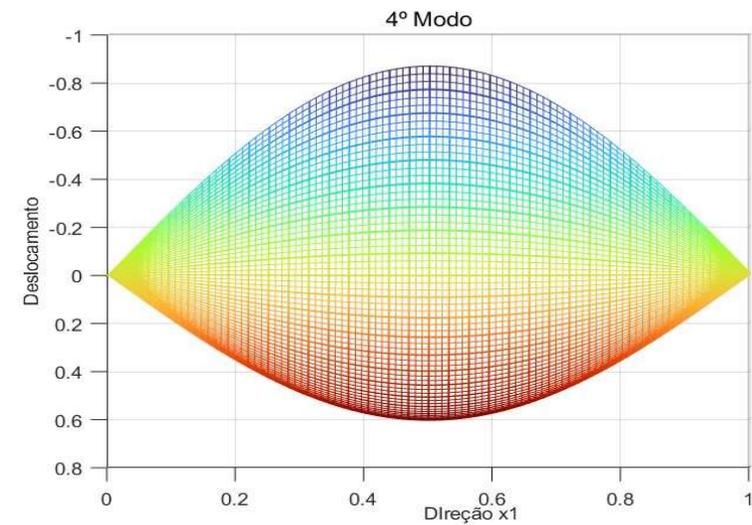
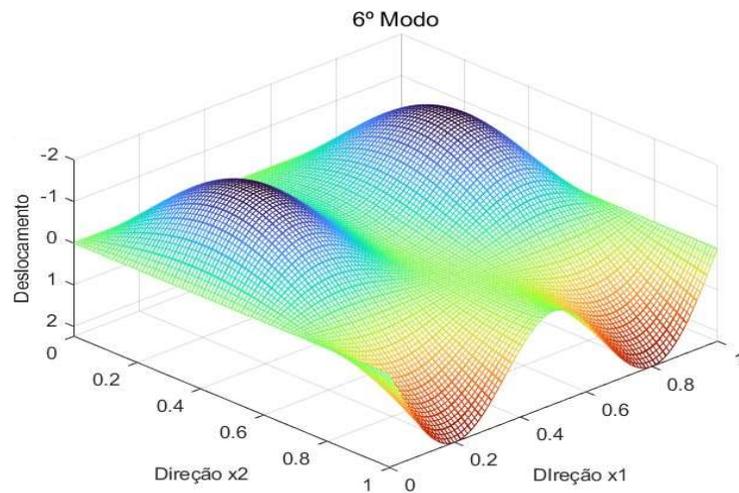
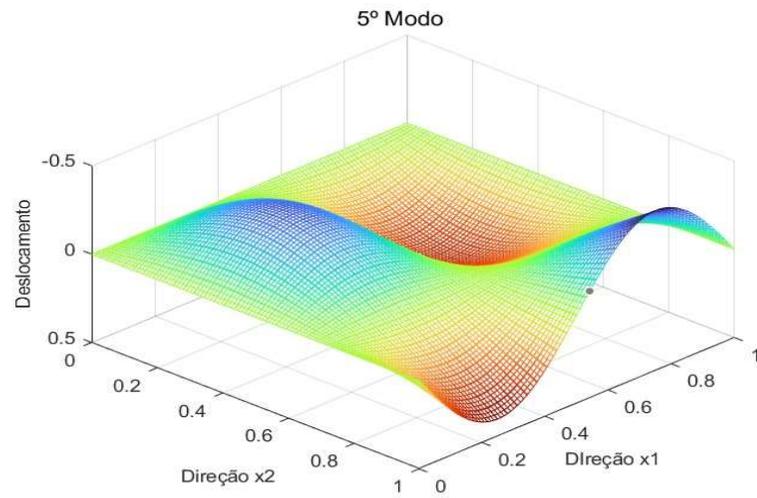
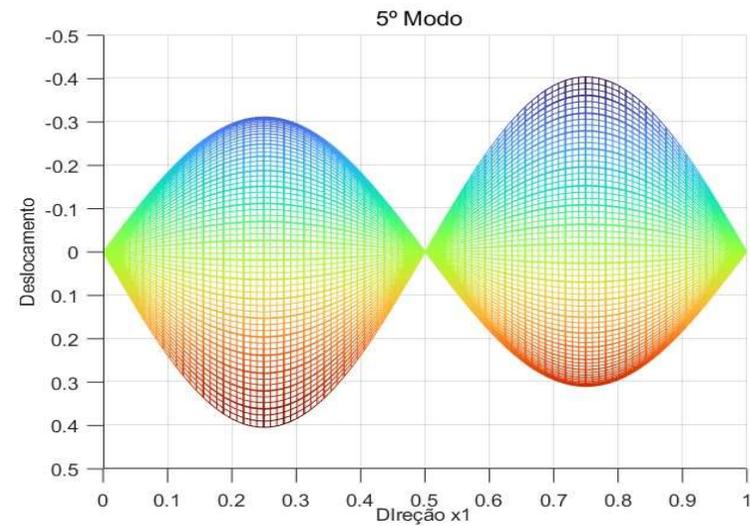


Figura 47- Modos de encurvadura da placa quadrada da Figura 44 com três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecionais segundo x1 sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de 32x32. c) Modo 3  $\lambda_3 = 7.8761 \times 10^2 \text{ kN/m}$  d) Modo 4  $\lambda_4 = 14.2825 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .



e)



f)

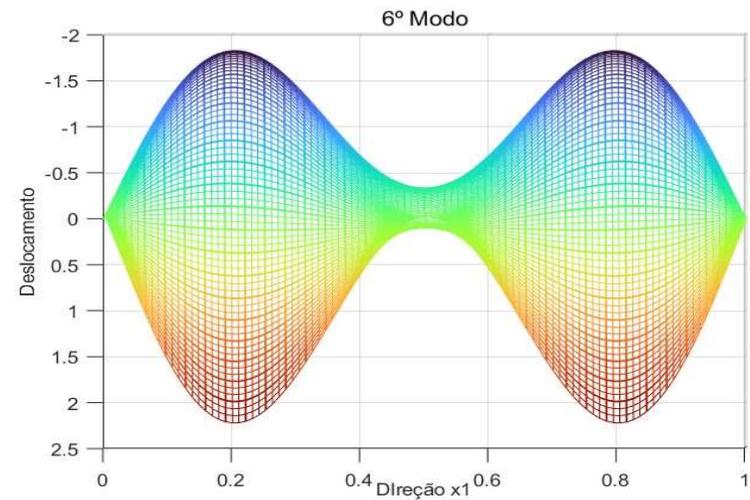


Figura 48- Modos de encurvadura da placa quadrada da Figura 44 com três bordos SA e um livre submetida a esforços de compressão unidirecionais segundo  $x_1$  sem constrangimentos unilaterais, obtidos com uma malha de  $32 \times 32$ . e) Modo 5  $\lambda_5 = 16.1550 \times 10^2 \text{ kN/m}$  d) Modo 6  $\lambda_6 = 23.3050 \times 10^2 \text{ kN/m}$ .

Tabela 12- Resultados das cargas de bifurcação de uma placa retangular com impedimentos unilaterais, três bordos SA e um livre, submetida a esforços de compressão unidirecional, em função do refinamento da malha para o elemento BFS.

Nº Elementos Finitos	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32
h [m]	0,5	0,25	0,125	0,0625	0.3125
$ \log_2(h) $	1	2	3	4	5
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]
	$\times 10^2$				
$\lambda_1$	6.8850	6.5218	6.4755	6.4661	6.4640
$\lambda_2$	7.0668	6.8051	6.7733	6.7668	6.7653
$\lambda_3$	9.4565	7.9311	7.8775	7.8739	7.8736
$\lambda_4$	14.4900	14.3169	14.2980	14.2966	14.2966
$\lambda_5$	17.9195	16.2658	16.1910	16.1855	16.1851
$\lambda_6$	30.5746	23.7906	23.3881	23.3533	23.3505

