

INTEGRAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO USANDO MODELOS MISTOS

José Maria Giraldes Tavares da Cunha Rebelo

Dissertação para obtenção de Grau de Mestre em

Engenharia Civil

Orientadores:

Professor Doutor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Professor Doutor André Ramos Barbosa

Júri

Presidente: Professor Doutor José Joaquim Costa Branco de Oliveira Pedro

Vogais: Professor Doutor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Professor Doutor Luís Manuel Coelho Guerreiro

Outubro de 2015

Resumo

Neste trabalho é testado o desempenho numérico de várias funções de aproximação quando utilizadas na definição das aproximações requeridas pelo algoritmo de integração no tempo proposto recentemente por investigadores do Instituto Superior Técnico. Neste modelo são definidas no domínio do tempo aproximações independentes para os campos de deslocamentos, de velocidades e de acelerações.

Neste trabalho apresenta-se o desenvolvimento, implementação e teste de um modelo misto para a integração no domínio do tempo. Avalia-se o desempenho numérico de um conjunto de funções ortonormais: os polinómios de Legendre, os sistemas de wavelets de Daubechies definidos no intervalo e os sistemas de wavelets polinomiais. No caso dos sistemas de wavelets de Daubechies consideram-se duas variantes: bases definidas apenas com recurso a funções de escala com um determinado grau de refinamento e bases definidas com funções de escala e wavelets definidas a diferentes graus de refinamento.

Um conjunto de testes permitirá caracterizar o desempenho comparativo destas bases de aproximação. Serão testados e caracterizados os processos de refinamento h - (aumento do número de passos no tempo) e de refinamento p - (aumento do número ou grau de funções consideradas na definição da base de aproximação). Para além de testes numéricos de referência necessários à caracterização do desempenho dos algoritmos, nesta dissertação apresentam-se resolvidos problemas de pórticos planos e problemas de elasticidade plana. Na maioria dos exemplos consideram-se problemas em regime física e geometricamente lineares. No entanto, incluir-se-á um exemplo onde se consideram não-linearidades materiais para ilustrar o desempenho dos modelos nessa situação.

Palavras-Chave

Análise Dinâmica

Integração no tempo

Elementos finitos

Sistemas de Wavelets

Polinómios de Legendre

Abstract

This work presents the formulation, implementation, and numerical examples for several orthogonal approximation functions that are used as the basis functions for a mixed time integration algorithm that was proposed by researchers in Instituto Superior Técnico. In this mixed time integration algorithm, independent approximations for the displacement, velocity and acceleration fields are defined in the time domain.

The main objective of this dissertation is to evaluate the numerical performance of three sets of orthonormal functions: Legendre polynomials, polynomial wavelets, and Daubechies wavelets defined on an interval. For the Daubechies wavelets, two variants are considered. The first includes the use of scaling functions with a determined refinement level, and the second includes the use of scaling functions and wavelets.

Numerical examples are presented to verify and validate the implementation, and to understand the performance of the approximation functions in the mixed time integration algorithm. Procedures for p -refinement (degree or number of functions used in the approximation basis increment) and h -refinement (number of time steps increment) are tested and characterized. The numerical validation examples also include plane frame problems, and 2D plane elasticity problems. Herein, the majority of the problems assume physically linear and geometrically linear analyses. However an example with a non-linear material is included to illustrate the model performance in this situation.

Keywords

Dynamic Analysis

Time Integration

Finite Elements

Wavelets Systems

Legendre Polynomials

Agradecimentos

A realização desta dissertação no prazo estipulado foi apenas possível graças ao contributo de algumas pessoas. A todos os que me apoiaram e me ajudaram durante esta fase, queria desde já expressar os meus sinceros agradecimentos. Quero no entanto salientar algumas pessoas que tiveram uma especial importância na realização desta dissertação.

Ao meu orientador, Professor Luís Castro, queria agradecer pelo seu apoio, incentivo e enorme paciência que teve comigo durante estes seis meses. Agradeço por todo o tempo despendido e por todos os conhecimentos que me transmitiu.

Ao meu orientador externo, Professor André Barbosa, quero agradecer pela disponibilidade e pelas suas sugestões que muito contribuíram para a riqueza desta dissertação.

Aos meus colegas, com quem tive o prazer de partilhar esta etapa que foi o Técnico. Quero agradecer em especial à Vitória, ao Gonçalo e ao Virgílio, por todas as horas de trabalho e partilha de ideias.

Por fim, quero agradecer à minha família. À minha Mãe, ao meu Pai e à minha Irmã, quero agradecer por todo o apoio e compreensão por todos os momentos em que tive menos presente.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Motivação.....	1
1.2. Considerações Iniciais	1
1.3. Objectivos	2
1.4. Organização	3
2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	5
2.1. Conceitos Fundamentais de Dinâmica de Estruturas	5
2.2. Método dos Elementos Finitos.....	7
3. ALGORITMOS PARA INTEGRAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO	11
3.1. Métodos Clássicos.....	11
3.1.1. Método de Newmark.....	12
3.1.2. Método de Wilson- θ	13
3.2. Método misto de integração no tempo	14
3.2.1. Definição das aproximações	15
3.2.2. Definição da base de aproximação no tempo	16
3.2.3. Imposição das relações entre deslocamento, velocidade e aceleração	18
3.2.4. Resolução da equação de equilíbrio dinâmico.....	20
3.2.5. Parâmetros Variáveis	20
4. FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO	23
4.1. Polinómios de Legendre	23
4.2. Sistemas de Wavelets.....	25

4.2.1.	Wavelets polinomiais	27
4.2.2.	Wavelets de Daubechies	29
5.	TESTES DE VALIDAÇÃO E ESTUDO DE CONVÊRGENCIA.....	35
5.1.	Formulação dos Testes	35
5.1.1.	Objectivos.....	35
5.1.2.	Parâmetros de Medição	36
5.1.3.	Modelo de Testes.....	37
5.2.	Estabilidade	38
5.3.	Testes de Validação.....	47
5.3.1.	Exemplo 1	47
5.3.2.	Exemplo 2	59
5.3.3.	Exemplo 3	66
5.3.4.	Exemplo 4	70
6.	ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS.....	73
6.1.	Análise de uma viga	73
6.2.	Análise de um pórtico plano.....	75
6.3.	Análise de uma placa	78
7.	CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	81
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85
	ANEXO A.....	89

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 2.1 – Forças actuantes num corpo em movimento, adaptado de [9].</i>	5
<i>Figura 4.1 – Polinómios de Legendre até ao quinto grau.</i>	24
<i>Figura 4.2 – Representação do processo de multiresolução de uma imagem, retirado de [12].</i>	26
<i>Figura 4.3 – Esquematização da adição de detalhe [29].</i>	26
<i>Figura 4.4 – a) Função de escala. b) Wavelet para $j=0$. c) Wavelets para $j=1$. d) Wavelets para $j=2$.</i>	28
<i>Figura 4.5 – Funções de escala (à esquerda) e wavelets primárias (à direita) para $N=2, 4$ e 8 (por ordem descendente).</i>	30
<i>Figura 4.6 – Translação (à esquerda) e Dilatação (à direita) aplicadas à função de escala de $N=4$.</i>	31
<i>Figura 4.7 – Base de wavelets no intervalo considerando $N = 2, j_0 = 3, e j_{max} = 5$.</i>	33
<i>Figura 5.1 – Raio espectral obtido com método de Newmark e método Wilson-θ.</i>	41
<i>Figura 5.2 – Raio espectral obtido com polinómios de Legendre.</i>	41
<i>Figura 5.3 – Raio espectral em wavelets polinomiais.</i>	42
<i>Figura 5.4 – Raio espectral em wavelets de Daubechies apenas com funções de escala.</i>	43
<i>Figura 5.5 – Raio espectral em wavelets de Daubechies com funções de escala e wavelets.</i>	43
<i>Figura 5.6 - Distorção numérica com polinómios de Legendre.</i>	44
<i>Figura 5.7 - Distorção numérica com wavelets polinomiais.</i>	44
<i>Figura 5.8 – Distorção numérica com wavelets de Daubechies – apenas funções de escala.</i>	44
<i>Figura 5.9 – Distorção numérica com wavelets de Daubechies – funções de escala e wavelets.</i>	45
<i>Figura 5.10 – Dissipação numérica com Polinómios de Legendre.</i>	45
<i>Figura 5.11 – Dissipação numérica com wavelets polinomiais.</i>	45
<i>Figura 5.12 – Dissipação numérica com wavelets de Daubechies – apenas funções de escala.</i>	46

<i>Figura 5.13 – Dissipação numérica com wavelets de Daubechies – funções de escala e wavelets....</i>	46
<i>Figura 5.14 – Evolução do deslocamento obtido com o método de Newmark.....</i>	48
<i>Figura 5.15 – Evolução da aceleração obtida através do método de Newmark.</i>	49
<i>Figura 5.16 – Erro médio do deslocamento – Método de Newmark.....</i>	49
<i>Figura 5.17 – Erro médio da velocidade – Método de Newmark.....</i>	50
<i>Figura 5.18 – Erro médio da aceleração – Método de Newmark</i>	50
<i>Figura 5.19 – Deslocamento máximo relativo – Método de Newmark.....</i>	50
<i>Figura 5.20 – Evolução do deslocamento obtido com o método Wilson-θ.</i>	51
<i>Figura 5.21 – Evolução da aceleração obtida com o método Wilson-θ.....</i>	51
<i>Figura 5.22 – Erro médio do deslocamento – Método Wilson-θ.....</i>	51
<i>Figura 5.23 – Evolução do deslocamento obtido com o MTI utilizando polinómios de Legendre</i>	52
<i>Figura 5.24 – Evolução da aceleração obtida com MTI utilizando polinómios de Legendre.....</i>	52
<i>Figura 5.25 – Erro do deslocamento para polinómios de Legendre.....</i>	53
<i>Figura 5.26 – Deslocamento máximo relativo – MTI com polinómios de Legendre</i>	54
<i>Figura 5.27 – Desvio do deslocamento para wavelets polinomiais.....</i>	55
<i>Figura 5.28 - Desvio médio do deslocamento para wavelets de Daubechies com $N=4$.</i>	56
<i>Figura 5.29 - Desvio médio do deslocamento para wavelets de Daubechies com $j_0=6$.....</i>	56
<i>Figura 5.30 – Desvio médio do deslocamento obtido com wavelets de Daubechies para $N=4$</i>	58
<i>Figura 5.31 - Desvio médio da aceleração com wavelets de Daubechies para $N=4$</i>	59
<i>Figura 5.32 – Evolução do deslocamento – Método de Newmak.</i>	61
<i>Figura 5.33 – Evolução da aceleração – Método de Newmark.</i>	61
<i>Figura 5.34 – Desvio do Deslocamento – Método de Newmark.....</i>	62

<i>Figura 5.35 – Evolução do deslocamento para $\Delta t = 0,5 s$ – Polinómios de Legendre.....</i>	<i>62</i>
<i>Figura 5.36 – Aceleração para $\Delta t = 0,5 s$ – Polinómios de Legendre</i>	<i>62</i>
<i>Figura 5.37 – Aceleração para $\Delta t = 0.1 s$ – Polinómios de Legendre.</i>	<i>63</i>
<i>Figura 5.38 – Desvio do deslocamento com polinómios de Legendre</i>	<i>63</i>
<i>Figura 5.39 – Deslocamento com Wavelets Polinomiais.....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 5.40 – Aceleração com wavelets polinomiais.....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 5.41 – Aceleração com wavelets polinomiais para $\Delta t = 0.1 s$.....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 5.42 - Desvio do deslocamento com wavelets polinomiais</i>	<i>65</i>
<i>Figura 5.43 – Desvio de deslocamento em wavelets de Daubecheis - MTI.....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 5.44 – Evolução da aceleração com wavelets de Daubechies.....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 5.45 - Erro médio do deslocamento do 2º grau de liberdade.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 5.46 – Deslocamento dos diferentes graus de liberdade</i>	<i>72</i>
<i>Figura 6.1 – Viga simplesmente apoiada.</i>	<i>73</i>
<i>Figura 6.2 – Propriedades e Carregamento.....</i>	<i>74</i>
<i>Figura 6.3 – Deformada da viga.</i>	<i>74</i>
<i>Figura 6.4 – Deslocamento vertical a meio vão.</i>	<i>75</i>
<i>Figura 6.5 – Momento flector a meio vão.</i>	<i>75</i>
<i>Figura 6.6 – Torre porticada.</i>	<i>76</i>
<i>Figura 6.7 – Carregamento e propriedades da estrutura.....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 6.8 – Deformada da estrutura porticada para $t=0,2 s$ (à esquerda) e $t=0,4 s$ (à direita).....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 6.9 – Deslocamento horizontal no topo da estrutura porticada.</i>	<i>77</i>
<i>Figura 6.10 – Momento flector na base da estrutura porticada.</i>	<i>78</i>

<i>Figura 6.11 – Placa em consola.</i>	78
<i>Figura 6.12 – Deformadas da placa para $t=0.025$ s (à esquerda), $t=0.050$ s (ao centro) e $t=0.075$ s (à direita).</i>	79
<i>Figura 6.13 – Evolução do deslocamento vertical no canto superior direito da placa.</i>	79
<i>Figura A.1 – Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Método de Newmark</i>	89
<i>Figura A.2 – Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Polinómios de Legendre, $P_{max} = 14$.</i>	89
<i>Figura A.3 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Polinómios de Legendre, $P_{max} = 6$.</i>	90
<i>Figura A.4 – Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Wavelets polinomiais</i>	90
<i>Figura A.5 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Wavelets de Daubechies</i>	91
<i>Figura A.6 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Método de Newmark</i>	91
<i>Figura A.7 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Polinómios de Legendre, $P_{max} = 6$.</i>	92
<i>Figura A.8 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Polinómios de Legendre, $P_{max} = 10$.</i>	92
<i>Figura A.9 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Wavelets polinomiais - $j=1$.</i>	93
<i>Figura A.10 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Wavelets polinomiais - $j=2$.</i>	93
<i>Figura A.11 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Wavelets de Daubechies.</i>	94

ÍNDICE DE TABELAS

<i>Tabela 4.1 – Valores de j_{min} para funções da família N [3].....</i>	<i>33</i>
<i>Tabela 5.1 – Exemplo 1 – Parâmetros que caracterizam a estrutura e o carregamento.....</i>	<i>47</i>
<i>Tabela 5.2 – Erros e tempos computacionais para polinômios de Legendre.....</i>	<i>54</i>
<i>Tabela 5.3 – Erros e tempos computacionais com wavelets de Daubechies (apenas funções de escala) para $\Delta t=0.3s$.....</i>	<i>57</i>
<i>Tabela 5.4 – Tempos computacionais em wavelets de Daubechies</i>	<i>58</i>
<i>Tabela 5.5 – Exemplo 2 – Parâmetros que caracterizam a estrutura e o carregamento.....</i>	<i>59</i>
<i>Tabela 5.6 – Exemplo 3 – Características da estrutura e do carregamento.....</i>	<i>67</i>
<i>Tabela 5.7 – Tempos computacionais associados aos diferentes modelos testados.....</i>	<i>68</i>
<i>Tabela 5.8 – Tempos computacionais associados a diferentes tempos de análise.....</i>	<i>70</i>
<i>Tabela 5.9 – Exemplo 4 – Características da estrutura.....</i>	<i>70</i>
<i>Tabela 5.10 – Erros e Tempos computacionais dos diferentes métodos em análise não linear.....</i>	<i>72</i>

Lista de Abreviaturas e Símbolos

Letras latinas minúsculas

- a – Aceleração
- c – Constante de amortecimento
- f_D – Força de amortecimento
- f_S – Força de uma mola
- f_I – Força de Inércia
- g – Matriz auxiliar para a definição da base de aproximação
- g_* – Matriz auxiliar para a definição da base de aproximação
- h – Matriz auxiliar para a definição da base de aproximação
- j – Grau de refinamento em wavelets polinomiais
- j_0 – Grau de refinamento base em wavelets de Daubechies
- j_{max} – Grau de refinamento máximo em wavelets de Daubechies
- k – Constante de rigidez
- m – Massa
- t – Coordenada genérica temporal no referencial do problema
- u – Deslocamento
- v – Velocidade
- x_n – Solução escalada

Letras latinas maiúsculas

- A – Matriz de amplificação
- C – Operador de amortecimento
- E_* – Vectores próprios da matriz g_*
- $F(t)$ – Força aplicada em função do tempo
- G – Matriz auxiliar para a definição da base de aproximação
- H – Matriz auxiliar para a definição da base de aproximação
- K – Operador de rigidez
- M – Operador de massa
- N – Número da família de wavelet
- $P_{(n)}$ – Polinómios de Legendre de grau n
- T – Base de funções de aproximação definida no intervalo da aproximação
- $U_{(n)}$ – Polinómios de Chobishov de grau n
- Z_T – Matriz de transformação de coordenadas temporais

Letras gregas minúsculas

α – Parâmetro do método de Newmark

β – Parâmetro do método de Newmark

θ – Parâmetro do método de Wilson- θ

ε – Erro médio

ε_Ω – Dissipação numérica

ε_ξ – Distorção numérica

ξ – Coeficiente de amortecimento

φ – Base de funções de aproximação definidas no intervalo característico

ρ – Raio espectral

τ – Coordenada genérica temporal no referencial da função de aproximação

ω_f – Frequência angular de excitação

ω_n – Frequência angular natural

ω_D – Frequência angular amortecida

ω – Matriz auxiliar para a definição da base de aproximação

Letras gregas maiúsculas

Ω – Frequência normalizada

Ω_d – Frequência amortecida normalizada

Ω_0 – Matriz auxiliar para a definição da base de aproximação

Abreviaturas

MTI – Método misto de integração tempo

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação

Os métodos computacionais são nos dias de hoje uma ferramenta essencial na análise de estruturas em Engenharia Civil. Para a grande maioria dos problemas analisados no âmbito da Engenharia Civil, a obtenção de uma solução analítica é demasiado dispendiosa podendo mesmo ser inexistente, levando assim ao desenvolvimento de modelos de cálculo capazes de reproduzir soluções aproximadas. O estudo e desenvolvimento destes métodos, tem assim extrema importância na qualidade e desempenho da análise de estruturas de Engenharia Civil.

A disciplina da mecânica computacional, tem vindo assim a ganhar um papel muito importante na engenharia nos dias de hoje, sendo uma área onde a evolução é constante. Quando os efeitos dinâmicos são importantes para a definição da resposta de uma dada estrutura, é necessário o recurso a técnicas que permitam a determinação ao longo do tempo das grandezas que permitem caracterizar o comportamento do sistema que se pretende estudar. Nestes casos, assumem especial relevância as técnicas de integração ao longo do tempo que permitem a resolução das equações que caracterizam o comportamento desses elementos estruturais.

O objectivo desta dissertação é o de estudar o desempenho numérico do algoritmo de integração no domínio do tempo proposto por Freitas [13]. São implementadas e testadas bases de aproximação alternativas que potencialmente podem tornar esta técnica muito competitiva quando comparada com os algoritmos tradicionais.

1.2. Considerações Iniciais

Neste trabalho, onde se pretende a avaliação de diferentes modelos de integração no domínio do tempo, definem-se duas formulações alternativas para a resolução dos sistemas de equações no domínio do tempo. A formulação clássica e a formulação dita não convencional. A primeira corresponde a métodos de integração implícita no tempo, como os métodos de Newmark [22] e de Wilson [26] onde é assumido que a aceleração é representada por uma função constante ou linear, sendo as grandezas da velocidade e deslocamento obtidas a partir dessa aceleração, derivadas a partir de o teorema de valor médio ou teorema de Lagrange. Este tipo de formulação é a mais utilizada actualmente, pois para além de ser bastante intuitiva, apresenta uma enorme simplicidade na formulação do problema. Estes métodos apresentam uma relação simples entre o refinamento e a qualidade da solução, sendo que melhores resultados são obtidos através do refinamento do tipo h -, que se baseia na diminuição do intervalo de tempo considerado em cada aproximação. Este tipo de formulação apresenta no entanto algumas desvantagens sendo a impossibilidade de considerar grandes passos de tempo a principal.

O segundo tipo de formulação corresponde à “integração mista” no domínio do tempo. Esta integração considera-se como mista pois são aproximadas de forma independente as grandezas da aceleração, velocidade e deslocamento. As condições fundamentais do problema não são impostas localmente, sendo antes impostas na forma de resíduos pesados em todo o intervalo de tempo [13]. Nesta formulação é possível a consideração de uma grande variedade de funções na aproximação das grandezas dinâmicas. A escolha de bases de aproximação com funções de grau elevado permite a consideração de intervalos de tempo muito superiores aos que habitualmente é possível utilizar nos modelos clássicos. Existem nesta formulação dois tipos de refinamento. Para além do refinamento do tipo h -, existe também o refinamento do tipo p -, que se baseia no aumento do número ou grau de funções que constituem a base de aproximação utilizada.

1.3. Objectivos

Pretende-se neste trabalho o desenvolvimento, implementação e teste de um modelo misto para a integração no domínio no tempo para a resolução de problemas em regime dinâmico. Nesta dissertação é estudado o desempenho numérico de um conjunto de funções ortonormais: os polinómios de Legendre, os sistemas de wavelets de Daubechies definidos no intervalo e os sistemas de wavelets polinomiais. No caso dos sistemas de wavelets de Daubechies, duas variantes serão consideradas: a que considera a base definida apenas com recurso a funções de escala definidas com um dado grau de refinamento e a que possibilita a consideração de bases incluindo funções de escala e wavelets definidas a vários graus de refinamento.

Os resultados obtidos através da utilização deste modelo são comparados com os resultados obtidos pelos modelos clássicos. São comparadas a qualidade das aproximações obtidas bem como o esforço computacional envolvido na sua obtenção. Pretende-se ainda avaliar a eficiência de cada um dos refinamentos que se encontram à disposição em cada um dos modelos utilizados.

São testados problemas com um grau de liberdade e múltiplos graus de liberdade. Na maioria dos exemplos consideram-se problemas em regime física e geometricamente lineares. No entanto, inclui-se a discussão de um exemplo onde se consideram não-linearidades materiais para ilustrar o desempenho dos modelos nesta situação.

Por fim pretende mostrar-se o desempenho destes modelos na análise de problemas mais complexos. São analisados problemas de pórticos planos e de elasticidade plana, recorrendo-se ao método dos elementos finitos para a obtenção da solução aproximada no domínio do espaço.

1.4. Organização

O presente trabalho está dividido em sete capítulos, sendo o primeiro um capítulo introdutório onde se apresentam as motivações, os objectivos e a organização da dissertação.

No segundo capítulo são introduzidos conceitos fundamentais para a compreensão da dissertação. Será apresentada de forma genérica a base teórica da análise dinâmica.

No terceiro capítulo são apresentados os diversos modelos de cálculo utilizados na análise dinâmica computacional. São expostas as suas vantagens e limitações bem como as grandezas que são aproximadas e as possibilidades de refinamento.

O quarto capítulo tem como objectivo apresentar as diversas funções que são utilizadas na definição das bases de requeridas pelo modelo misto para a aproximação dos campos de deslocamento, velocidade e aceleração.

O quinto capítulo é dedicado à validação dos métodos de integração no tempo em análise. São descritos os testes que são realizados bem como as grandezas que são medidas e comparadas. Pretende-se indicar quais os parâmetros através dos quais se vai avaliar a qualidade de cada uma das soluções. São realizadas análises de estabilidade e convergência para os diversos métodos de integração no tempo, bem como para as várias funções de aproximação. Por fim, são estudados diversos exemplos de problemas dinâmicos. As soluções obtidas pelos vários métodos utilizados são comparadas com as soluções analíticas. É analisado para cada problema a qualidade das soluções e dos refinamentos considerados.

No sexto capítulo mostra-se o desempenho do método de integração mista quando aplicado na análise dinâmica de três problemas na área da análise de estruturas. É analisada uma viga, um pórtico plano e uma placa (estado plano de tensão).

Por fim, no sétimo capítulo são apresentadas as conclusões da dissertação bem como sugestões de desenvolvimentos futuros a realizar na área em questão.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

No presente capítulo são apresentados os conceitos teóricos que servem de base ao estudo desta dissertação. São apresentadas as grandezas intervenientes num problema dinâmico. As características dinâmicas de uma estrutura, as grandezas que caracterizam a resposta dinâmica dessa mesma estrutura, bem como as relações fundamentais que existem entre elas.

2.1. Conceitos Fundamentais de Dinâmica de Estruturas

Em primeiro lugar é introduzido o conceito de equilíbrio dinâmico. Procura-se através de um simples exemplo, apresentado em [9], elucidar acerca das forças interveniente num corpo em movimento. O exemplo esquematizado na Figura 2.1 (a) é constituído por uma massa, m , uma mola caracterizada pela rigidez, k , e um sistema de amortecimento, caracterizado pelo seu coeficiente de amortecimento, c . O corpo rígido tem a actuar sobre si o sistema de forças representado na Figura 2.1 (b).

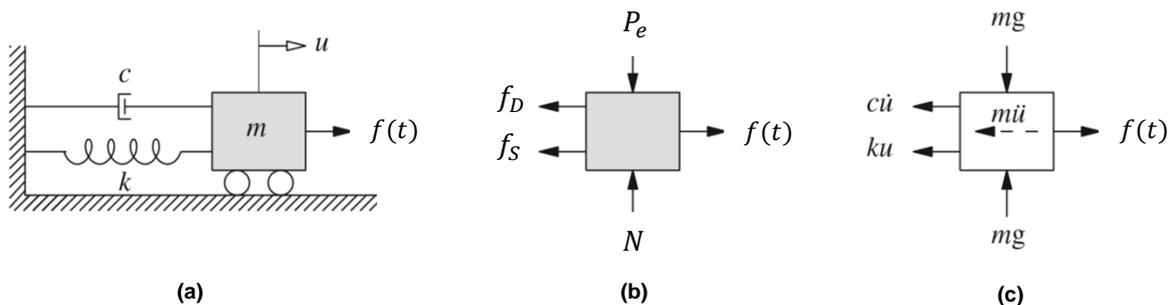


Figura 2.1 – Forças actuantes num corpo em movimento, adaptado de [9].

Na direcção vertical consideram-se o Peso, P_e , definido em (2.1) e a reacção Normal, N , definida em (2.2). Estas forças têm o mesmo módulo e sentidos contrários, pelo que naturalmente se anulam.

$$P_e = mg \quad (2.1)$$

$$N = -P_e \quad (2.2)$$

Por outro lado, na direcção horizontal, o corpo rígido tem a actuar sobre si três forças. A carga aplicada variável no tempo representada por $f(t)$, a força produzida pela mola, f_S , e a força produzida pelo amortecimento, f_D .

A força f_s representa a força transmitida pela mola ao corpo rígido. Esta força é o produto de uma rigidez característica da mola pela deformação à qual esta mola está sujeita (neste caso igual ao valor do deslocamento u).

$$f_s = ku \quad (2.3)$$

Para o caso de uma mola elástica linear, a força exercida pela mola é linearmente proporcional à deformação, sendo k uma constante.

A força f_D , representa a força transmitida pelo sistema de amortecimento ao corpo rígido. O sistema de amortecimento normalmente considerado no âmbito da Engenharia Civil é o amortecimento viscoso linear. Este tipo de amortecimento é dependente da constante de amortecimento, c , e da velocidade a que o sistema está sujeito.

$$f_D = cv \quad (2.4)$$

Finalmente, f_I representa a força de inércia. Note-se que esta é uma força virtual e por isso não se encontra representada na Figura 2.1 (b) onde se mostram as forças exteriores aplicadas ao corpo rígido. A força de inércia é dada pela segunda lei de Newton (2.5) e indica que a resultante das forças aplicadas num corpo é igual ao produto da massa pela aceleração induzida nesse corpo.

$$f_I = ma \quad (2.5)$$

O equilíbrio dinâmico pode então ser definido pela equação (2.6) ou na sua forma expandida (2.7).

$$f_i(t) + f_a(t) + f_s(t) - f(t) = 0 \quad (2.6)$$

$$ma(t) + cv(t) + ku(t) = f(t) \quad (2.7)$$

Uma vez que as grandezas da velocidade e aceleração são relacionadas com o deslocamento através das relações diferenciais introduzidas em (2.8) e (2.9), é possível rescrever a equação de movimento pela equação diferencial em (2.10), em conformidade com as forças representadas na Figura 2.1 (c).

$$v(t) = \dot{u}(t) \quad (2.8)$$

$$a(t) = \ddot{u}(t) \quad (2.9)$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (2.10)$$

Nas equações (2.8) a (2.10), $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$ representam respectivamente as derivadas temporais de primeira e segunda ordem do deslocamento (velocidades e acelerações, respectivamente). Para que

o problema de equilíbrio dinâmico fique completamente definido é necessário ainda especificar as condições iniciais do problema. Ou seja, é necessário definir o valor que as grandezas deslocamento e velocidade tomam no instante inicial da análise.

O problema de análise dinâmica com o qual nos deparamos é então traduzido por uma equação diferencial. As soluções para este tipo de problemas podem ser obtidas de forma analítica apenas em casos muito específicos e com pouco interesse do ponto de vista prático. Por esta razão existe a necessidade de utilizar métodos numéricos de forma a obter soluções aproximadas da solução real da estrutura.

Na análise da resposta dinâmica de uma determinada estrutura, é conveniente a definição de alguns parâmetros que introduzem um significado físico ao comportamento da estrutura. Assim a equação (2.10) pode ser novamente reescrita na seguinte forma:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (2.11)$$

onde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ é a frequência angular natural, que pode ser também definida por $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$, onde T_n é o período de oscilação natural, e $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$ é o coeficiente de amortecimento que é definido pelo rácio entre a constante de amortecimento e um amortecimento crítico.

Por fim define-se ainda um outro conceito, a frequência angular amortecida, ω_D . Esta grandeza é importante para se caracterizar a resposta de uma estrutura sujeita a amortecimento. A frequência angular amortecida é definida por $\omega_D = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$.

2.2. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica muito utilizada na resolução de problemas de mecânica estrutural. A formulação clássica do MEF tem como base a aproximação dos campos de deslocamentos. Essa aproximação satisfaz localmente todas as condições de compatibilidade do problema, sendo impostas de forma fraca as condições de equilíbrio, tanto no domínio quanto na fronteira.

Quando a solução do problema está "contida" na aproximação que é definida para o campo de deslocamentos, o MEF permite recuperar a solução exacta. Nos restantes casos, é obtida apenas uma solução aproximada.

O MEF baseia-se na divisão do domínio em subdomínios mais reduzidos. A escolha da discretização a considerar é feita pelo utilizador, sendo que quanto maior o número de elementos considerados,

melhor será a qualidade da aproximação obtida. No entanto, malhas muito refinadas podem estar associadas à obtenção de sistemas de equações de elevadas dimensões, o que pode ser bastante penalizador em termos de esforço computacional.

As diferentes etapas que caracterizam o Método dos Elementos Finitos quando aplicado na resolução de problemas física e geometricamente lineares são as seguintes:

- Discretizar o domínio;
- Identificar os deslocamentos independentes e as forças nodais correspondentes;
- Definir a aproximação para os campos de deslocamentos em cada um dos elementos da malha;
- Construir a matriz de rigidez, a matriz de massas e o vector das forças nodais equivalentes para cada elemento da malha;
- Construir a equação de equilíbrio global (matriz de rigidez da estrutura, matriz de massas, matriz de amortecimento e o vector de forças nodais equivalentes global), através da reunião das contribuições elementares.

É possível verificar que o sistema governativo global obtido com a aplicação do MEF pode ser escrito no formato [27]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.12)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} representam respectivamente as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez da estrutura em análise. O vector $\mathbf{P}(t)$ colige o vector nas forças nodais equivalentes aplicadas e os vectores $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ listam os valores das acelerações, velocidades e deslocamentos independentes. As condições iniciais do problema vêm dadas por:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \text{ e } \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{v}_0 \quad (2.13)$$

Para a resolução do sistema (2.12) é necessário o recurso a algoritmos de integração no domínio do tempo, algoritmos esses que serão o objecto de estudo desta dissertação.

Sempre que se pretende a determinação de frequências próprias e modos de vibração, torna-se necessária a resolução de um problema de valores e vectores próprios no qual se impõe que:

$$\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (2.14)$$

A forma clássica para se determinar a matriz de amortecimento de uma estrutura com vários graus de liberdade é através da consideração da hipótese de Rayleigh. Esta admite que a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez. De acordo com [27],

esta simplificação é admissível visto ser possível diagonalizar a matriz de massa e rigidez. Escreve-se então:

$$\mathbf{C} = a_1 \mathbf{M} + a_2 \mathbf{K} \quad (2.15)$$

onde os parâmetros a_1 e a_2 são determinados através da aplicação das equações:

$$a_1 = \xi \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (2.16)$$

$$a_2 = \xi \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (2.17)$$

nas quais ω_1 e ω_2 são as duas frequências de valor mais baixo e ξ é o coeficiente de amortecimento que se pretende determinar.

Quando o carregamento se efectua em regime estático, o sistema governativo global a resolver reduz-se a:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{P} \quad (2.18)$$

Neste caso a solução do problema requer apenas a utilização de um algoritmo para a resolução de um sistema de equações lineares.

Uma vez determinados os valores aproximados para os deslocamentos independentes (ou a sua evolução ao longo do tempo) torna-se possível:

- Determinar a aproximação para os campos deslocamentos em cada um dos elementos da malha;
- Com base nas condições de compatibilidade determinar os campos de deformações;
- Utilizando as relações constitutivas, obter a aproximação para os campos de tensões (esforços) em cada elemento.

É sempre importante efectuar uma análise crítica da solução obtida. A qualidade da solução poderá ser avaliada através da verificação das condições de equilíbrio no domínio, na fronteira estática e na fronteira entre elementos.

3. ALGORITMOS PARA INTEGRAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

No presente capítulo descrevem-se de forma sucinta os diferentes algoritmos de integração no tempo das equações de equilíbrio dinâmico implementados, testados e validados nesta dissertação.

Os modelos clássicos serão comparados com o modelo misto de integração no tempo proposto por Freitas [13]. Serão apresentadas as aproximações realizadas em cada um dos algoritmos bem como são discutidos os parâmetros que podem ser escolhidos pelo utilizador e que influenciam a resposta de cada modelo de cálculo.

