TÉCNICO LISBOA

Análise dinâmica de vigas finitas sobre fundação elástica sujeitas a cargas móveis

Pedro André Santos de Castro Jorge

Dissertação para a obtenção de Grau de Mestre em

Engenharia Civil

Júri

Presidente:	Doutor José Manuel Matos Noronha da Câmara
Orientador:	Doutor António Manuel Figueiredo Pinto da Costa
Orientador:	Doutor Fernando Manuel Fernandes Simões
Vogais:	Doutor Jorge Miguel Silveira Filipe Mascarenhas Proença
	Doutor Luís Manuel Coelho Guerreiro

Outubro, 2013

Resumo

No presente trabalho estuda-se a resposta dinâmica de vigas assentes em fundações elásticas e sujeitas à acção de cargas móveis. Desenvolve-se um programa de elementos finitos em ambiente MatLab para analisar este problema, tendo os respectivos resultados sido validados por comparação com os de artigos científicos. Analisam-se as respostas do sistema para três tipos de comportamento da fundação: (a) elástico linear (modelo clássico de Winkler), (b) elástico não linear e (c) elástico bilinear (isto é, com comportamento distinto quando a fundação se encontra à tracção ou à compressão). Expõe-se para cada um a respectiva formulação matemática do problema, o método usado na resolução das equações diferenciais que regem o movimento e conclui-se com a apresentação e discussão dos resultados obtidos. Analisa-se o efeito da velocidade da carga, comprimento da viga e rigidez do solo de fundação nas amplificações de deslocamentos e momentos flectores da viga. Determinam-se também velocidades críticas para vigas com ou sem amortecimento, com fundações uniformes ou divididas em dois sub-domínios de rigidezes diferentes.

Palavras-chave: fundação elástica, carga móvel, amplificação dinâmica, velocidade crítica.

Abstract

This dissertation presents a study on the dynamic response of beams on an elastic foundation subjected to the action of moving loads. A finite element model was programmed in MatLab environment to analyse this problem and the results obtained were validated by comparison with scientific articles on the subject. The response of the system is studied for three types of mechanical behavior of the foundation: (a) linear elastic (classic Winkler model), (b) nonlinear elastic and (c) bilinear elastic (i.e., with different behavior in tension and compression). For each of these, the mathematical formulation and method for solving the governing differential equations of motion are explained and followed by a discussion of the results of the analyses. The effects of the load velocity, beam length and foundation stiffness on the amplifications of deflections and bending moments are investigated. Critical velocities are determined for beams with or without damping, on uniform foundations or foundations composed of two sub-domains with different values of stiffness.

Keywords: elastic foundation, moving load, dynamic amplification, critical velocity.

Índice

Resumo iii

Abstract v

Lista de Figuras xiv

Lista de Tabelas xvi

Lista de Símbolos xviii

1 Introdução 1

2 Viga sobre fundação elástica linear de Winkler 5

2.1 Teoria e formulação do problema 5

2.1.1 Matriz de rigidez elementar 5

2.1.2 Matriz de massa elementar 9

2.1.3 Equações gerais do movimento 10

2.1.4 Estática de vigas sobre fundação elástica linear 13

2.2 Integração temporal das equações do movimento 13

2.3 Resultados e comentários 15

2.3.1 Análises de velocidades críticas 15

2.3.2 Estudos paramétricos 23

3 Viga sobre fundação elástica não linear 37

3.1 Teoria e formulação do problema 37

3.1.1 Fundação elástica não linear 37

3.1.2 Estática de vigas sobre fundação elástica não linear 38

3.1.3 Dinâmica de vigas sobre fundação elástica não linear 40

3.2 Resultados e comentários 41

3.2.1 Análises de velocidades críticas 41

3.2.2 Estudos paramétricos 50

4 Viga sobre fundação elástica bilinear 63

4.1 Teoria e formulação do problema 63

4.1.1 Levantamento do lado esquerdo 65

4.1.2 Levantamento do lado direito 67

4.1.3 Levantamento dos dois lados 69
4.1.4 Levantamento do meio 70
4.1.5 Levantamento total 72
4.1.6 Sem levantamento 72
4.1.7 Equações gerais do movimento 73
4.2 Resultados e comentários 75

5 Conclusões e desenvolvimentos futuros **85**

Referências **90**

Lista de Figuras

2.1 Elemento de viga sobre fundação elástica linear do tipo de Winkler clássica. . . . 6
2.2 Força elástica num troço elementar de comprimento dx da fundação. 8
2.3 Variáveis primárias e secundárias de um elemento de viga. 10
2.4 Forças nodais estaticamente equivalentes à acção de uma força pontual a uma distância x_c da secção esquerda do elemento de viga. 11
2.5 Viga discretizada apoiada numa fundação de Winkler. Indicação das forças generalizadas nas secções de extremidade. 12
2.6 Carril UIC60 (Szerkesztő, 2010; UIC60, 2013). 16
2.7 Viga sobre fundação uniforme sujeita a uma carga pontual F deslocando-se a velocidade constante. 17
2.8 Viga sobre fundação dividida em dois sub-domínios de rigidezes diferentes sujeita a uma carga pontual F deslocando-se a velocidade constante. 17
2.9 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_f = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 19
2.10 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_f = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 19
2.11 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_f = 500$ kN/m^2 e sem amortecimento. 20
2.12 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_f = 500$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 20
2.13 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação linear com dois sub-domínios e sem amortecimento (carga no sub-domínio 1). 21
2.14 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação linear com dois sub-domínios e sem amortecimento (carga no sub-domínio 2). 21
2.15 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação linear com dois sub-domínios e com amortecimento $\zeta = 2\%$ (carga no sub-domínio 1). 22
2.16 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação linear com dois sub-domínios e com amortecimento $\zeta = 2\%$ (carga no sub-domínio 2). 22
2.17 Efeito da rigidez da fundação na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $v = 150$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 26