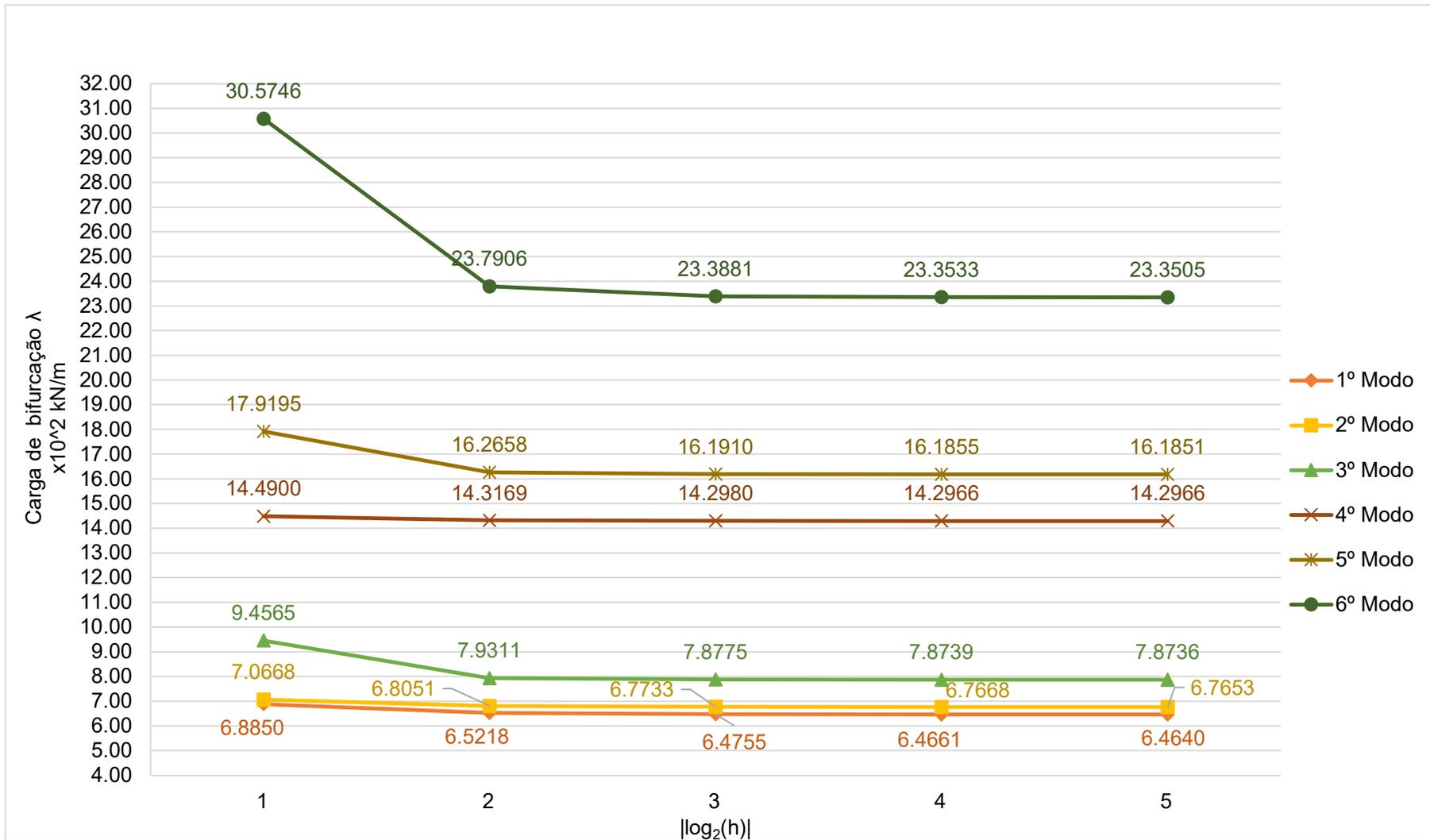


Figura 49- Gráfico do comportamento das cargas de bifurcação da placa da Figura 44 em função da dimensão h dos elementos finitos (elemento finito BFS).

## 5- Conclusões e desenvolvimentos futuros

Nesta dissertação tratou-se da análise pelo método dos elementos finitos de placas finas à encurvadura na presença de obstáculos pontuais de caráter unilateral. Consideraram-se placas retangulares e quadradas com vários tipos de carregamentos de membrana incluindo o carregamento de compressão e o de corte. Usaram-se dois tipos de elementos finitos, o ACM e o BFS, para se obterem as cargas de bifurcação e os modos de instabilidade em cenários de ausência e presença de obstáculos unilaterais pontuais.

Utilizou-se um algoritmo apropriado para a resolução do problema de valores e vetores próprios de complementaridade baseado na extensão do método de Newton- Raphson a sistemas não suaves do tipo complementaridade.

Para cada placa e tipo de carregamento calcularam-se as seis cargas de bifurcação mais baixas e os correspondentes modos de instabilidade, para diferentes refinamentos da malha de elementos finitos

A validação do algoritmo programado foi feita através de comparação de resultados com os casos em que não existem apoios unilaterais e em que as cargas críticas podem ser obtidas analiticamente, estando disponíveis na literatura.

Confirmou-se que a convergência das cargas de bifurcação obtidas com o elemento BFS é monótona por valores superiores à medida que se refina a malha, sem ou com obstáculo, enquanto a convergência é em geral não monótona quando se usa o elemento não conforme ACM.

Confirmou-se também que a carga de bifurcação mais baixa (carga crítica) quando há obstáculos unilaterais nunca é inferior à carga crítica no caso homólogo sem os obstáculos unilaterais, tal como se verifica em colunas e pórticos [3], [12].

A validação permite concluir que o programa desenvolvido no âmbito desta dissertação no ambiente Matlab funciona corretamente e que a introdução de apoios unilaterais conduz ao aumento da carga crítica da placa sempre que pelo menos um dos constrangimentos unilaterais é ativado no modo fundamental.

Como desenvolvimento futuro podemos considerar apoios unilaterais elásticos para simular a encurvadura unilateral de painéis sandwich delaminados ou encurvadura de placas sujeitas a esforços de membrana não uniformes.

## Referências

- [1] D. Brush, B. Almroth, Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill Companies, First Edition, 1975.
- [2] K. A. Tzaros, E. S. Mistakidis, "The unilateral contact buckling problem of continuous beams in the presence of initial geometric imperfections; An analytical approach based on the theory of elastic stability.," *An analytical approach based on the theory of elastic stability. International Journal of Non-Linear Mechanics.*, 46(9), 1265-1274, 2011.
- [3] F. F. Almeida, "Encurvadura Unilateral de Estruturas Reticuladas.," *Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Arquitetura e Georrecursos, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2022.*
- [4] "Eurocode 3: Design of Steel Structures". *NP EN 1993-1-1:2010/A1:2017.*
- [5] J. A. C. Martins, "O princípio dos trabalhos virtuais e o método dos elementos finitos na análise de placas e lajes," CMEST, Lisboa, 1988.
- [6] R. J. Melosh, *Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 1631–1637, 1963.
- [7] F. K. Bogner, R. L. Fox e L. A. Schimt, "The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. Em J. S. Przemieniecki, R. M. Bader, W. F. Bozich, J. R. Johnson e W. J. Mykytow (Editores) Matrix Methods in Structural Mechanics, Proceedings," *of the Conference held at Wright Patterson Air Force Base, Ohio*, 397–443, Air Force Flight Dynamics Laboratory. AFFDL-TR-66-80, October 1965.
- [8] S. Addly, A. Seeger., "A nonsmooth algorithm for cone- constrained eigenvalue problems.," *Computational Optimization and Applications*, 49, 299-318, 2011.
- [9] Q. Liquin, S. Jie, "A nonsmooth version of Newton's method.," *Mathematical Programming*, 58, 353-367, 1993.
- [10] F. Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, USA: McGraw- Hill, 1952.
- [11] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, Theory of elastic stability, McGraw-Hill, 1985.
- [12] J.F.A. Sio, A. Pinto da Costa e F. M. F. Simões, "Buckling of unilaterally constrained columns by complementarity eigenvalue analyses.," *International Journal of Solids and Structures*, 106-107: 46-55, February 2017.
- [13] D. D. Maia, "Comparação de elementos finitos na análise estrutural de lajes finas," *Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Arquitetura e Georrecursos, Instituto Superior Técnico*, 2011.
- [14] C. V. Massalas, G. I. Tzivanidis, and J. T. Katsikadelis., "Buckling of a continuous beam resting on a tensionless elastic foundation.," *Journal of the Franklin institute*, 306(6): 449-455, December 1978.
- [15] E. Stein, P. Wriggers, "Stability of rods with unilateral constraints, a finite element solution," *International Journal of computational fluid Dynamics*, 2(9-10):307-327, October 2007.

## Anexo – Matrizes de rigidez e geométrica elementares dos elementos ACM e BFS

O conteúdo deste anexo é baseado na dissertação de mestrado [13].

### Elemento ACM

Funções de aproximação,  $\Psi^{(e)}$

$$\Psi^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{(a-x)(b-y)(a^2(b-y)(b+2y)+ab^2x-2b^2x^2)}{a^3b^3} \\ -\frac{x(a-x)^2(b-y)}{a^2b} \\ -\frac{y(a-x)(b-y)^2}{ab^2} \\ \frac{x(b-y)(a^2y(b-2y)+3ab^2x-2b^2x^2)}{a^3b^3} \\ \frac{x^2(a-x)(b-y)}{a^2b} \\ -\frac{xy(b-y)^2}{ab^2} \\ \frac{xy(a^2(-(b-2y))(b-y)+3ab^2x-2b^2x^2)}{a^3b^3} \\ \frac{x^2y(a-x)}{a^2b} \\ \frac{xy^2(b-y)}{ab^2} \\ \frac{y(a-x)(3a^2by-2a^2y^2+b^2x(a-2x))}{a^3b^3} \\ -\frac{xy(a-x)^2}{a^2b} \\ \frac{y^2(a-x)(b-y)}{ab^2} \end{pmatrix}^T$$

Matriz  $B^{(e)}$

$$B^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{6(a-2x)(b-y)}{a^3b} & \frac{6(a-x)(b-2y)}{ab^3} & \frac{2((b^2-6yb+6y^2)a^2-6b^2xa+6b^2x^2)}{a^3b^3} \\ -\frac{2(2a-3x)(b-y)}{a^2b} & 0 & -\frac{2(a-3x)(a-x)}{a^2b} \\ 0 & -\frac{2(a-x)(2b-3y)}{ab^2} & -\frac{2(b-3y)(b-y)}{ab^2} \\ -\frac{6(a-2x)(b-y)}{a^3b} & \frac{6x(b-2y)}{ab^3} & -\frac{2((b^2-6yb+6y^2)a^2-6b^2xa+6b^2x^2)}{a^3b^3} \\ -\frac{2(a-3x)(b-y)}{a^2b} & 0 & \frac{2(2a-3x)x}{a^2b} \\ 0 & \frac{6xy-4bx}{ab^2} & \frac{2(b-3y)(b-y)}{ab^2} \\ -\frac{6(a-2x)y}{a^3b} & -\frac{6x(b-2y)}{ab^3} & \frac{2((b^2-6yb+6y^2)a^2-6b^2xa+6b^2x^2)}{a^3b^3} \\ -\frac{2(a-3x)y}{a^2b} & 0 & \frac{6x^2-4ax}{a^2b} \\ 0 & -\frac{2x(b-3y)}{ab^2} & \frac{6y^2-4by}{ab^2} \\ \frac{6(a-2x)y}{a^3b} & -\frac{6(a-x)(b-2y)}{ab^3} & -\frac{2((b^2-6yb+6y^2)a^2-6b^2xa+6b^2x^2)}{a^3b^3} \\ \frac{6xy-4ay}{a^2b} & 0 & \frac{2(a-3x)(a-x)}{a^2b} \\ 0 & -\frac{2(a-x)(b-3y)}{ab^2} & \frac{2(2b-3y)y}{ab^2} \end{pmatrix}^T$$

### Matriz de Rigidez, $\mathbf{K}^{(e)}$

Por simplicidade de representação, divide-se a matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$  em submatrizes tal que

$$\mathbf{K}^{(e)} = D_f \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{2,1}^{(e)T} & \mathbf{K}_{3,1}^{(e)T} & \mathbf{K}_{4,1}^{(e)T} \\ \mathbf{K}_{2,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{2,2}^{(e)} & \mathbf{K}_{3,2}^{(e)T} & \mathbf{K}_{4,2}^{(e)T} \\ \mathbf{K}_{3,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{3,2}^{(e)} & \mathbf{K}_{3,3}^{(e)} & \mathbf{K}_{4,3}^{(e)T} \\ \mathbf{K}_{4,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{4,2}^{(e)} & \mathbf{K}_{4,3}^{(e)} & \mathbf{K}_{4,4}^{(e)} \end{bmatrix}.$$