3.1. Métodos Clássicos

Os modelos numéricos clássicos para a integração das equações no domínio do tempo têm como base a ideia de dividir o domínio do tempo em subdomínios tão pequenos quanto a qualidade da solução desejada. Nestes subdomínios a aceleração é aproximada por funções simples, como por exemplo uma função linear, sendo posteriormente obtidas as grandezas da velocidade e deslocamento pela relação diferencial que existe entre estas e a aceleração. Nesta secção são apresentadas as técnicas clássicas que vão ser utilizadas neste trabalho e cujo desempenho vai ser comparado com o dos modelos mistos.

Os métodos apresentados são métodos de integração directa. Esta designação vem do facto de antes da integração numérica ocorrer não existir qualquer transformação das equações que regem o comportamento do corpo a analisar.

Estes métodos partem de dois pressupostos base. Em primeiro lugar, têm como base o objectivo de satisfazer a equação de equilíbrio dinâmica apenas num conjunto discreto de instantes de tempo, separados pelo intervalo de tempo considerado. Em segundo lugar, a variação de deslocamento, velocidade e aceleração é assumida. É principalmente na maneira como é assumida a variação dessas grandezas que se encontram as diferenças entre os diferentes algoritmos.

Os métodos apresentados nesta secção partem da generalização de dois métodos mais primitivos. São eles o método da aceleração média constante e o método da aceleração linear. O primeiro destes métodos assume a aceleração como uma constante ao longo do passo de tempo considerado, enquanto que o segundo assume uma variação linear.

A implementação computacional dos métodos clássicos desenvolvida neste trabalho foi efectuada no ambiente *MatLab* [28] e baseou-se nos modelos apresentados em [5, 9].

3.1.1. Método de Newmark

Em 1959, N. M. Newmark [22] propôs um método de integração directa, sendo este obtido pela generalização do método de aceleração média constante e do método de aceleração linear.

O método de Newmark tem como vantagem o facto de o andamento das funções que aproximam as grandezas do deslocamento, velocidade e aceleração poder ser controlado pelo utilizador utilizando para isto dois parâmetros de controlo (parâmetros α e β). Neste método é assumido que o deslocamento e a velocidade verificam as expressões (3.1) e (3.2) respectivamente.

$$v_{t+\Delta t} = v_t + [(1 - \alpha)\Delta t]a_t + (\alpha\Delta t)a_{t+\Delta t} \quad (3.1)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + (\Delta t)v_t + [(0.5 - \beta)(\Delta t)^2]a_t + [\beta(\Delta t)^2]a_{t+\Delta t} \quad (3.2)$$

Os parâmetros α e β que aparecem em (3.1) e (3.2) definem a variação da aceleração em cada intervalo de tempo.

O cálculo da solução num determinado passo implica o conhecimento de todas as grandezas envolvidas no passo anterior. Assim, é necessário resolver a equação dinâmica no instante inicial, onde a aceleração é a incógnita e o deslocamento e velocidade inicial são dados do problema.

De seguida é resolvida a equação dinâmica (3.3) no instante $t + \Delta t$. Substituindo-se $v_{t+\Delta t}$ e $u_{t+\Delta t}$ na equação (3.3), pelas expressões (3.1) e (3.2), obtêm-se uma equação que tem apenas como incógnita a aceleração no instante $t + \Delta t$.

$$ma_{t+\Delta t} + cv_{t+\Delta t} + ku_{t+\Delta t} = f(t)_{t+\Delta t} \quad (3.3)$$

Para garantir a estabilidade incondicional deste método numérico é necessário assegurar duas condições. As condições de estabilidade (3.4) e (3.5) definem a gama de valores a adoptar para os parâmetros α e β , que garantem a estabilidade qualquer que seja o intervalo de tempo utilizado. No entanto a estabilidade pode ainda ser assegurada por uma terceira condição (3.6), estando esta relacionada com o intervalo de tempo máximo a considerar.

$$\alpha \geq \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \alpha \right)^2 \quad (3.5)$$

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - 2\beta}} \quad (3.6)$$

onde T_n é o período natural máximo da estrutura que se pretende avaliar.

É usual considerar $\alpha = \frac{1}{2}$ e utilizar um valor de β compreendido no intervalo de $1/6$ a $1/4$. Note-se que a estabilidade para $\beta = \frac{1}{6}$, apenas é garantida para $\Delta t < 0.551 T_n$ [10].

É por ultimo importante salientar que a selecção de $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$ corresponde à assunção da aceleração média constante. Em alternativa, a selecção de $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$ corresponde à assunção da aceleração linear.

O método de Newmark apresenta duas vantagens principais. Em primeiro lugar, é de referir a simplicidade da implementação computacional, sendo que tem como base processos computacionais simples e fáceis de aplicar. Em segundo lugar, é um método que apresenta uma relação entre qualidade e refinamento necessário muito favorável. O único parâmetro possível de refinar é o intervalo de tempo, sendo que a solução aproximada tende para a solução exacta quando o intervalo de tempo se aproxima de zero.

3.1.2. Método de Wilson- θ

O método proposto por E. L. Wilson [26] em 1973 é uma extensão do método de Newmark aplicado para aceleração linear. Este método é caracterizado pela inclusão de um parâmetro θ que influencia o intervalo de tempo onde a solução é calculada.

Neste método a aceleração é assumida como linear no intervalo de tempo $[t; t + \theta\Delta t]$ em alternativa ao que acontece no método de Newmark, em que o intervalo de tempo considerado na aproximação é $[t; t + \Delta t]$. Note-se que no caso de $\theta = 1$, não existe qualquer diferença entre este método e o método de aceleração linear de Newmark.

As grandezas aceleração (3.7), velocidade (3.8) e deslocamento (3.9) são assim definidas no instante $t + \tau$, em que τ é um valor genérico definido entre 0 e $\theta\Delta t$.

$$a_{t+\tau} = a_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (a_{t+\theta\Delta t} - a_t) \quad (3.7)$$

$$v_{t+\tau} = v_t + a_t\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (a_{t+\theta\Delta t} - a_t) \quad (3.8)$$

$$u_{t+\tau} = u_t + v_t\tau + \frac{1}{2}a_t\tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (a_{t+\theta\Delta t} - a_t) \quad (3.9)$$

Substituindo agora a variável τ por $\theta\Delta t$, obtêm-se o valor da velocidade (3.10) e deslocamento (3.11) no instante $t + \theta\Delta t$.

$$v_{t+\theta\Delta t} = v_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (a_{t+\theta\Delta t} + a_t) \quad (3.10)$$

$$u_{t+\theta\Delta t} = u_i + \theta\Delta t v_i + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} (a_{t+\theta\Delta t} + 2a_t) \quad (3.11)$$

Também a força é expressa no instante $t + \theta\Delta t$ através da expressão (3.12)

$$\bar{f}_{t+\theta\Delta t} = f_t + \theta(f_{t+\Delta t} - f_t) \quad (3.12)$$

Em seguida resolve-se a equação dinâmica no instante $t + \theta\Delta t$ (3.13), substituindo nesta as expressões da velocidade e deslocamento em (3.10) e (3.11) e ficando assim a aceleração no instante $t + \theta\Delta t$ como única incógnita, uma vez que todas as grandezas são conhecidas no início do passo. De referir que tal como no método de Newmark, é necessário resolver a equação de equilíbrio dinâmico no instante inicial para se iniciar o processo.

$$ma_{t+\theta\Delta t} + cv_{t+\theta\Delta t} + ku_{t+\theta\Delta t} = f(t)_{t+\theta\Delta t} \quad (3.13)$$

Finamente para obter os valores no momento $t + \Delta t$, é necessário realizar uma transformação final. As expressões finais da aceleração, velocidade e deslocamento apresentam-se de seguida:

$$a_{t+\Delta t} = \frac{1}{\theta} a_{t+\theta\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) a_t \quad (3.14)$$

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \frac{\Delta t}{2} (a_{t+\Delta t} + a_t) \quad (3.15)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t v_t + \frac{\Delta t^2}{6} (a_{t+\Delta t} + 2a_t) \quad (3.16)$$

Salientar ainda que para que a estabilidade deste método seja garantida é necessário respeitar $\theta \geq 1,37$. É no entanto habitual considerar $\theta = 1,40$.

A principal vantagem do método de Wilson- θ relativamente ao método de Newmark, encontra-se na possibilidade de garantir a estabilidade incondicional utilizando uma aproximação linear da aceleração.

3.2. Método misto de integração no tempo

O método misto de integração no tempo (MTI) apresentado por Arruda e Castro [2] e Freitas [13], tem como base a utilização dos conceitos de base dos modelos híbridos-mistos de elementos finitos [1, 7, 8], mas aplicada à integração no domínio do tempo. A designação de integração mista deriva do facto de se aproximarem de forma independente, em cada um dos passos no domínio do tempo, as

grandezas deslocamento, velocidade e aceleração. As relações que existem entre estas grandezas não são verificadas localmente, sendo impostas ponderadamente na forma de resíduos pesados.

Este método introduz uma grande flexibilidade na escolha das funções a incluir na base de aproximação. Esta flexibilidade permite a consideração de funções com propriedades e características especiais que potenciam a obtenção de modelos de integração altamente eficazes e computacionalmente competitivos quando comparados com os algoritmos clássicos.

O modelo misto permite a utilização de funções com grau elevado na definição das aproximações, pelo que é possível a definição de processos de refinamento p - e a consideração de passos no tempo de dimensão significativamente superior à que pode ser considerada no caso das técnicas clássicas. Podendo inclusivamente calcular-se toda a resposta num só passo de tempo.

Este algoritmo de integração pode ser visto como uma técnica de decomposição modal definida no domínio do tempo. Tal como as decomposições modais definidas no domínio do espaço, a eficiência numérica do processo de integração depende da possibilidade de se assegurar o desacoplamento das equações de movimento. Este desacoplamento é assegurado através da resolução de um problema de valores e vectores próprios definido no domínio do tempo, o qual depende apenas da base de aproximação considerada. A dimensão do problema de valores e vectores próprios é em regra bastante reduzida, dependendo apenas da dimensão da base considerada.

3.2.1. Definição das aproximações

Neste modelo de integração, são definidas para cada passo no tempo aproximações independentes para os campos de deslocamento, velocidade e aceleração, tal como indicado nas equações (3.17) a (3.19).

$$u(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{u}_n \quad (3.17)$$

$$v(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{v}_n \quad (3.18)$$

$$a(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{a}_n \quad (3.19)$$

Nas equações anteriores, $\mathbf{T}(t)$ denota um vector-linha de dimensão N que contém as funções de aproximação. Os vectores \mathbf{u}_n , \mathbf{v}_n e \mathbf{a}_n definem os pesos de aproximação correspondentes.

A equação de equilíbrio dinâmico é imposta ponderadamente na forma de resíduos pesados. Tem-se

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{T}(t)^*(m\mathbf{a} + c\mathbf{v} + k\mathbf{u} - \mathbf{f})dt = 0 \quad (3.20)$$

onde T^* representa a transposta do vector conjugado de T . Ou seja, tem-se:

$$T^* = \widehat{T}^t \quad (3.21)$$

3.2.2. Definição da base de aproximação no tempo

As funções utilizadas na aproximação dos campos de deslocamento, velocidade e aceleração, são definidas num intervalo genérico $[\tau_1, \tau_2]$, sendo τ um instante genérico desse domínio. É usual que as funções utilizadas se encontrem definidas nos intervalos $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$ que com uma simples transformação de coordenadas podem ser definidas no intervalo genérico $[\tau_1, \tau_2]$. No entanto, o intervalo no qual as funções da base de aproximação estão definidas vai influenciar a construção da equação dinâmica. Isto sucede porque quando se mapeia o intervalo de definição das funções de aproximação de $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$ para o intervalo de tempo real $[0, \Delta t]$, o valor do jacobiano da transformação é diferente. Para efeitos da dedução que se apresenta de seguida, assumiu-se uma base de funções de aproximação definidas em $[0, 1]$. As devidas adaptações necessárias a considerar na utilização de bases definidas no domínio $[-1, 1]$, serão referidas no final.

Define-se em primeiro lugar a base de aproximação no intervalo de tempo de referência, $\tau \in [0, 1]$. No vector-linha φ listam-se as funções de aproximação:

$$\varphi(\tau) = [\varphi_1(\tau) \ \varphi_2(\tau) \ \dots \ \varphi_N(\tau)] \quad (3.22)$$

Refira-se que na presente dissertação são utilizadas apenas bases de funções ortonormadas. A escolha de bases ortonormadas é altamente conveniente uma vez que facilita bastante o processo de construção da base.

A matriz de base, definida no intervalo de tempo onde será calculada a solução e utilizada nas definições de aproximação das equações (3.17) a (3.20), pode agora ser descrita da seguinte forma:

$$T(t) = \varphi(\tau)Z_T^T \quad (3.23)$$

onde Z_T é uma matriz que define a combinação linear que garante que o sistema de equações é desacoplado [13].

Para a obtenção da matriz Z_T definem-se primeiro os seguintes dois operadores escritos em função da base de funções de aproximação:

$$\mathbf{h} = \int_0^1 \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^T(\tau) \boldsymbol{\varphi}(\tau) dz \quad (3.24)$$

$$\mathbf{g} = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^T(1)\boldsymbol{\varphi}(1) - \int_0^1 \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^T(\tau)\boldsymbol{\varphi}(\tau) dz \quad (3.25)$$

onde $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$, representa o vector conjugado de $\boldsymbol{\varphi}$. Note-se que quando é escolhida uma base de funções ortonormais, é possível verificar que a matriz \mathbf{h} corresponde à matriz identidade. A partir deste instante a dependência da variável do tempo global t ou local τ , vai deixar de ser representada sendo implícita na formulação.

São agora definidos os valores (Λ) e vectores (E) próprios da matriz \mathbf{h} .

$$\mathbf{h}E = E\Lambda \quad (3.26)$$

Obtém-se de seguida uma matriz auxiliar g_* , dada por:

$$\mathbf{g}_* = \left(E\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbf{g} \left(E\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (3.27)$$

Sendo as funções $\boldsymbol{\varphi}(\tau)$ ortonormais, verifica-se que $E = I$ e $\Lambda = I$, e como consequência $g_* = g$. Mais detalhes sobre a construção do problema de valores e vectores próprios podem ser encontrados na referencia [13].

Determinam-se ainda os valores (Ω) e vectores (E_*) próprios da matriz g_* definidos em (3.28).

$$g_*E_* = E_*\Omega \quad (3.28)$$

Define-se finalmente a matriz Z_T no formato:

$$\mathbf{Z}_T = E_*^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} E^T \quad (3.29)$$

Note-se que quando se trata de um sistema ortonormado, é possível simplificar a expressão anterior uma vez que $\Lambda^{-1/2}E^T = I$. Obtendo-se agora:

$$\mathbf{Z}_T = E_*^T \quad (3.30)$$

Utilizando os operadores construídos anteriormente é agora possível definir:

$$\mathbf{H} = \widehat{\mathbf{Z}}_T \mathbf{h} \mathbf{Z}_T^T \quad (3.31)$$

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{Z}}_T \mathbf{g} \mathbf{Z}_T^T \quad (3.32)$$

É possível reescrever, quando a ortogonalidade do sistema de funções é garantido, as matrizes definidas em (3.31) e (3.32). Tem-se:

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}_*^* \mathbf{E}_* \quad (3.33)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{H} \mathbf{\Omega}_n \quad (3.34)$$

Para facilitar a escrita das equações do modelo define-se por fim o vector:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T}^*(0) \quad (3.35)$$

3.2.3. Imposição das relações entre deslocamento, velocidade e aceleração

Pretende-se agora impor as definições de velocidade e aceleração.

$$v(t) = \dot{u}(t), \quad 0 \leq t \leq \Delta t \quad (3.36)$$

$$a(t) = \dot{v}(t), \quad 0 \leq t \leq \Delta t \quad (3.37)$$

As condições (3.36) e (3.37) não são verificadas localmente, sendo impostas ponderadamente na forma de resíduos pesados. Define-se desta forma que:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^*(v - \dot{u}) dt = 0 \quad (3.38)$$

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^*(a - \dot{v}) dt = 0 \quad (3.39)$$

Integrando por partes as equações (3.38) e (3.39) obtém-se:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^* v dt = - \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{T}}^* u dt + \mathbf{T}^*(\Delta t) u(\Delta t) - \mathbf{T}^*(0) u(0) \quad (3.40)$$

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^* a dt = - \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{T}}^* v dt + \mathbf{T}^*(\Delta t) v(\Delta t) - \mathbf{T}^*(0) v(0) \quad (3.41)$$

Substituindo agora o deslocamento, velocidade e aceleração pelas aproximações definidas em (3.17), (3.18) e (3.19) obtém-se:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^* \mathbf{T} dt v_n = - \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{T}}^* \mathbf{T} dt u_n + \mathbf{T}^*(\Delta t) \mathbf{T}(\Delta t) u(\Delta t) - \mathbf{T}^*(0) u_0 \quad (3.42)$$

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^* \mathbf{T} dt a_n = - \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{T}}^* \mathbf{T} dt v_n + \mathbf{T}^*(\Delta t) \mathbf{T}(\Delta t) v(\Delta t) - \mathbf{T}^*(0) v_0 \quad (3.43)$$

onde u_0 e v_0 fazem parte das condições iniciais do problema.

Com base nas definições (3.23) a (3.25), (3.31) e (3.32) , podem reescrever-se as matrizes H e G :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^* \mathbf{T} dt \quad (3.44)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^*(\Delta t) \mathbf{T}(\Delta t) - \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{T}}^* \mathbf{T} dt \quad (3.45)$$

Reescrevendo-se as equações em (3.42) e (3.43) com a introdução das definições (3.44) e (3.45) vem:

$$\Delta t \mathbf{H} v_n = \mathbf{G} u_n - \mathbf{T}^*(0) u_0 \quad (3.46)$$

$$\Delta t \mathbf{H} a_n = \mathbf{G} v_n - \mathbf{T}^*(0) v_0 \quad (3.47)$$

Multiplicando ambas as equações por H^{-1} , aplicando as definições introduzidas em (3.34) e (3.35), e tendo em conta que Ω é uma matriz diagonal obtém-se:

$$\Delta t v_n = \Omega_n u_n - \omega u_0 \quad (3.48)$$

$$\Delta t a_n = \Omega_n v_n - \omega v_0 \quad (3.49)$$

Podem agora ser finalmente descritos os pesos da velocidade e da aceleração apenas em função dos pesos do deslocamento e das condições iniciais do problema.

$$\mathbf{v}_n = \frac{1}{\Delta t} \Omega_n u_n - \frac{1}{\Delta t} \omega u_0 \quad (3.50)$$

$$a_n = \frac{1}{\Delta t^2} \Omega_n^2 u_n - \frac{1}{\Delta t^2} \Omega_n \omega u_0 - \frac{1}{\Delta t} \omega v_0 \quad (3.51)$$

3.2.4. Resolução da equação de equilíbrio dinâmico

Substituindo na imposição ponderada da equação de equilíbrio dinâmico (3.20) a aproximação para os campos de aceleração, velocidade e deslocamento e generalizando para n graus de liberdade, obtém-se:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^* (\mathbf{M} \mathbf{a}_n + \mathbf{C} \mathbf{v}_n + \mathbf{K} \mathbf{u}_n - \mathbf{F}) dt = 0 \quad (3.52)$$

É agora possível verificar com facilidade que esta equação conduz a:

$$\Delta t \mathbf{H} (\mathbf{M} \mathbf{a}_n + \mathbf{C} \mathbf{v}_n + \mathbf{K} \mathbf{u}_n) = \int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^* \mathbf{F} dt \quad (3.53)$$

Substituindo agora na expressão (3.53) as definições (3.48) e (3.49), e multiplicando ambos os membros da equação por H^{-1} pode finalmente escrever-se a equação dinâmica na forma final:

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \boldsymbol{\Omega}_n^2 + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \boldsymbol{\Omega}_n + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_n^0 + \mathbf{F}_n \quad (3.54)$$

$$\mathbf{F}_n^0 = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \boldsymbol{\Omega}_n \boldsymbol{\omega}_n \mathbf{u}_0 + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \boldsymbol{\omega}_n \mathbf{u}_0 + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \boldsymbol{\omega}_n \mathbf{v}_0 \quad ; \quad \mathbf{F}_n = \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{H}_{nm}^{-1}}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \hat{\mathbf{T}}_m \mathbf{F} dt$$

Como foi referido anteriormente, a equação dinâmica apresentada em (3.54) foi deduzida assumindo uma base de funções de aproximação definida no intervalo $[0, 1]$. A equação equivalente obtida na utilização de uma base definida noutros intervalos pode ser obtida tendo em conta que:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{J} \int_0^{\Delta t} \mathbf{T}^* \mathbf{T} dt \quad (3.55)$$

onde J denota o jacobiano da transformação entre o referencial local onde a base de aproximação é definida e o intervalo de tempo real.

3.2.5. Parâmetros Variáveis

Uma das grandes vantagens do *MTI* em relação aos modelos clássicos, prende-se com o facto de este permitir dois tipos de refinamento. Tal como nos modelos clássicos, é possível fazer um refinamento do tipo h -, o qual tem como base o aumento do número de passos e consequentemente a diminuição do domínio a aproximar em cada passo. Por outro lado, é possível fazer também um refinamento do tipo p -, tendo este como base o aumento do grau das funções utilizadas na

aproximação. A maneira como este refinamento p - vai ser implementado vai depender do conjunto de funções utilizados para a aproximação, sendo este assunto abordado extensivamente no capítulo 4.

No modelo misto de integração no tempo é necessário definir um conjunto de parâmetros que influenciam a solução obtida. Em primeiro lugar é necessário escolher a base de aproximação. Isto implica escolher o conjunto de funções utilizadas na base. No presente texto serão utilizados quatro conjuntos de funções diferentes na base de aproximação. É também necessário definir a dimensão dessa base, ou seja, o número de funções utilizadas na aproximação das grandezas deslocamento, velocidade e aceleração. Esta dimensão será reflectida na dimensão da matriz T . O refinamento p - refere-se então ao aumento do número de funções utilizadas na base, ou seja aumentar a dimensão da matriz T .

É também necessário definir o intervalo de tempo no qual se vai aproximar a solução. Tal como nos métodos clássicos de integração no tempo, é possível escolher o passo temporal considerado. Será no entanto possível considerar passos substancialmente superiores neste método devido à possibilidade de se considerarem processos de refinamento p - muito eficazes.

Por fim, é também necessário definir o número de pontos para efectuar a integração numérica requerida pelo cálculo do termo F_n da equação (3.54). Existe um número mínimo de pontos para que a integração possa ser feita com a precisão adequada.

4. FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

Este capítulo tem como objectivo descrever o conjunto de funções utilizadas na definição das bases de aproximação requeridas pelo modelo misto de integração no domínio do tempo.

Foram utilizados e testados três tipos de funções na base de aproximação: os polinómios de Legendre, as wavelets polinomiais e as wavelets de Daubechies. Este último sistema de funções foi implementado com duas variantes: uma primeira na qual se consideram apenas funções de escala num determinado grau de refinamento e outra que contém funções de escala e wavelets com diferentes graus de refinamento. Todos os sistemas de funções considerados na construção da base de aproximação são ortonormais no seu domínio de definição.

4.1. Polinómios de Legendre

As funções polinomiais de Legendre foram introduzidas em 1784 pelo matemático francês A. M. Legendre. A utilização destas funções em modelos de elementos finitos híbridos-mistos para análise estática, estudada em [15, 18], surge como base para a utilização das mesmas no método de integração misto no domínio do tempo.

Os polinómios de Legendre são funções polinomiais de grau n definidas no intervalo $[-1,1]$. Uma base de funções de grau n , implica a utilização de todas as funções polinomiais até ao grau n em questão. Quer isto dizer que a base terá sempre $n + 1$ funções.

Estes polinómios definem-se com base nas soluções da equação diferencial (4.1).

$$(1 - x^2)\ddot{P}_n - 2x\dot{P}_n + n(n + 1)P_n = 0 \quad (4.1)$$

em que,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (4.2)$$

onde $P_n(x)$ representa o polinómio de grau n obtido pela formula de Rodriguez apresentada em [24].

Existem diversas fórmulas de recorrência utilizadas na obtenção dos polinómios de Legendre. No presente trabalho foi utilizada a fórmula recursiva de Bonnet, dada pela expressão:

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2m + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (4.3)$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$.

Na Figura 4.1 são representados os polinômios de Legendre até ao quinto grau, sendo as expressões desses polinômios apresentadas em (4.4).

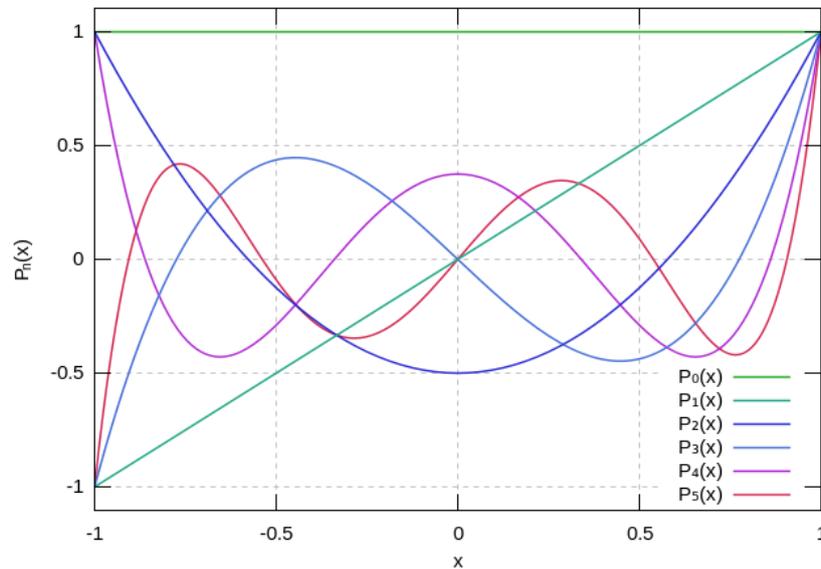


Figura 4.1 – Polinômios de Legendre até ao quinto grau.

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Para que a base de funções seja ortonormada, a fórmula recursiva de Bonnet deve escalada com recurso ao parâmetro λ_n , definido por:

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}
 \tag{4.5}$$

Obtém-se a expressão:

$$\frac{(n+1)}{\lambda_{n+1}} P_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{\lambda_n}\right) x P_n(x) - \frac{n}{\lambda_{n-1}} P_{n-1}(x)
 \tag{4.6}$$

na qual $P_0(x) = \lambda_0$ e $P_1(x) = \lambda_1 x$.

Quando comparados com as outras funções utilizadas neste trabalho na definição das bases de aproximação, os polinómios de Legendre apresentam a vantagem de poderem ser gerados e manipulados de forma bem mais simples.

Como inconveniente, pode referir-se o facto de que para graus elevados (a partir do 15º) a matriz G , definida pela equação (3.45) passa a ser mal condicionada, o que pode comprometer a qualidade e precisão dos resultados obtidos com o modelo implementado.

4.2. Sistemas de Wavelets

Os sistemas de Wavelets surgiram em 1910, quando Haar [17] desenvolve os primeiros estudos sobre este tema. Estes sistemas têm por base a discretização de funções por sistemas ortogonais e apresentam diversas características que os tornam numa ferramenta matemática muito interessante e com enormes aplicações em campos distintos. Os sistemas de wavelets foram amplamente desenvolvidos na década de 80 por Grossman e Morlet [16], Mayer [20], Mallat [19] e Daubechies [11, 12], ganhando grande aplicabilidade e introduzindo diferentes tipos de construção destes sistemas.

Os sistemas de wavelets são compostos por funções de escala e wavelets, que são usualmente simbolizados respectivamente por ϕ e ψ . As wavelets apresentam um comportamento local no domínio do espaço/tempo e também no domínio da frequência. Desta forma é espectável que tenham um bom comportamento na representação de singularidades, como por exemplo as que se encontram associadas a forças de impulso.

Outra grande vantagem associada aos sistemas de wavelets é o conceito de análise multiresolução apresentado por Mallet [19] e Mayer [20]. A multiresolução permite representar uma mesma função a diferentes níveis de resolução e permite a passagem de um nível de resolução para outro de forma eficaz. Quer isto dizer que este tipo de técnica permite representar uma imagem (ou sinal) com um dado grau de refinamento e ter em simultâneo a informação de detalhe que permite recuperar essa imagem a graus de refinamento superiores.

Quando se decompõe uma imagem, definindo-a numa base de wavelets, as funções de escala são responsáveis por “capturar” a informação média e as wavelets tratam de guardar a informação de detalhe. Desta forma, os coeficientes da expansão associados às wavelets são excelentes indicadores de onde o detalhe é importante.

A utilização de sistemas de wavelets na decomposição de sinais/imagens permite uma compressão de informação muito eficaz, sendo possível armazenar quase toda a informação num número reduzido de coeficientes. Mesmo com um pequeno número de coeficientes, o algoritmo de recomposição de imagem permite recuperar o sinal inicial com pouca perda de qualidade/“nitidez”.

Estes conceitos são ilustrados graficamente nas Figuras (4.2) e (4.3). A imagem superior da Figura 4.2 a imagem original. Na imagem inferior, no canto superior esquerdo, mostra-se a imagem original com um grau de nitidez inferior. Os quadrados adjacentes a este contêm a informação necessária para que seja possível recuperar a nitidez da imagem original.

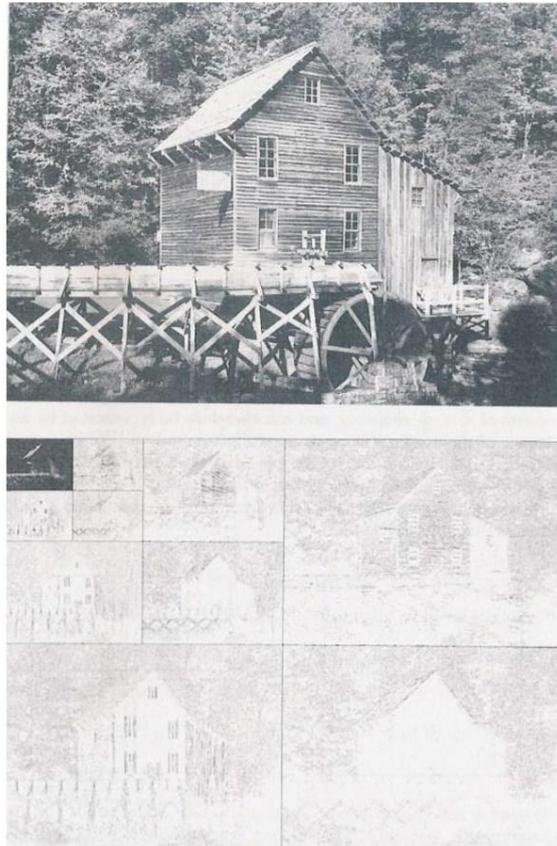


Figura 4.2 – Representação do processo de multiresolução de uma imagem, retirado de [12]

A Figura 4.3 mostra de forma esquemática o processo de adição de detalhe.

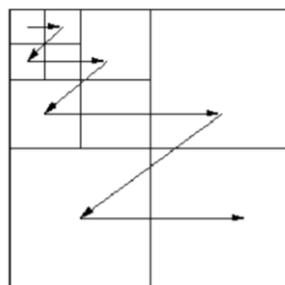


Figura 4.3 – Esquemática da adição de detalhe [29]

4.2.1. Wavelets polinomiais

Os sistemas de wavelets polinomiais foram desenvolvidos por J. Fröhlich e M. Uhlmann [15]. A utilização de sistemas de wavelets polinomiais em modelos de elementos finitos híbridos-mistos para análise estática foi estudada em [23] e surge como base para a utilização das mesmas no método de integração misto no domínio do tempo.

A construção deste sistema de wavelets baseia-se em combinações lineares de polinômios ortogonais de Legendre. Os coeficientes de cada polinômio são determinados através das raízes dos polinômios de Chebyshev do segundo tipo. Mais detalhes sobre a construção deste sistema de wavelets podem ser encontrados na referência [14].

As funções de escala, $\phi_{ji}(x)$, são definidas através da seguinte expressão.

$$\phi_{ji}(x) = C_{ji}^{\phi} \sum_{k=0}^{2^j} U_k(y_i^{(2^{j+1})}) \sqrt{k + \frac{1}{2}} P_k(x) \quad (4.7)$$

com $j=0,1,\dots$ e $i=0,1,\dots,2^j$.

Por seu lado as wavelets, $\Psi_{ji}(x)$, são definidas por:

$$\Psi_{ji}(x) = C_{ji}^{\Psi} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} U_k(y_i^{(2^j)}) \sqrt{k + \frac{1}{2}} P_k(x) \quad (4.8)$$

com $j=0,1,\dots$ e $i=0,1,\dots,2^j - 1$.

Nas equações anteriores, $P_k(x)$ representa o polinômio de Legendre e $U_k(x)$ representa o polinômio de Chebishev de segundo tipo. Os polinômios de Chebishev de segundo tipo são definidos por:

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x) \quad (4.9)$$

com $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$.

O suporte das funções de escala e das wavelets é dado por:

$$\text{supp } \phi_{ji}(x) = \text{supp } \psi_{ji}(x) = [-1,1] \quad (4.10)$$

Os parâmetros $y_i^{(n)}$ utilizados nas equações (4.7) e (4.8) correspondem aos zeros do polinômio de Chebishev de segundo tipo de grau n. São dados por:

$$y_i^{(n)} = -\cos\left(\frac{(i+1)\pi}{n+1}\right), \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (4.11)$$

Os coeficientes C_{ji}^Φ e C_{ji}^Ψ são definidos por:

$$C_{ji}^\Phi = \sqrt{\frac{2}{2^j+2}} \sin\left(\frac{(i+1)\pi}{2^j+2}\right) \quad (4.12)$$

$$C_{ji}^\Psi = \sqrt{\frac{2}{2^j+1}} \sin\left(\frac{(i+1)\pi}{2^j+1}\right) \quad (4.13)$$

Uma base para o espaço $L_2([-1,1])$ é definida pelo seguinte conjunto de funções:

$$\left\{ \Phi_{00}(x); \Phi_{01}(x); \{\Psi_{ji}(x)\}_{j=0,1,\dots,j_{max} \quad i=0,1,\dots,2^j-1} \right\}$$

Para um dado nível de resolução, j , encontram-se definidas 2^j wavelets. Não é então difícil de demonstrar que o número total de funções na base é dado por $n = 2^{j_{max}+1} + 1$. A consideração desta base permite representar de forma exacta polinómios de grau igual ou inferior a $n = 2^{j_{max}+1}$.

Na Figura 4.4 representam-se as funções de escala e wavelets para $j=0$, $j=1$ e $j=2$.

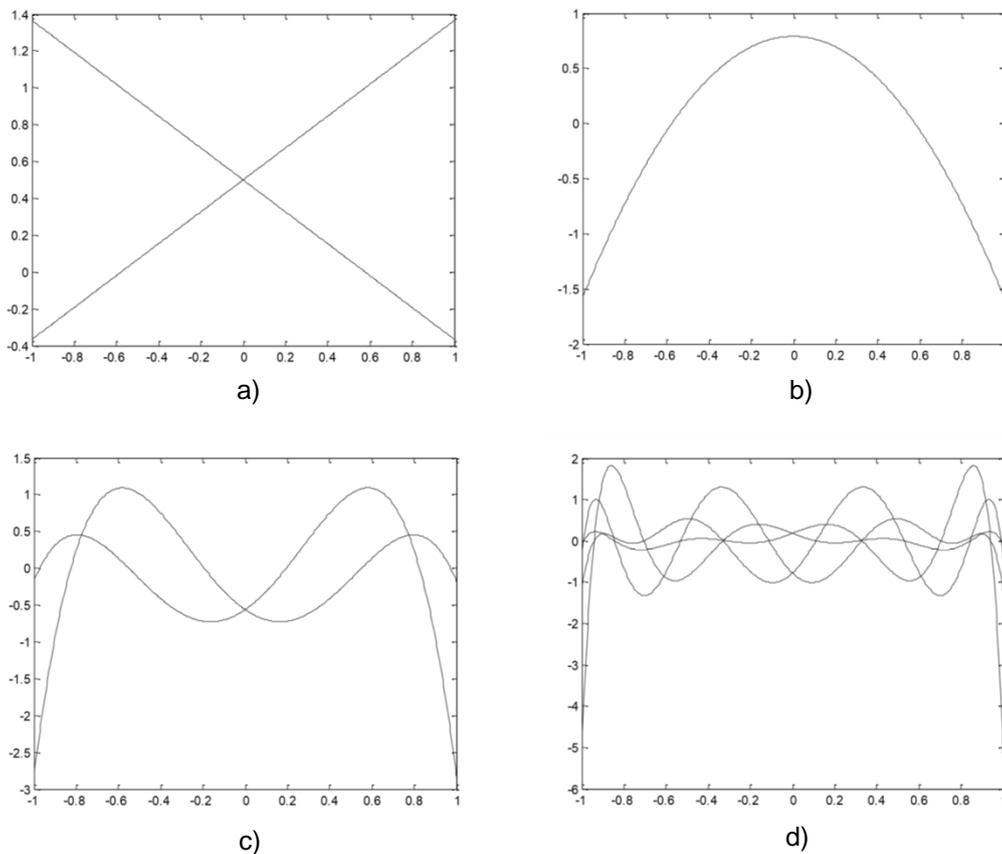


Figura 4.4 – a) Função de escala. b) Wavelet para $j=0$. c) Wavelets para $j=1$. d) Wavelets para $j=2$.

Neste sistema de wavelets, o refinamento do tipo p - passa pelo aumento do grau de refinamento máximo, j . Note-se que ao contrário do sistema de polinómios de Legendre, não é possível aumentar a base em uma só função de cada vez. A título de exemplo, um refinamento de grau dois para o grau três, representa um aumento de oito funções.

As wavelets polinomiais têm, quando comparadas com os polinómios de Legendre, a vantagem de possuírem as propriedades dos sistemas de wavelets, o que introduz a possibilidade de se definirem processos de refinamento baseados nos conceitos da análise multiresolução. Quer isto dizer que ao ser construída a base de aproximação, e quando se acrescenta um novo nível de resolução, apenas algumas funções (as que se localizam na zona onde é necessária uma discretização mais fina) necessitam de ser incluídas. Essas zonas podem ser identificadas com base nos pesos associados a cada uma das funções (wavelets) no grau de refinamento inferior. Esta técnica pode levar à construção de processos de refinamento adaptativos muito eficazes.

Na implementação que foi efectuada no âmbito desta dissertação, esta possibilidade ainda não foi considerada. Ou seja, em todos os graus de refinamento considerados na base de aproximação foram incluídas todas as funções. Este facto torna a base de aproximação desnecessariamente “pesada”, e impossibilita que as potencialidades decorrentes da utilização de um sistema de wavelets sejam convenientemente exploradas.

A definição dos processos de refinamento adaptativo referidos anteriormente requerem um tratamento algorítmico mais sofisticado do modelo apresentado, pelo que serão tratadas apenas em trabalhos futuros.

4.2.2. Wavelets de Daubechies

Em 1988, Daubechies [11, 12] propõe um novo sistema de wavelets. As wavelets de Daubechies formam sistemas completos de funções ortonormais. Estes sistemas são gerados através da obtenção da função de escala definida em (4.14).

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k \phi(2x - k) \quad (4.14)$$

onde o parâmetro a_k é designado por coeficiente de filtro e tem como objectivo assegurar que o sistema de wavelets possui determinadas características [6].

Os sistemas de wavelets de Daubechies encontram-se organizados por diferentes famílias. Uma família é caracterizada por um valor N , que corresponde a metade do número de coeficientes de filtro utilizados na equação (4.14).

Para gerar um sistema de wavelets, para além das funções de escala é ainda preciso definir uma outra função, a wavelet primária:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_{2N-1-k} \phi(2x - k) \quad (4.15)$$

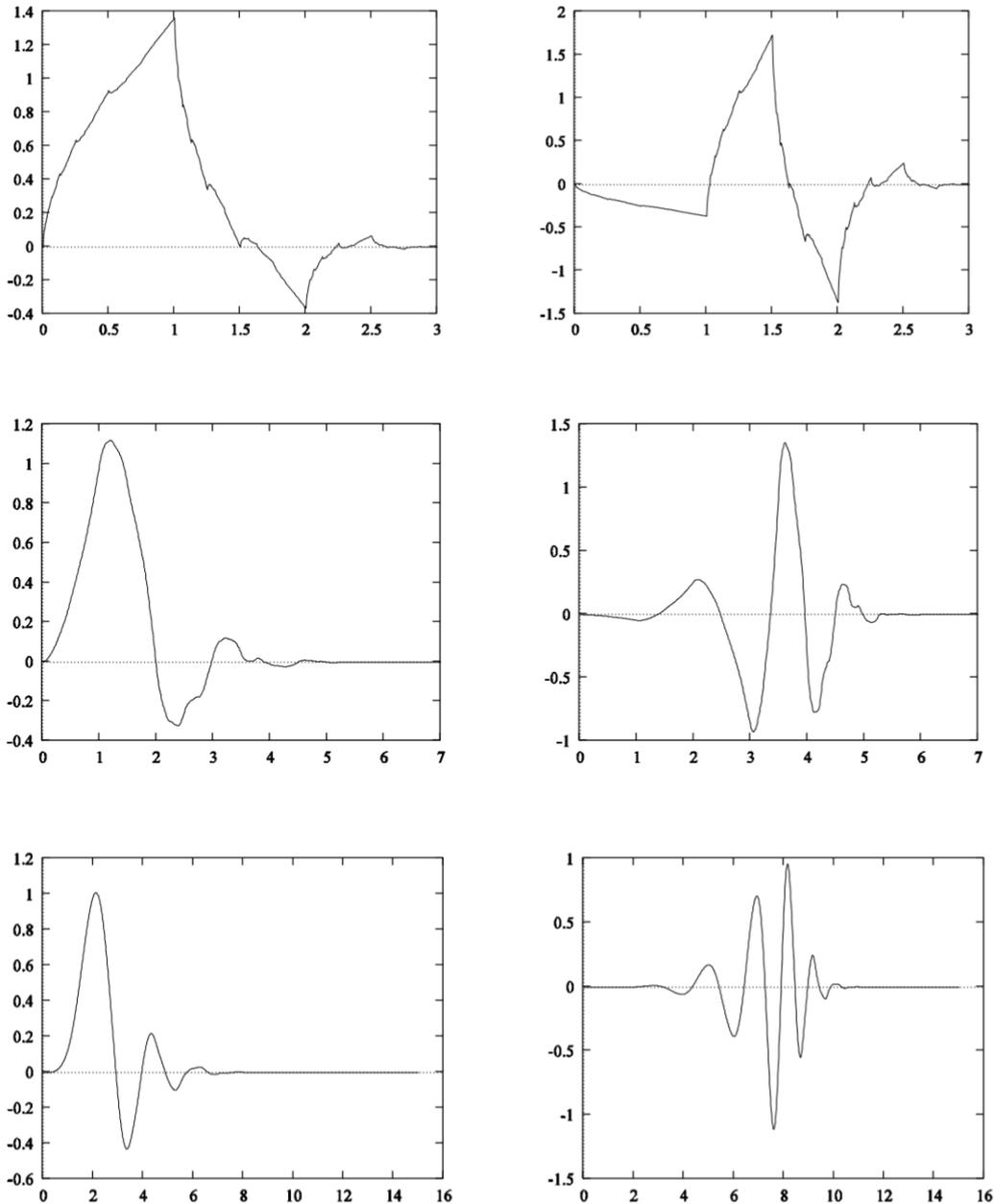


Figura 4.5 – Funções de escala (à esquerda) e wavelets primárias (à direita) para $N=2, 4$ e 8 (por ordem descendente)

As funções de escala e wavelets são definidas no intervalo $[0, 2N-1]$. A este domínio é usual chamar de suporte. Neste sistema de funções é possível, através de uma família de wavelets de valor N , representar um polinómio de grau igual ou inferior a $N - 1$ de forma exacta.

Na Figura 4.5 são apresentadas as funções de escala (à esquerda) e as wavelets primárias (à direita) para as famílias N=2,4 e 8.

O sistema completo de funções é obtido considerando as operações de translação e dilatação. Estas actuam sobre a função de escala bem como sobre a wavelet primária. São então definidas como:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k) \quad (4.16)$$

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\Psi(2^j x - k) \quad (4.17)$$

O suporte (intervalo de definição) de cada uma destas funções é dado por:

$$\text{supp } \phi_{j,k}(x) = \text{supp } \psi_{j,k}(x) = [k \times 2^{-j}, (2N - 1 + k) \times 2^{-j}] \quad (4.18)$$

Na Figura 4.6 são ilustradas as operações de translação e dilatação.

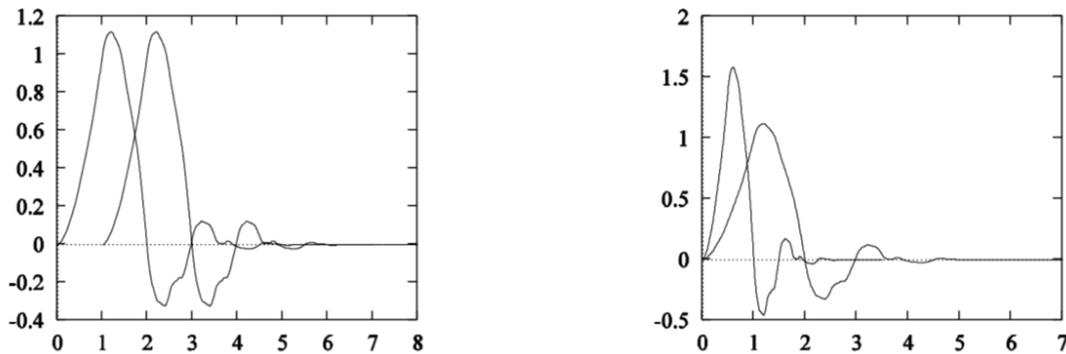


Figura 4.6 – Translação (à esquerda) e Dilatação (à direita) aplicadas à função de escala de N=4.

Os sistemas de wavelets acima descritos permitem definir bases de aproximação para todas as funções definidas em R. Quando se pretende definir uma aproximação num intervalo fechado e limitado, surge a seguinte questão: o que fazer com as funções que intersectam as extremidades do intervalo considerado?

A resolução desta questão passa pela construção de sistemas de wavelets definidos no intervalo. Nesta nova construção, as funções que intersectam os limites do intervalo são modificadas por forma a que se consiga construir um sistema de funções que permita definir uma análise multiresolução no intervalo considerado. Os algoritmos envolvidos nesta modificação foram apresentados por Monasse [21], seguindo a ideia original de Cohen [11]. A sua explicação detalhada pode ser encontrada em Barbosa [3] e Castro [7].

Na definição de uma base de aproximação com sistemas de wavelets no intervalo $[0,1]$ é necessário considerar um grau de refinamento mínimo, j_0 , que tem por finalidade garantir que as funções definidas no limite esquerdo do intervalo não intersectem as funções definidas no extremo oposto.

Na base assim definida existem 2^j funções (funções de escala ou wavelets) para cada grau de refinamento j .

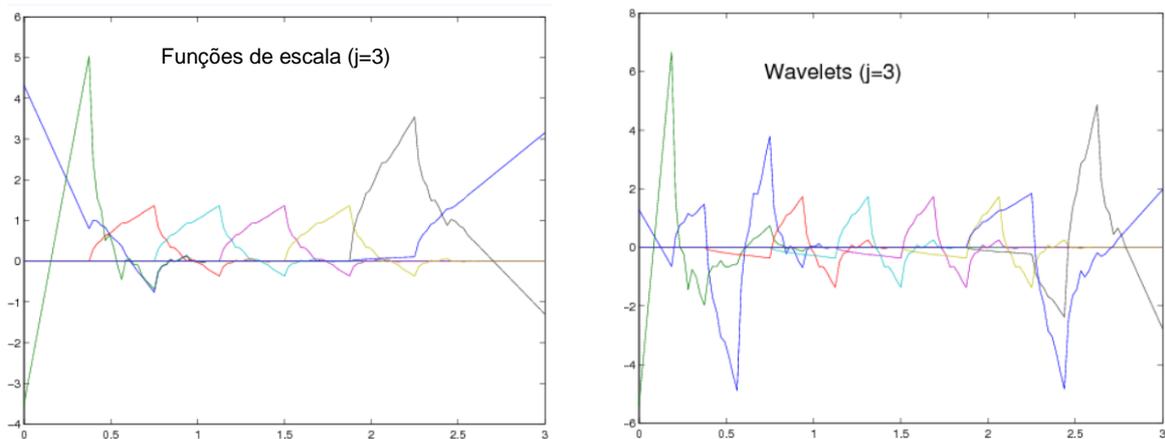
Com os sistemas de wavelets de Daubechies definidos no intervalo há duas formas alternativas de se definirem as bases de aproximação. Na primeira hipótese, consideram-se apenas funções de escala a um dado grau de refinamento $j_{esc} \geq j_0$. A base de aproximação inclui, neste caso, as seguintes funções:

$$\{\phi_{j_{esc},k}(x), k = 1, 2, \dots, 2^{j_{esc}}\} \quad (4.19)$$

Na segunda hipótese, a base é construída incluindo as funções de escala com o grau de refinamento mínimo, j_0 , e todas as wavelets com refinamento compreendido entre o grau mínimo, j_0 , e o grau máximo, j_{max} . Neste caso, a base de aproximação inclui as funções:

$$\phi_{j_0,k}(x), k = 1, 2, \dots, 2^{j_0}; \quad \psi_{j,l}(x), j_0 \leq j \leq j_{max} \text{ e } l = 1, 2, \dots, 2^j \quad (4.20)$$

Na Figura 4.7 apresentam-se as funções a utilizar nesta base de aproximação quando se considera $N=2$, $j_0 = 3$, e $j_{max} = 5$.



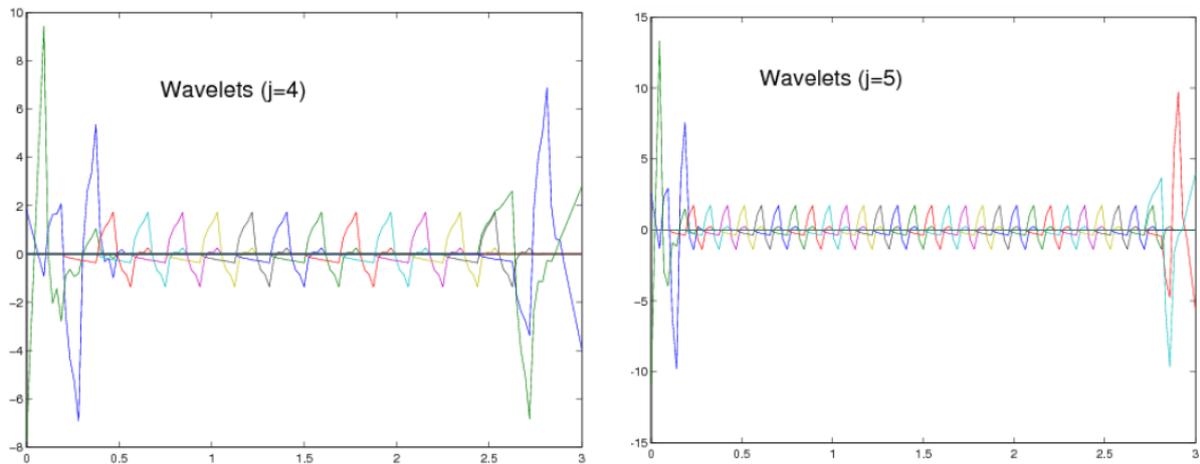


Figura 4.7 – Base de wavelets no intervalo considerando $N = 2, j_0 = 3, e j_{max} = 5$

Existe uma correlação entre o número de família, N , e o grau de refinamento mínimo, j_0 a considerar, este estudo pode ser encontrado com detalhe em [3]. Apresenta-se de seguida na Tabela 4.1 os valores mínimos do parâmetro j_0 , que é necessários considerar para cada família de funções N .

Tabela 4.1 – Valores de j_{min} para funções da família N [3].

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j_{min}	3	4	4	5	5	5	5	6	6

Os sistemas de wavelets de Daubechies têm a vantagem de permitirem a implementação de processos de refinamento muito eficazes baseados nas técnicas da análise multiresolução. Tal como descrito no caso das wavelets polinomiais, é possível a consideração de refinamentos não-uniformes, o que corresponde a incluir na base apenas parte das funções em cada um dos graus de refinamento. Tal como no caso anterior, também no caso das wavelets de Daubechies este refinamento adaptativo não foi considerado nas implementações efectuadas no âmbito desta dissertação.

Tal como se pode verificar nos capítulos seguintes, os sistemas de wavelets de Daubechies conduzem à construção de bases de aproximação muito robustas e estáveis. A principal limitação destes sistemas tem a ver com a necessidade de se definir um grau de refinamento mínimo, o que obriga sempre a considerar bases com um número de funções sempre elevado. Este facto menos positivo pode ser minimizado quando se implementarem os processos de refinamento adaptativo.

5. TESTES DE VALIDAÇÃO E ESTUDO DE CONVÊRGENCIA

Este capítulo tem por objectivo a avaliação do desempenho numérico dos modelos mistos de integração no domínio do tempo. Pretende-se efectuar a validação dos modelos propostos comparando os resultados obtidos com soluções analíticas ou com soluções obtidas com técnicas numéricas de referência. É objectivo deste capítulo avaliar ainda a estabilidade e a convergência assegurados pelo modelo proposto quando se consideram as bases de aproximação alternativas que se pretendem estudar. É também finalidade dos exemplos de teste aqui apresentados a discussão da eficiência relativa dos processos de refinamento h - e p -.

5.1. Formulação dos Testes

Esta secção é destinada à definição dos testes a realizar de modo a aferir a qualidade dos modelos implementados. São aqui discutidos quais os parâmetros que condicionam a obtenção de uma boa aproximação para a solução bem como os testes a realizar de maneira a estimar o valor adequado para cada um destes parâmetros.

Esta secção encontra-se dividida em três partes. Em primeiro lugar são definidos os objectivos dos testes numéricos que vão ser apresentados e discutidos quais os parâmetros que podem condicionar o desempenho do modelo em estudo. De seguida são definidos os indicadores utilizados para caracterizar a qualidade solução. Por fim, é apresentado o modo como cada método vai ser testado de forma a aferir os valores a considerar para os parâmetros definidos anteriormente.

5.1.1. Objectivos

Numa análise numérica a característica mais importante é a qualidade da aproximação que é possível obter. Esta pode ser medida de diversas formas mas de um modo geral o que se pretende avaliar é a proximidade entre a aproximação e a solução exacta

É importante também identificar qual o esforço computacional que é associado a cada solução. É certo que todos os métodos devem ser capazes de apresentar resultados muito próximos do teórico, mas é importante que o façam com o menor esforço computacional possível para que possam ser considerados eficientes. A eficácia de um procedimento numérico pode então ser entendida como a relação entre a proximidade da solução analítica e a quantidade de esforço computacional despendido na sua obtenção.

Por último é também interessante avaliar a eficiência de cada tipo de refinamento medida de novo tendo em conta a relação qualidade – esforço computacional. Este aspecto tem especial interesse

quando se considera o modelo misto de integração no domínio do tempo, visto que esta técnica apresenta dois tipos de refinamento possíveis, refinamento h - ou p -.

5.1.2. Parâmetros de Medição

Definem-se agora os parâmetros que vão ser utilizados para caracterizar a qualidade de uma solução aproximada.

1. Desvio do Valor Máximo

Com este parâmetro pretende-se determinar a diferença máxima, em valor absoluto, entre os deslocamentos, velocidade e acelerações aproximados e a solução analítica. Este parâmetro tem como objectivo aferir se cada aproximação é ou não conservativa. Uma solução foi considerada conservativa neste contexto caso apresente resultados para as grandezas dinâmicas, superiores à solução exacta.

2. Erro médio

A Soma de Quadrados Residual (SQR) é um parâmetro estatístico que representa a soma dos quadrados das diferenças entre uma determinada aproximação estatística em relação ao valor previsto analiticamente. É a medida da discrepância entre os dados teóricos e o modelo de aproximação. Um baixo valor de SQR indica que a aproximação se aproxima dos dados teóricos.

A SQR é obtida por:

$$SQR = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (5.1)$$

onde y_i corresponde à solução analítica e $f(x_i)$ corresponde aos valores obtidos na aproximação.

De forma a comparar soluções com número de amostras diferente, divide-se o valor de SQR pelo número de pontos onde a aproximação é calculada, denotado na equação (5.2) pelo parâmetro n . Por fim, de forma a escalar o erro, divide-se este valor pelo quadrado do máximo absoluto da solução.

$$\varepsilon = \frac{SQR}{n \times \max(y)^2} \quad (5.2)$$

A opção por este parâmetro em alternativa a um parâmetro que mede o erro absoluto médio relativo, deve-se à necessidade de penalizar os desvios mais relevantes em relação ao menos relevantes.

3. Esforço computacional

Por fim, para caracterizar o esforço computacional despendido em cada análise, procede-se à medição do tempo que cada um dos modelos de cálculo demora a executar o procedimento numérico. De forma a minimizar a influência da capacidade de funcionamento do computador, recorreu-se à função *cputime* definida no *MatLab*, que tem como função medir o tempo em que o processador se encontra activo durante cada análise.

5.1.3. Modelo de Testes

Numa primeira instância foram realizados testes de estabilidade. Estes testes têm como objectivo aferir a estabilidade e a convergência de cada um dos métodos de análise. Este tema será explorado na Secção 5.2.

De forma a aferir a qualidade de cada um dos modelos de cálculo, foi seleccionado um conjunto de problemas o mais diverso possível. Numa primeira fase foram testados problemas com um grau de liberdade em análise linear. Estes problemas têm a vantagem de ter uma solução analítica bem definida quando a carga aplicada for suficientemente simples. Serão então avaliados dois problemas com um grau de liberdade. Um primeiro onde se aplica uma carga sinusoidal e um segundo onde se aplica uma carga de impulso.

O objectivo destas duas análises prende-se com o facto de estes dois problemas apresentarem dois tipos de solução muito diferente. Enquanto que a carga sinusoidal é regular em todo o domínio, a carga de impulso representa uma variação brusca localizada num determinado ponto do domínio. Esta diferença nos problemas pode conduzir a diferentes qualidades de resultados para cada método, sendo por isso interessante estudar os dois casos.

Numa fase posterior estuda-se um problema com dois graus de liberdade, também em regime linear, e com um carregamento sinusoidal associado a cada um dos graus considerados.

Por fim, apresenta-se um caso de uma análise não linear, apenas com o intuito de explorar as potencialidades dos diversos métodos numa análise deste tipo.

O primeiro passo a realizar para cada problema de teste corresponde à obtenção da respectiva solução analítica. Quando não for possível obter esta solução, adoptar-se-á a metodologia de efectuar uma análise recorrendo ao método de Newmark com um grau de refinamento muitíssimo superior aos graus de refinamento utilizados nos testes. Sendo assim, a solução obtida é considerada como uma solução suficientemente próxima da analítica.

Cada um dos problemas em cima referidos foi analisado recorrendo a todos os métodos de análise descritos no terceiro capítulo. Para cada um dos problemas resolvidos com cada um dos métodos foi realizado um conjunto de análises de forma a estudar a eficiência de cada tipo de refinamento.

Com este conjunto de análises pretende-se avaliar o impacto de cada refinamento na qualidade da solução. Para cada uma destas análises foram então medidos todos os parâmetros apresentados na Secção 5.1.2. No caso dos métodos clássicos abordados na Secção 3.1, é apenas permitido realizar o refinamento do tipo h - . Nestas análises realizaram-se uma série de testes em que foram considerados passos no tempo, Δt , com valores diferentes.

Quando foi utilizado o método misto de integração no domínio do tempo, e de forma a obter informação sobre os dois tipos de refinamento, foi realizada uma série de testes onde se utilizou um conjunto de valores distintos para o incremento temporal a considerar, Δt , combinados com um conjunto de valores de refinamento do grau da função, sendo que este parâmetro a refinar depende, como já foi referido anteriormente, do tipo de função considerada.

5.2. Estabilidade

Nesta secção pretende-se descrever e verificar as condições de estabilidade e convergência dos diferentes métodos de resolução de equações de segunda ordem no domínio do tempo.

Começa-se por rescrever a equação dinâmica (2.7) na forma canónica (5.3), multiplicando para este efeito ambos os membros da equação por $\Delta t^2/M$.

$$\Delta t^2 a + 2\xi\Omega\Delta t v + \Omega^2 u = \frac{\Omega^2}{K} f \quad (5.3)$$

onde $\Omega = \omega_n \Delta t$, é a frequência angular normalizada.

A solução num determinado momento pode ser obtida através da solução no momento exactamente anterior através da equação:

$$x_n = Ax_{n-1} + L \quad (5.4)$$

onde $x_n^T = \{u_n \Delta t v_n \Delta t^2 a_n\}$ é um vector que contém a solução escalada, A é a matriz de amplificação e L é um vector de correcção relacionado com o carregamento aplicado no intervalo de tempo.

Define-se de seguida o raio espectral da matriz de amplificação. O raio espectral de uma matriz quadrática é definido como sendo a norma do maior valor próprio dessa matriz. Pode então escrever-se da seguinte forma:

$$\rho(A) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (5.5)$$

onde α e β , são respectivamente as partes reais e imaginárias do maior valor próprio da matriz A .

Os vectores próprios são conhecidos e podem ser escritos na seguinte forma:

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = \alpha + \beta i; \lambda_3 = \alpha - \beta i \quad (5.6)$$

onde α e β tomam os seguintes valores:

$$\alpha = \rho(A)\cos(\Omega_d) \quad (5.7)$$

$$\beta = \rho(A)\sin(\Omega_d) \quad (5.8)$$

Nas equações anteriores, o parâmetro $\Omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}\Omega$ corresponde à frequência amortecida normalizada. Desta forma, é possível escrever o raio espectral da matriz de amplificação da solução exacta em função da frequência normalizada e do coeficiente de amortecimento:

$$\rho(A) = e^{-\xi\Omega} \quad (5.9)$$

No caso de uma aproximação numérica é também possível escrever a solução num determinado momento com base na solução no instante anterior e de uma matriz \bar{A} e \bar{L} . A definição da matriz de amplificação numérica pode ser encontrada em [13].

A matriz \bar{A} será obviamente dependente da qualidade da aproximação de cada método numérico. Um método numérico será tanto melhor quanto mais a matriz \bar{A} que define a sua aproximação se aproximar da matriz A referente à solução exacta. Estas matrizes serão comparadas com base nos seus raios espectrais.

Para uma matriz \bar{A} correspondente a uma aproximação numérica, o raio espectral pode então ser definido como:

$$\rho(\bar{A}) = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2} \quad (5.10)$$

onde $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são respectivamente a parcela real e imaginária do maior valor próprio.

A estabilidade incondicional de qualquer método de integração numérica é assegurada pela condição:

$$\rho(\bar{A}) \leq 1 \quad (5.11)$$

Para além da garantia da estabilidade incondicional de um método, é possível também avaliar a qualidade da solução no final de cada passo. A qualidade de uma aproximação numérica será tanto melhor quanto mais próxima seja a curva do raio espectral dessa aproximação e a curva de raio espectral teórico.

É ainda importante salientar que o andamento da resposta entre o ponto inicial e o ponto final não pode ser avaliado pelo raio espectral visto que a matriz de amplificação é utilizada para obter a solução no final do intervalo de tempo considerado. Desta forma a coincidência com o valor do raio espectral teórico não quer obrigatoriamente que a resposta é aceitável, mas sim que no fim do passo considerado a solução é aceitável.

São também definidos através dos valores próprios da matriz de amplificação numérica as estimativas numéricas da frequência amortecida e não amortecida. Define-se:

$$\bar{\Omega}_d = \tan^{-1}(\bar{\beta}/\bar{\alpha}) \quad (5.12)$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_d / \sqrt{1 - \bar{\xi}^2} \quad (5.13)$$

$$\bar{\xi} = -\ln(\bar{\rho}(A)) / \bar{\Omega} \quad (5.14)$$

São também definidos dois parâmetros que permitem medir a distorção (5.15) e dissipação (5.16) numérica da solução aproximada. Estas medidas pretendem avaliar o erro na aproximação da frequência e do amortecimento.

$$\varepsilon_{\Omega} = 1 - \bar{\Omega}_d / \Omega_d \quad (5.15)$$

$$\varepsilon_{\xi} = 1 - \bar{\xi} / \xi \quad (5.16)$$

Mostram-se de seguida os valores obtidos para o raio espectral definido em (5.10) variando com a frequência normalizada. Apresentam-se em primeiro lugar na Figura 5.1, as curvas do raio espectral para os métodos clássicos de Newmark e Wilson- θ , com amortecimento nulo (à esquerda) e amortecimento de 5% (à direita).

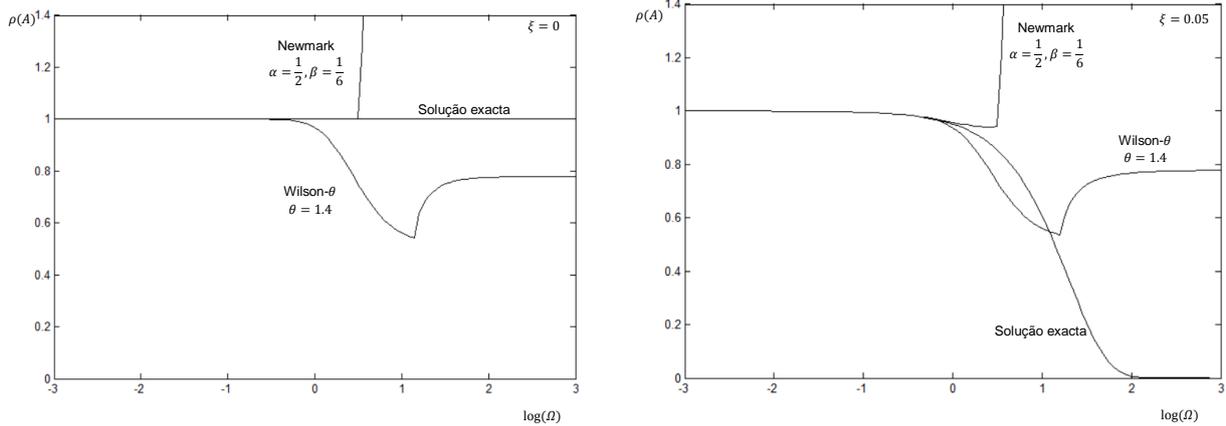


Figura 5.1 – Raio espectral obtido com método de Newmark e método Wilson- θ .

Pode concluir-se que o método Wilson- θ garante a estabilidade incondicional. Por outro lado, o método de Newmark não apresenta estabilidade incondicional para os parâmetros α e β considerados. Ambos os métodos apresentam valores de raio espectral próximo da solução exacta para valores de frequência normalizada reduzida. Para valores de frequência normalizada elevados ambos os métodos apresentam valores de raio espectral distantes da solução exacta.

Mostram-se agora as curvas do raio espectral para o modelo misto de integração no tempo. Em primeiro lugar mostram-se os resultados obtidos com os modelos baseados na aproximação com polinómios de Legendre. Na Figura 5.2, apresentam-se as curvas que mostram a evolução do raio espectral em função da frequência normalizada considerada. Mostram-se as curvas para diversos graus máximos de polinómios considerados na base, bem com para dois casos de amortecimento: um primeiro com amortecimento nulo (à esquerda) e um outro com amortecimento de 5% (à direita).

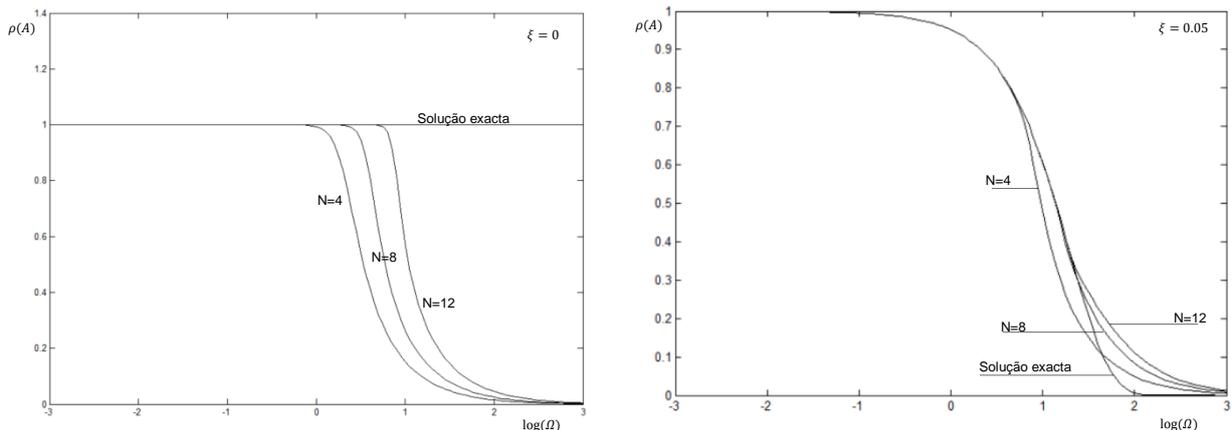


Figura 5.2 – Raio espectral obtido com polinómios de Legendre.