As referidas submatrizes são, então, as seguintes:

$$\mathbf{K}_{1,1}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{2(10a^4+b^2(7-2\nu)a^2+10b^4)}{5a^3b^3} & -\frac{(4\nu+1)a^2+10b^2}{5a^2b} & -\frac{10a^2+b^2(4\nu+1)}{5ab^2} \\ -\frac{(4\nu+1)a^2+10b^2}{5a^2b} & \frac{4(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab} & \nu \\ -\frac{10a^2+b^2(4\nu+1)}{5ab^2} & \nu & \frac{4(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,1}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{2(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2-10b^4)}{5a^3b^3} & \frac{\frac{10b^2}{a^2}-\nu+1}{5b} & -\frac{\frac{5a^2}{b^2}+4\nu+1}{5a} \\ -\frac{\frac{10b^2}{a^2}+\nu-1}{5b} & \frac{(\nu-1)a^2+10b^2}{15ab} & 0 \\ -\frac{\frac{5a^2}{b^2}+4\nu+1}{5a} & 0 & \frac{2(5a^2+b^2(\nu-1))}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,2}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{2(10a^4+b^2(7-2\nu)a^2+10b^4)}{5a^3b^3} & \frac{\frac{10b^2}{a^2}+4\nu+1}{5b} & -\frac{10a^2+b^2(4\nu+1)}{5ab^2} \\ \frac{\frac{10b^2}{a^2}+4\nu+1}{5b} & \frac{4(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab} & -\nu \\ -\frac{10a^2+b^2(4\nu+1)}{5ab^2} & -\nu & \frac{4(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,1}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{2(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3} & \frac{\frac{5b^2}{a^2}+\nu-1}{5b} & \frac{\frac{5a^2}{b^2}+\nu-1}{5a} \\ -\frac{\frac{5b^2}{a^2}-\nu+1}{5b} & \frac{5b^2-a^2(\nu-1)}{15ab} & 0 \\ -\frac{\frac{5a^2}{b^2}-\nu+1}{5a} & 0 & \frac{5a^2-b^2(\nu-1)}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,2}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{2(-10a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3} & \frac{\frac{5b^2}{a^2}-4\nu-1}{5b} & \frac{\frac{10a^2}{b^2}-\nu+1}{5a} \\ \frac{\frac{5b^2}{a^2}-4\nu-1}{5b} & \frac{2(2(\nu-1)a^2+5b^2)}{15ab} & 0 \\ -\frac{10a^2+b^2(\nu-1)}{5ab^2} & 0 & \frac{10a^2+b^2(\nu-1)}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,3}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{2(10a^4+b^2(7-2\nu)a^2+10b^4)}{5a^3b^3} & \frac{\frac{10b^2}{a^2}+4\nu+1}{5b} & \frac{\frac{10a^2}{b^2}+4\nu+1}{5a} \\ \frac{\frac{10b^2}{a^2}+4\nu+1}{5b} & \frac{4(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab} & \nu \\ \frac{\frac{10a^2}{b^2}+4\nu+1}{5a} & \nu & \frac{4(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{4,1}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{2(-10a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3} & \frac{-\frac{5b^2}{a^2}+4\nu+1}{5b} & \frac{\frac{10a^2}{b^2}-\nu+1}{5a} \\ \frac{-\frac{5b^2}{a^2}+4\nu+1}{5b} & \frac{2(2(\nu-1)a^2+5b^2)}{15ab} & 0 \\ \frac{-\frac{10a^2}{b^2}+\nu-1}{5a} & 0 & \frac{10a^2+b^2(\nu-1)}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{4,2}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{2(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2+5b^4)}{5a^3b^3} & \frac{-\frac{5b^2}{a^2}-\nu+1}{5b} & \frac{\frac{5a^2}{b^2}+\nu-1}{5a} \\ \frac{\frac{5b^2}{a^2}+\nu-1}{5b} & \frac{5b^2-a^2(\nu-1)}{15ab} & 0 \\ \frac{-\frac{5a^2}{b^2}-\nu+1}{5a} & 0 & \frac{5a^2-b^2(\nu-1)}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{4,3}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{2(5a^4+b^2(2\nu-7)a^2-10b^4)}{5a^3b^3} & \frac{-\frac{10b^2}{a^2}+\nu-1}{5b} & \frac{\frac{5a^2}{b^2}-4\nu-1}{5a} \\ \frac{\frac{10b^2}{a^2}-\nu+1}{5b} & \frac{(\nu-1)a^2+10b^2}{15ab} & 0 \\ \frac{\frac{5a^2}{b^2}-4\nu-1}{5a} & 0 & \frac{2(5a^2+2b^2(\nu-1))}{15ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{4,4}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{2(10a^4+b^2(7-2\nu)a^2+10b^4)}{5a^3b^3} & -\frac{(4\nu+1)a^2+10b^2}{5a^2b} & \frac{\frac{10a^2}{b^2}+4\nu+1}{5a} \\ -\frac{(4\nu+1)a^2+10b^2}{5a^2b} & \frac{4(5b^2-a^2(\nu-1))}{15ab} & -\nu \\ \frac{\frac{10a^2}{b^2}+4\nu+1}{5a} & -\nu & \frac{4(5a^2-b^2(\nu-1))}{15ab} \end{bmatrix}$$

### Matrizes $M_{\alpha\beta}^{(e)}$

O que foi dito em relação à divisão da matriz  $K^{(e)}$  em submatrizes é igualmente válido para todas as matrizes  $M_{\alpha\beta}^{(e)}$ . Assim tem-se

$$M_{\alpha\beta}^{(e)} = \begin{bmatrix} M_{\alpha\beta}^{(1,1)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(2,1)}(e)T & M_{\alpha\beta}^{(3,1)}(e)T & M_{\alpha\beta}^{(4,1)}(e)T \\ M_{\alpha\beta}^{(2,1)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(2,2)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(3,2)}(e)T & M_{\alpha\beta}^{(4,2)}(e)T \\ M_{\alpha\beta}^{(3,1)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(3,2)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(3,3)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(4,3)}(e)T \\ M_{\alpha\beta}^{(4,1)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(4,2)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(4,3)}(e) & M_{\alpha\beta}^{(4,4)}(e) \end{bmatrix}$$

### Matriz $M_{00}^{(e)}$

$$M_{00}^{(1,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{1727ab}{12600} & -\frac{461a^2b}{25200} & -\frac{461ab^2}{25200} \\ -\frac{461a^2b}{25200} & \frac{a^3b}{315} & \frac{a^2b^2}{400} \\ -\frac{461ab^2}{25200} & \frac{a^2b^2}{400} & \frac{ab^3}{315} \end{bmatrix} \quad M_{00}^{(2,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{613ab}{12600} & -\frac{137a^2b}{12600} & -\frac{199ab^2}{25200} \\ \frac{137a^2b}{12600} & -\frac{a^3b}{420} & -\frac{1}{600}a^2b^2 \\ -\frac{199ab^2}{25200} & \frac{a^2b^2}{600} & \frac{ab^3}{630} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(2,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{1727ab}{12600} & \frac{461a^2b}{25200} & -\frac{461ab^2}{25200} \\ \frac{461a^2b}{25200} & \frac{a^3b}{315} & -\frac{1}{400}a^2b^2 \\ -\frac{461ab^2}{25200} & -\frac{1}{400}a^2b^2 & \frac{ab^3}{315} \end{bmatrix} \quad M_{00}^{(3,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{197ab}{12600} & -\frac{29a^2b}{6300} & -\frac{29ab^2}{6300} \\ \frac{29a^2b}{6300} & -\frac{a^3b}{840} & -\frac{1}{900}a^2b^2 \\ \frac{29ab^2}{6300} & -\frac{1}{900}a^2b^2 & -\frac{ab^3}{840} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(3,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{613ab}{12600} & \frac{199a^2b}{25200} & -\frac{137ab^2}{12600} \\ \frac{199a^2b}{25200} & \frac{a^3b}{630} & -\frac{1}{600}a^2b^2 \\ \frac{137ab^2}{12600} & \frac{a^2b^2}{600} & -\frac{ab^3}{420} \end{bmatrix} \quad M_{00}^{(3,3)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{1727ab}{12600} & \frac{461a^2b}{25200} & \frac{461ab^2}{25200} \\ \frac{461a^2b}{25200} & \frac{a^3b}{315} & \frac{a^2b^2}{400} \\ \frac{461ab^2}{25200} & \frac{a^2b^2}{400} & \frac{ab^3}{315} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(4,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{613ab}{12600} & -\frac{199a^2b}{25200} & -\frac{137ab^2}{12600} \\ -\frac{199a^2b}{25200} & \frac{a^3b}{630} & \frac{a^2b^2}{600} \\ \frac{137ab^2}{12600} & -\frac{1}{600}a^2b^2 & -\frac{ab^3}{420} \end{bmatrix} \quad M_{00}^{(4,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{197ab}{12600} & \frac{29a^2b}{6300} & -\frac{29ab^2}{6300} \\ -\frac{29a^2b}{6300} & -\frac{a^3b}{840} & \frac{a^2b^2}{900} \\ \frac{29ab^2}{6300} & \frac{a^2b^2}{900} & -\frac{ab^3}{840} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(4,3)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{613ab}{12600} & \frac{137a^2b}{12600} & \frac{199ab^2}{25200} \\ -\frac{137a^2b}{12600} & -\frac{a^3b}{420} & -\frac{1}{600}a^2b^2 \\ \frac{199ab^2}{25200} & \frac{a^2b^2}{600} & \frac{ab^3}{630} \end{bmatrix} \quad M_{00}^{(4,4)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{1727ab}{12600} & -\frac{461a^2b}{25200} & \frac{461ab^2}{25200} \\ -\frac{461a^2b}{25200} & \frac{a^3b}{315} & -\frac{1}{400}a^2b^2 \\ \frac{461ab^2}{25200} & -\frac{1}{400}a^2b^2 & \frac{ab^3}{315} \end{bmatrix}$$