A primeira conclusão a ser retirada é a de que qualquer que seja o grau do polinómio considerado, na região das baixas frequências normalizadas, todas as aproximações coincidem com a solução exacta. Recorde-se que a definição de frequência normalizada é dada pelo produto da frequência

natural pelo intervalo de tempo considerado na análise. Quer isto dizer que para um dado problema com uma determinada frequência natural constante, a diminuição de Ω , implica a diminuição do intervalo de tempo considerado. Este resultado é então espectável visto que salienta o facto de que a qualidade da aproximação é tanto melhor quanto mais pequeno for o intervalo de tempo considerado. Por outro lado, no caso de existir amortecimento não nulo para frequências normalizadas muito elevadas, são também obtidos resultados muito favoráveis.

É também possível observar que quanto maior for o grau máximo dos polinómios considerados na aproximação, mais próxima a curva do raio espectral se encontra da curva correspondente à solução exacta. Este resultado é mais uma vez espectável. É importante referir que de acordo com o critério definido em (5.11), a estabilidade é assegurada em todo o domínio de frequências normalizadas. Por fim, resta referir que no caso em que o amortecimento é nulo, existe uma evidente discrepância entre o valor do raio espectral da solução exacta e de todas as aproximações para frequências normalizadas elevadas.

Na Figura 5.3, apresentam-se as curvas com a variação do raio espectral em função do valor da frequência normalizada para as aproximações obtidas através dos sistemas de wavelets polinomiais. Apresenta-se mais uma vez o caso do amortecimento ser nulo (à esquerda), e do amortecimento de 5% (à direita).

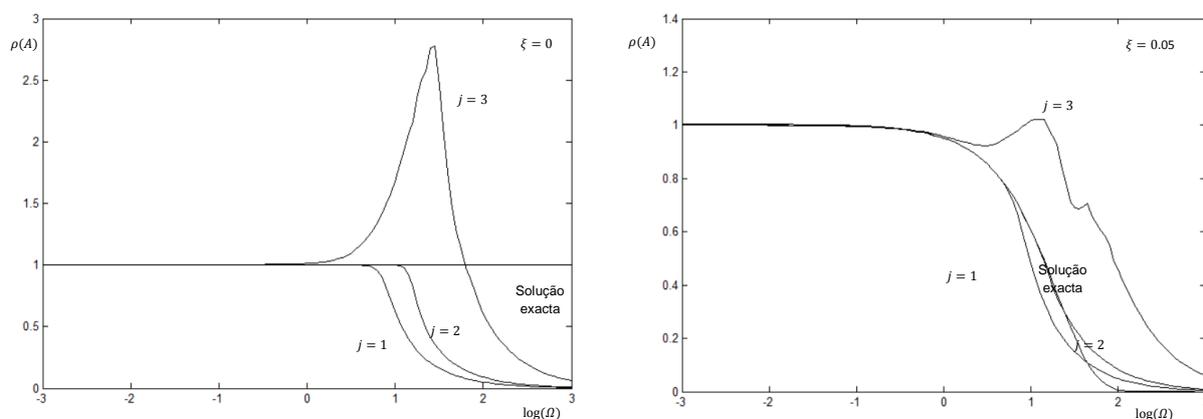


Figura 5.3 – Raio espectral em wavelets polinomiais

Os resultados do raio espectral obtidos no uso de wavelets polinomiais, são análogos aos que foram obtidos para os polinómios de Legendre. Pode também observar-se nesta figura, a instabilidade associada à utilização de $j = 3$. Para este grau de refinamento não é possível garantir a estabilidade da aproximação, como acontece na consideração de valores de j mais reduzidos.

De seguida apresentam-se nas Figuras 5.4 e 5.5, as curvas com a evolução do raio espectral para os casos em que se consideram bases construídas com os sistemas de wavelets de Daubechies, respectivamente só com funções de escala e com funções de escala e wavelets.

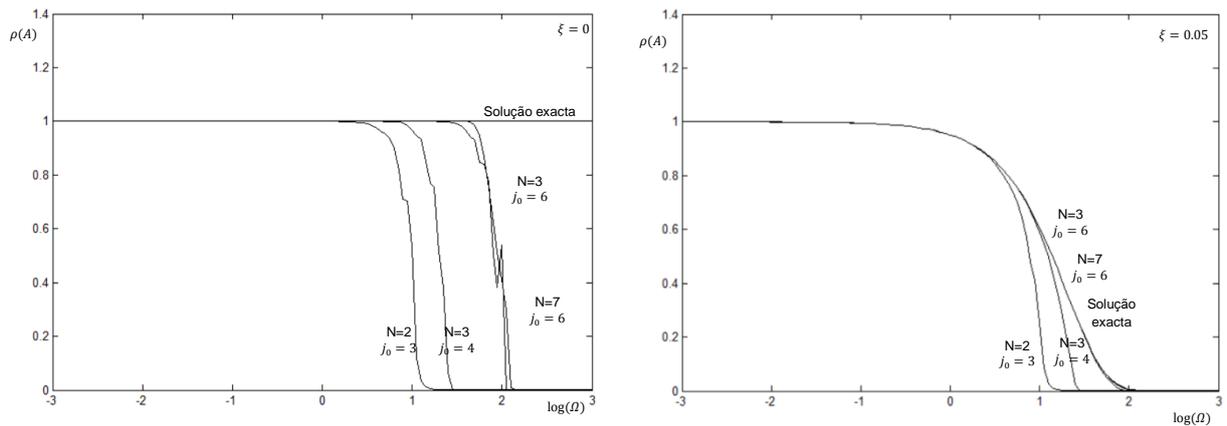


Figura 5.4 – Raio espectral em wavelets de Daubechies apenas com funções de escala

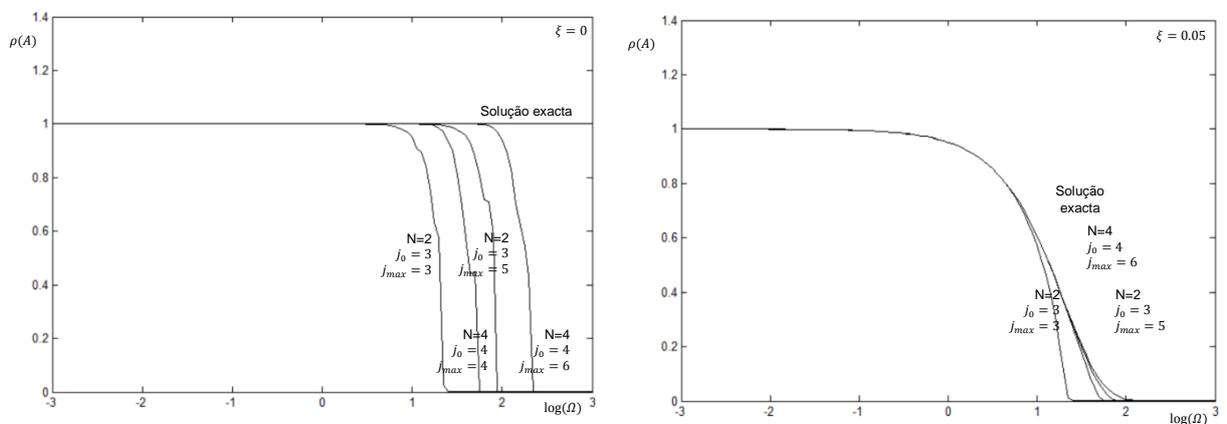


Figura 5.5 – Raio espectral em wavelets de Daubechies com funções de escala e wavelets

Podem ser retiradas conclusões homólogas relativamente às restantes funções de aproximação. O efeito da melhoria da qualidade da aproximação associado aos refinamentos do tipo p - e do tipo h - pode ser observado tal como nos polinómios de Legendre. Também no que diz respeito à qualidade da solução no caso não amortecido, se obtêm resultados idênticos para os diversos tipos de funções.

Relativamente às Wavelets de Daubechies existe um aspecto que é interessante salientar. Em relação ao refinamento do tipo p - que neste tipo de funções é dependente de três parâmetros, é já nesta fase possível compreender que incrementar um determinado parâmetro poderá ser mais eficiente do que incrementar outro.

Observa-se que para todas as funções utilizadas é possível afirmar que estas apresentam estabilidade incondicional. No caso das wavelets de Daubechies apenas utilizando funções de escala, pode observar-se uma oscilação no gráfico correspondente a $N = 3$ e $j_0 = 6$.

De seguida mostram-se nas Figuras 5.6 a 5.9, as curvas da distorção numérica, ε_Ω , definida em (5.15). Estas curvas são novamente definidas em função da frequência normalizada, sendo que se

apresentam diversas combinações de soluções para cada tipo de função de aproximação bem como na situação de amortecimento nulo e de amortecimento de 5%.

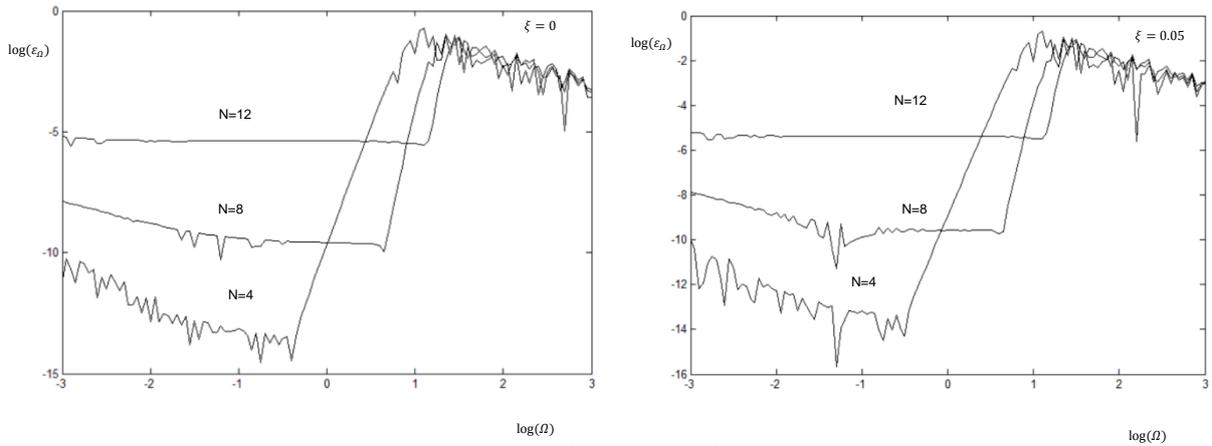


Figura 5.6 - Distorção numérica com polinômios de Legendre

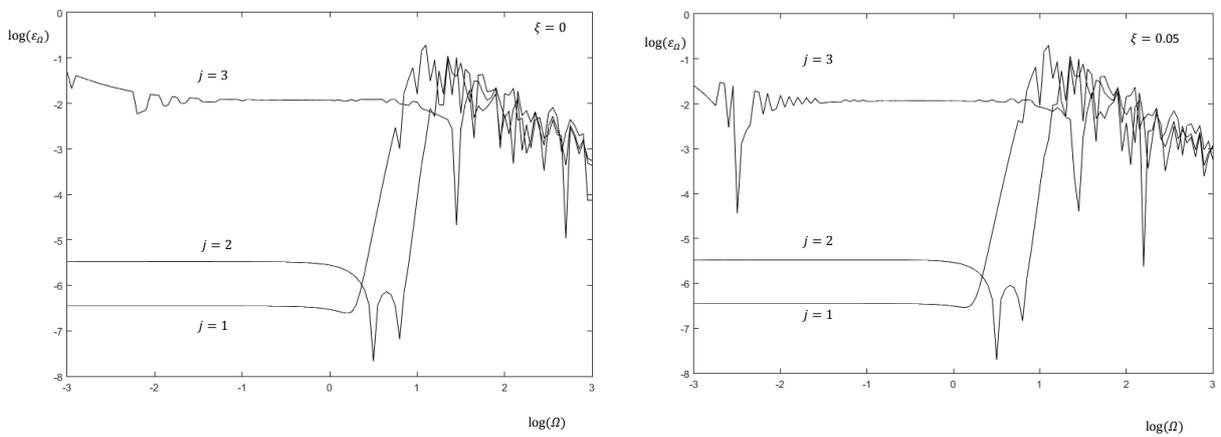


Figura 5.7 - Distorção numérica com wavelets polinomiais

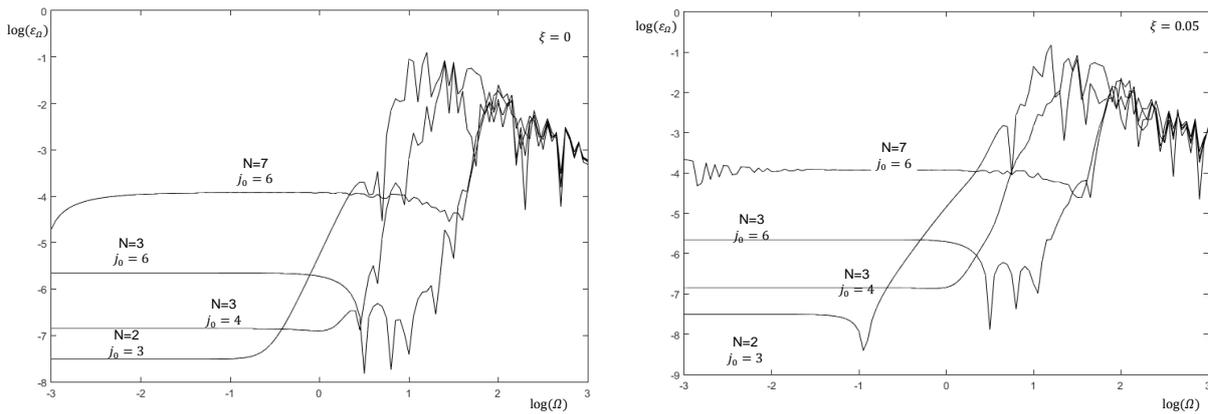


Figura 5.8 – Distorção numérica com wavelets de Daubechies – apenas funções de escala.

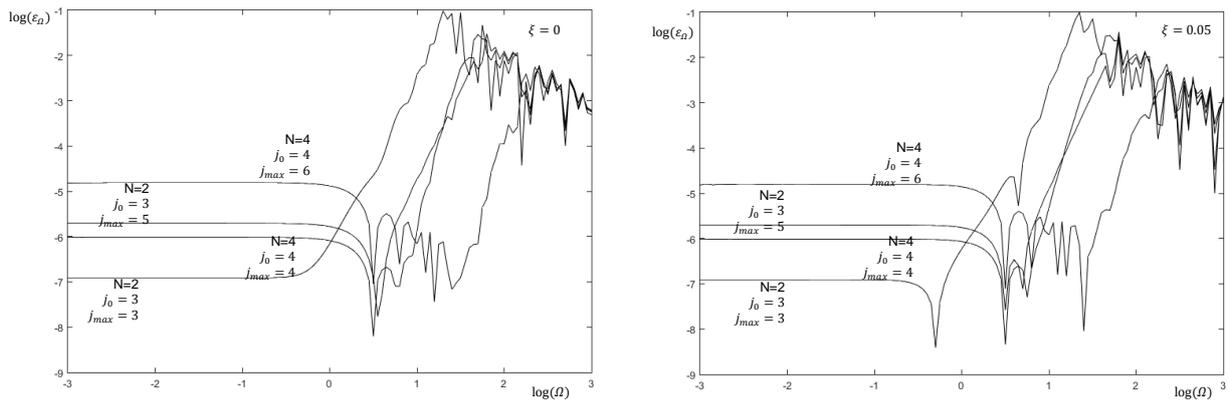


Figura 5.9 – Distorção numérica com wavelets de Daubechies – funções de escala e wavelets.

Apresenta-se por fim nas figuras 5.10 a 5.13 as curvas da dissipação numérica, ϵ_ξ , definida em (5.16). As curvas apresentadas medem estes parâmetros na variação da frequência normalizada. Cada curva corresponde a um grau de aproximação diferente. São apresentadas soluções para diferentes amortecimentos.

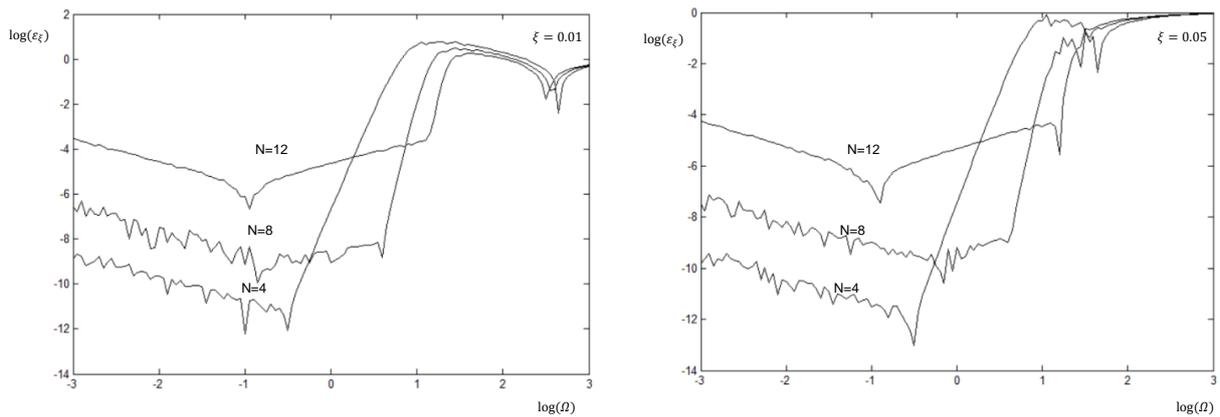


Figura 5.10 – Dissipação numérica com Polinômios de Legendre

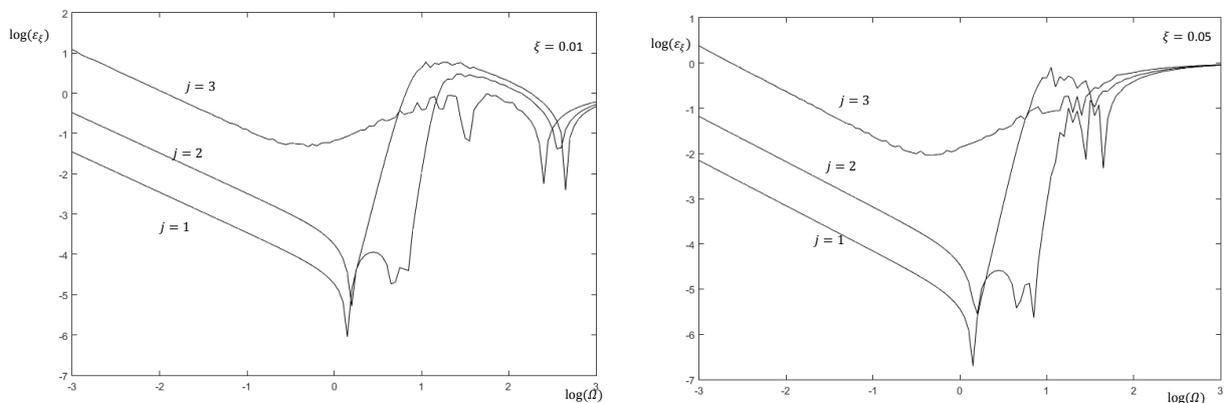


Figura 5.11 – Dissipação numérica com wavelets polinomiais

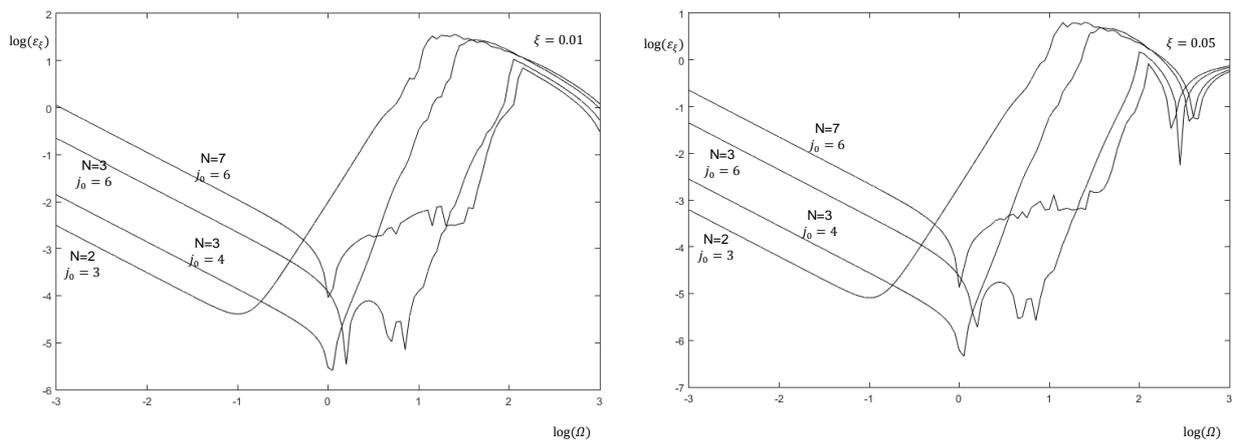


Figura 5.12 – Dissipação numérica com wavelets de Daubechies – apenas funções de escala

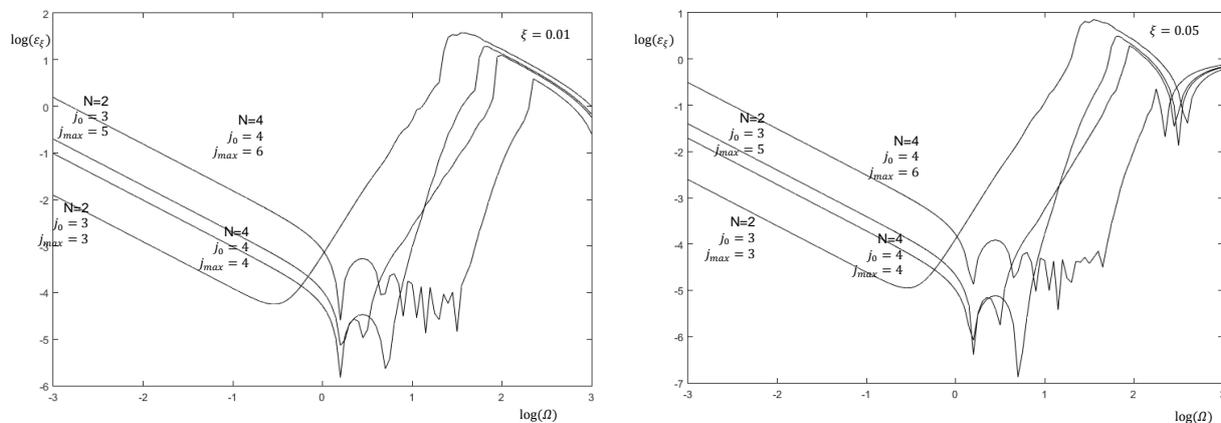


Figura 5.13 – Dissipação numérica com wavelets de Daubechies – funções de escala e wavelets

Tanto na distorção como na dissipação numérica é possível concluir que para gamas de frequência normalizada mais baixas, obtêm-se melhores resultados utilizando graus de funções inferiores. Por outro lado, na gama de frequências elevadas os melhores resultados obtêm-se para graus de funções mais elevados.

A instabilidade nos valores tanto da dissipação como da distorção que podem ser verificadas nas figuras acima para valores de frequência normalizada elevada, ocorrem a partir de valores de $\log(\Omega)$ próximos de 0.5. Isto ocorre devido à sensibilidade na mudança de quadrante no cálculo da frequência angular numérica normalizada, ocorrendo quando $\Omega = \pi$ sendo que $\log(\pi) = 0.5$. No gráfico da Figura 5.6 pode também ser observada uma zona de instabilidade associada à utilização de polinómios com $N=4$. Esta instabilidade pode ser explicada pela proximidade do zero numérico.

Apesar de a estabilidade incondicional ser garantida, pode através destes parâmetros compreender-se que as soluções obtidas nem sempre são as mais correctas. É possível observar nos gráficos da

dissipação numérica que se chega a valores na ordem das dezenas. Isto significa que se obtêm valores de amortecimento numérico cerca de dez vezes superior ao amortecimento real.

Por outro lado, o efeito da distorção numérica não é tão gravoso quanto o da dissipação numérica. Este parâmetro toma valores máximos na ordem das décimas o que leva a variações máximas de 15% em relação à frequências originais.

É possível também observar que a dissipação numérica tende para 1 quando a frequência normalizada aumenta. Isto quer dizer que quando é considerado um passo de tempo muito elevado, a aproximação numérica não tem a capacidade de reproduzir o amortecimento.

5.3. Testes de Validação

Nesta secção é feita a análise dos exemplos descritos na Secção 5.1.3. Estes exemplos servem para testar a qualidade dos diferentes métodos de integração no tempo, bem como de avaliar a eficiência dos seus refinamentos.

5.3.1. Exemplo 1

Neste primeiro exemplo é analisada uma estrutura com um grau de liberdade em regime elástico. Esta estrutura está sujeita a um carregamento sinusoidal. Os restantes dados da estrutura são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Exemplo 1 – Parâmetros que caracterizam a estrutura e o carregamento aplicado

$k = 100 \text{ [kN/m]};$	$F = 100 \cdot \sin(100t) \text{ [kN]};$
$c = 1 \text{ [kN.s/m]};$	$u_0 = 0 \text{ [m]};$
$m = 1 \text{ [ton]};$	$v_0 = 0 \text{ [m/s]};$
$T = 5 \text{ [s]}$	

A solução para o deslocamento, velocidade e aceleração pode ser obtida analiticamente. Os resultados apresentam-se de seguida, sendo que as variáveis A, B, C e D , são variáveis auxiliares para facilitar a descrição da solução.

$$A = u_0 - \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)\right)^2} \quad (5.16)$$

$$B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_D} - C \times \frac{\omega_f}{\omega_D} + A \times \frac{\xi \cdot \omega_n}{\omega_D} \quad (5.17)$$

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)\right)^2} \quad (5.18)$$

$$D = \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)\right)^2} \quad (5.19)$$

A evolução no tempo dos campos de deslocamento, velocidade e aceleração é dada por:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)) + C \cdot \sin(\omega_f \cdot t) + D \cdot \cos(\omega_f \cdot t) \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} (A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)) \\ & + e^{-\xi\omega_n t} (-A \cdot \omega_D \cdot \text{sen}(\omega_D \cdot t) + B \cdot \omega_D \cdot \text{cos}(\omega_D \cdot t)) + C \cdot \omega_f \cdot \text{cos}(\omega_f \cdot t) \\ & - D \cdot \omega_f \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) = & \xi^2 \omega_n^2 e^{-\xi\omega_n t} (A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)) \\ & - 2\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} (-A \cdot \omega_D \cdot \text{sen}(\omega_D \cdot t) + B \cdot \omega_D \cdot \text{cos}(\omega_D \cdot t)) \\ & + e^{-\xi\omega_n t} (-A \cdot \omega_D^2 \cdot \text{cos}(\omega_D \cdot t) - B \cdot \omega_D^2 \cdot \text{sen}(\omega_D \cdot t)) \\ & - C \cdot \omega_f^2 \cdot \text{sen}(\omega_f \cdot t) - D \cdot \omega_f^2 \cdot \text{cos}(\omega_f \cdot t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Foi em primeiro lugar realizado um conjunto de testes recorrendo à utilização do método de Newmark apresentado em 3.1. Nas Figuras 5.14 e 5.15 apresentam-se os resultados para a evolução do deslocamento e da aceleração para Δt de 0.1 s e 0.01 s. Mostram-se apenas os resultados entre os instantes $t = 0$ e $t = 0.5$ segundos.

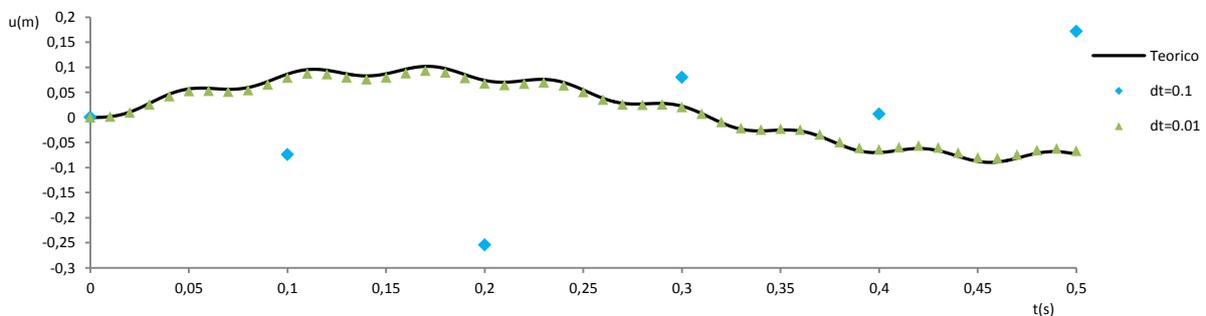


Figura 5.14 – Evolução do deslocamento obtido com o método de Newmark.

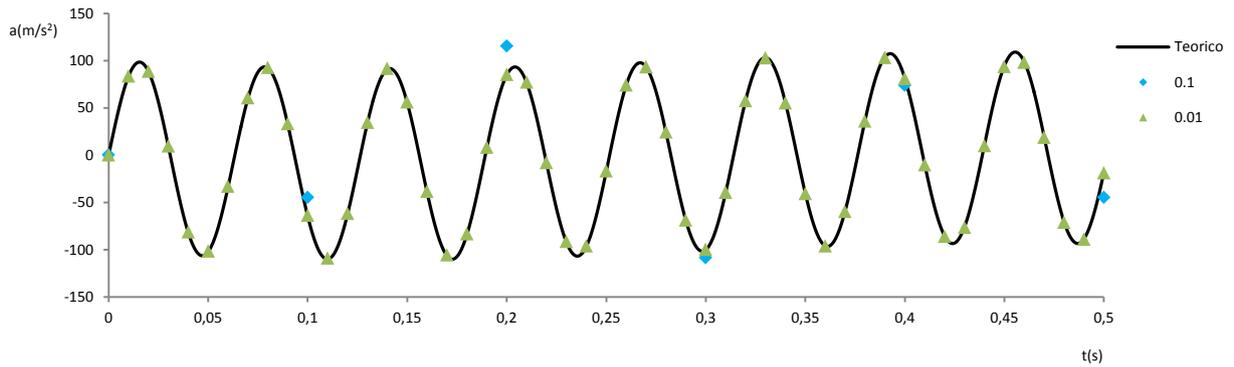


Figura 5.15 – Evolução da aceleração obtida através do método de Newmark.

Numa primeira análise pode ser considerado que os resultados obtidos para $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ são bastante aceitáveis. Já para $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ pode verificar-se que nos pontos onde a solução é calculada, a aceleração coincide, ainda que não totalmente, com a solução analítica. Por outro lado, para o mesmo intervalo de tempo os valores obtidos para o deslocamento não apresentam qualquer semelhança com os valores teóricos. A explicação é que a aproximação considerada no método de Newmark entre cada ponto calculado pressupõe uma variação linear da aceleração. Quer isto dizer que para $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ apesar dos valores da aceleração nos pontos calculados estarem próximos da solução analítica, é impossível simular a frequência deste parâmetro. Isto leva a que os valores obtidos no deslocamento na Figura 5.14, não tenham qualquer proximidade com a solução analítica.

Apresentam-se nos gráficos das Figuras 5.16 a 5.18 os valores do erro médio definido na Secção 5.2, de forma a quantificar o desvio entre as aproximações e a solução analítica no caso dos campos de deslocamento, velocidade e aceleração. Este parâmetro é avaliado para valores distintos de incremento no tempo, Δt , e só é calculado no fim de cada passo, sendo ignorado o que acontece entre cada um desses instantes.

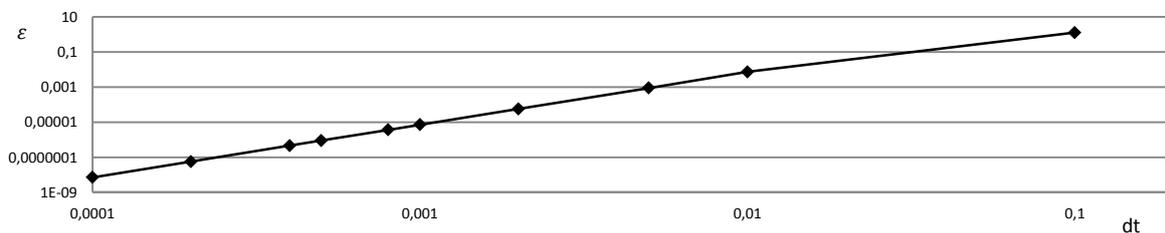


Figura 5.16 – Erro médio do deslocamento – Método de Newmark.

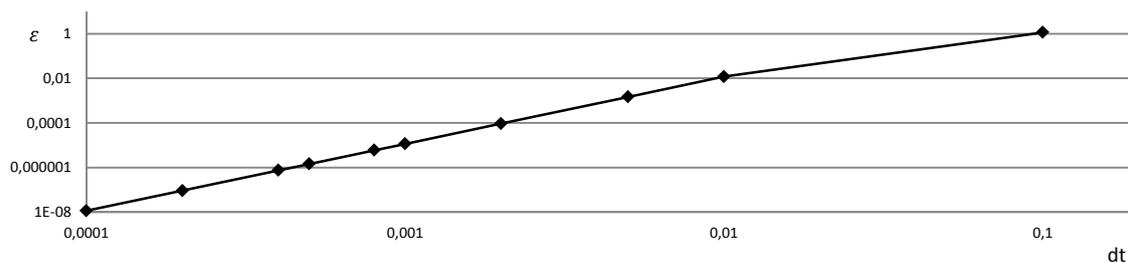


Figura 5.17 – Erro médio da velocidade – Método de Newmark.

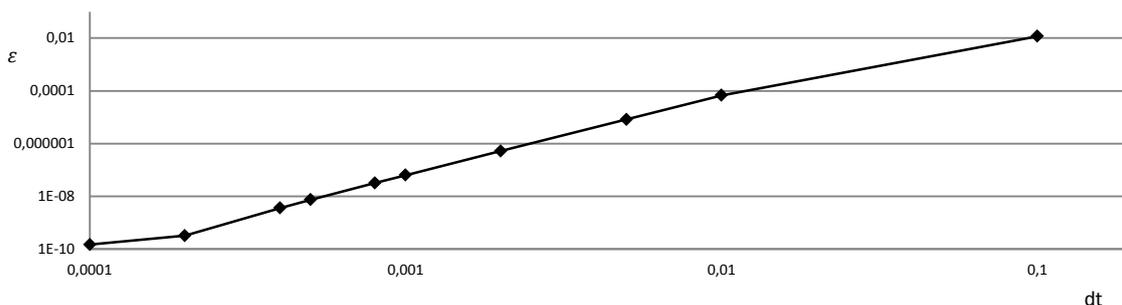


Figura 5.18 – Erro médio da aceleração – Método de Newmark

Tal como seria de esperar, o método de Newmark apresenta bons resultados quando se considera um valor reduzido para Δt . É também possível observar através dos gráficos das Figuras 5.16 a 5.18 que o refinamento do tipo h - permite uma melhoria consistente da qualidade da aproximação obtida.

Na Figura 5.19 mostra-se a relação entre o valor máximo do deslocamento obtido em cada aproximação relativamente ao valor máximo teórico deste deslocamento.

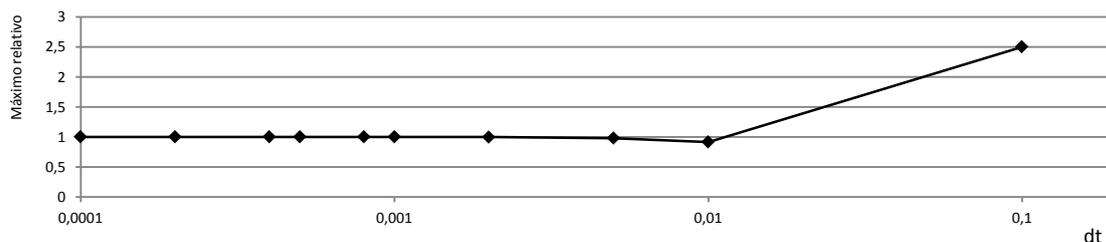


Figura 5.19 – Deslocamento máximo relativo – Método de Newmark.

Pode observar-se no gráfico acima, que a segurança não pode ser garantida visto que a convergência para o valor exacto não ocorre de forma regular. Este facto é evidenciado pelo valor do deslocamento máximo obtido para $\Delta t = 0.01s$, sendo que este valor é inferior ao valor do deslocamento exacto máximo. Define-se neste contexto uma solução do lado da segurança como aquela que garante que os valores máximos obtidos na aproximação são sempre superiores aos que correspondem à solução analítica.

Resultados muito semelhantes são obtidos quando é utilizado o método de Wilson- θ , apresentando estes porém uma ligeira melhoria em relação ao método de Newmark. Na Figura 5.20 e 5.21, apresentam-se respectivamente as evoluções do deslocamento e aceleração quando este método é utilizado. É também possível observar na Figura 5.22 uma relação simples e regular entre o refinamento e a qualidade da solução, bem como a incapacidade de garantir que a solução se encontra sempre do lado da segurança.

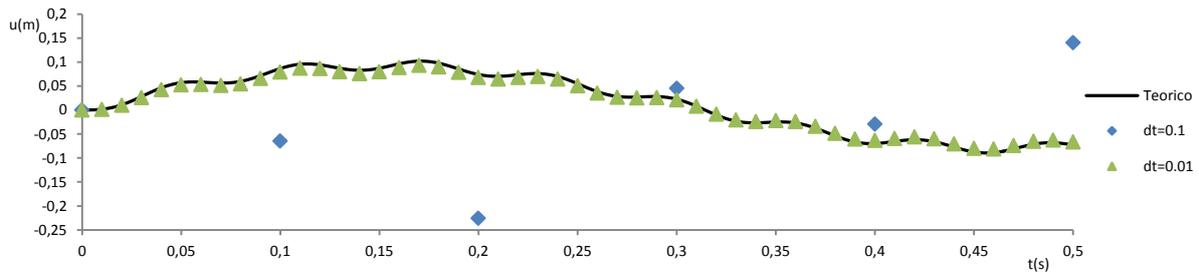


Figura 5.20 – Evolução do deslocamento obtido com o método Wilson- θ .

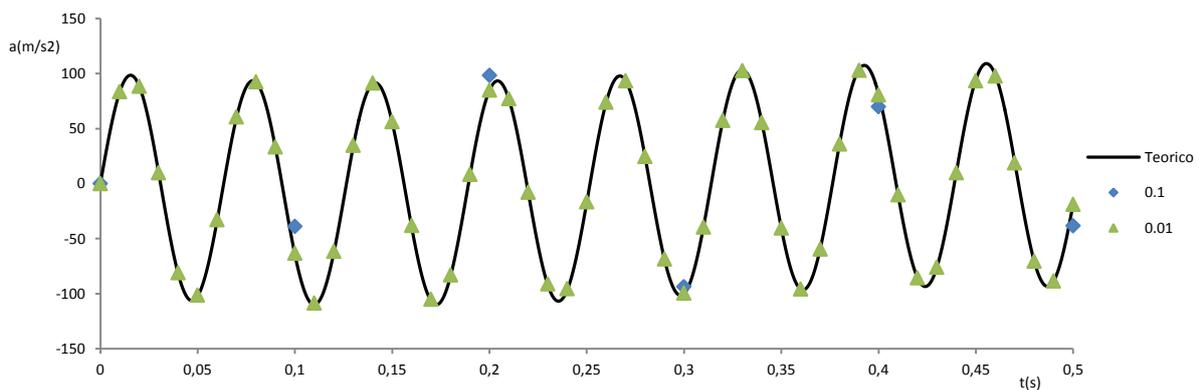


Figura 5.21 – Evolução da aceleração obtida com o método Wilson- θ

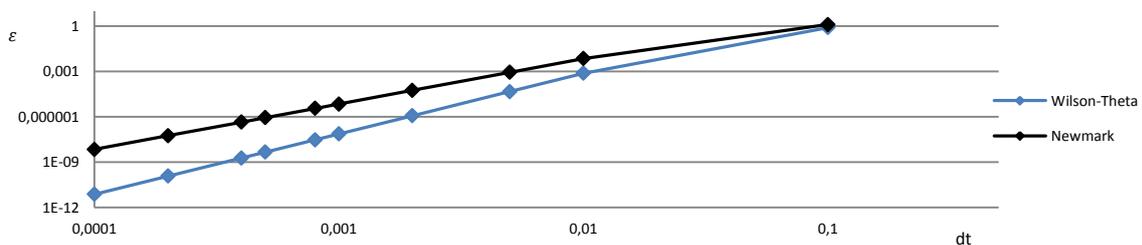


Figura 5.22 – Erro médio do deslocamento – Método Wilson- θ .

Analisa-se agora o mesmo problema recorrendo ao modelo misto de integração no tempo. Em primeiro lugar são utilizados polinômios de Legendre como funções de aproximação. Apresenta-se na Figura 5.23 as soluções para o deslocamento obtidas com a utilização de duas diferentes combinações de funções/intervalo de tempo.

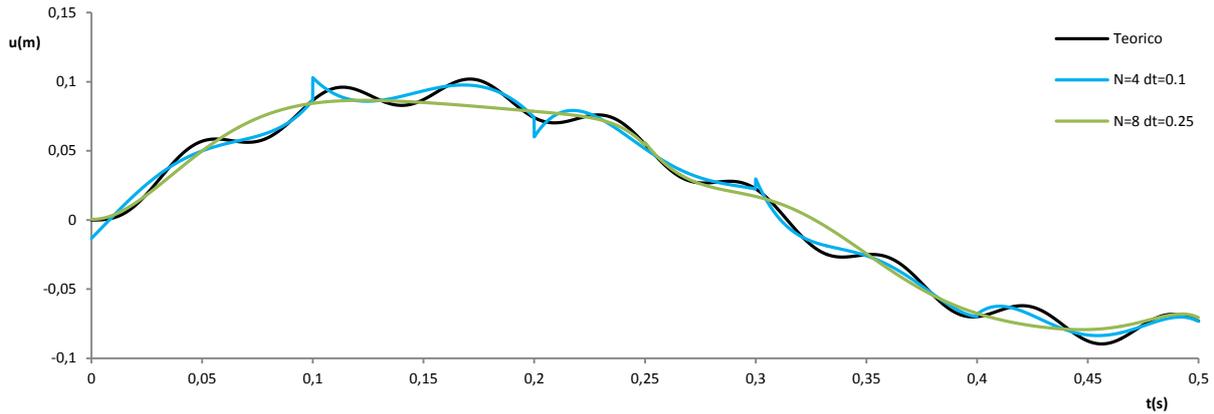


Figura 5.23 – Evolução do deslocamento obtido com o MTI utilizando polinômios de Legendre

Ao contrário do que acontece com os métodos clássicos, no *MTI* a solução é sempre apresentada em todo o domínio temporal, visto que é definida uma aproximação explícita para cada uma das grandezas ao longo de cada intervalo de tempo considerado.

Como seria de esperar, para a consideração de intervalos de tempo $\Delta t = 0.1s$, é possível a obtenção de resultados qualitativamente superiores quando comparados com os modelos clássicos. Apesar das soluções obtidas para o deslocamento não coincidirem completamente com a solução analítica, é possível observar-se que estas apresentam o mesmo andamento geral.

Apresenta-se na Figura 5.24 a resposta em termos de aceleração para a mesma combinação de parâmetros.

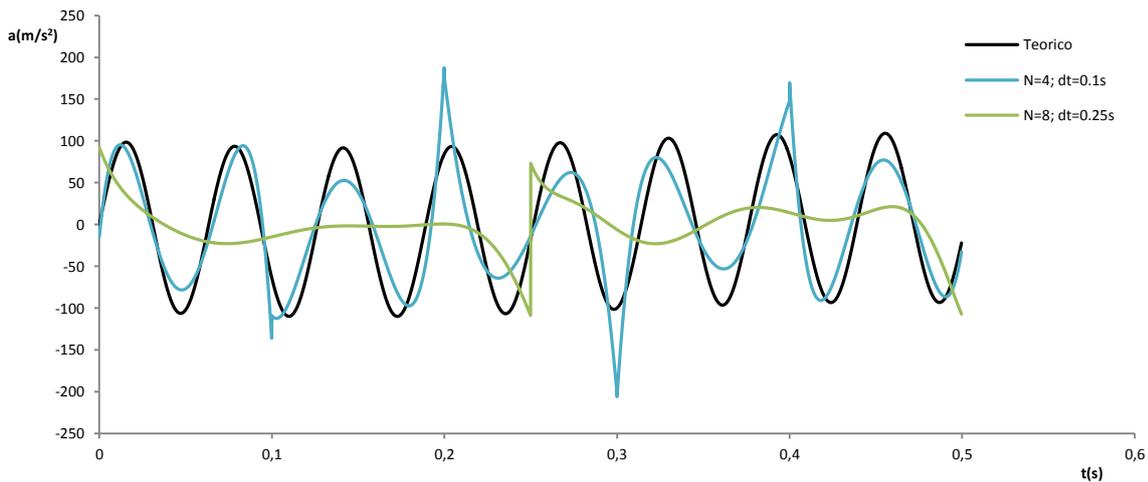


Figura 5.24 – Evolução da aceleração obtida com MTI utilizando polinômios de Legendre

As soluções obtidas para a aceleração, apesar de não serem ainda aceitáveis para este grau de aproximação conseguem, para $\Delta t = 0.1s$, reproduzir a frequência de vibração.

Apresentam-se no gráfico da Figura 5.25 os valores do erro médio para todas as combinações de grau máximo de polinómio e intervalos de tempo. Pode observar-se o efeito dos refinamentos na melhoria da solução. Tanto a redução do intervalo de tempo como o aumento do grau do polinómio têm efeitos positivos na qualidade da solução. Existe apenas uma excepção que será analisada posteriormente, referente ao refinamento do tipo p - para intervalos de tempo, Δt , muito reduzidos.

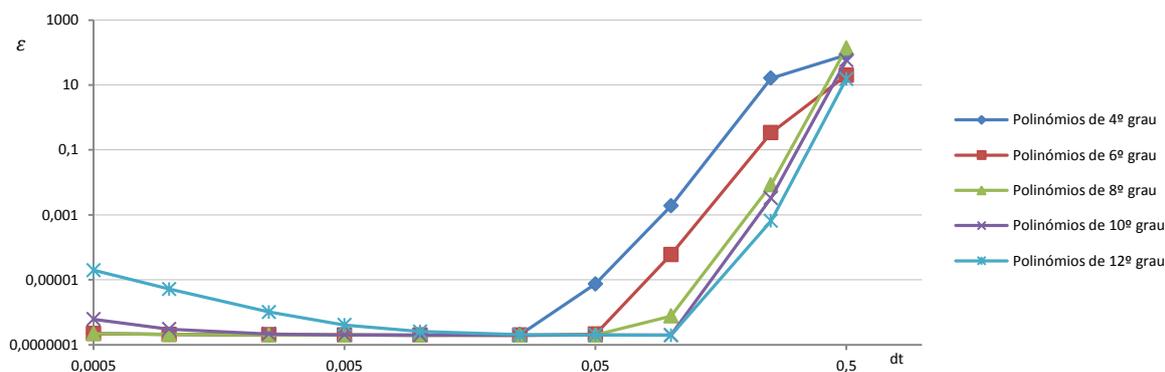


Figura 5.25 – Erro do deslocamento para polinómios de Legendre

É possível verificar que existe sempre um erro mínimo na utilização destas funções, sendo que este erro estabiliza em $1E-07$. Isto contrasta com os métodos clássicos onde o erro parecia sempre diminuir quando se reduzia o intervalo de tempo considerado.

Em relação à eficiência dos diferentes tipos de refinamento, podem salientar-se alguns aspectos relevantes. Em primeiro lugar, neste problema em particular, mesmo utilizando um grau de polinómios elevado, não é possível obter soluções interessantes para passos de tempo elevados. Isto ocorre porque a frequência do carregamento é muito elevada tornando-se impossível reproduzir o número de ciclos com o grau de polinómio utilizado.

Em segundo lugar, pode ser observável que a partir de determinados valores para os parâmetros que definem a base de aproximação é irrelevante realizar qualquer refinamento tipo h -. A título de exemplo verifique-se que quando são considerados polinómios de grau 12, não é relevante efectuar refinamentos do tipo h - a partir de $\Delta t = 0.100$ s. Já quando são considerados polinómios de grau 4, o mesmo sucede, agora a partir de $\Delta t = 0.025$ s.

Por forma a comparar a eficiência de cada refinamento, tomou-se como base a solução obtida para polinómios de grau 4 para um $\Delta t = 0.25$ s. Sendo que se obtêm soluções semelhantes (em termos de erro médio) para o refinamento do tipo h - em que se passa a considerar $\Delta t = 0.1$ s, e para o refinamento do tipo p -, considerando polinómios de grau 10, avaliou-se o esforço computacional despendido em cada uma destas soluções. Os resultados obtidos apresentam-se na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Erros e tempos computacionais para polinômios de Legendre.

Parâmetros	Erro médio de deslocamento ε	Tempo Computacional (s)
Grau 4, $\Delta t = 0.25$ s	16.17	0.009
Grau 4, $\Delta t = 0.1$ s	1.9E-03	0.028
Grau 10 $\Delta t = 0.25$ s	3.3E-03	0.107

Os resultados apresentados na Tabela 5.2, mostram que o refinamento do tipo p - introduz maiores incrementos de tempo computacional quando comparado com o refinamento do tipo h -, utilizado na obtenção de soluções com grau de erro aproximadamente igual.

Por último é necessário salientar o comportamento que ocorre quando se diminui em demasia o intervalo de tempo considerado. Este comportamento é bem visível na utilização de polinômios de grau 12, onde é observável um decréscimo da qualidade da solução quando se considera passos inferiores a 0.01 s.

Apresenta-se na Figura 5.26 os erros relativos calculados entre os valores máximos exactos e os valores máximos aproximados obtidos para o deslocamento. Como se mostra na figura referida, apesar da grande maioria das soluções obtidas apresentar valores de deslocamento superior à solução analítica, conclui-se também em relação a este método que não é possível garantir que as soluções obtidas se encontram do lado da segurança.

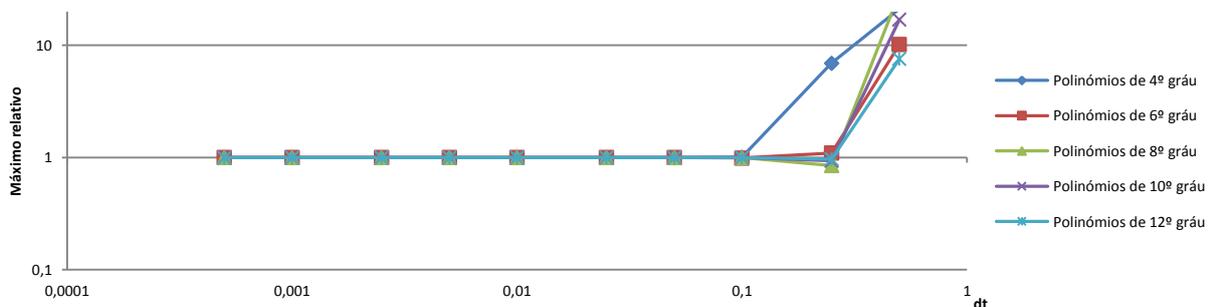


Figura 5.26 – Deslocamento máximo relativo – MTI com polinômios de Legendre

Apresentam-se agora os resultados obtidos com recurso a bases definidas com wavelets polinomiais. O gráfico da Figura 5.27, apresenta os valores determinados para o erro médio (calculado para o valor do deslocamento) quando se variam os valores do intervalo de tempo e grau da função.

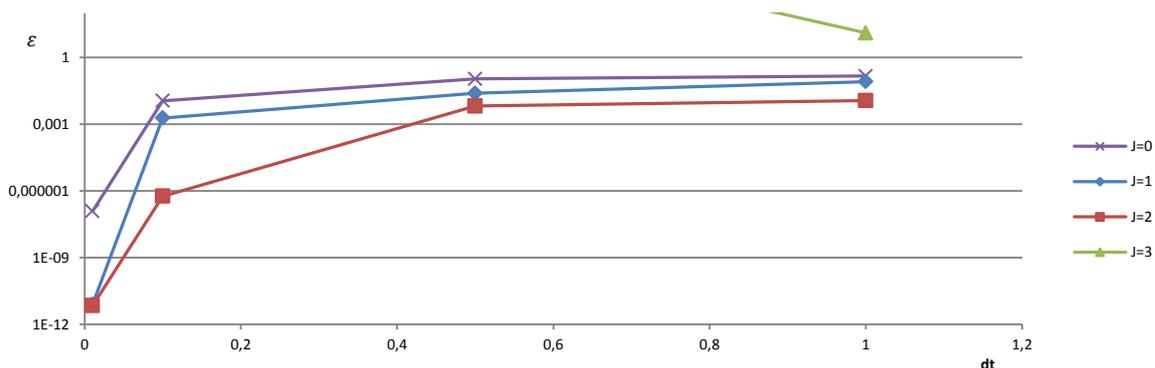


Figura 5.27 – Desvio do deslocamento para wavelets polinomiais.

Como pode ser constatado, as wavelets polinomiais apresentam resultados de qualidade superior para intervalos de tempo maiores. Comparando por exemplo os resultados quando é utilizado um passo de tempo $\Delta t = 0.5 s$, verifica-se que no caso dos polinômios de Legendre se obtêm valores para o erro médio superiores a 10. Por outro lado, quando se consideram wavelets polinomiais, com a exceção da base construída com grau de refinamento $j = 3$, obtêm-se valores de erro médio entre 0.001 e 1.

É possível observar-se que na consideração destas funções de aproximação, o refinamento do tipo p tem efeitos muito superiores ao mesmo tipo de refinamento na utilização de polinômios de Legendre. Isto acontece porque refinar a função em um grau neste sistema equivale a aumentar de forma muito significativa o número de funções considerado na base. Ou seja passar de $j=1$ para $j=2$ é equivalente, em termos da dimensão da base das funções de aproximação, a aumentar de polinômios de 4º grau para polinômios de 8º grau.

Por fim, resta referir que quando é utilizado $j = 3$ os resultados obtidos não fazem qualquer sentido. Recorde-se que as wavelets polinomiais são uma combinação de polinômios de Legendre, sendo que utilizar $j = 3$ é equivalente a utilizar polinômios de Legendre de grau 16. Já tinha sido discutido anteriormente que não é possível obter bons resultados para polinômios de Legendre com grau superior a 13. Pelo que pelas mesmas razões também não é possível obter resultados aceitáveis para as wavelets polinomiais nesta situação. Este resultado já tinha sido previsto quando se verificou que o raio espectral da matriz de amplificação numérica construída com base na consideração de wavelets polinomiais com grau de refinamento $j = 3$ assume valores superiores à unidade, o que não permite garantir as condições de estabilidade nesse caso.

Segue-se a análise recorrendo aos sistemas de wavelets de Daubechies utilizando apenas funções de escala. O refinamento do tipo p -, pode agora ser feito recorrendo à alteração de dois parâmetros, tal como foi discutido na secção 4.3. Nos gráficos das Figuras 5.28 e 5.29, apresentam-se os valores do erro médio relativos ao deslocamento para a variação do grau de refinamento, fixando o número da família em $N=4$ (Figura 5.28) e para variação do número da família, fixando o grau de refinamento em $j=6$ (Figura 5.29).

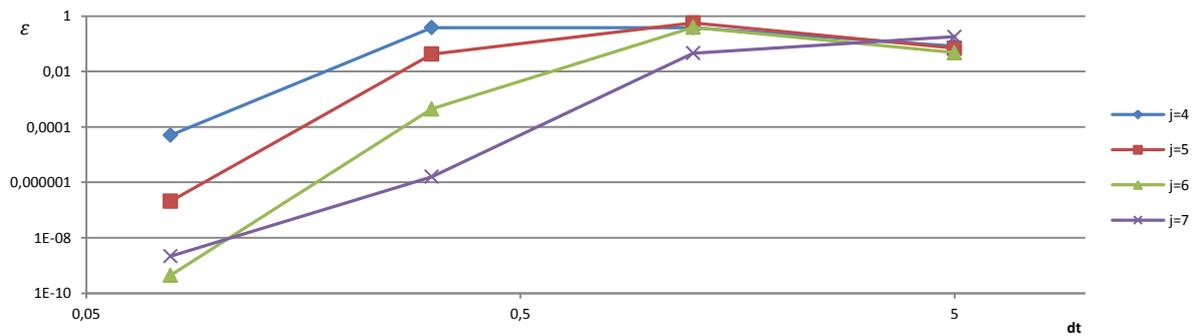


Figura 5.28 - Desvio médio do deslocamento para wavelets de Daubechies com $N=4$.

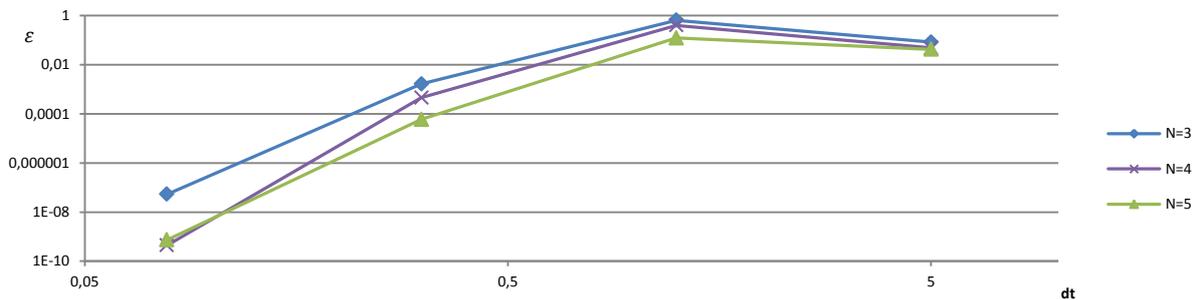


Figura 5.29 - Desvio médio do deslocamento para wavelets de Daubechies com $j_0=6$.

Pode observar-se que, regra geral, todos os refinamentos contribuem para uma melhoria da qualidade da solução. No entanto esta melhoria não se verifica em duas situações: na passagem de $\Delta t = 5$ s, para $\Delta t = 1$ s. E no refinamento do tipo p - para $\Delta t = 0.1$ s.

Quanto à qualidade das aproximações obtidas através da utilização destas funções, é possível observar que para o mesmo intervalo de tempo considerado, as wavelets de Daubechies apresentam melhores resultados que as wavelets polinomiais. Exemplo disso é o erro na ordem dos $1E-10$ obtido para $\Delta t = 0.1$ s. Já no caso das wavelets polinomiais, para o mesmo intervalo de tempo considerado apenas se chega no melhor dos casos a erros na ordem dos $1E-7$.

O refinamento que tem por base o aumento do número da família das wavelets utilizadas não aparenta ter tanta influencia na qualidade da aproximação quanto o aumento do parâmetro j_0 .

Considere-se de forma a ilustrar este facto, os resultados obtidos para $N = 4$ e $j_0 = 6$ e, e os valores obtidos quando se aumenta cada um dos parâmetros de forma independente. Na Tabela 5.3 listam-se, para cada combinação de parâmetros seleccionados, os valores do desvio médio e do tempo computacional despendido na determinação da aproximação. Foram nesta comparação utilizados o mesmo número de pontos para a integração numérica requerida pelo cálculo do valor de F_n , definido na equação 3.54.

Tabela 5.3 – Erros e tempos computacionais com wavelets de Daubechies (apenas funções de escala) para $\Delta t=0.3s$

Parâmetros	Erro médio de deslocamento ε	Tempo Computacional (s)
N=4 e $j_0=6$	4.49E-04	5.05
N=5 e $j_0=6$	5.90E-05	5.19
N=4 e $j_0=7$	1.61E-06	9.29

O erro no caso do refinamento do número da família, N , é 13% do erro obtido antes do refinamento. Já quando se aplica o refinamento do parâmetro j_0 este erro reduz-se para 0,4% do erro original. Quando se compara o esforço computacional associado a cada um dos refinamentos, verifica-se um aumento em cerca de 3% no caso do incremento do parâmetro N e um acréscimo de 84% no caso do aumento do parâmetro j_0 . Conclui-se assim que a variação do parâmetro j_0 tem uma influência muito superior à variação do parâmetro N , tanto em termos de qualidade da solução como em termos de esforço computacional.

Conclui-se ainda que o aumento do número da família, N , não introduz um aumento de esforço computacional relevante, apresentando no entanto uma melhoria considerável dos resultados obtidos na aproximação.

Analisa-se por último o comportamento do sistema de wavelets de Daubechies, utilizando agora para além das funções de escala também as wavelets. Em termos globais não é espectável que ocorram grandes diferenças relativamente ao sistema que utiliza apenas as funções de escala, uma vez que os dois tipos de função apresentam características muito semelhantes.

O principal foco da análise deste sistema de wavelets será então comparar os efeitos dos dois tipos de refinamentos relativos ao parâmetro j . Recorde-se que existem agora dois parâmetros, o j_0 , que determina o grau de refinamento da função de escala, sendo que este já existia no sistema anterior, e o parâmetro j_{max} , que determina o grau de refinamento máximo considerado para as wavelets.

De forma a determinar o impacto de cada refinamento decidiu-se tomar como base de comparação os resultados obtidos com $N = 4, j_0 = 4$ e $j_{max} = 4$ e analisar os efeitos relativos ao incremento do parâmetro j_{max} de 4 para 6, e do incremento de ambos os parâmetros também para o valor de 6. Na Figura 5.30, apresentam-se os desvios médios obtidos para cada um dos casos definidos.

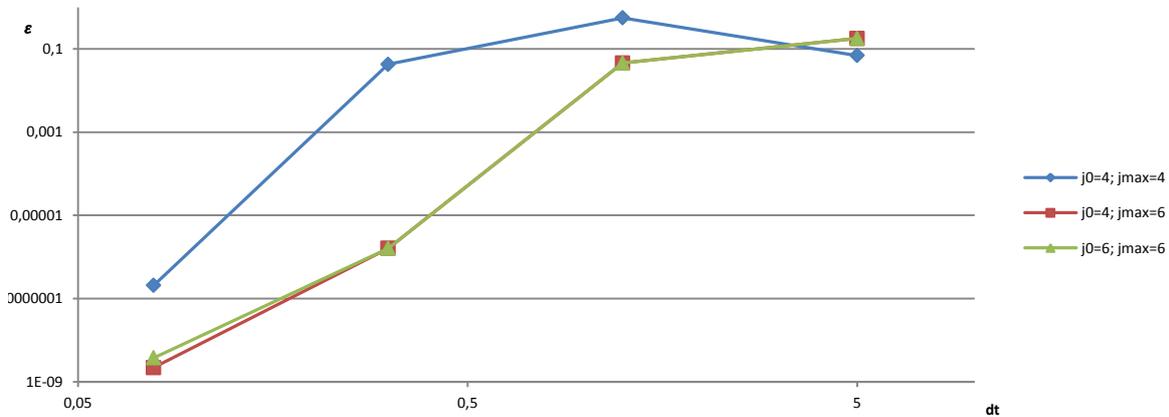


Figura 5.30 – Desvio médio do deslocamento obtido com wavelets de Daubechies para $N=4$

Os resultados obtidos são bastante esclarecedores em relação à preponderância de cada um dos parâmetros. Como pode ser observado no gráfico da Figura 5.30 a linha correspondente a verde encontra-se praticamente sobreposta à linha a vermelho, sendo que o único parâmetro que difere nestas duas análises é o valor de j_0 . Pode concluir-se que o incremento do refinamento máximo, j_{max} , é substancialmente mais influente na qualidade da solução do que o aumento do refinamento base, j_0 . Também relativamente ao esforço computacional é possível concluir o mesmo. Na Tabela 5.4, lista-se o valor do erro médio e o tempo computacional associado a cada uma das soluções.

Tabela 5.4 – Tempos computacionais em wavelets de Daubechies

Parâmetros	Erro médio de deslocamento ϵ	Tempo computacional (s)
$N = 4 ; j_0 = 4 ; j_{max} = 4$	4.25E-02	2.86
$N = 4 ; j_0 = 4 ; j_{max} = 6$	1.61E-06	8.71
$N = 4 ; j_0 = 6 ; j_{max} = 6$	1.61E-06	9.92

Na Figura 5.31, apresenta-se o desvio médio da aceleração. É possível observar o efeito que é recorrente em todas as análises. Quando se diminui o intervalo de tempo a partir de um determinado valor, as aproximações que utilizam funções mais refinadas apresentam piores resultados.

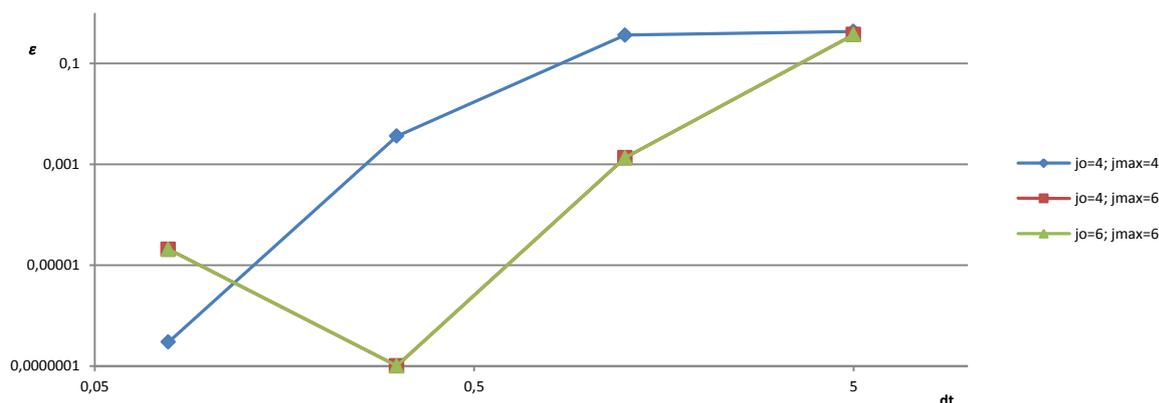


Figura 5.31 - Desvio médio da aceleração com wavelets de Daubechies para N=4

5.3.2. Exemplo 2

No segundo exemplo analisa-se novamente uma estrutura com um grau de liberdade e em regime linear. Aplica-se agora uma força de impulso pontual. Na Tabela 5.5 listam-se os parâmetros que permitem caracterizar a resposta da estrutura e o carregamento aplicado.

Tabela 5.5 – Exemplo 2 – Parâmetros que caracterizam a estrutura e o carregamento aplicado.

$k = 2 [kN/m];$	$F = \begin{cases} 20; & \text{se } t \in \{0; 0.1\} \\ 0; & \text{se } t \in \{0.1; 20\} \end{cases} [kN]$
$c = 1 [kN \cdot s/m];$	
$m = 1 [ton];$	$u_0 = 0 [m];$
	$v_0 = 0 [m/s];$
$T = 20 [s]$	

Pretende-se através da análise deste problema estudar a capacidade de cada método para recuperar a solução quando se considera uma variação brusca de aceleração. A solução analítica deste problema pode ser obtida através da consideração de duas fases onde a estrutura apresenta diferentes comportamentos. A primeira fase corresponde à vibração forçada que ocorre até ao instante $t = 0.1 s$. A partir de esse instante, a estrutura encontra-se em fase de vibração livre. As soluções para cada uma das fases apresentam-se no conjunto de equações (5.25) a (5.27) e (5.30) a (5.32).