### Matriz $M_{11}^{(e)}$

$$M_{11}^{(1,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{46b}{105a} & -\frac{b}{30} & -\frac{11b^2}{210a} \\ -\frac{b}{30} & \frac{2ab}{45} & 0 \\ -\frac{11b^2}{210a} & 0 & \frac{b^3}{105a} \end{bmatrix} \quad M_{11}^{(2,1)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{46b}{105a} & \frac{b}{30} & \frac{11b^2}{210a} \\ -\frac{b}{30} & -\frac{ab}{90} & 0 \\ \frac{11b^2}{210a} & 0 & -\frac{b^3}{105a} \end{bmatrix}$$

$$M_{11}^{(2,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{46b}{105a} & \frac{b}{30} & -\frac{11b^2}{210a} \\ \frac{b}{30} & \frac{2ab}{45} & 0 \\ -\frac{11b^2}{210a} & 0 & \frac{b^3}{105a} \end{bmatrix} \quad M_{11}^{(3,1)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{17b}{105a} & \frac{b}{60} & \frac{13b^2}{420a} \\ -\frac{b}{60} & -\frac{ab}{180} & 0 \\ -\frac{13b^2}{420a} & 0 & \frac{b^3}{140a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(3,2)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{17b}{105a} & \frac{b}{60} & -\frac{13b^2}{420a} \\ \frac{b}{60} & \frac{ab}{45} & 0 \\ \frac{13b^2}{420a} & 0 & -\frac{b^3}{140a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(3,3)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{46b}{105a} & \frac{b}{30} & \frac{11b^2}{210a} \\ \frac{b}{30} & \frac{2ab}{45} & 0 \\ \frac{11b^2}{210a} & 0 & \frac{b^3}{105a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(4,1)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{17b}{105a} & -\frac{b}{60} & -\frac{13b^2}{420a} \\ -\frac{b}{60} & \frac{ab}{45} & 0 \\ \frac{13b^2}{420a} & 0 & -\frac{b^3}{140a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(4,2)(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{17b}{105a} & -\frac{b}{60} & \frac{13b^2}{420a} \\ \frac{b}{60} & -\frac{ab}{180} & 0 \\ -\frac{13b^2}{420a} & 0 & \frac{b^3}{140a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(4,3)(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{46b}{105a} & -\frac{b}{30} & -\frac{11b^2}{210a} \\ \frac{b}{30} & -\frac{ab}{90} & 0 \\ \frac{11b^2}{210a} & 0 & -\frac{b^3}{105a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(4,4)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{46b}{105a} & -\frac{b}{30} & \frac{11b^2}{210a} \\ -\frac{b}{30} & \frac{2ab}{45} & 0 \\ \frac{11b^2}{210a} & 0 & \frac{b^3}{105a} \end{bmatrix}$$

Matriz  $\mathbf{M}_{22}^{(e)}$

$$\mathbf{M}_{22}^{(1,1)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{46a}{105b} & -\frac{11a^2}{210b} & -\frac{a}{30} \\ -\frac{11a^2}{210b} & \frac{a^3}{105b} & 0 \\ -\frac{a}{30} & 0 & \frac{2ab}{45} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(2,1)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{17a}{105b} & -\frac{13a^2}{420b} & -\frac{a}{60} \\ \frac{13a^2}{420b} & -\frac{a^3}{140b} & 0 \\ -\frac{a}{60} & 0 & \frac{ab}{45} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(2,2)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{46a}{105b} & \frac{11a^2}{210b} & -\frac{a}{30} \\ \frac{11a^2}{210b} & \frac{a^3}{105b} & 0 \\ -\frac{a}{30} & 0 & \frac{2ab}{45} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(3,1)(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{17a}{105b} & \frac{13a^2}{420b} & \frac{a}{60} \\ -\frac{13a^2}{420b} & \frac{a^3}{140b} & 0 \\ -\frac{a}{60} & 0 & -\frac{ab}{180} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(3,2)(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{46a}{105b} & -\frac{11a^2}{210b} & \frac{a}{30} \\ -\frac{11a^2}{210b} & -\frac{a^3}{105b} & 0 \\ -\frac{a}{30} & 0 & -\frac{ab}{90} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(3,3)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{46a}{105b} & \frac{11a^2}{210b} & \frac{a}{30} \\ \frac{11a^2}{210b} & \frac{a^3}{105b} & 0 \\ \frac{a}{30} & 0 & \frac{2ab}{45} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(4,1)(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{46a}{105b} & \frac{11a^2}{210b} & \frac{a}{30} \\ \frac{11a^2}{210b} & -\frac{a^3}{105b} & 0 \\ -\frac{a}{30} & 0 & -\frac{ab}{90} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(4,2)(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{17a}{105b} & -\frac{13a^2}{420b} & \frac{a}{60} \\ \frac{13a^2}{420b} & \frac{a^3}{140b} & 0 \\ -\frac{a}{60} & 0 & -\frac{ab}{180} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(4,3)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{17a}{105b} & \frac{13a^2}{420b} & \frac{a}{60} \\ -\frac{13a^2}{420b} & -\frac{a^3}{140b} & 0 \\ \frac{a}{60} & 0 & \frac{ab}{45} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(4,4)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{46a}{105b} & -\frac{11a^2}{210b} & \frac{a}{30} \\ -\frac{11a^2}{210b} & \frac{a^3}{105b} & 0 \\ \frac{a}{30} & 0 & \frac{2ab}{45} \end{bmatrix}$$

Matriz  $\mathbf{M}_{12}^{(e)}$

$$\mathbf{M}_{12}^{(1,1)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ab}{72} \\ 0 & \frac{ab}{72} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(2,1)(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{b}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{ab}{72} \\ \frac{b}{10} & -\frac{ab}{72} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{12}^{(2,2)}(e) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ab}{72} \\ 0 & \frac{ab}{72} & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{12}^{(3,1)}(e) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{10} & \frac{b}{10} \\ -\frac{a}{10} & \frac{a^2}{60} & \frac{ab}{72} \\ -\frac{b}{10} & \frac{ab}{72} & \frac{b^2}{60} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_{12}^{(3,2)}(e) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ \frac{a}{10} & 0 & -\frac{ab}{72} \\ 0 & -\frac{ab}{72} & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{12}^{(3,3)}(e) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ab}{72} \\ 0 & \frac{ab}{72} & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_{12}^{(4,1)}(e) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ \frac{a}{10} & 0 & -\frac{ab}{72} \\ 0 & -\frac{ab}{72} & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{12}^{(4,2)}(e) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{a}{10} & -\frac{b}{10} \\ -\frac{a}{10} & -\frac{a^2}{60} & \frac{ab}{72} \\ \frac{b}{10} & \frac{ab}{72} & -\frac{b^2}{60} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_{12}^{(4,3)}(e) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{ab}{72} \\ -\frac{b}{10} & -\frac{ab}{72} & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{12}^{(4,4)}(e) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ab}{72} \\ 0 & \frac{ab}{72} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## Elemento BFS

Funções de aproximação,  $\Psi^{(e)}$

$$\Psi^{(e)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(a-x)^2(a+2x)(b-y)^2(b+2y)}{a^3b^3} \\ - \frac{x(a-x)^2(b-y)^2(b+2y)}{a^2b^3} \\ - \frac{y(a-x)^2(a+2x)(b-y)^2}{a^3b^2} \\ \frac{xy(a-x)^2(b-y)^2}{a^2b^2} \\ \frac{x^2(3a-2x)(b-y)^2(b+2y)}{a^3b^3} \\ \frac{x^2(a-x)(b-y)^2(b+2y)}{a^2b^3} \\ - \frac{x^2y(3a-2x)(b-y)^2}{a^3b^2} \\ - \frac{x^2y(a-x)(b-y)^2}{a^2b^2} \\ \frac{x^2y^2(3a-2x)(3b-2y)}{a^3b^3} \\ \frac{x^2y^2(a-x)(3b-2y)}{a^2b^3} \\ \frac{x^2y^2(3a-2x)(b-y)}{a^3b^2} \\ \frac{x^2y^2(a-x)(b-y)}{a^2b^2} \\ \frac{y^2(a-x)^2(a+2x)(3b-2y)}{a^3b^3} \\ - \frac{xy^2(a-x)^2(3b-2y)}{a^2b^3} \\ \frac{y^2(a-x)^2(a+2x)(b-y)}{a^3b^2} \\ - \frac{xy^2(a-x)^2(b-y)}{a^2b^2} \end{array} \right\}^T$$