Fase de vibração forçada: $(t \leq 0.1 s)$

$$A = -\frac{p_0}{k} \quad (5.23)$$

$$B = -\frac{p_0}{k} \times \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (5.24)$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} [A \cos(\omega_D \cdot t) + B \sin(\omega_D \cdot t)] + \frac{p_0}{k} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} [A \cos(\omega_D \cdot t) + B \sin(\omega_D \cdot t)] \\ & + e^{-\xi\omega_n t} [-A \cdot \omega_D \sin(\omega_D \cdot t) + B \cdot \omega_D \cos(\omega_D \cdot t)] \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) = & -\xi^2\omega_n^2 e^{-\xi\omega_n t} [A \cos(\omega_D \cdot t) + B \sin(\omega_D \cdot t)] - 2\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} [-A \sin(\omega_D \cdot t) \\ & + B \cos(\omega_D \cdot t)] + e^{-\xi\omega_n t} [-A \cdot \omega_D^2 \cos(\omega_D \cdot t) - B \cdot \omega_D^2 \sin(\omega_D \cdot t)] \end{aligned} \quad (5.27)$$

Fase de vibração livre: $(t > 0.1 \text{ s})$

$$A = u_{td} \quad (5.28)$$

$$B = \frac{\dot{u}_{td} + \xi \cdot \omega_n \cdot u_{td}}{\omega_D} \quad (5.29)$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n(t-td)} (A \cos(\omega_D \cdot (t-td)) + B \sin(\omega_D \cdot (t-td))) \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n(t-td)} (A \cos(\omega_D \cdot (t-td)) + B \sin(\omega_D \cdot (t-td))) \\ & + e^{-\xi\omega_n(t-td)} (-A \cdot \omega_D \sin(\omega_D \cdot (t-td)) + B \cdot \omega_D \cos(\omega_D \cdot (t-td))) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) = & \xi^2\omega_n^2 e^{-\xi\omega_n(t-td)} (A \cos(\omega_D \cdot (t-td)) + B \sin(\omega_D \cdot (t-td))) \\ & - 2\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n(t-td)} (-A \cdot \omega_D \sin(\omega_D \cdot (t-td)) + B \cdot \omega_D \cos(\omega_D \cdot (t-td))) \\ & + e^{-\xi\omega_n(t-td)} (-A \cdot \omega_D^2 \cos(\omega_D \cdot (t-td)) - B \cdot \omega_D^2 \sin(\omega_D \cdot (t-td))) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Em primeiro lugar realizou-se uma análise através do método de Newmark. Na análise deste problema não serão apresentados os resultados obtidos através do método de Wilson- θ , uma vez que os dois métodos clássicos apresentam comportamentos muito semelhantes.

Apresentam-se nas Figuras 5.32 e 5.33, a evolução do deslocamento e da aceleração obtidos com diferentes valores para o incremento de tempo, Δt . Apresenta-se a resposta do deslocamento até aos 10 segundos. Já a aceleração é apenas representada na zona crítica na qual se dá a aplicação da força, sendo por isso representada apenas até aos 0.2 segundos.

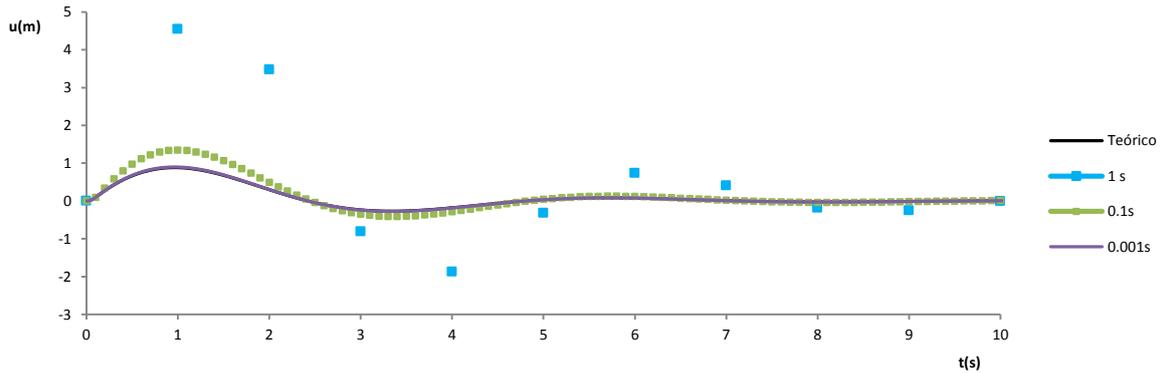


Figura 5.32 – Evolução do deslocamento – Método de Newmak.

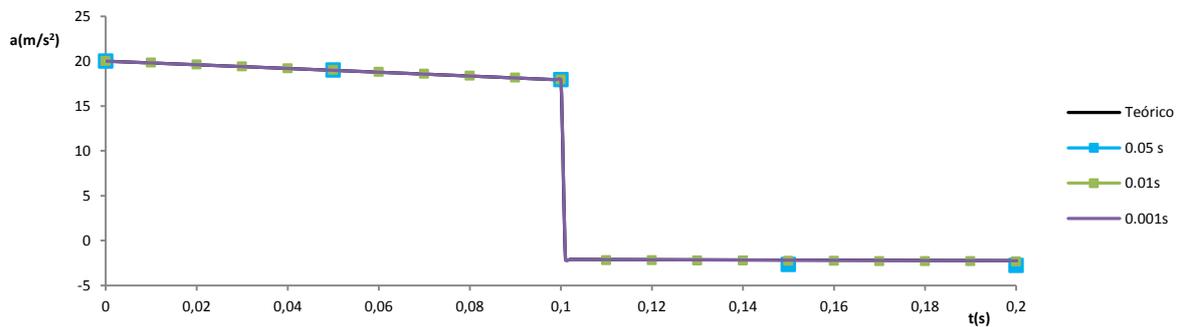


Figura 5.33 – Evolução da aceleração – Método de Newmark.

Apesar de nos instantes onde a aceleração é calculada existir uma muito boa concordância com a solução analítica, isto não é suficiente para garantir que a aproximação conseguida é uma boa representação da realidade. Recorde-se que o método de Newmark assume que a aceleração tem uma variação linear entre os pontos nos quais a solução é calculada. Isto leva a que o decréscimo repentino na resposta da aceleração só seja bem representado com intervalos de tempo muito reduzidos.

A utilização dos modelos clássicos conduz a um comportamento irregular até que o intervalo de tempo considerado seja da mesma ordem de grandeza do intervalo de tempo de aplicação da força. A partir desse valor limite, o efeito do refinamento passa a ser semelhante ao que foi verificado e discutido no Exemplo 1.

Na Figura 5.34 apresenta-se a variação dos valores do parâmetro de erro, ε (calculado para a grandeza deslocamento) em função do intervalo de tempo considerado.

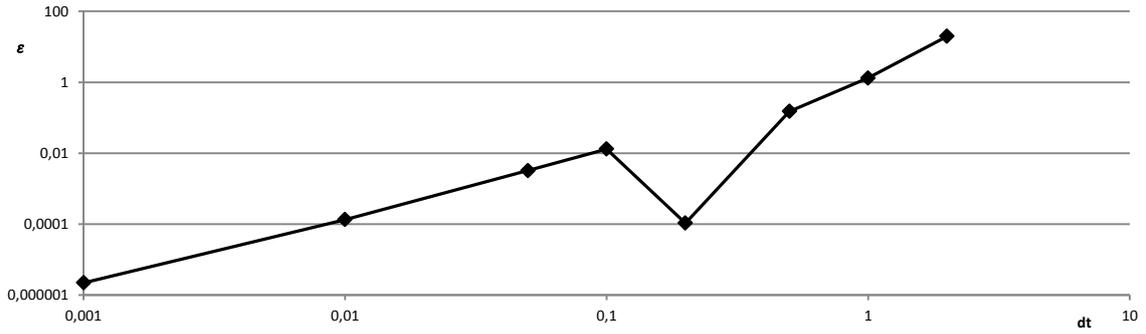


Figura 5.34 – Desvio do Deslocamento – Método de Newmark

Caracterizam-se de seguida as soluções aproximadas obtidas com recurso ao modelo misto de integração no domínio do tempo.

Para as soluções obtidas com polinómios de Legendre, mostra-se nas Figuras 5.35 e 5.36 a evolução no tempo do valor do deslocamento e da aceleração, respectivamente. No caso da Figura 5.36 destaca-se o comportamento na zona onde se dá a variação brusca de aceleração. Na obtenção das soluções apresentadas nas Figuras 5.35 e 5.36 foi considerado um incremento de $\Delta t = 0.5 s$ e polinómios de grau crescente.

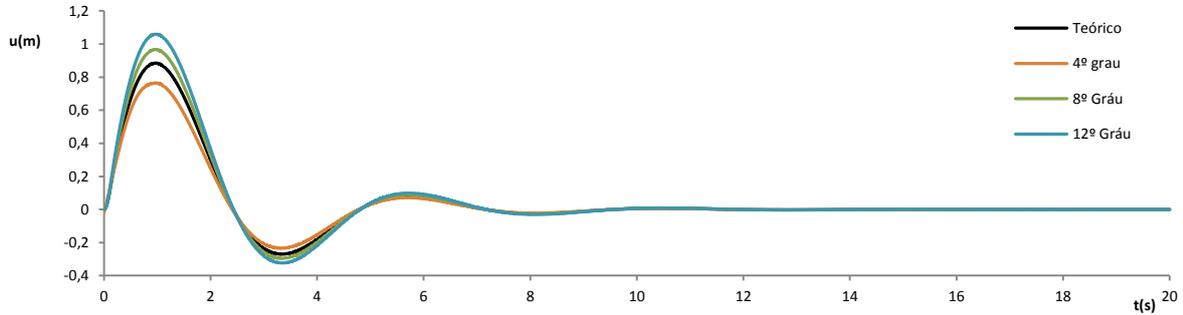


Figura 5.35 – Evolução do deslocamento para $\Delta t = 0,5 s$ – Polinómios de Legendre

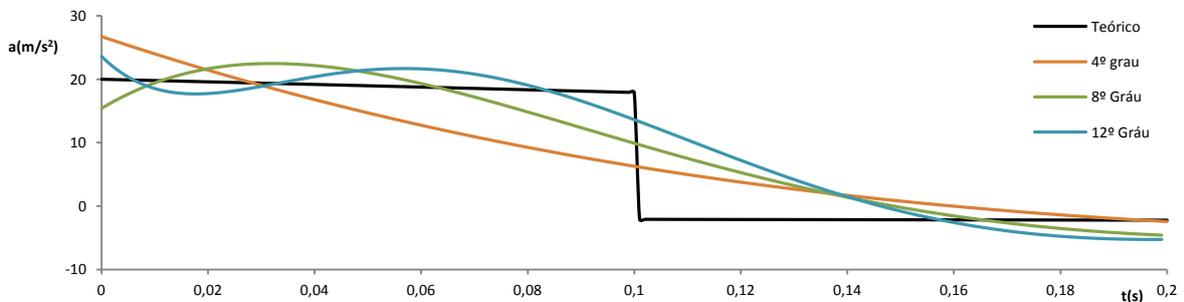


Figura 5.36 – Aceleração para $\Delta t = 0,5 s$ – Polinómios de Legendre

Pode concluir-se que as soluções obtidas para deslocamento tendem a acompanhar a solução analítica, ainda que não seja possível simular para este intervalo de tempo uma solução que apresente um bom grau de aproximação. Por outro lado, no que diz respeito à aproximação da aceleração, pode concluir-se que todas as soluções ficam muito aquém do que seria desejável. Este aspecto seria de esperar à partida, uma vez que o incremento de tempo considerado é superior ao da duração da aplicação da carga de impulso. Desta forma, como a aproximação dos campos de aceleração é assegurado com funções contínuas, não é possível reproduzir o “salto” brusco verificado no valor dessa grandeza, o qual acontece no *interior* do intervalo de tempo considerado na simulação. Resultados diferentes são obtidos se se considerar um conjunto de incrementos no tempo que façam com que o instante em que a carga de impulso deixa de actuar seja o limite superior de um dos intervalos de tempo considerados na simulação numérica. Este facto pode ser observado na Figura 5.37, onde se reproduz a informação apresentada na Figura 5.36, mas considerando agora um valor de $\Delta t = 0.1$ s

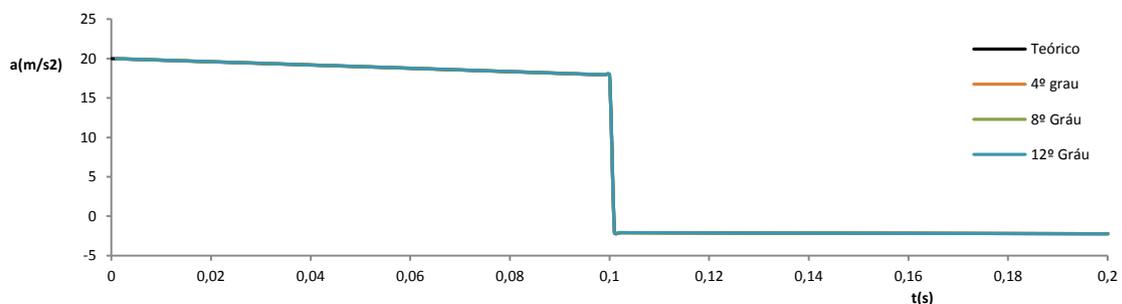


Figura 5.37 – Aceleração para $\Delta t = 0.1$ s – Polinómios de Legendre.

O gráfico da Figura 5.38 mostra a variação do parâmetro do erro, para diferentes intervalos de tempo e diferentes graus máximos para os polinómios de Legendre utilizados na aproximação.

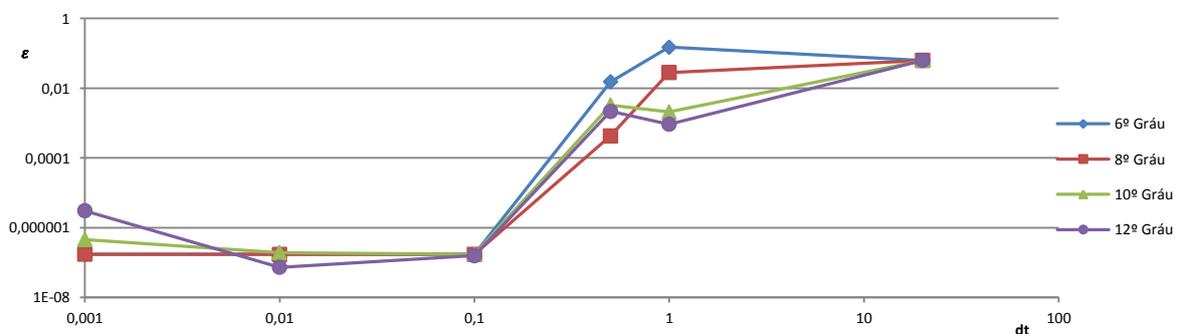


Figura 5.38 – Desvio do deslocamento com polinómios de Legendre

Tal como anteriormente explicado, Pode observar-se a obtenção de resultados pouco precisos para intervalos de tempo superiores a $\Delta t = 0.1 s$. O refinamento do tipo p - bem como o do tipo h - nem sempre garantem uma melhoria de resultados. Para intervalos de tempo inferiores a $\Delta t = 0.1 s$ ambos os refinamentos são pouco influentes na qualidade da solução.

Analisa-se de seguida as soluções obtidas com recurso aos sistemas de wavelets polinomiais. Nas Figuras 5.39 e 5.40 apresentam-se, para diferentes combinações de parâmetros, a evolução no tempo obtida para o valor do deslocamento e da aceleração, respectivamente.

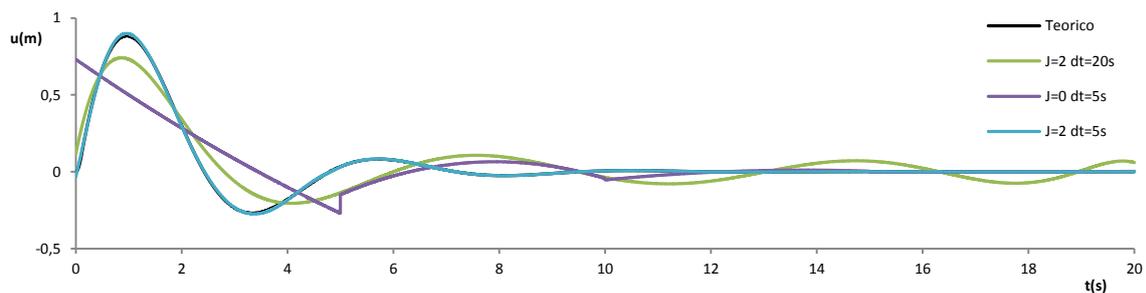


Figura 5.39 – Deslocamento com Wavelets Polinomiais

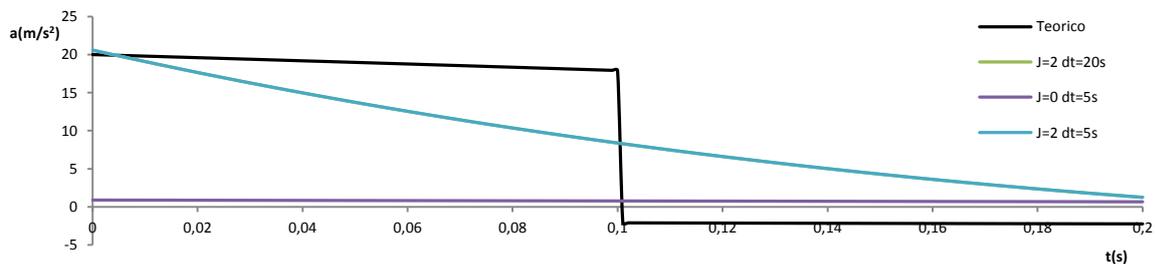


Figura 5.40 – Aceleração com wavelets polinomiais

Uma vez mais se conclui que apesar do deslocamento exacto ser quase perfeitamente recuperado na solução com $j=2$ e $\Delta t = 5 s$, a aceleração continua a ser fracamente aproximada na zona de variação crítica. Tal como referido anteriormente para o caso dos polinómios de Legendre, este é um comportamento esperado tendo em conta que o incremento de tempo considerado é sempre bem superior ao valor do instante em que termina a acção da carga de impulso. Tal como ilustrado na Figura 5.41, uma muito melhor aproximação para o campo de acelerações seria obtida com valores para o passo no domínio do tempo igual ou inferior a $\Delta t = 0.1 s$

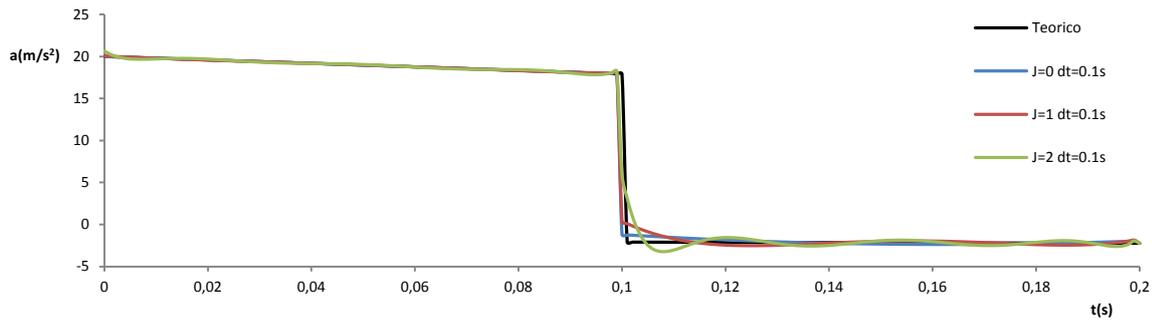


Figura 5.41 – Aceleração com wavelets polinomiais para $\Delta t = 0.1$ s.

Apresenta-se na Figura 5.42 a variação do erro para diferentes graus de refinamento e para diferentes valores de incremento no tempo.

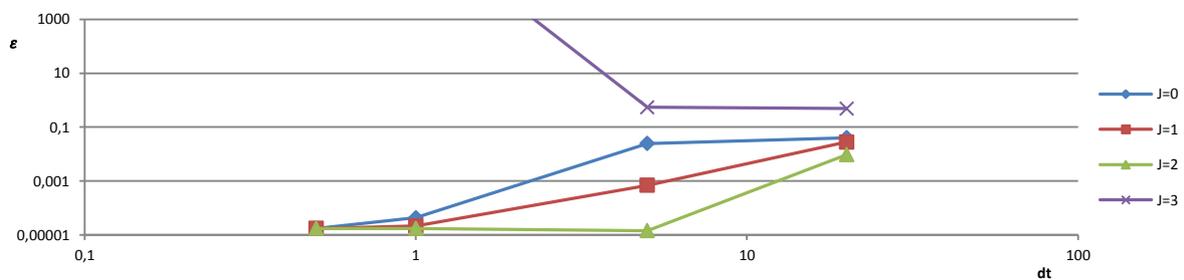


Figura 5.42 - Desvio do deslocamento com wavelets polinomiais

A análise da Figura 5.42 permite verificar que é possível alcançar soluções para o deslocamento muito aceitáveis quando se consideram grandes incrementos na variável tempo. No entanto, e pelas razões anteriormente apresentadas, a variação brusca de aceleração não pode ser representada de forma adequada para grandes intervalos de tempo.

Ao contrário do que acontece com os modelos baseados na utilização de polinómios de Legendre e wavelets polinomiais, onde a escolha de um incremento de tempo igual ao intervalo de tempo em que a carga é aplicada é fundamental, a utilização de bases construídas com sistemas de wavelets de Daubechies torna possível a obtenção de resultados de qualidade muito boa, mesmo quando se consideram incrementos de tempo com valores superiores. Isto pode ser explicado tendo em conta que este tipo de base permite o tratamento muito eficaz de singularidades ou variações muito bruscas da solução em zonas localizadas do domínio temporal em estudo.

Na Figura 5.43, apresenta-se a variação do parâmetro do erro quando se considera uma base constituída com wavelets de Daubechies com número de família, $N=4$.

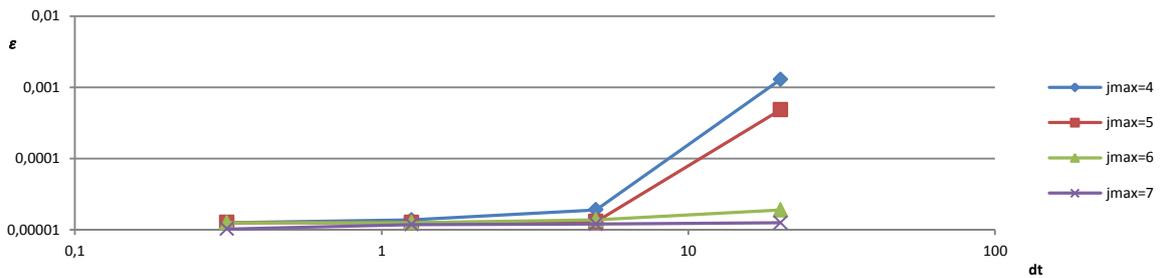


Figura 5.43 – Desvio de deslocamento em wavelets de Daubecheis - MTI

Pode observar-se que a utilização desta base de funções permite obter resultados muito aceitáveis mesmo quando se considera um incremento $\Delta t = 20 s$, o que corresponde a realizar a análise completa usando apenas um passo temporal.

Também a evolução da aceleração, representada na Figura 5.44, é agora aproximada de forma mais correcta. A análise desta figura permite confirmar que as wavelets de Daubechies são capazes de representar a variação brusca da aceleração para intervalos de tempo superiores ao da aplicação da carga.

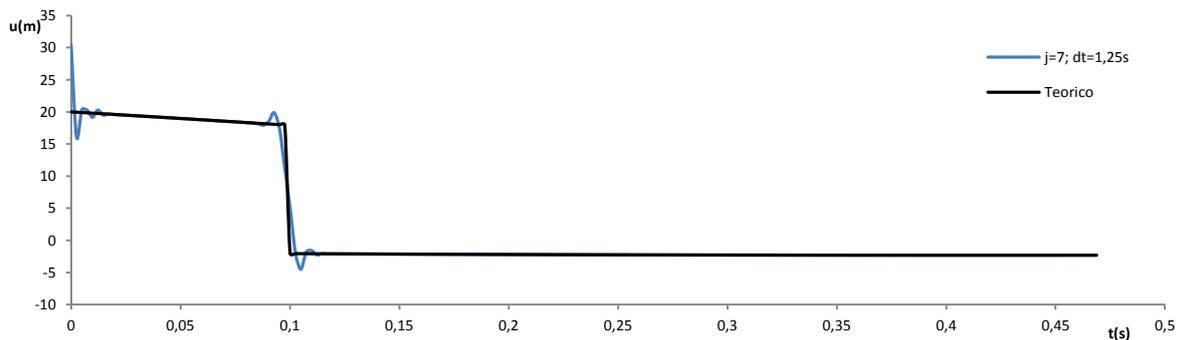


Figura 5.44 – Evolução da aceleração com wavelets de Daubechies

5.3.3. Exemplo 3

Analisa-se agora um problema com dois graus de liberdade, adaptado de [27] e novamente em regime linear. É aplicada uma carga sinusoidal segundo cada um dos graus de liberdade. A Tabela 5.6 lista a informação que permite caracterizar a estrutura e o carregamento em análise.

Tabela 5.6 – Exemplo 3 – Características da estrutura e do carregamento.

$ K = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} (kN/m);$	$F = \begin{bmatrix} 10\sin(0.702t - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(1.92606t + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} (kN);$	$T = 25 (s)$
$ C = \begin{bmatrix} 4.24 & 3.7 \\ 3.7 & 4.35 \end{bmatrix} (kN \cdot s/m);$	$u_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} (m);$	
$ M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} (ton);$	$v_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix} (m/s);$	

O estudo deste exemplo tem como objectivo estudar soluções que apresentem resultados semelhantes comparando o esforço computacional despendido na obtenção de cada uma dessas soluções. Pretende-se assim determinar qual dos métodos utilizados apresenta uma melhor relação entre qualidade da solução e esforço computacional despendido.

Foram escolhidos para este estudo dois níveis de aproximação. O primeiro nível de aproximação está associado a um valor de erro médio de 0.001, enquanto o segundo nível de aproximação admite um valor de erro médio de 1E-07.

De acordo com os erros escolhidos foram seleccionados, para o primeiro grau de aproximação, os seguintes métodos com os respectivos parâmetros:

- Método de Newmark - $\Delta t = 0.2 s$
- MTI – Polinómios de Legendre – *Grau máximo* = 14 ; $\Delta t = 12.5 s$
- MTI – Polinómios de Legendre – *Grau máximo* = 6 ; $\Delta t = 5.0 s$
- MTI – wavelets Polinomiais - $j = 1$; $\Delta t = 3.125 s$
- MTI – wavelets de Daubechies - $N = 4$; $j_0 = 4$; $j_{max} = 5$; $\Delta t = 25 s$

Para o segundo grau de aproximação foram seleccionados:

- Método de Newmark - $\Delta t = 0.002 s$
- MTI – Polinómios de Legendre – *Grau máximo* = 10; $\Delta t = 5.0 s$
- MTI – Polinómios de Legendre – *Grau máximo* = 6; $\Delta t = 2.5 s$
- MTI – wavelets Polinomiais - $j = 1$; $\Delta t = 1.0 s$
- MTI – wavelets Polinomiais - $j = 2$; $\Delta t = 2.0 s$
- MTI – wavelets de Daubechies - $N = 4$; $j_0 = 5$; $j_{max} = 6$; $\Delta t = 6.25 s$

De forma a contabilizar o esforço computacional, foi medido o tempo de *CPU* conforme indicado na Secção 5.1.3. Foi realizado um conjunto de 10 análises para cada um dos modelos testados. Os

resultados que se apresentam correspondem à média dos valores das 10 análises. Optou-se por esta solução de forma a minimizar o erro na medição do tempo por parâmetros não controláveis introduzidos pelo computador. Os resultados obtidos encontram-se listados na Tabela 5.7.

No Anexo A, pode ser consultado o andamento do deslocamento do primeiro grau de liberdade para cada um dos métodos testados.

Tabela 5.7 – Tempos computacionais associados aos diferentes modelos testados

Erros médios de deslocamento ε	Método	Parâmetros	Tempo Computacional (s)
1.00E-03	Newmark	$\Delta t = 0.2 \text{ s}$	0.025
	MTI- Polinómios de Legendre	$\Delta t = 12.5 \text{ s}$ $P_{max} = 14$	0.076
	MTI- Polinómios de Legendre	$\Delta t = 5.0 \text{ s}$ $P_{max} = 6$	0.025
	MTI- wavelets Polinomiais	$\Delta t = 3.125 \text{ s}$ $j = 1$	0.021
	MTI – wavelets de Daubecheis	$\Delta t = 25.0 \text{ s}$ $N = 4$ $j_0 = 4$ $j_{max} = 5$	0.296
1.00E-07	Newmark	$\Delta t = 0.002 \text{ s}$	0.155
	MTI- Polinómios de Legendre	$\Delta t = 2.5 \text{ s}$ $P_{max} = 6$	0.015
	MTI- Polinómios de Legendre	$\Delta t = 5.0 \text{ s}$ $P_{max} = 10$	0.058
	MTI- wavelets polinomiais	$\Delta t = 1.0 \text{ s}$ $j = 1$	0.117
	MTI- wavelets polinomiais	$\Delta t = 2.0 \text{ s}$ $j = 2$	0.087
	MTI – wavelets de Daubecheis	$\Delta t = 6.25 \text{ s}$ $N = 4$ $j_0 = 5$ $j_{max} = 6$	1.385

Em primeiro lugar, é necessário salientar que o desempenho computacional do modelo misto de integração no domínio do tempo depende fortemente do número de pontos utilizados na integração numérica requerida pelo cálculo de F_n (ver equação 3.54). Procurou-se por essa razão escolher uma

quantidade mínima de pontos, desde que suficientes para a integração se realizar com a precisão necessária. Procurou seleccionar-se um número de pontos para a integração numérica que garantisse a precisão do cálculo da integração numérica, sem no entanto existir uma forma de optimização do número de pontos utilizados.

Em segundo lugar, é possível verificar que os métodos clássicos apresentam melhores relações qualidade/esforço computacional quando se pretende uma aproximação mais “grosseira”. Por outro lado, quando se pretende uma aproximação com um grau de erro mínimo, é possível concluir que os modelos de integração mista apresentam melhor relação qualidade/esforço.

Quando comparando a selecção de parâmetros diferentes na utilização do mesmo tipo de funções, privilegiando numa situação o refinamento do tipo p - e noutra o refinamento do tipo h -, pode observar-se que a escolha de um maior refinamento do tipo p - em detrimento do refinamento do tipo h -, conduz a esforços computacionais mais elevados quando comparados com a situação inversa. Pode observar-se, no caso da utilização de polinómios de Legendre, que a solução que apresenta o maior refinamento do tipo p -, apresenta um esforço computacional três vezes superior à da solução que privilegia o refinamento h -.

Já no caso das wavelets polinomiais, observa-se o contrário. A solução que privilegia o refinamento do tipo p -, apresenta melhores resultados no que ao esforço computacional diz respeito. Refira-se no entanto que neste caso a diferença do tempo computacional medido não é tão significativa como no caso dos polinómios de Legendre.

No caso dos polinómios de Legendre, para ambos os casos de grau de aproximação, verifica-se que a utilização de um menor grau do polinómio juntamente com a utilização de um menor intervalo de tempo conduz a esforços computacionais inferiores relativamente à utilização de polinómios superiores e intervalos de tempo também superiores. Já para as wavelets polinomiais, pode verificar-se o contrário, visto que a utilização de um refinamento superior em conjunto com um intervalo de tempo superior, pode conduzir a um melhor desempenho computacional.

Pode observar-se que em termos de esforço computacional, os modelos baseados na utilização das wavelets de Daubechies ficam bastante aquém das restantes alternativas. É no entanto importante salientar a capacidade deste tipo de funções na obtenção de soluções de qualidade quando se considera apenas um passo temporal, ou no caso deste problema, um incremento $\Delta t = 25.0 s$.

Por fim procurou analisar-se a influência do tempo de análise no esforço computacional. Para esse efeito foi feita uma nova análise com um tempo de análise dez vezes superior à inicialmente considerada. Analisam-se apenas uma solução recorrendo ao método de Newmark e uma solução recorrendo ao *MTI* com a utilização de waveltes polinomiais Os valores do tempo computacional apresentam-se na Tabele 5.8.

Tabela 5.8 – Tempos computacionais associados a diferentes tempos de análise.

Método	Parâmetros	Tempo Computacional (s)	
		$T = 25 \text{ s}$	$T = 250 \text{ s}$
Newmark	$\Delta t = 0.002 \text{ s}$	0.155	1.563
MTI- wavelets polinomiais	$\Delta t = 1.0 \text{ s}$ $j = 1$	0.117	1.078

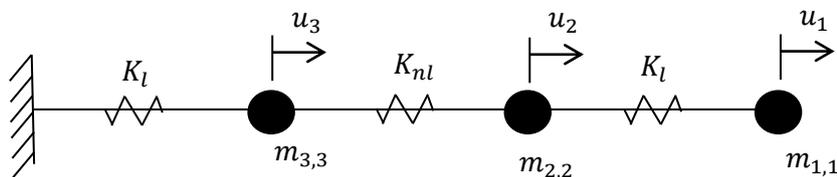
Pode observar-se na Tabela 5.8 que ambos os métodos apresentam tempos computacionais igualmente dependentes do tempo de análise considerado.

5.3.4. Exemplo 4

Por fim, analisa-se uma estrutura com três graus de liberdade, agora em regime não-linear. Pretende-se com este teste, adaptado de [4], estudar as potencialidades dos diferentes modelos em discussão na análise deste tipo de situação.

Na Tabela 5.9 listam-se os parâmetros que permitem caracterizar o comportamento da estrutura. Não há qualquer carregamento exterior, sendo considerada apenas uma distribuição de velocidades no instante inicial.

Tabela 5.9 – Exemplo 4 – Características da estrutura.



$$[K] = \begin{bmatrix} K_l & -K_l & 0 \\ -K_l & K_l + K_{nl} & -K_{nl} \\ 0 & -K_{nl} & K_l + K_{nl} \end{bmatrix}$$

$$K_l = 15 \text{ N/m}$$

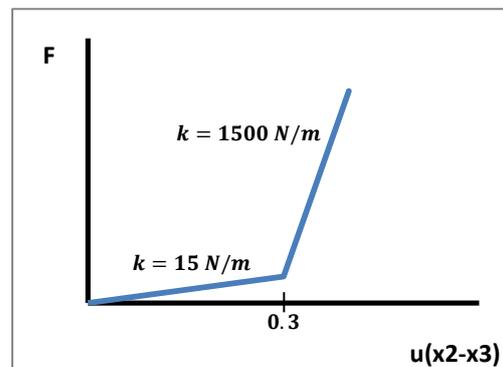
$$K_{nl}:$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u'_0 = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.30 \\ 0.38 \end{bmatrix}$$



A análise deste problema não-linear tem como objectivo comparar o desempenho de um modelo clássico e um modelo de integração mista no tempo. Desta forma foi apenas testado o método de Newmark e o MTI baseado na consideração de polinómios de Legendre.