Matriz  $\mathbf{B}^{(e)}$

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{6(a-2x)(b-y)^2(b+2y)}{a^3b^3} & \frac{6(a-x)^2(a+2x)(b-2y)}{a^3b^3} & -\frac{72(a-x)x(b-y)y}{a^3b^3} \\ -\frac{2(2a-3x)(b-y)^2(b+2y)}{a^2b^3} & -\frac{6(a-x)^2x(b-2y)}{a^2b^3} & -\frac{12(a-3x)(a-x)(b-y)y}{a^2b^3} \\ \frac{6(a-2x)(b-y)^2y}{a^3b^2} & -\frac{2(a-x)^2(a+2x)(2b-3y)}{a^3b^2} & -\frac{12(a-x)x(b-3y)(b-y)}{a^3b^2} \\ \frac{2(2a-3x)(b-y)^2y}{a^2b^2} & \frac{2(a-x)^2x(2b-3y)}{a^2b^2} & -\frac{2(a-3x)(a-x)(b-3y)(b-y)}{a^2b^2} \\ -\frac{6(a-2x)(b-y)^2(b+2y)}{a^3b^3} & \frac{6(3a-2x)x^2(b-2y)}{a^3b^3} & \frac{72(a-x)x(b-y)y}{a^3b^3} \\ -\frac{2(a-3x)(b-y)^2(b+2y)}{a^2b^3} & \frac{6(a-x)x^2(b-2y)}{a^2b^3} & \frac{12(2a-3x)x(b-y)y}{a^2b^3} \\ \frac{6(a-2x)(b-y)^2y}{a^3b^2} & -\frac{2(3a-2x)x^2(2b-3y)}{a^3b^2} & \frac{12(a-x)x(b-3y)(b-y)}{a^3b^2} \\ \frac{2(a-3x)(b-y)^2y}{a^2b^2} & -\frac{2(a-x)x^2(2b-3y)}{a^2b^2} & \frac{2(2a-3x)x(b-3y)(b-y)}{a^2b^2} \\ -\frac{6(a-2x)(3b-2y)y^2}{a^3b^3} & -\frac{6(3a-2x)x^2(b-2y)}{a^3b^3} & -\frac{72(a-x)x(b-y)y}{a^3b^3} \\ -\frac{2(a-3x)(3b-2y)y^2}{a^2b^3} & -\frac{6(a-x)x^2(b-2y)}{a^2b^3} & -\frac{12(2a-3x)x(b-y)y}{a^2b^3} \\ \frac{6(a-2x)(b-y)y^2}{a^3b^2} & -\frac{2(3a-2x)x^2(b-3y)}{a^3b^2} & -\frac{12(a-x)x(2b-3y)y}{a^3b^2} \\ \frac{2(a-3x)(b-y)y^2}{a^2b^2} & -\frac{2(a-x)x^2(b-3y)}{a^2b^2} & -\frac{2(2a-3x)x(2b-3y)y}{a^2b^2} \\ \frac{6(a-2x)(3b-2y)y^2}{a^3b^3} & -\frac{6(a-x)^2(a+2x)(b-2y)}{a^3b^3} & \frac{72(a-x)x(b-y)y}{a^3b^3} \\ \frac{2(2a-3x)(3b-2y)y^2}{a^2b^3} & \frac{6(a-x)^2x(b-2y)}{a^2b^3} & \frac{12(a-3x)(a-x)(b-y)y}{a^2b^3} \\ \frac{6(a-2x)(b-y)y^2}{a^3b^2} & -\frac{2(a-x)^2(a+2x)(b-3y)}{a^3b^2} & \frac{12(a-x)x(2b-3y)y}{a^3b^2} \\ -\frac{2(2a-3x)(b-y)y^2}{a^2b^2} & \frac{2(a-x)^2x(b-3y)}{a^2b^2} & \frac{2(a-3x)(a-x)(2b-3y)y}{a^2b^2} \end{bmatrix}^T$$

Matriz de rigidez,  $\mathbf{K}^{(e)}$

Analogamente ao que se fez para o elemento ACM, divide-se a matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$  em submatrizes tal que

$$\mathbf{K}^{(e)} = D_f \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{2,1}^{(e)T} & \mathbf{K}_{3,1}^{(e)T} & \mathbf{K}_{4,1}^{(e)T} \\ \mathbf{K}_{2,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{2,2}^{(e)} & \mathbf{K}_{3,2}^{(e)T} & \mathbf{K}_{4,2}^{(e)T} \\ \mathbf{K}_{3,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{3,2}^{(e)} & \mathbf{K}_{3,3}^{(e)} & \mathbf{K}_{4,3}^{(e)T} \\ \mathbf{K}_{4,1}^{(e)} & \mathbf{K}_{4,2}^{(e)} & \mathbf{K}_{4,3}^{(e)} & \mathbf{K}_{4,4}^{(e)} \end{bmatrix}.$$

Matrizes  $\mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(e)}$

O que foi dito em relação à divisão da matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$  em submatrizes, é igualmente válido para todas as matrizes  $\mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(e)}$ . Assim tem-se

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(1,1)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(2,1)(e)T} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(3,1)(e)T} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(4,1)(e)T} \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(2,1)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(2,2)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(3,2)(e)T} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(4,2)(e)T} \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(3,1)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(3,2)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(3,3)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(4,3)(e)T} \\ \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(4,1)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(4,2)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(4,3)(e)} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(4,4)(e)} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{K}_{1,1}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{12(65a^4+42b^2a^2+65b^4)}{175a^2b^3} & -\frac{2(55a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+195b^4)}{175a^2b^3} & -\frac{2(195a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+55b^4)}{175a^2b^2} & -\frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} + 70\nu + 7 \right) \\ -\frac{2(35a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+195b^4)}{175a^2b^3} & \frac{4a^3}{35b^3} + \frac{8a}{25b} + \frac{52b}{35a} & \frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} + 420\nu + 7 \right) & -\frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} + 70\nu + 7 \right) \\ -\frac{2(195a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+55b^4)}{175a^2b^2} & \frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} + 420\nu + 7 \right) & \frac{4b^3}{35a^2} + \frac{8b}{25a} + \frac{52a}{35b} & -\frac{2(55a^4+7b^2(5\nu+1)a^2+15b^4)}{525ab^2} \\ \frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} + 70\nu + 7 \right) & -\frac{2(15a^4+7b^2(5\nu+1)a^2+55b^4)}{525ab^2} & -\frac{2(55a^4+7b^2(5\nu+1)a^2+15b^4)}{525ab^2} & \frac{4a^3}{105b} + \frac{8ab}{225} + \frac{4b^3}{105a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,1}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{6(45a^4-84b^2a^2-130b^4)}{175a^3b^3} & \frac{39a^4}{a^2} + \frac{42b^2-65a^2}{175b^3} & -\frac{135a^4+42b^2(5\nu+1)a^2+110b^4}{175a^3b^2} & \frac{1}{350} \left( \frac{65a^2}{b^2} - 35\nu - 7 - \frac{110b^2}{a^2} \right) \\ \frac{68(a^4-6b^4)}{175b^3} - \frac{42b^2}{a^2} & -\frac{3a^2}{35b^3} - \frac{2a}{25b} + \frac{26b}{35a} & \frac{1}{350} \left( \frac{65a^2}{b^2} - 35\nu - 7 - \frac{110b^2}{a^2} \right) & \frac{36a^3}{70b^2} + \frac{1}{150} (5\nu + 1)a - \frac{11b^2}{105a} \\ -\frac{135a^4+42b^2(5\nu+1)a^2+110b^4}{175a^3b^2} & \frac{1}{350} \left( \frac{65a^2}{b^2} - 35\nu - 7 - \frac{110b^2}{a^2} \right) & -\frac{4b^3}{35a^2} - \frac{8b}{25a} + \frac{18a}{35b} & -\frac{a^3}{35b} - \frac{2ab}{225} + \frac{2b^3}{105a} \\ \frac{1}{350} \left( -\frac{65a^2}{b^2} + 35\nu + 7 + \frac{110b^2}{a^2} \right) & \frac{3a^2}{70b^2} + \frac{1}{150} (5\nu + 1)a - \frac{11b^2}{105a} & -\frac{30a^4}{a^2} - \frac{14b^2+65a^2}{525b} & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,2}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{12(65a^4+42b^2a^2+65b^4)}{175a^3b^3} & \frac{2(55a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+195b^4)}{175a^2b^3} & -\frac{2(195a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+55b^4)}{175a^2b^2} & \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 70\nu - 7 \right) \\ \frac{2(55a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+195b^4)}{175a^2b^3} & \frac{4a^3}{35b^3} + \frac{8a}{25b} + \frac{52b}{35a} & -\frac{2(195a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+55b^4)}{175a^2b^2} & \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 70\nu - 7 \right) \\ -\frac{2(195a^4+21b^2(5\nu+1)a^2+55b^4)}{175a^2b^2} & \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 7(60\nu + 1) \right) & \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 7(60\nu + 1) \right) & -\frac{2(15a^4+7b^2(5\nu+1)a^2+55a^2)}{525ab^2} \\ \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 70\nu - 7 \right) & -\frac{2(15a^4+7b^2(5\nu+1)a^2+55b^4)}{525ab^2} & -\frac{2(15a^4+7b^2(5\nu+1)a^2+55a^2)}{525ab^2} & \frac{4a^3}{105b} + \frac{8ab}{225} + \frac{4b^3}{105a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,1}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{18(15a^4 - 28b^2a^2 + 15b^4)}{175a^2b^3} & \frac{135b^4 - 42b^2 + 65a^2}{a^2} & \frac{135a^4 - 42a^2 + 65b^2}{b^2} & \frac{1}{350} \left( 7 - \frac{65(a^4 + b^4)}{a^2b^2} \right) \\ -\frac{135b^4}{a^2} + 42b^2 - 65a^2 & \frac{3a^3}{35b^3} + \frac{2a}{25b} + \frac{9b}{35a} & \frac{1}{350} \left( 65 \frac{(a^4 + b^4)}{a^2b^2} - 7 \right) & -\frac{45a^4}{b^2} + 7a^2 + 65b^2 \\ -\frac{135a^4}{b^2} + 42a^2 - 65b^2 & \frac{1}{350} \left( 65 \frac{(a^4 + b^4)}{a^2b^2} - 7 \right) & \frac{3b^3}{35a^3} + \frac{2b}{25a} + \frac{9a}{35b} & -\frac{45b^4}{a^2} + 7b^2 + 65a^2 \\ \frac{1}{350} \left( 7 - \frac{65(a^4 + b^4)}{a^2b^2} \right) & \frac{45a^4}{a^2} + 7a^2 + 65b^2 & \frac{45b^4}{b^2} + 7b^2 + 65a^2 & -\frac{a^3}{70b} + \frac{ba}{45b} - \frac{b^3}{70a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,2}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{6(130a^4 + 84b^2a^2 - 45b^4)}{175a^2b^3} & -\frac{110a^4 + 42b^2(5\nu + 1)a^2 - 135b^4}{175a^2b^3} & \frac{350a^4 + 42a^2 - 65b^2}{b^2} & \frac{1}{350} \left( \frac{110a^2}{b^2} + 35\nu + 7 - \frac{65b^2}{a^2} \right) \\ -\frac{110a^4 + 42b^2(5\nu + 1)a^2 - 135b^4}{175a^2b^3} & -\frac{390a^4 - 42a^2 + 65b^2}{175a^3} & -\frac{110a^4 + 42b^2(5\nu + 1)a^2 - 135b^4}{175a^2b^3} & \frac{30a^4}{b^2} + 14a^2 - 65b^2 \\ -\frac{390a^4 - 42a^2 + 65b^2}{175a^3} & \frac{1}{350} \left( -\frac{110a^2}{b^2} - 35\nu - 7 + \frac{65b^2}{a^2} \right) & -\frac{30a^4}{b^2} - 14a^2 + 65b^2 & \frac{110a^4 - 7b^2(5\nu + 1)a^2 - 45b^4}{1050a^2b} \\ \frac{1}{350} \left( -\frac{110a^2}{b^2} - 35\nu - 7 + \frac{65b^2}{a^2} \right) & -\frac{110a^4 + 42b^2(5\nu + 1)a^2 - 135b^4}{175a^2b^3} & -\frac{110a^4 + 42b^2(5\nu + 1)a^2 - 135b^4}{175a^2b^3} & \frac{1}{350} \left( \frac{110a^2}{b^2} + 35\nu + 7 - \frac{65b^2}{a^2} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3,3}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{12(65a^4 + 42b^2a^2 + 65b^4)}{175a^2b^3} & \frac{2(55a^4 + 21b^2(5\nu + 1)a^2 + 105b^4)}{175a^2b^3} & \frac{2(105a^4 + 21b^2(5\nu + 1)a^2 + 55b^4)}{175a^2b^2} & \frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4 + b^4)}{a^2b^2} + 70\nu + 7 \right) \\ \frac{2(55a^4 + 21b^2(5\nu + 1)a^2 + 105b^4)}{175a^2b^3} & \frac{4a^3}{35b^3} + \frac{8a}{25b} + \frac{52b}{35a} & \frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4 + b^4)}{a^2b^2} + 420\nu + 7 \right) & \frac{2 \left( \frac{15a^4}{b^2} + 7(5\nu + 1)b^2 + 55a^2 \right)}{525b} \\ \frac{2(105a^4 + 21b^2(5\nu + 1)a^2 + 55b^4)}{175a^2b^2} & \frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4 + b^4)}{a^2b^2} + 420\nu + 7 \right) & \frac{4a^3}{35a^3} + \frac{8b}{25a} + \frac{52a}{35b} & \frac{2 \left( \frac{15b^4}{a^2} + 7(5\nu + 1)b^2 + 55a^2 \right)}{525b} \\ \frac{1}{350} \left( \frac{110(a^4 + b^4)}{a^2b^2} + 70\nu + 7 \right) & \frac{2 \left( \frac{15a^4}{b^2} + 7(5\nu + 1)b^2 + 55a^2 \right)}{525b} & \frac{2 \left( \frac{15b^4}{a^2} + 7(5\nu + 1)b^2 + 55a^2 \right)}{525b} & \frac{4a^3}{105b} + \frac{8ba}{225} + \frac{4b^3}{105a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{4,1}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{6(130a^4+84b^2a^2-45b^4)}{175a^3b^3} & \frac{110a^4+42b^2(5\nu+1)a^2-135b^4}{175a^2b^3} & \frac{390a^4}{a^2} - \frac{42a^2-65b^2}{175a^3} & \frac{1}{350} \left( -\frac{110a^2}{b^2} - 35\nu - 7 + \frac{65b^2}{a^2} \right) \\ \frac{110a^4+42b^2(5\nu+1)a^2-135b^4}{175a^2b^3} & -\frac{4a^3}{35b^3} - \frac{8a}{25b} + \frac{18b}{35a} & \frac{1}{350} \left( -\frac{110a^2}{b^2} - 35\nu - 7 + \frac{65b^2}{a^2} \right) & -\frac{1}{350} \left( -\frac{110a^2}{b^2} - 35\nu - 7 + \frac{65b^2}{a^2} \right) \\ -\frac{390a^4}{b^2} - \frac{42a^2+65b^2}{175a^3} & \frac{1}{350} \left( \frac{110a^2}{b^2} + 35\nu + 7 - \frac{65b^2}{a^2} \right) & -\frac{3b^3}{35a^3} - \frac{2b}{25a} + \frac{256a}{35b} & \frac{45b^3}{a^2} + \frac{7(5\nu b+b)-110a^2}{1050} \\ \frac{1}{350} \left( \frac{110a^2}{b^2} + 35\nu + 7 - \frac{65b^2}{a^2} \right) & -\frac{30a^4}{b^2} - \frac{14a^2+65b^2}{525a} & \frac{45b^3}{a^2} + \frac{7(5\nu b+b)-110a^2}{1050} & \frac{2a^3}{105b} - \frac{25a}{225} - \frac{b^3}{35a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{4,2}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{18(15a^4-28b^2a^2+15b^4)}{175a^2b^3} & -\frac{135b^4}{a^2} + \frac{42b^2-65a^2}{175b^3} & \frac{135a^4}{b^2} - \frac{42a^2+65b^2}{175a^3} & \frac{1}{350} \left( \frac{65(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 7 \right) \\ \frac{135b^4}{a^2} - \frac{42b^2+65a^2}{175b^3} & \frac{3a^3}{35b^3} + \frac{2a}{25b} + \frac{9b}{35a} & \frac{1}{350} \left( 7 - \frac{65(a^4+b^4)}{a^2b^2} \right) & -\frac{45b^4}{b^2} + \frac{7a^2+65b^2}{1050a} \\ -\frac{135a^4}{b^2} + \frac{42a^2-65b^2}{175a^3} & \frac{1}{350} \left( 7 - \frac{65(a^4+b^4)}{a^2b^2} \right) & \frac{3b^3}{35a^3} + \frac{2b}{25a} + \frac{9a}{35b} & \frac{45b^4}{a^2} + \frac{7b^2+65a^2}{1050b} \\ \frac{1}{350} \left( \frac{65(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 7 \right) & \frac{45a^4}{b^2} + \frac{7a^2+65b^2}{1050a} & -\frac{45a^4}{a^2} + \frac{7b^2+65a^2}{1050b} & -\frac{a^3}{70b} + \frac{ba}{45b} - \frac{b^3}{70a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{4,3}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{6(45a^4-84b^2a^2-130b^4)}{175a^3b^3} & \frac{65(a^4-ab^4)}{a^2} - \frac{42b^2}{175b^3} & \frac{135a^4}{a^2} - \frac{42a^2-65b^2}{175a^3} & \frac{1}{350} \left( \frac{65a^2}{b^2} - 35\nu - 7 - \frac{110b^2}{a^2} \right) \\ \frac{390b^4}{a^2} + \frac{42b^2-65a^2}{175b^3} & -\frac{3a^3}{35b^3} - \frac{2a}{25b} + \frac{20b}{35a} & \frac{135a^4}{a^2} - \frac{42a^2-65b^2}{175a^3} & -\frac{1}{45a^4+7b^2(5\nu+1)a^2-110b^4} \left( \frac{65a^2}{b^2} - 35\nu - 7 - \frac{110b^2}{a^2} \right) \\ \frac{135a^4}{175a^3b^2} - \frac{42b^2(5\nu+1)a^2-110b^4}{175a^3b^2} & \frac{1}{350} \left( \frac{65a^2}{b^2} - 35\nu - 7 - \frac{110b^2}{a^2} \right) & -\frac{3a^3}{35a^3} - \frac{8b}{25a} + \frac{18a}{35b} & -\frac{30b^4}{a^2} - \frac{14b^2+65a^2}{525b} \\ \frac{1}{350} \left( -\frac{65a^2}{b^2} + 35\nu + 7 + \frac{110b^2}{a^2} \right) & -\frac{45a^4+7b^2(5\nu+1)a^2-110b^4}{1050ab^2} & \frac{30b^4}{a^2} + \frac{14b^2+65a^2}{525b} & -\frac{a^3}{35b} - \frac{20a}{225} + \frac{2b^3}{105a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{12(65a^4+42b^2a^2+65b^4)}{175a^3b^3} - \frac{2(55a^4+21b^2(5a+1)a^2+195b^4)}{175a^3b^3} \\
& - \frac{2(55a^4+21b^2(5a+1)a^2+195b^4)}{175a^3b^3} \\
& \frac{2(195a^4+21b^2(5a+1)a^2+55b^4)}{175a^3b^2} \\
& \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 70\nu - 7 \right) \\
& - \frac{2(55a^4+21b^2(5a+1)a^2+195b^4)}{175a^3b^3} \\
& \frac{4a^3}{350b^3} + \frac{8a}{25b} + \frac{52b}{350a} \\
& \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 7(60\nu+1) \right) \\
& \frac{2\left(\frac{15a^4}{b^2}+7(5a+1)a^2+55b^2\right)}{525a} \\
& \frac{2(195a^4+21b^2(5a+1)a^2+55b^4)}{175a^3b^2} \\
& \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 7(60\nu+1) \right) \\
& - \frac{2(55a^4+7b^2(5a+1)a^2+15b^4)}{525a^2b} \\
& \frac{1}{350} \left( -\frac{110(a^4+b^4)}{a^2b^2} - 70\nu - 7 \right) \\
& \frac{2\left(\frac{15a^4}{b^2}+7(5a+1)a^2+55b^2\right)}{525a} \\
& - \frac{2(55a^4+7b^2(5a+1)a^2+15b^4)}{525a^2b} \\
& \frac{4a^3}{105b} + \frac{84a}{225} + \frac{4b^3}{105a}
\end{aligned}$$