Na Figura 5.45 é apresentado o valor do erro médio associado à solução obtida com os dois métodos, sendo que se apresentam os resultados para duas discretizações envolvendo polinómios de Legendre, com grau máximo igual a 6 e a 12, respectivamente.

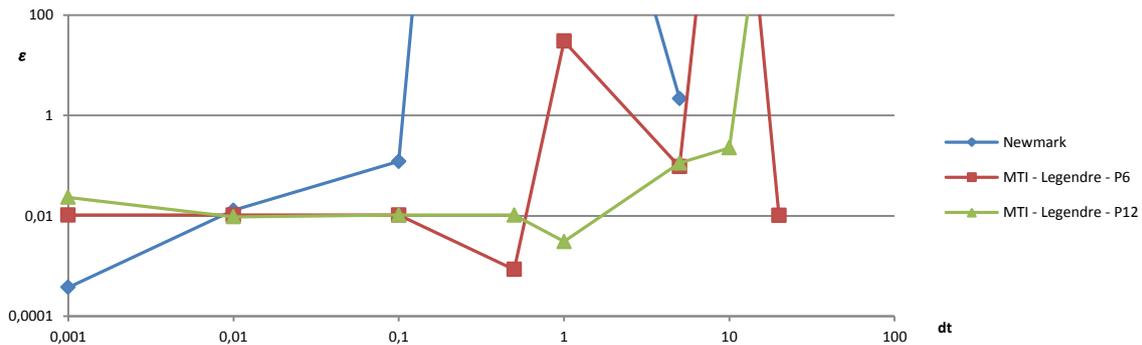
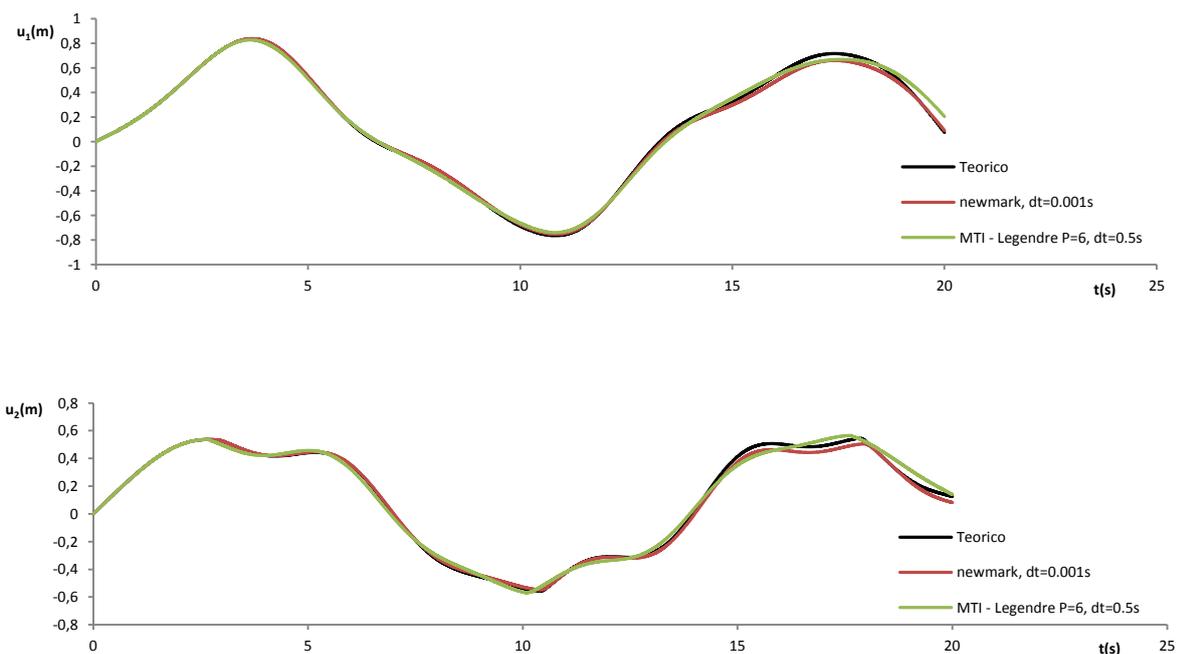


Figura 5.45 - Erro médio do deslocamento do 2º grau de liberdade.

Pode observar-se que para intervalos de tempo elevados é impossível a obtenção de soluções adequadas. Apesar das soluções obtidas para intervalos de tempo elevados serem pouco consistentes, é possível observar que nesta região o modelo misto apresenta melhores resultados sendo que também aparenta estabilizar para intervalos de tempo mais pequenos.

A Figura 5.46, mostra a evolução do deslocamento associado a cada um dos três graus de liberdade, para cada um dos modelos testados.



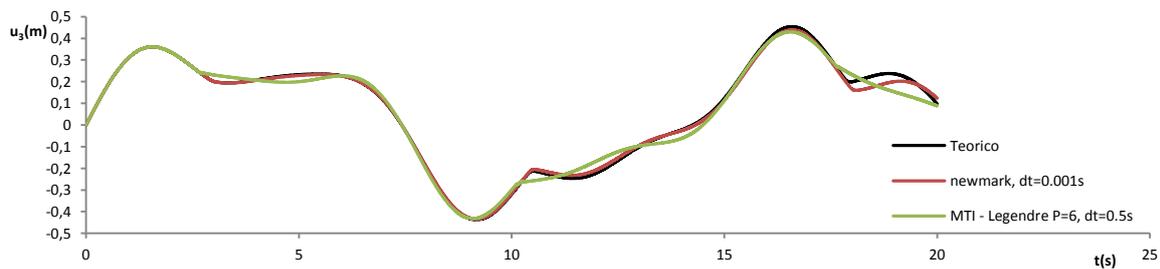


Figura 5.46 – Deslocamento dos diferentes graus de liberdade

Pode verificar-se que o método de Newmark permite, regra geral, aproximar melhor a solução analítica qualquer que seja o grau de liberdade considerado. Saliente-se que no caso de uma análise não-linear a dimensão do incremento de tempo pode ser fortemente condicionado pelo desenvolvimento de fenómenos não-lineares. Isto implica que quando se pretende neste contexto utilizar os modelos mistos de integração no tempo não será possível a consideração de incrementos de tempo de dimensão semelhante à que se poderia considerar caso a estrutura apresentasse um comportamento em regime linear.

Apresenta-se na Tabela 5.10 a comparação dos vários medidores de desempenho para os dois casos

Tabela 5.10 – Erros e Tempos computacionais dos diferentes métodos em análise não linear

Método	Parâmetros	Erros médios de deslocamento (2º grau de liberdade) ε	Tempo Computacional (s)
Newmark	$\Delta t = 0.001 \text{ s}$	3.757E-04	0.169
MTI – Polinómios MTI com Legendre	$\Delta t = 0.5 \text{ s}$ $P_{max} = 6$	3.076E-03	0.267

É possível verificar que no problema não linear em análise o modelo misto de integração no domínio do tempo utilizando funções polinomiais de Legendre não é competitivo quando comparado com os métodos de análise clássica. Na análise realizada, o método de Newmark permite obter erros mais reduzidos e um melhor desempenho computacional.

Este fraco desempenho dos modelos de integração mista pode ser explicado com o fraco aproveitamento da possibilidade de realizar passos no tempo elevados. Saliente-se que cada vez que a mola central tem uma alteração de rigidez, existe a necessidade de ignorar a solução obtida a partir desse instante temporal, sendo necessário considerar um novo passo. São por isso calculadas as soluções numa quantidade de pontos que não serão aproveitadas.

6. ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Uma vez validados os modelos mistos de integração no domínio do tempo, testado o seu desempenho, avaliadas as características e propriedades das várias bases de aproximação disponíveis e aferida a eficiência dos vários processos de refinamento, pretende-se no presente capítulo ilustrar as potencialidades destes modelos na análise dinâmica de três problemas na área da engenharia de estruturas. Para este efeito, é neste capítulo efectuada a análise de uma viga, de um pórtico plano e de uma placa (estado plano de tensão).

Na análise de todos os problemas que se seguem foram consideradas as seguintes hipóteses:

- Linearidade física
- Linearidade geométrica
- Homogeneidade e isotropia do material estrutural

6.1. Análise de uma viga

Considere-se a viga apresentada na Figura 6.1 sujeita a uma carga de impacto. As propriedades da viga e carregamento aplicado apresentam-se na Figura 6.2.

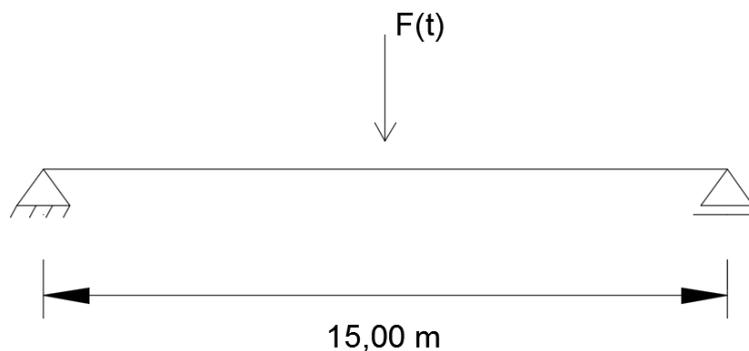
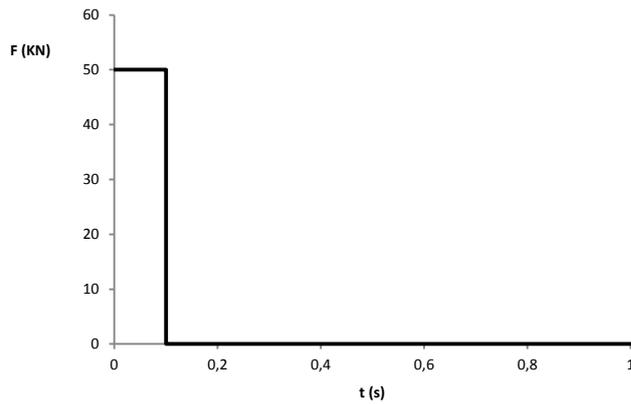


Figura 6.1 – Viga simplesmente apoiada.



$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$A = 5380 \text{ mm}^2$$

$$I = 83,6 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$\xi = 5,0\%$$

Figura 6.2 – Propriedades e Carregamento.

Na discretização no domínio do espaço foram considerados 30 elementos finitos do tipo viga Euler-Bernoulli com dois nós, o que conduz a uma malha com 60 graus de liberdade. Na definição da matriz de amortecimento de Rayleigh, definido em (2.15), foi considerado um amortecimento de 5%. Recorreu-se à utilização de polinômios de Legendre de grau 8 como funções de aproximação das variáveis dinâmicas no método misto de integração no tempo e assumiu-se um incremento no domínio do tempo dado por $\Delta t = 0,3 \text{ s}$.

A deformada da viga foi calculada em três instantes de tempo e a solução apresenta-se na Figura 6.3.

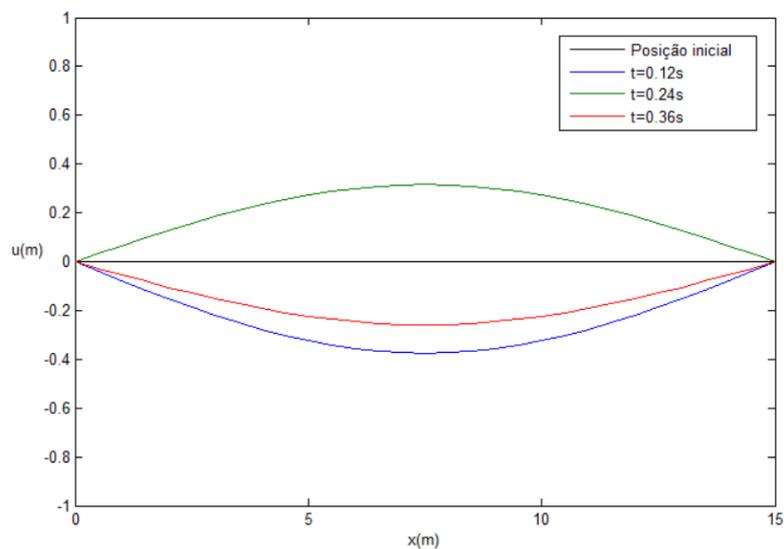


Figura 6.3 – Deformada da viga.

Na Figura 6.4, representa-se a evolução do valor do deslocamento transversal a meio vão ao longo do tempo. Como esperado, o valor da amplitude do deslocamento vai diminuindo à medida que o tempo evolui.

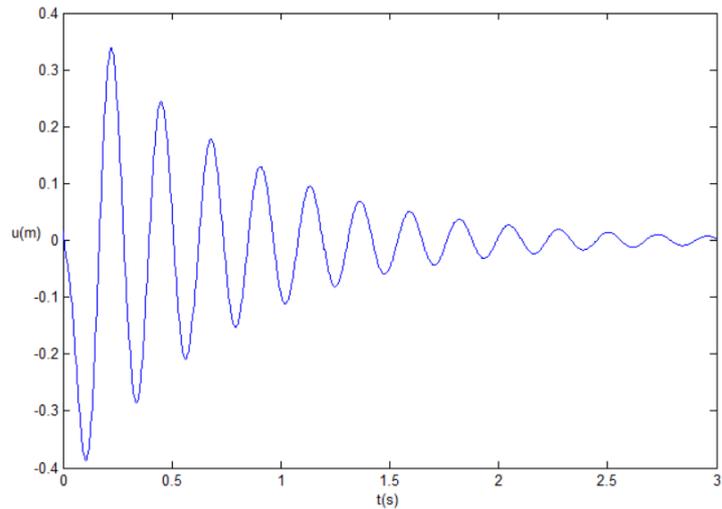


Figura 6.4 – Deslocamento vertical a meio vão.

Na Figura 6.5, apresenta-se a evolução do valor do momento flector a meio vão em função do tempo.

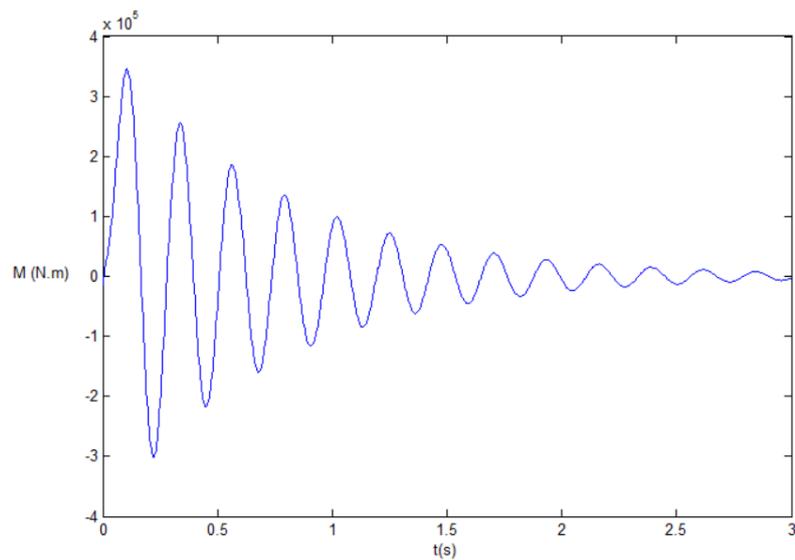


Figura 6.5 – Momento flector a meio vão.

6.2. Análise de um pórtico plano

Considere-se a torre porticada representada na Figura 6.6, sujeita a uma força distribuída horizontal, variável ao longo do tempo. Na Figura 6.7, representa-se a força aplicada em função do tempo, bem como as propriedades da estrutura (exemplo adaptado de [5]).

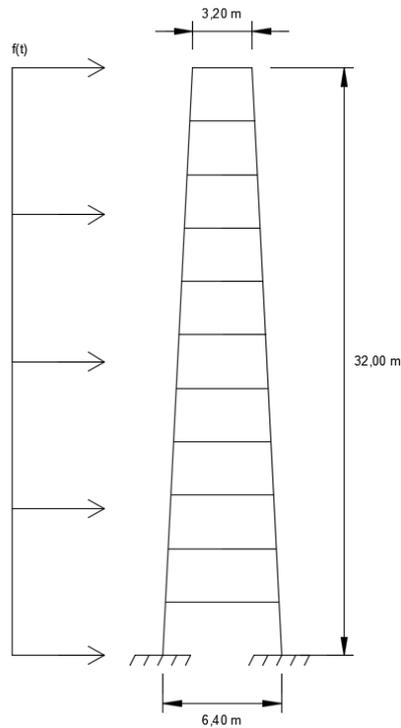
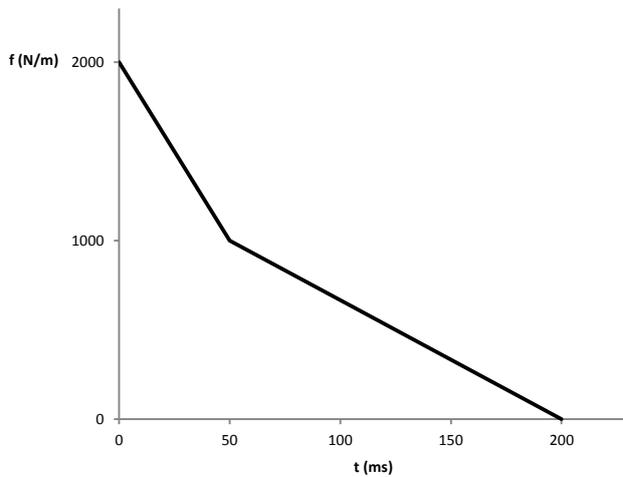


Figura 6.6 – Torre porticada.



$$E = 207 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$A = 10000 \text{ mm}^2$$

$$I = 83.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\xi = 2.0\%$$

Figura 6.7 – Carregamento e propriedades da estrutura.

Foi considerada, na discretização espacial da estrutura, uma malha de 33 elementos finitos do tipo viga Euler-Bernoulli com dois nós. Esta malha conduz a um total de 66 graus de liberdade. São utilizadas como funções de aproximação das variáveis dinâmicas no método misto de integração no tempo sistemas de wavelets de Daubechies com família $N = 4$ e grau de refinamento base e máximo, $j_0 = j_{max} = 5$. Considerou-se para incremento de tempo $\Delta t = 0.25\text{s}$.

Foram calculadas as deformadas da estrutura apresentando-se, na Figura 6.8, as soluções para o instante $t = 0,2\text{ s}$ e $t = 0,4\text{ s}$. São apresentados os deslocamentos ampliados de forma a que os mesmos sejam visíveis.

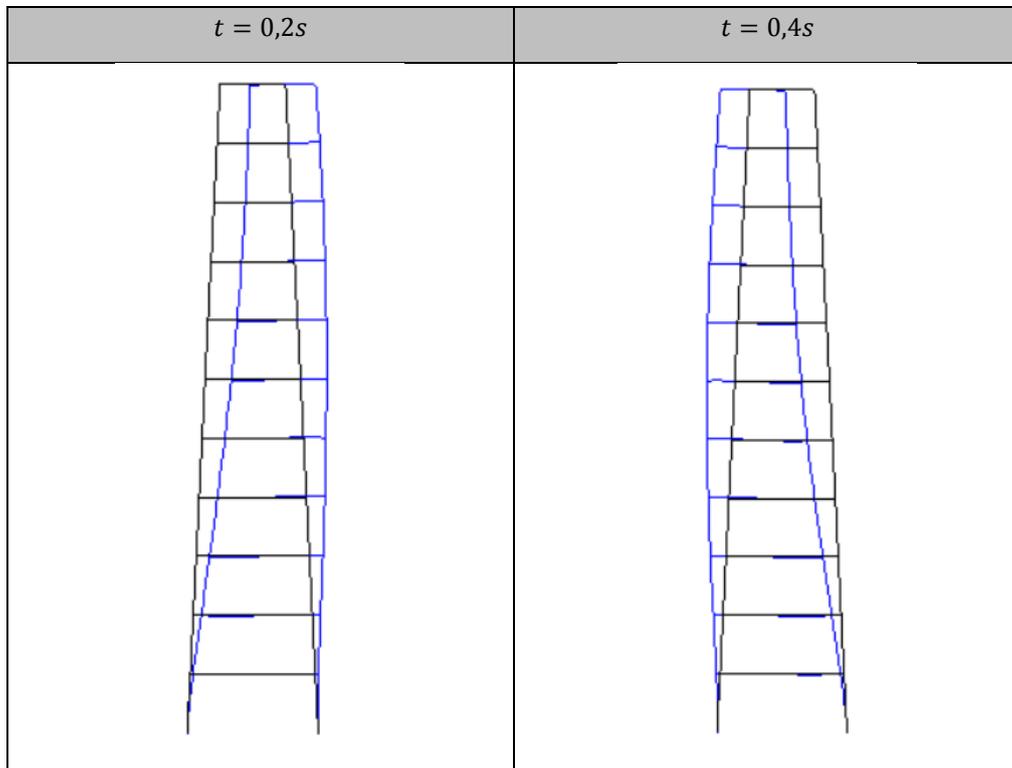


Figura 6.8 – Deformada da estrutura porticada para $t=0,2\text{ s}$ (à esquerda) e $t=0,4\text{ s}$ (à direita).

O deslocamento horizontal de um ponto situado no topo da estrutura é medido e apresenta-se o seu andamento ao longo do tempo na Figura 6.9.

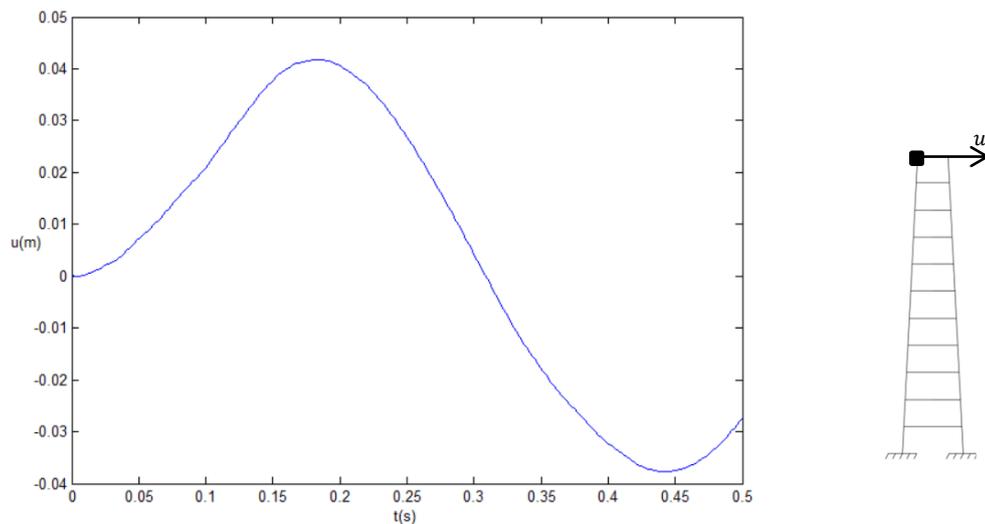


Figura 6.9 – Deslocamento horizontal no topo da estrutura porticada.

Calculou-se também o valor do momento flector na base do pórtico. Apresenta-se na Figura 6.10 a evolução do valor dessa grandeza ao longo do tempo.

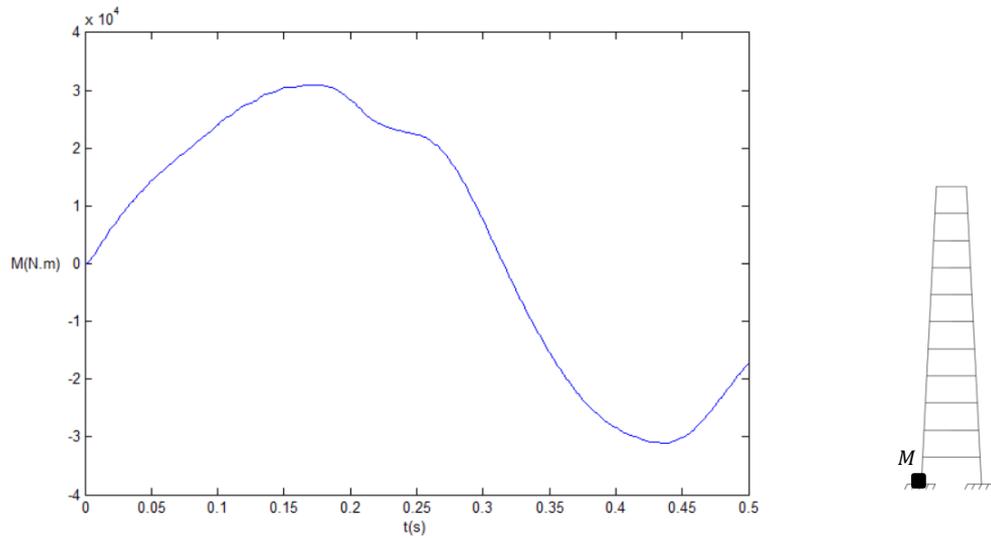


Figura 6.10 – Momento flector na base da estrutura porticada.

6.3. Análise de uma placa

Considere-se a placa em consola representada na Figura 6.11. Neste exemplo, adaptado de [2], a placa está sujeita a uma carga uniformemente distribuída, constante ao longo do tempo, aplicada na face superior.

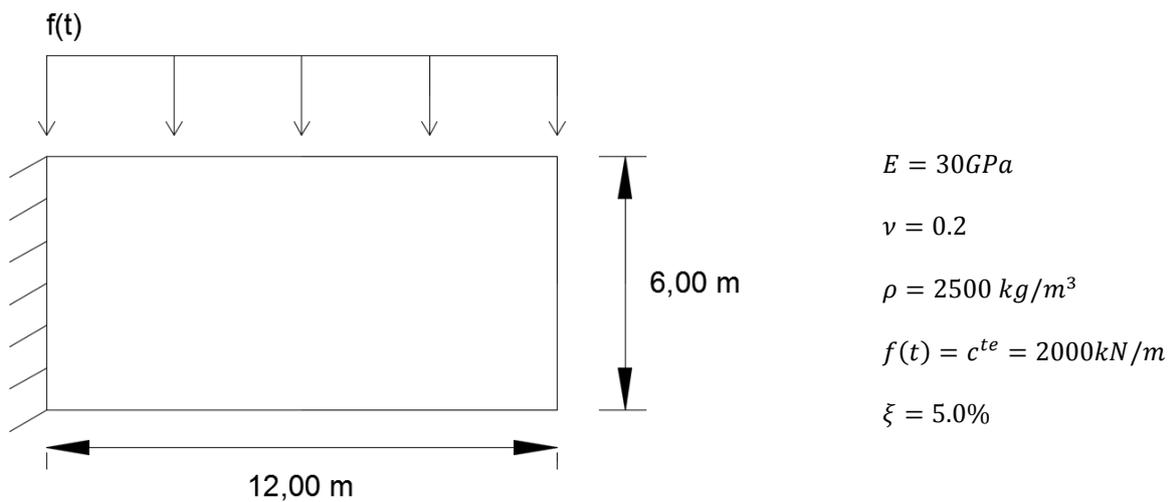


Figura 6.11 – Placa em consola.

Foram considerados 100 elementos finitos rectangulares de 4 nós na discretização espacial da estrutura, o que conduz a um total de 220 graus de liberdade. Recorreu-se à utilização de sistemas de wavelets polinomiais com grau de refinamento $j = 2$ como funções de aproximação das variáveis dinâmicas no modelo misto de integração no tempo. Assumiu-se ainda um incremento $\Delta t = 0.05$ s.

Na Figura 6.12, apresentam-se as deformadas nos instantes $t = 0.025$ s, $t = 0.050$ s e $t = 0.075$ s. Mais uma vez essas configurações deformadas foram amplificadas para que possam ser facilmente visíveis.

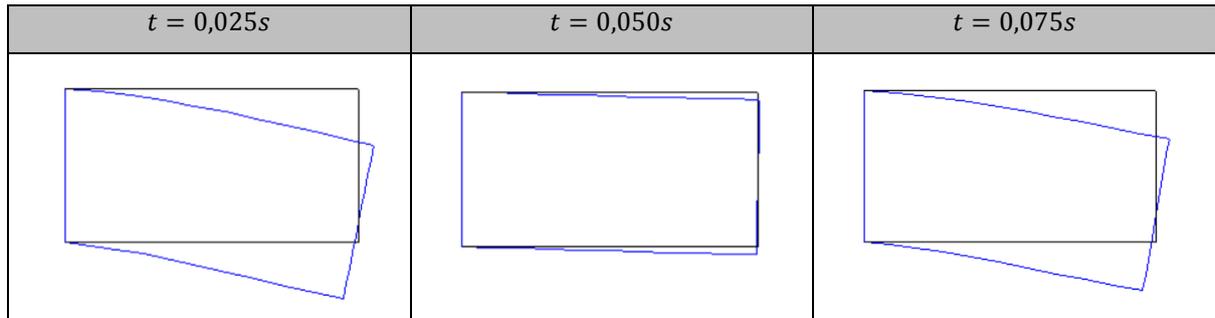


Figura 6.12 – Deformadas da placa para $t=0.025$ s (à esquerda), $t=0.050$ s (ao centro) e $t=0.075$ s (à direita).

Na Figura 6.13, apresenta-se a evolução do deslocamento vertical para o ponto localizado no canto superior direito da placa.

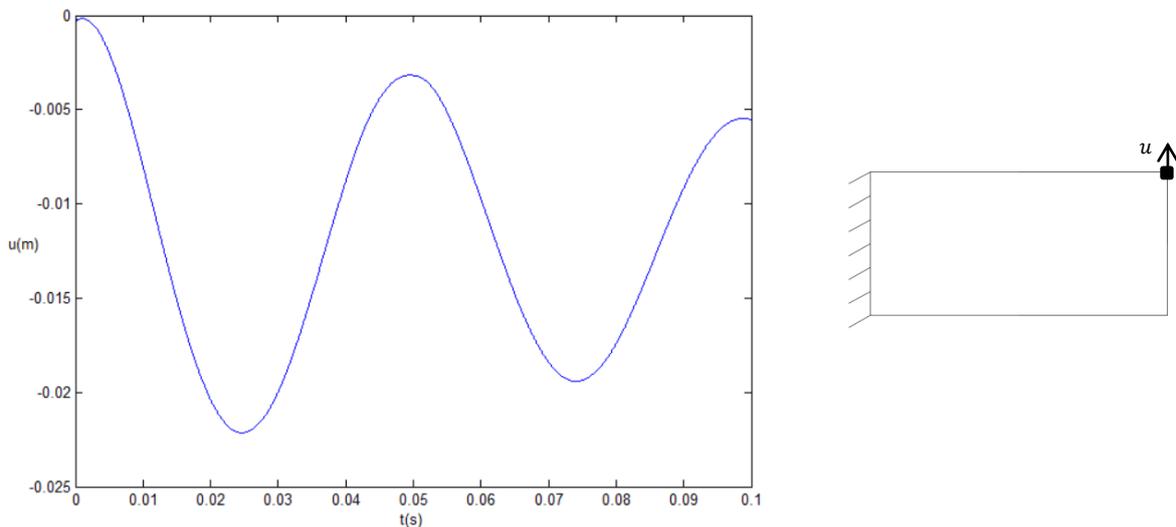


Figura 6.13 – Evolução do deslocamento vertical no canto superior direito da placa.

7. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

A presente dissertação teve como principal objectivo testar e avaliar a utilização de diversos sistemas de funções na definição das bases de aproximação para os campos de deslocamento, velocidade e aceleração requeridas pelo modelo misto de integração no domínio do tempo proposto em [13]. Foram apresentados alguns exemplos de forma a avaliar a convergência e testar a qualidade das soluções obtidas com recurso a essas funções alternativas.

O método misto de integração no tempo permite a adopção de processos de refinamento bastante eficazes, tanto do tipo p - como do tipo h -. A possibilidade de se utilizarem bases de funções com um grau elevado, leva a que seja possível obter resultados de muito boa qualidade considerando incrementos de tempo muito superior aos que é possível considerar quando se utilizam os métodos de integração clássicos. No entanto, é necessário ter em conta que a utilização de bases de aproximação de dimensão muito elevada pode conduzir a sistemas de equações mal condicionados, o que induz problemas de instabilidade numérica nas análises. No caso dos polinómios de Legendre a estabilidade da solução é garantida para graus de polinómio, $N < 15$. Para as wavelets polinomiais é possível obter soluções estáveis para um grau de refinamento $j < 3$. Já nas wavelets de Daubechies, obtêm-se soluções estáveis para graus de refinamento muito elevados. Aqui o limite está geralmente associado a um peso computacional excessivo e não tanto a problemas de instabilidade numérica.

Nos sistemas de wavelets de Daubechies, o refinamento do tipo p pode ser implementado de três diferentes maneiras. O aumento do número da família, N , introduz uma fraca melhoria da solução, não introduzindo no entanto um aumento significativo do esforço computacional. O refinamento do grau de refinamento máximo, j_{max} , permite grandes melhorias na solução, tendo no entanto associado um aumento no esforço computacional elevado. A possibilidade de ter um grau de refinamento base, j_0 , próximo do grau de refinamento máximo não é relevante do ponto de vista de melhoria da solução, tendo ainda a agravante de introduzir um aumento no esforço computacional.

Quanto ao esforço computacional despendido na obtenção de soluções, as diferentes funções utilizadas apresentam resultados distintos. Quando comparando soluções com graus de erro semelhantes, as bases constituídas por polinómios de Legendre apresentam os menores tempos computacionais. As wavelets de Daubechies, por outro lado, apresentam os maiores tempos computacionais. Este facto decorre de não estarem a ser devidamente aproveitadas as potencialidades associadas à utilização de sistemas de wavelets. Como referido no capítulo dedicado à apresentação das funções de aproximação, na implementação efectuada no contexto desta dissertação foram considerados apenas refinamentos uniformes. Quer isto dizer que para cada grau de refinamento foram sempre consideradas todas as funções (wavelets) possíveis. Ora, tendo em conta as características de uma análise multi-resolução, é perfeitamente possível definir uma base na

qual sejam apenas consideradas algumas das wavelets em cada um dos graus de refinamento considerados. Outro aspecto que condiciona o desempenho do sistema de wavelets de Daubechies relaciona-se com a necessidade de se considerar um grau de refinamento mínimo, o que obriga à consideração de um número elevado de funções, mesmo na base menos refinada.