$\mathbf{K}_{4,4}^{(e)}$

Matriz  $M_{00}^{(e)}$

$$M_{00}^{(1,1)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{169ab}{1225} & -\frac{143a^2b}{7350} & -\frac{143ab^2}{7350} & \frac{121a^2b^2}{44100} \\ -\frac{143a^2b}{7350} & \frac{13a^3b}{3675} & \frac{121a^2b^2}{44100} & -\frac{11a^3b^2}{22050} \\ \frac{143ab^2}{7350} & \frac{121a^2b^2}{44100} & \frac{13ab^3}{3675} & -\frac{11a^2b^3}{22050} \\ \frac{121a^2b^2}{44100} & -\frac{11a^3b^2}{22050} & -\frac{11a^2b^3}{22050} & \frac{a^3b^3}{11025} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(2,1)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{117ab}{2450} & -\frac{169a^2b}{14700} & -\frac{33ab^2}{4900} & \frac{143a^2b^2}{88200} \\ \frac{169a^2b}{14700} & -\frac{13a^3b}{4900} & -\frac{143a^2b^2}{88200} & \frac{11a^3b^2}{29400} \\ -\frac{33ab^2}{4900} & \frac{143a^2b^2}{88200} & \frac{3ab^3}{2450} & -\frac{13a^2b^3}{44100} \\ -\frac{143a^2b^2}{88200} & \frac{11a^3b^2}{29400} & \frac{13a^2b^3}{44100} & -\frac{a^3b^3}{14700} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(2,2)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{169ab}{1225} & \frac{143a^2b}{7350} & -\frac{143ab^2}{7350} & -\frac{121a^2b^2}{44100} \\ \frac{143a^2b}{7350} & \frac{13a^3b}{3675} & -\frac{121a^2b^2}{44100} & -\frac{11a^3b^2}{22050} \\ -\frac{143ab^2}{7350} & -\frac{121a^2b^2}{44100} & \frac{13ab^3}{3675} & \frac{11a^2b^3}{22050} \\ -\frac{121a^2b^2}{44100} & -\frac{11a^3b^2}{22050} & \frac{11a^2b^3}{22050} & \frac{a^3b^3}{11025} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(3,1)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{81ab}{4900} & -\frac{39a^2b}{9800} & -\frac{39ab^2}{9800} & \frac{169a^2b^2}{176400} \\ \frac{39a^2b}{9800} & \frac{9a^3b}{9800} & -\frac{169a^2b^2}{176400} & \frac{13a^3b^2}{58800} \\ \frac{39ab^2}{9800} & -\frac{169a^2b^2}{176400} & \frac{9ab^3}{9800} & \frac{13a^2b^3}{58800} \\ \frac{169a^2b^2}{176400} & -\frac{13a^3b^2}{58800} & -\frac{13a^2b^3}{58800} & \frac{a^3b^3}{19600} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(3,2)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{117ab}{2450} & \frac{33a^2b}{4900} & -\frac{169ab^2}{14700} & -\frac{143a^2b^2}{88200} \\ \frac{33a^2b}{4900} & \frac{3a^3b}{2450} & -\frac{143a^2b^2}{88200} & -\frac{13a^3b^2}{44100} \\ \frac{169ab^2}{14700} & \frac{143a^2b^2}{88200} & -\frac{13ab^3}{4900} & -\frac{11a^2b^3}{29400} \\ \frac{143a^2b^2}{88200} & \frac{13a^3b^2}{44100} & -\frac{11a^2b^3}{29400} & -\frac{a^3b^3}{14700} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(3,3)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{169ab}{1225} & \frac{143a^2b}{7350} & \frac{143ab^2}{7350} & \frac{121a^2b^2}{44100} \\ \frac{143a^2b}{7350} & \frac{13a^3b}{3675} & \frac{121a^2b^2}{44100} & \frac{11a^3b^2}{22050} \\ \frac{143ab^2}{7350} & \frac{121a^2b^2}{44100} & \frac{13ab^3}{3675} & \frac{11a^2b^3}{22050} \\ \frac{121a^2b^2}{44100} & \frac{11a^3b^2}{22050} & \frac{11a^2b^3}{22050} & \frac{a^3b^3}{11025} \end{bmatrix}$$

$$M_{00}^{(4,1)(e)} = \begin{bmatrix} \frac{117ab}{2450} & -\frac{33a^2b}{4900} & -\frac{169ab^2}{14700} & \frac{143a^2b^2}{88200} \\ -\frac{33a^2b}{4900} & \frac{3a^3b}{2450} & \frac{143a^2b^2}{88200} & -\frac{13a^3b^2}{44100} \\ \frac{169ab^2}{14700} & -\frac{143a^2b^2}{88200} & -\frac{13ab^3}{4900} & \frac{11a^2b^3}{29400} \\ -\frac{143a^2b^2}{88200} & \frac{13a^3b^2}{44100} & \frac{11a^2b^3}{29400} & -\frac{a^3b^3}{14700} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{00}^{(4,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{81ab}{4900} & \frac{39a^2b}{9800} & -\frac{39ab^2}{9800} & -\frac{169a^2b^2}{176400} \\ -\frac{39a^2b}{9800} & -\frac{9a^3b}{9800} & \frac{169a^2b^2}{176400} & \frac{13a^3b^2}{58800} \\ \frac{39ab^2}{9800} & \frac{169a^2b^2}{176400} & -\frac{9ab^3}{9800} & -\frac{13a^2b^3}{58800} \\ -\frac{169a^2b^2}{176400} & -\frac{13a^3b^2}{58800} & \frac{13a^2b^3}{58800} & \frac{a^3b^3}{19600} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{00}^{(4,3)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{117ab}{2450} & \frac{169a^2b}{14700} & \frac{33ab^2}{4900} & \frac{143a^2b^2}{88200} \\ -\frac{169a^2b}{14700} & -\frac{13a^3b}{4900} & \frac{143a^2b^2}{88200} & -\frac{11a^3b^2}{29400} \\ \frac{33ab^2}{4900} & \frac{143a^2b^2}{88200} & \frac{3ab^3}{2450} & \frac{13a^2b^3}{44100} \\ -\frac{143a^2b^2}{88200} & -\frac{11a^3b^2}{29400} & -\frac{13a^2b^3}{44100} & -\frac{a^3b^3}{14700} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{00}^{(4,4)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{169ab}{1225} & -\frac{143a^2b}{7350} & \frac{143ab^2}{7350} & -\frac{121a^2b^2}{44100} \\ -\frac{143a^2b}{7350} & \frac{13a^3b}{3675} & -\frac{121a^2b^2}{44100} & \frac{11a^3b^2}{22050} \\ \frac{143ab^2}{7350} & -\frac{121a^2b^2}{44100} & \frac{13ab^3}{3675} & -\frac{11a^2b^3}{22050} \\ -\frac{121a^2b^2}{44100} & \frac{11a^3b^2}{22050} & -\frac{11a^2b^3}{22050} & \frac{a^3b^3}{11025} \end{bmatrix}$$

Matriz  $\mathbf{M}_{11}^{(e)}$

$$\mathbf{M}_{11}^{(1,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{78b}{175a} & -\frac{13b}{350} & -\frac{11b^2}{175a} & \frac{11b^2}{2100} \\ -\frac{13b}{350} & \frac{26ab}{525} & \frac{11b^2}{2100} & -\frac{11ab^2}{1575} \\ \frac{11b^2}{175a} & \frac{11b^2}{2100} & \frac{2b^3}{175a} & -\frac{b^3}{1050} \\ \frac{11b^2}{2100} & -\frac{11ab^2}{1575} & -\frac{b^3}{1050} & \frac{2ab^3}{1575} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{11}^{(2,1)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{78b}{175a} & \frac{13b}{350} & \frac{11b^2}{175a} & -\frac{11b^2}{2100} \\ -\frac{13b}{350} & -\frac{13ab}{1050} & \frac{11b^2}{2100} & \frac{11ab^2}{6300} \\ \frac{11b^2}{175a} & -\frac{11b^2}{2100} & -\frac{2b^3}{175a} & \frac{b^3}{1050} \\ \frac{11b^2}{2100} & \frac{11ab^2}{6300} & -\frac{b^3}{1050} & -\frac{ab^3}{3150} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(2,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{78b}{175a} & \frac{13b}{350} & -\frac{11b^2}{175a} & -\frac{11b^2}{2100} \\ \frac{13b}{350} & \frac{26ab}{525} & -\frac{11b^2}{2100} & -\frac{11ab^2}{1575} \\ \frac{11b^2}{175a} & \frac{11b^2}{2100} & \frac{2b^3}{175a} & \frac{b^3}{1050} \\ -\frac{11b^2}{2100} & -\frac{11ab^2}{1575} & \frac{b^3}{1050} & \frac{2ab^3}{1575} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{11}^{(3,1)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{27b}{175a} & \frac{9b}{700} & \frac{13b^2}{350a} & -\frac{13b^2}{4200} \\ -\frac{9b}{700} & -\frac{3ab}{700} & \frac{13b^2}{4200} & \frac{13ab^2}{12600} \\ \frac{13b^2}{350a} & \frac{13b^2}{4200} & \frac{3b^3}{350a} & -\frac{b^3}{1400} \\ -\frac{13b^2}{4200} & -\frac{13ab^2}{12600} & \frac{b^3}{1400} & \frac{ab^3}{4200} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(3,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{27b}{175a} & \frac{9b}{700} & -\frac{13b^2}{350a} & -\frac{13b^2}{4200} \\ \frac{9b}{700} & \frac{3ab}{175} & -\frac{13b^2}{4200} & -\frac{13ab^2}{3150} \\ \frac{13b^2}{350a} & \frac{13b^2}{4200} & -\frac{3b^3}{350a} & -\frac{b^3}{1400} \\ \frac{13b^2}{4200} & -\frac{13ab^2}{3150} & \frac{b^3}{1400} & \frac{ab^3}{1050} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{11}^{(3,3)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{78b}{175a} & \frac{13b}{350} & \frac{11b^2}{175a} & \frac{11b^2}{2100} \\ \frac{13b}{350} & \frac{26ab}{525} & \frac{11b^2}{2100} & \frac{11ab^2}{1575} \\ \frac{11b^2}{175a} & \frac{11b^2}{2100} & \frac{2b^3}{175a} & \frac{b^3}{1050} \\ \frac{11b^2}{2100} & \frac{11ab^2}{1575} & -\frac{b^3}{1050} & \frac{2ab^3}{1575} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(4,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{27b}{175a} & -\frac{9b}{700} & -\frac{13b^2}{350a} & \frac{13b^2}{4200} \\ -\frac{9b}{700} & \frac{3ab}{175} & \frac{13b^2}{4200} & -\frac{13ab^2}{3150} \\ \frac{13b^2}{350a} & -\frac{13b^2}{4200} & -\frac{3b^3}{350a} & \frac{b^3}{1400} \\ \frac{13b^2}{4200} & \frac{13ab^2}{3150} & \frac{b^3}{1400} & -\frac{ab^3}{1050} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{11}^{(4,2)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{27b}{175a} & -\frac{9b}{700} & \frac{13b^2}{350a} & \frac{13b^2}{4200} \\ \frac{9b}{700} & -\frac{3ab}{700} & -\frac{13b^2}{4200} & \frac{13ab^2}{12600} \\ -\frac{13b^2}{350a} & -\frac{13b^2}{4200} & \frac{3b^3}{350a} & \frac{b^3}{1400} \\ \frac{13b^2}{4200} & -\frac{13ab^2}{12600} & -\frac{b^3}{1400} & \frac{ab^3}{4200} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{11}^{(4,3)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{78b}{175a} & -\frac{13b}{350} & -\frac{11b^2}{175a} & -\frac{11b^2}{2100} \\ \frac{13b}{350} & -\frac{13ab}{1050} & \frac{11b^2}{2100} & -\frac{11ab^2}{6300} \\ -\frac{11b^2}{175a} & -\frac{11b^2}{2100} & -\frac{2b^3}{175a} & -\frac{1050}{b^3} \\ \frac{11b^2}{2100} & -\frac{11ab^2}{6300} & \frac{b^3}{1050} & -\frac{ab^3}{3150} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{11}^{(4,4)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{78b}{175a} & -\frac{13b}{350} & \frac{11b^2}{175a} & -\frac{11b^2}{2100} \\ -\frac{13b}{350} & \frac{26ab}{525} & -\frac{11b^2}{2100} & \frac{11ab^2}{1575} \\ \frac{11b^2}{175a} & -\frac{11b^2}{2100} & \frac{2b^3}{175a} & -\frac{1050}{b^3} \\ -\frac{11b^2}{2100} & \frac{11ab^2}{1575} & -\frac{b^3}{1050} & \frac{2ab^3}{1575} \end{bmatrix}$$

Matriz  $\mathbf{M}_{22}^{(e)}$

$$\mathbf{M}_{22}^{(1,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{78a}{175b} & -\frac{11a^2}{175b} & -\frac{13a}{350} & \frac{11a^2}{2100} \\ -\frac{11a^2}{175b} & \frac{2a^3}{175b} & \frac{11a^2}{2100} & -\frac{a^3}{1050} \\ -\frac{13a}{350} & \frac{11a^2}{2100} & \frac{26ab}{525} & -\frac{11a^2b}{1575} \\ \frac{11a^2}{2100} & -\frac{a^3}{1050} & -\frac{11a^2b}{1575} & \frac{2a^3b}{1575} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{22}^{(2,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{27a}{175b} & -\frac{13a^2}{350b} & -\frac{9a}{700} & \frac{13a^2}{4200} \\ \frac{13a^2}{350b} & -\frac{3a^3}{350b} & -\frac{13a^2}{4200} & \frac{a^3}{1400} \\ -\frac{9a}{700} & \frac{13a^2}{4200} & \frac{3ab}{175} & -\frac{13a^2b}{3150} \\ \frac{13a^2}{4200} & \frac{a^3}{1400} & \frac{13a^2b}{3150} & -\frac{a^3b}{1050} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(2,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{78a}{175b} & \frac{11a^2}{175b} & -\frac{13a}{350} & -\frac{11a^2}{2100} \\ \frac{11a^2}{175b} & \frac{2a^3}{175b} & -\frac{11a^2}{2100} & -\frac{a^3}{1050} \\ -\frac{13a}{350} & -\frac{11a^2}{2100} & \frac{26ab}{525} & \frac{11a^2b}{1575} \\ -\frac{11a^2}{2100} & -\frac{a^3}{1050} & \frac{11a^2b}{1575} & \frac{2a^3b}{1575} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{22}^{(3,1)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{27a}{175b} & \frac{13a^2}{350b} & \frac{9a}{700} & -\frac{13a^2}{4200} \\ -\frac{13a^2}{350b} & \frac{3a^3}{350b} & \frac{13a^2}{4200} & -\frac{a^3}{1400} \\ -\frac{9a}{700} & \frac{13a^2}{4200} & -\frac{3ab}{700} & \frac{13a^2b}{12600} \\ -\frac{13a^2}{4200} & \frac{a^3}{1400} & -\frac{13a^2b}{12600} & \frac{a^3b}{4200} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(3,2)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{78a}{175b} & -\frac{11a^2}{175b} & \frac{13a}{350} & \frac{11a^2}{2100} \\ \frac{11a^2}{175b} & \frac{2a^3}{175b} & \frac{11a^2}{2100} & -\frac{a^3}{1050} \\ -\frac{13a}{350} & -\frac{11a^2}{2100} & -\frac{13ab}{1050} & -\frac{11a^2b}{6300} \\ -\frac{11a^2}{2100} & -\frac{a^3}{1050} & -\frac{11a^2b}{6300} & -\frac{a^3b}{3150} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{22}^{(3,3)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{78a}{175b} & \frac{11a^2}{175b} & \frac{13a}{350} & \frac{11a^2}{2100} \\ \frac{11a^2}{175b} & \frac{2a^3}{175b} & \frac{11a^2}{2100} & -\frac{a^3}{1050} \\ \frac{13a}{350} & \frac{11a^2}{2100} & \frac{26ab}{525} & \frac{11a^2b}{1575} \\ \frac{11a^2}{2100} & \frac{a^3}{1050} & \frac{11a^2b}{1575} & \frac{2a^3b}{1575} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(4,1)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{78a}{175b} & \frac{11a^2}{175b} & \frac{13a}{350} & -\frac{11a^2}{2100} \\ \frac{11a^2}{175b} & -\frac{2a^3}{175b} & -\frac{11a^2}{2100} & \frac{a^3}{1050} \\ -\frac{13a}{350} & \frac{11a^2}{2100} & -\frac{13ab}{1050} & \frac{11a^2b}{6300} \\ \frac{11a^2}{2100} & -\frac{a^3}{1050} & \frac{11a^2b}{6300} & -\frac{a^3b}{3150} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{22}^{(4,2)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{27a}{175b} & -\frac{13a^2}{350b} & \frac{9a}{700} & \frac{13a^2}{4200} \\ \frac{13a^2}{350b} & \frac{3a^3}{350b} & -\frac{13a^2}{4200} & -\frac{a^3}{1400} \\ -\frac{9a}{700} & -\frac{13a^2}{4200} & -\frac{3ab}{700} & -\frac{13a^2b}{12600} \\ \frac{13a^2}{4200} & \frac{a^3}{1400} & \frac{13a^2b}{12600} & \frac{a^3b}{4200} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{(4,3)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{27a}{175b} & \frac{13a^2}{350b} & \frac{9a}{700} & \frac{13a^2}{4200} \\ -\frac{13a^2}{350b} & -\frac{3a^3}{350b} & -\frac{13a^2}{4200} & -\frac{a^3}{1400} \\ \frac{9a}{700} & \frac{13a^2}{4200} & \frac{3ab}{175} & \frac{13a^2b}{3150} \\ -\frac{13a^2}{4200} & -\frac{a^3}{1400} & -\frac{13a^2b}{3150} & -\frac{a^3b}{1050} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{22}^{(4,4)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{78a}{175b} & -\frac{11a^2}{175b} & \frac{13a}{350} & -\frac{11a^2}{2100} \\ -\frac{11a^2}{175b} & \frac{2a^3}{175b} & -\frac{11a^2}{2100} & \frac{a^3}{1050} \\ \frac{13a}{350} & -\frac{11a^2}{2100} & \frac{26ab}{525} & -\frac{11a^2b}{1575} \\ -\frac{11a^2}{2100} & \frac{a^3}{1050} & -\frac{11a^2b}{1575} & \frac{2a^3b}{1575} \end{bmatrix}$$

Matriz  $\mathbf{M}_{12}^{(e)}$

$$\mathbf{M}_{12}^{(1,1)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{ab}{50} \\ 0 & 0 & \frac{ab}{50} & 0 \\ 0 & \frac{ab}{50} & 0 & 0 \\ -\frac{ab}{50} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(2,1)}(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{b}{10} & \frac{ab}{50} \\ 0 & 0 & -\frac{ab}{50} & \frac{a^2b}{300} \\ \frac{b}{10} & -\frac{ab}{50} & 0 & 0 \\ \frac{ab}{50} & -\frac{a^2b}{300} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(2,2)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{ab}{50} \\ 0 & 0 & \frac{ab}{50} & 0 \\ 0 & \frac{ab}{50} & 0 & 0 \\ -\frac{ab}{50} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(3,1)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{10} & \frac{b}{10} & -\frac{ab}{50} \\ -\frac{a}{10} & \frac{a^2}{60} & \frac{ab}{50} & -\frac{a^2b}{300} \\ -\frac{b}{10} & \frac{ab}{50} & \frac{b^2}{60} & -\frac{ab^2}{300} \\ -\frac{ab}{50} & \frac{a^2b}{300} & \frac{ab^2}{300} & -\frac{a^2b^2}{1800} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(3,2)}(e) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 & \frac{ab}{50} \\ \frac{a}{10} & 0 & -\frac{ab}{50} & 0 \\ 0 & -\frac{ab}{50} & 0 & \frac{ab^2}{300} \\ \frac{ab}{50} & 0 & -\frac{ab^2}{300} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(3,3)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{ab}{50} \\ 0 & 0 & \frac{ab}{50} & 0 \\ 0 & \frac{ab}{50} & 0 & 0 \\ -\frac{ab}{50} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(4,1)}(e) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 & \frac{ab}{50} \\ \frac{a}{10} & 0 & -\frac{ab}{50} & 0 \\ 0 & -\frac{ab}{50} & 0 & \frac{ab^2}{300} \\ \frac{ab}{50} & 0 & -\frac{ab^2}{300} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(4,2)}(e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{a}{10} & -\frac{b}{10} & -\frac{ab}{50} \\ -\frac{a}{10} & -\frac{a^2}{60} & \frac{ab}{50} & \frac{a^2b}{300} \\ \frac{b}{10} & \frac{ab}{50} & -\frac{b^2}{60} & -\frac{ab^2}{300} \\ -\frac{ab}{50} & -\frac{a^2b}{300} & \frac{ab^2}{300} & \frac{a^2b^2}{1800} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(4,3)}(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{10} & \frac{ab}{50} \\ 0 & 0 & -\frac{ab}{50} & -\frac{a^2b}{300} \\ -\frac{b}{10} & -\frac{ab}{50} & 0 & 0 \\ \frac{ab}{50} & \frac{a^2b}{300} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{(4,4)}(e) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{ab}{50} \\ 0 & 0 & \frac{ab}{50} & 0 \\ 0 & \frac{ab}{50} & 0 & 0 \\ -\frac{ab}{50} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$