Em comparação com os modelos clássicos, tiveram-se em consideração duas situações relacionadas com dois níveis diferentes de erro. Para o grau de erro mais elevado, os polinómios de Legendre apresentam tempos computacionais próximos dos modelos clássicos, enquanto que os dois sistemas de wavelets apresentam tempos superiores. Já para o grau de erro mais reduzido, os polinómios de Legendre apresentam tempos computacionais muito inferiores aos dos modelos clássicos, sendo que estes são semelhantes aos apresentados pelos sistemas de wavelets polinomiais.

Dos testes efectuados parece ser possível extrair as seguintes conclusões gerais relacionadas com a construção das bases de aproximação:

- os polinómios de Legendre permitem a obtenção de resultados precisos e possibilitam a implementação de processos de refinamento p bastante eficazes. No entanto, essas bases não devem conter polinómios de grau superior a um determinado valor (tendo em conta as experiências numéricas efectuadas, esse valor é de 15);
- as bases com polinómios de Legendre são as que têm menor dimensão e as asseguram o melhor rácio precisão de resultados/esforço computacional;
- de todos os sistemas de funções testados, os polinómios de Legendre são os mais fáceis de gerar e de manipular. A construção dos vários operadores necessários à aplicação do modelo misto de integração no tempo resulta desta forma bastante facilitado quando se considera este tipo de função;
- o algoritmo de integração mais estável é conseguido quando se consideram sistemas de wavelets de Daubechies. No entanto, esse é o tipo de base que requer um maior esforço computacional.
- quando se consideram bases de aproximação muito ricas (grau de polinómios ou graus de refinamento elevados), a utilização de passos no tempo de valor muito reduzido pode aumentar o valor dos erros na aproximação.

Nesta fase do desenvolvimento dos algoritmos, parece ser claro que a melhor aposta corresponde à escolha dos polinómios de Legendre como funções de aproximação. No entanto, os sistemas de wavelets de Daubechies apresentam um enorme potencial de desenvolvimento. Serão seguramente muito competitivos quando se implementarem bases de funções não-uniformes.

O modelo misto de integração no domínio do tempo parece ser menos competitivo quando comparado com os modelos clássicos quando se efectuam análises em regime não-linear. Isto ocorre

pois não é possível considerar-se um incremento de tempo muito elevado, uma vez que este é condicionado pela não linearidade do problema.

No que diz respeito a desenvolvimentos futuros, destacam-se as seguintes possibilidades:

- Tirar partido da propriedade de multiresolução nos sistemas de wavelets, permitindo utilizar um refinamento selectivo com diferentes graus consoante a complexidade da solução.
- Utilização e teste de outros tipos de funções de aproximação. Com especial interesse surgem os sistemas de wavelets trigonométricas.
- Explorar a possibilidade de considerar diferentes passos de tempo, determinados de forma automática e adaptativa, desenvolvimento com especial interesse no caso de análises não lineares.
- Explorar a possibilidade da utilização de diferentes métodos de integração no domínio do tempo na mesma análise numérica. Com especial interesse em análises em regime não linear. Permitindo grandes passos de tempo durante o regime linear, com a utilização do modelo misto de integração, e utilizando modelos clássicos nas não linearidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **Arruda M.R.T.**, *“Análise Dinâmica de Estruturas com Elementos Finitos Híbridos-Mistos de Tensão”*, Dissertação para obtenção de Grau de Mestre em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2008.

[2] **Arruda M.R.T e Castro, L.M.S.**, *“Structural dynamic analysis using hybrid and mixed finite element models”*, Finite Element in Analysis and Design, 57, pp. 43-54, 2012.

[3] **Barbosa A.R.**, *“Wavelets no intervalo em elementos finitos”*, Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2001.

[4] **Bathe K.J.**, *“Lecture 14: Solution of Nonlinear Dynamic Response II”*, Finite Element Procedures for Solids and Structures – Nonlinear Analysis, RES.2-002, Massachusetts Institute of Technology, 2010.

[5] **Bathe K.J.**, *“Finite Element Procedures”*, Prentice-Hall, Inc, 1996.

[6] **Castro L. M. S. S.**, *“Waveletes e Séries de Walsh em Elementos Finitos, Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Civil”*, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1996.

[7] **Castro L.M.S.S. e Barbosa A.R.**, *“Implementation of an hybrid-mixed stress model based on the use of wavelets”*, Computers & Structures, 81, pp. 718-731, 2006.

[8] **Castro L.M.S.S. e Freitas J.A.T.**, *“Wavelets in Hybrid-Mixed Stress Model based on the use of Waveletes”*, Comput. Methods Appl. Mech. And Engrg, 190, pp. 3977-3998, 2001.

[9] **Chopra A.K.**, *“Dynamics of Structures: Theory and applications to earthquake engineering”*, Pearson Education, Inc., 2012.

[11] **Cohen A., Daubechies I. e Vial P.**, *“Wavelets on the Interval and Fast Wavelet Transforms”*, Appl. Comput. Harmonic. Anal., 6, pp. 1-52, 1993.

[11] **Daubechies I.**, *“Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets”*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1988.

[12] **Daubechies I.**, *“Ten Lectures on Waveletes”*, SIAM, (1992).

- [13] **Freitas J.A.T.**, “*Mixed finite element solution of time-dependent problems*”, *Comput. Methods Appl. Mech. And Engrg*, 197, pp. 3657-3678, 2008.
- [14] **Fröhlich J. e Uhlmann M.**, “*Orthonormal Polynomial Wavelets on the Interval and Applications to the Analysis of Turbulent Flow Fields*”, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 63, pp. 1789-1830, 2003.
- [15] **Gomes J.M.N.S.**, “*Modelos híbridos-mistos para análise de lajes*”, Dissertação para obtenção de Grau de Mestre em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2013.
- [16] **Grossmann A. e Morlet J.**, “*Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape*”, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 15, nº4, pp. 723-736, 1984.
- [17] **Haar A.**, “*Zür Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme*”, *Math Annal*, 69, pp. 331-371, 1910.
- [18] **Leal C.S.**, “*Modelos de Elementos Finitos Híbridos-Mistos: Aplicação a uma Barragem de Gravidade*”, Dissertação para obtenção de Grau de Mestre em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2007.
- [19] **Mallat S. G.**, “*A theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation*”, *IEEE , Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, Vol. 11, nº7, pp. 674-693, 1989.
- [20] **Meyer Y.**, “*Ondelettes et Opérateurs*”, Vol. 1, Hermann, 1ª Edição, Paris, 1990.
- [21] **Monasse P. Perrier V.**, “*Orthonormal Wavelet Bases adapted for Partial Differential Equations with Boundary Conditions*”, *SIAM J. Math. Anal.*, 29, pp. 1040-1065, 1998.
- [22] **Newmark N.M.**, “*A method of computation for structural dynamics*”, *ACSE 85 EM85*, 1959.
- [23] **Paz I.R.S.M.**, “*Elementos Finitos Híbridos-Mistos de Tensão Baseados na Utilização de Waveletes Polinomiais*”, Dissertação para obtenção de Grau de Mestre em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2009.
- [24] **Spiegel M. R. e Abellanas L.**, “*Fórmulas e Tabelas de Matemática Aplicada*”, Schaum, McGrawHill, (1990).
- [25] **Tamma K.K., Zhou X. e Sha D.**, “*The Time Dimension: A Theory Towards the Evolution, Classification, Characterization and Design of Computational Algorithms for Transient/Dynamic Applications*”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol 7, 2, pp. 67-290, 2000.

[26] Wilson E. L., Farhoomand, I., e Bathe, K. J. "Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures" International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, pp. 241-252, 1973.

[27] Zienkiewicz O. C. e Taylor R. L., "The Finite Element Method, Volume 1 – Basic Formulation and Linear Problems", 4ª Edição, McGraw-Hill, Berkshire, 1989.

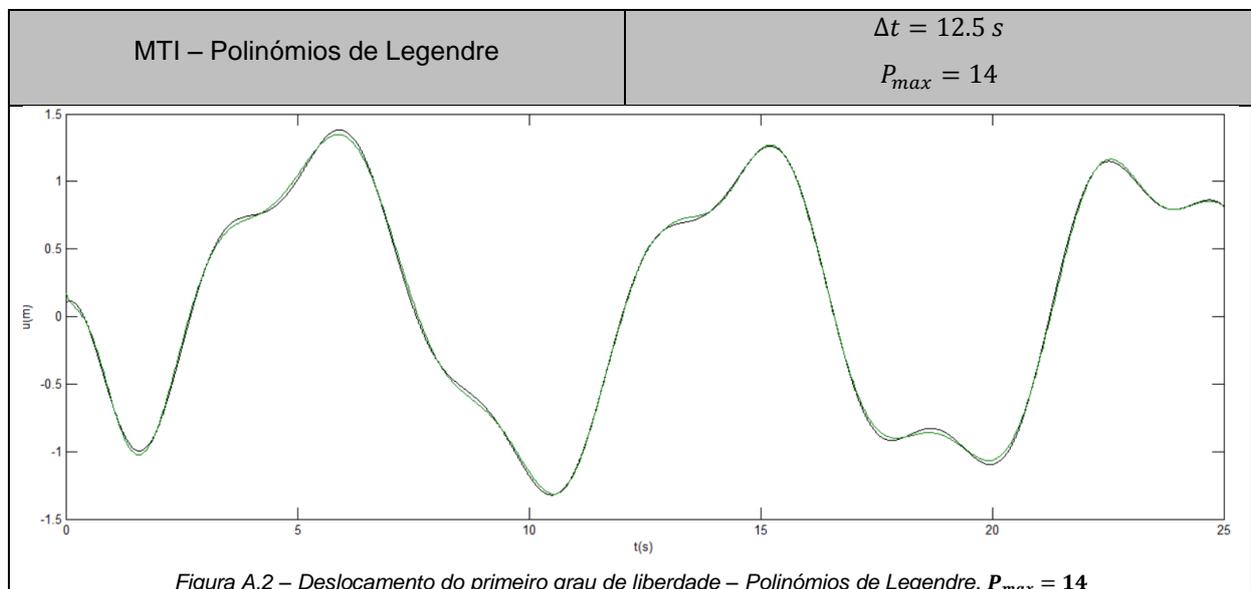
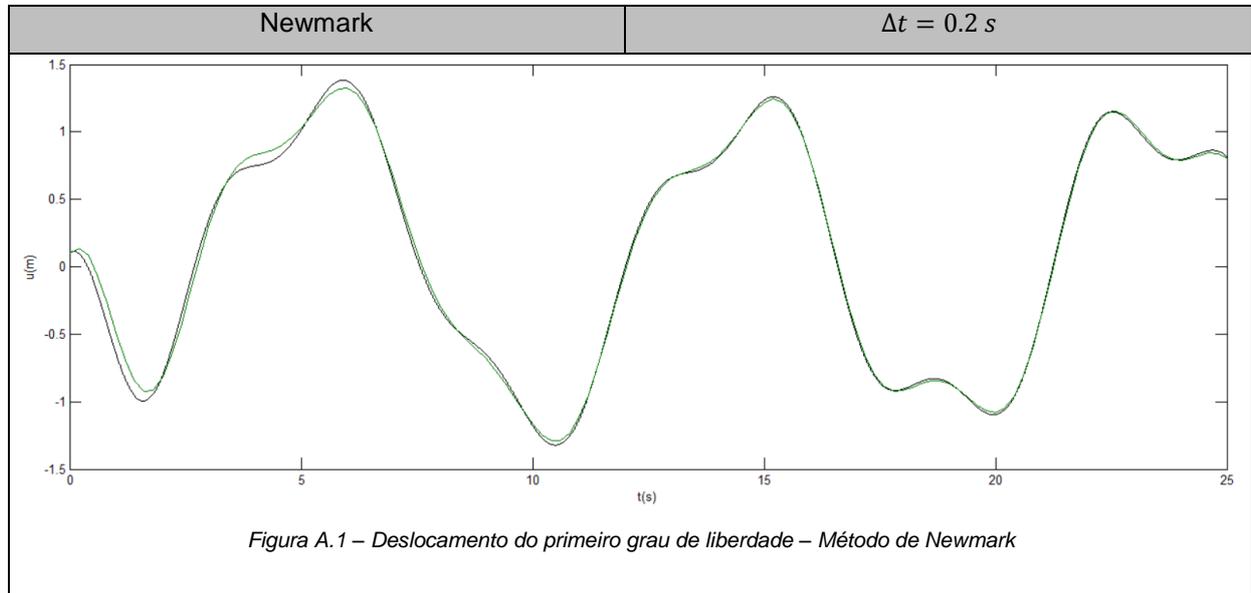
[28] MatLab 2R014a, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.

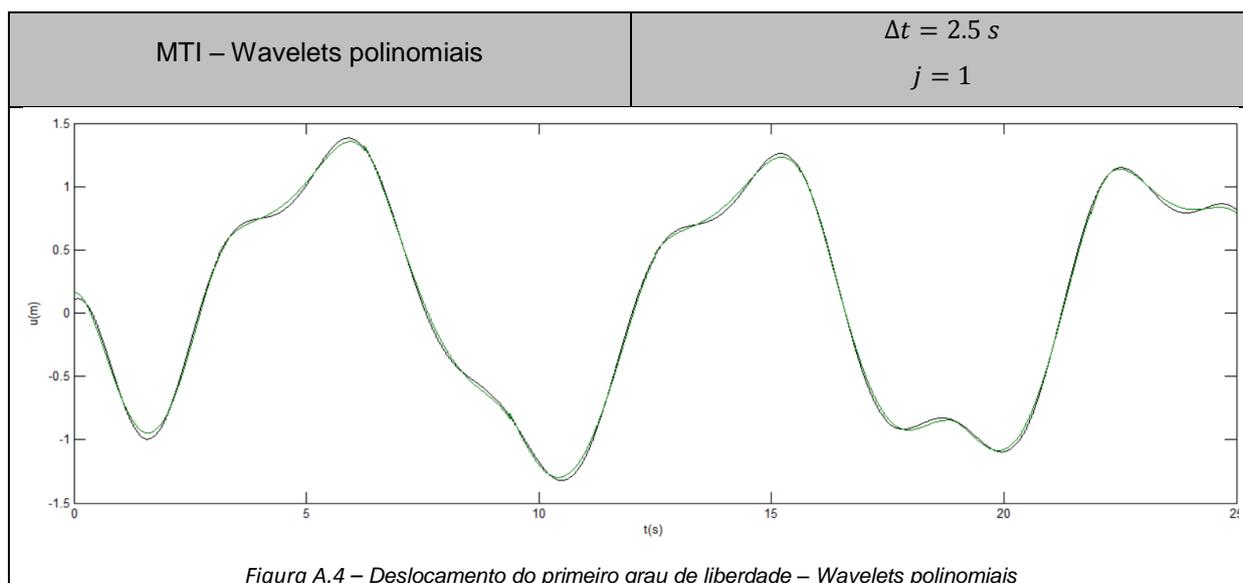
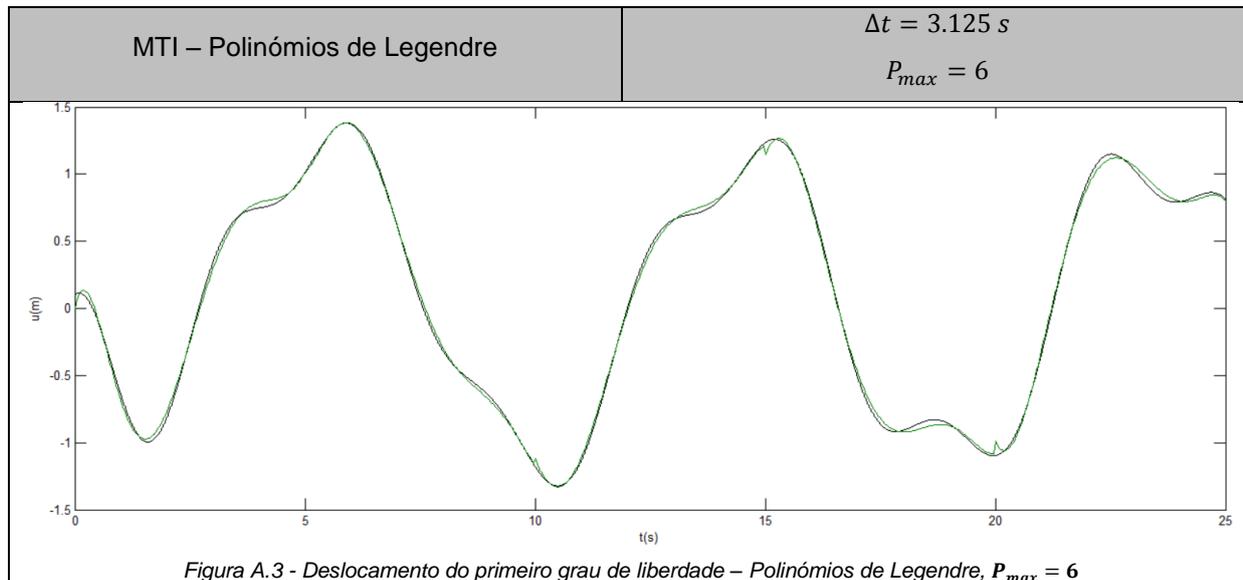
Websites

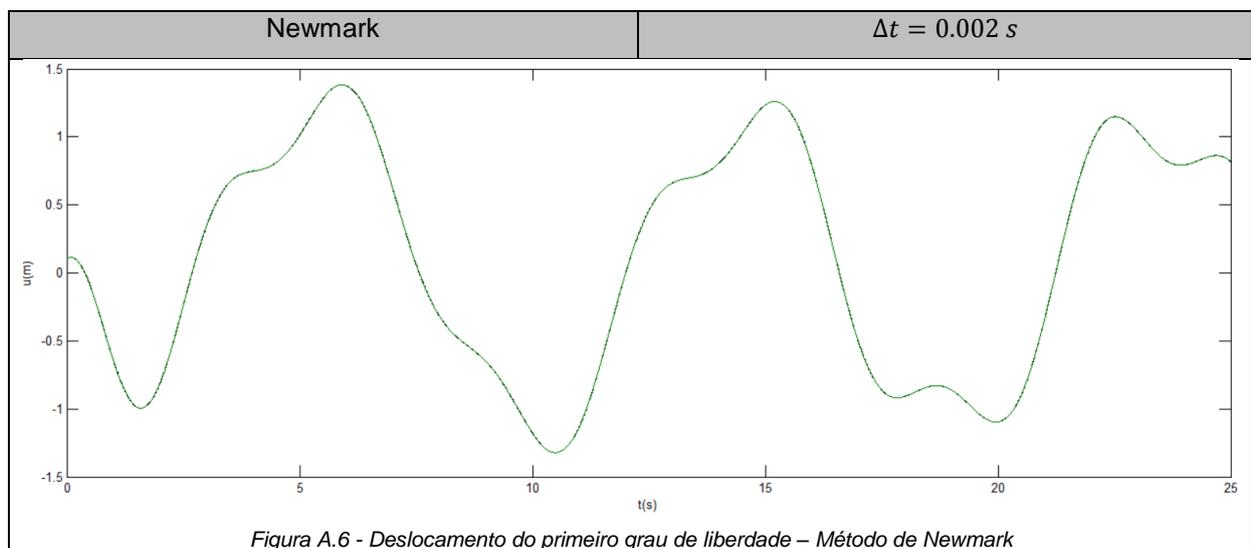
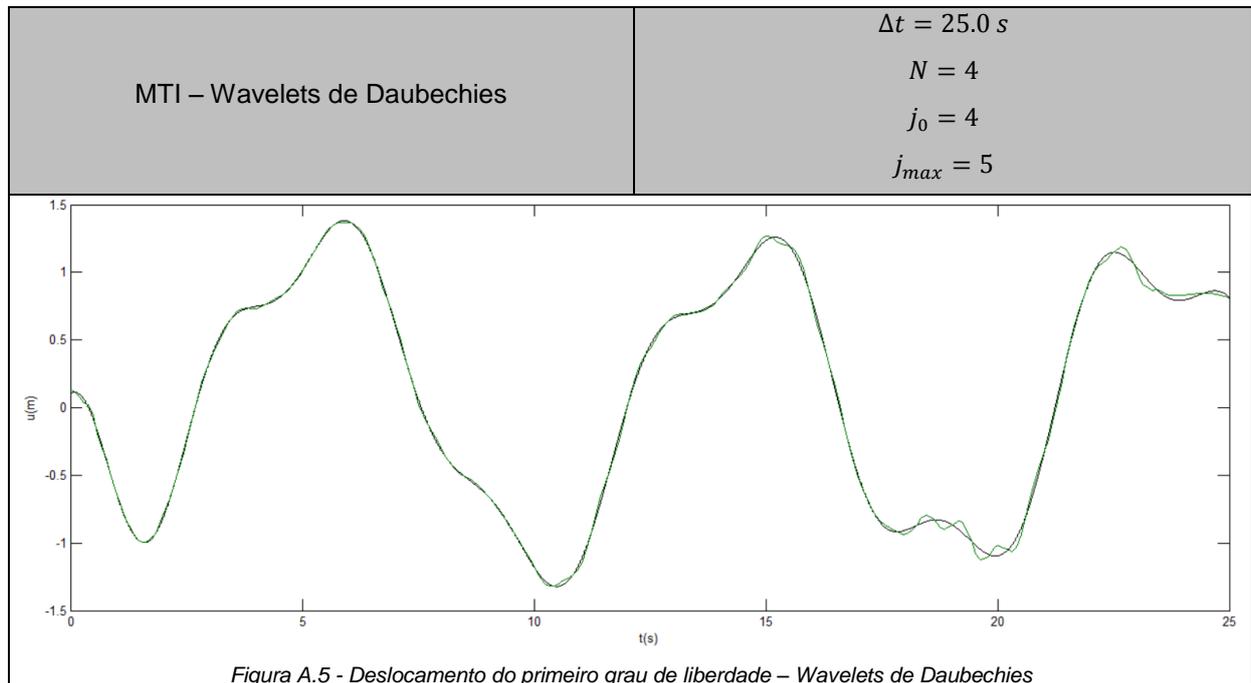
[29] <http://www.acm.org/crossroads/xrds6-3/sahaimgcoding.html>

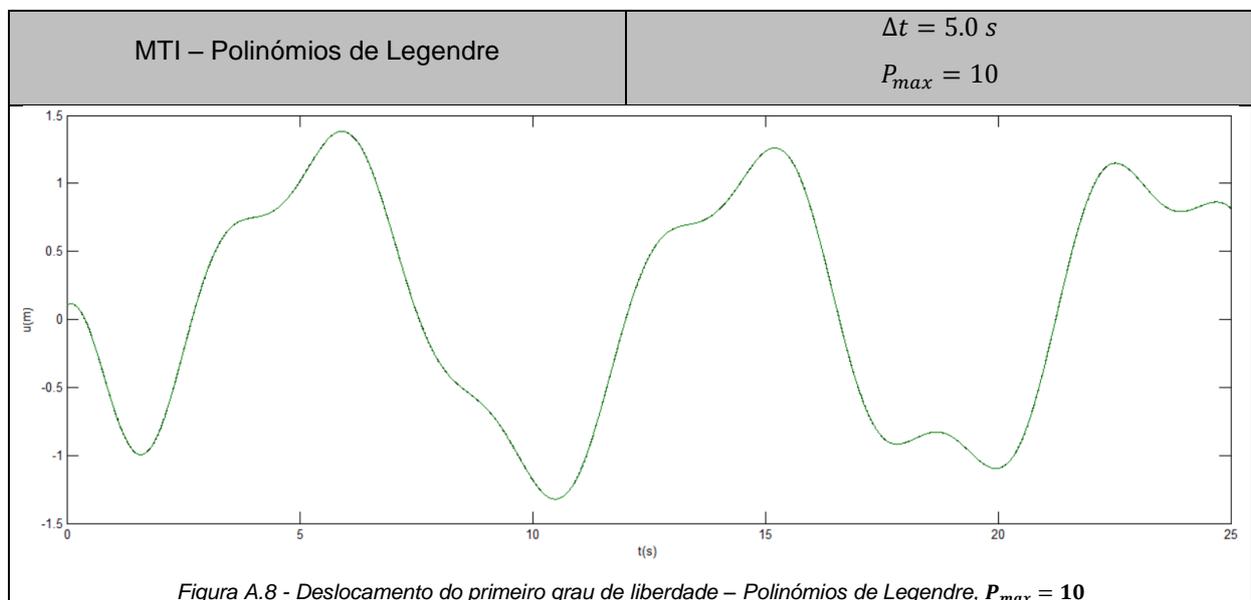
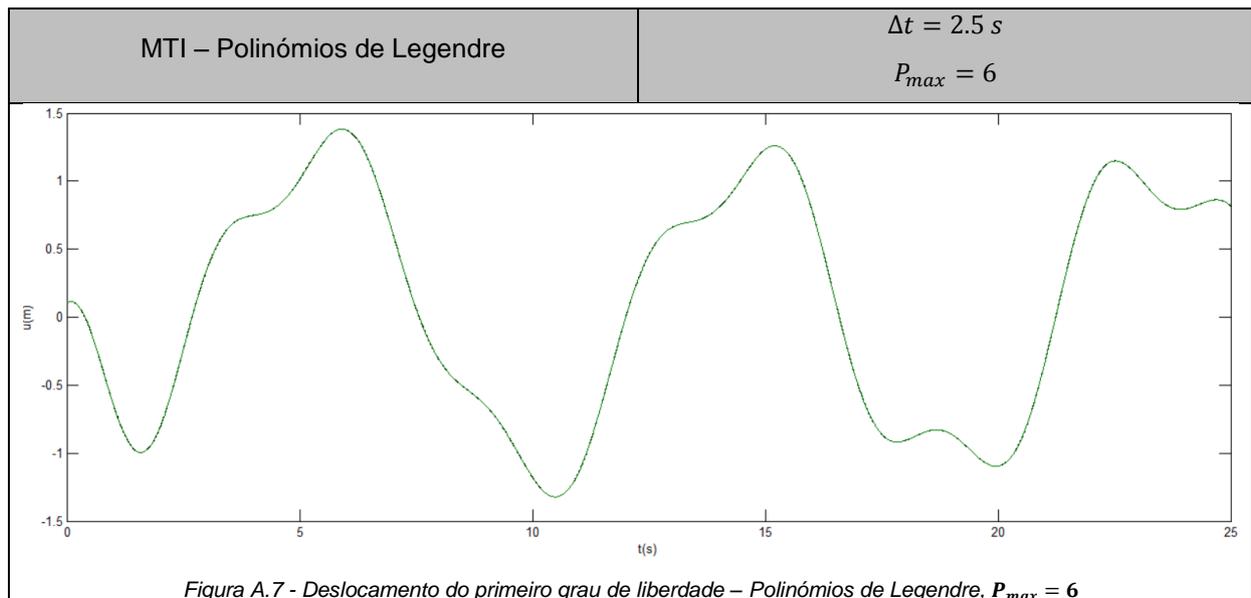
ANEXO A

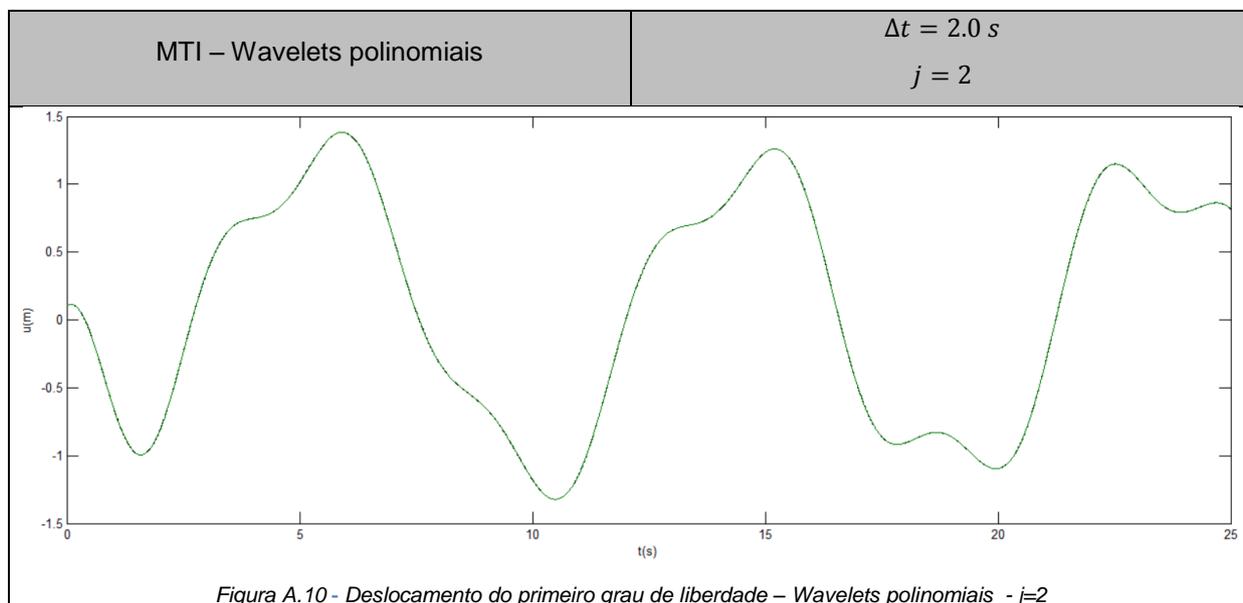
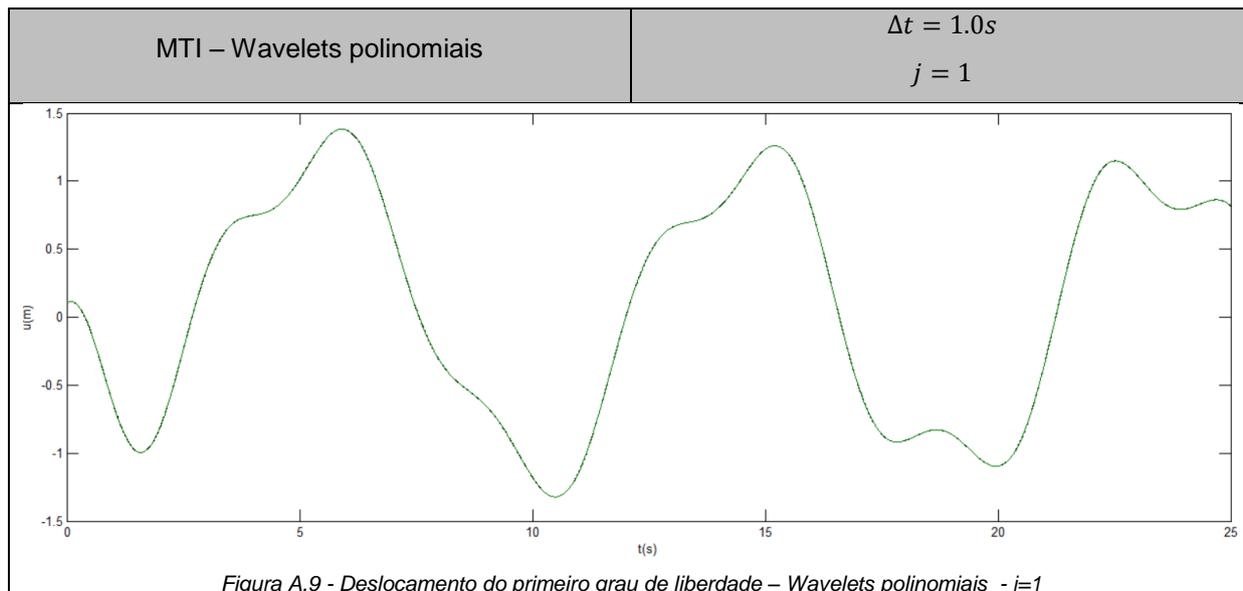
Apresentam-se neste anexo as soluções obtidas para o deslocamento do primeiro grau de liberdade do problema referente ao Exemplo 3, estudado na secção 5.3.3. A solução aproximada obtida representa-se a cor verde e a solução analítica representa-se a cor preta.











MTI – Wavelets de Daubechies

$$\Delta t = 6.25 \text{ s}$$

$$N = 4$$

$$j_0 = 5$$

$$j_{max} = 6$$

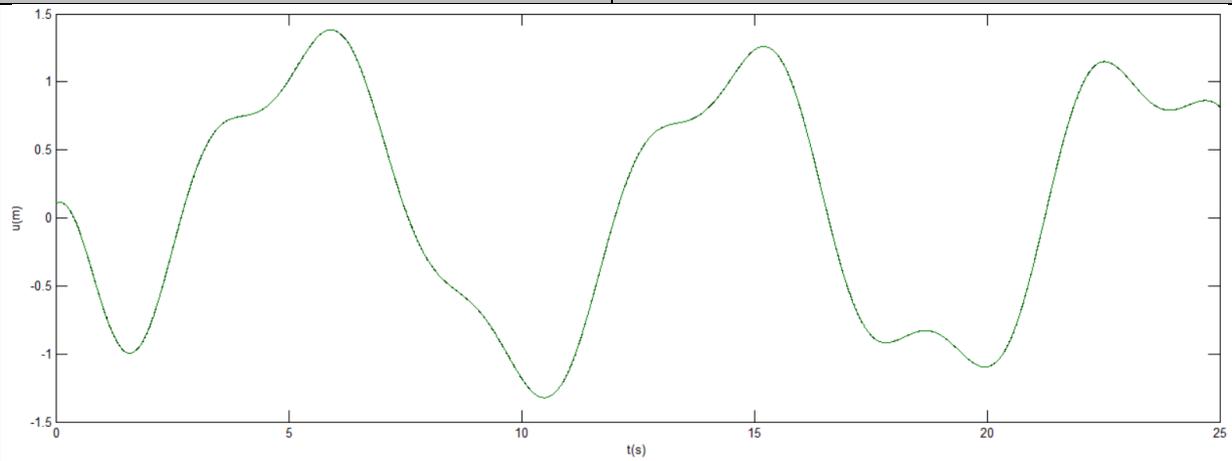


Figura A.11 - Deslocamento do primeiro grau de liberdade – Wavelets de Daubechies