2.18 Efeito da rigidez da fundação na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $v = 200$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 27
2.19 Efeito da rigidez da fundação na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $v = 150$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 27
2.20 Efeito da rigidez da fundação na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $v = 200$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 28
2.21 Efeito da rigidez da fundação na aceleração da secção transversal de meio vão para $v = 150$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 28
2.22 Efeito da velocidade da carga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 29
2.23 Efeito da velocidade da carga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 29
2.24 Efeito da velocidade da carga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 30
2.25 Efeito da velocidade da carga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 30
2.26 Efeito da velocidade da carga na aceleração da secção transversal de meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$. 31
2.27 Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $v = 50$ m/s e $\zeta = 0\%$. 31
2.28 Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $v = 150$ m/s e $\zeta = 0\%$. 32
2.29 Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $v = 50$ m/s e $\zeta = 0\%$. 32
2.30 Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $v = 150$ m/s e $\zeta = 0\%$. 33
2.31 Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $v = 50$ m/s e $\zeta = 0\%$. 33
2.32 Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $v = 150$ m/s e $\zeta = 0\%$. 34
2.33 Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $v = 50$ m/s e $\zeta = 0\%$. 34
2.34 Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $v = 150$ m/s e $\zeta = 0\%$. 35

3.1 Representação gráfica da relação constitutiva de uma fundação não linear. 37
3.2 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^3$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 43
3.3 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^4$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 43

3.4 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^5$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 44
3.5 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^6$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 44
3.6 Efeito da parcela não linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação uniforme com $k_l = 250$ kN/m^2, sem amortecimento e $t \in [0, t_{on}]$. 45
3.7 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^3$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 45
3.8 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^4$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 46
3.9 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^5$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 46
3.10 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^6$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 47
3.11 Efeito da parcela não linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação uniforme com $k_l = 250$ kN/m^2, com amortecimento $\zeta = 2\%$ e $t \in [0, t_{on}]$. 47
3.12 Efeito da parcela não-linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação com dois sub-domínios, sem amortecimento, $k_l = 250$ kN/m^2 (metade esquerda), $k_l = 500$ kN/m^2 (metade direita) e $t \in [0, t_{on}]$ (carga no sub-domínio 1). 48
3.13 Efeito da parcela não-linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação com dois sub-domínios, sem amortecimento, $k_l = 250$ kN/m^2 (metade esquerda), $k_l = 500$ kN/m^2 (metade direita) e $t \in [0, t_{on}]$ (carga no sub-domínio 2). 48
3.14 Efeito da parcela não-linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação com dois sub-domínios, com amortecimento $\zeta = 2\%$, $k_l = 250$ kN/m^2 (metade esquerda), $k_l = 500$ kN/m^2 (metade direita) e $t \in [0, t_{on}]$ (carga no sub-domínio 1). 49
3.15 Efeito da parcela não-linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação com dois sub-domínios, com amortecimento $\zeta = 2\%$, $k_l = 250$ kN/m^2 (metade esquerda), $k_l = 500$ kN/m^2 (metade direita) e $t \in [0, t_{on}]$ (carga no sub-domínio 2). 49
3.16 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 51

3.17 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 52
3.18 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 52
3.19 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 53
3.20 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 53
3.21 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 54
3.22 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 54
3.23 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 55
3.24 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 55
3.25 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 57
3.26 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 57
3.27 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 58
3.28 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 58
3.29 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 59
3.30 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 59
3.31 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 60
3.32 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 60
3.33 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$. . 61

4.1 Representação gráfica da relação constitutiva de uma fundação bilinear. Rigidez para movimentos ascendentes: k_{f+}. Rigidez para movimentos descendentes: k_{f-}. 64
4.2 Padrões de contacto do elemento finito tidos em conta no modelo de fundação bilinear. 64
4.3 Elemento de viga com levantamento do lado esquerdo. 65
4.4 Elemento de viga com levantamento do lado direito. 67
4.5 Elemento de viga com levantamento dos dois lados. 69
4.6 Elemento de viga com levantamento do meio. 71

4.7 Elemento de viga com levantamento total. 72
4.8 Elemento de viga sem levantamento. 73
4.9 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 250$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 77
4.10 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 200$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 77
4.11 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 150$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 78
4.12 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 100$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 78
4.13 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 75$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 79
4.14 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 50$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 79
4.15 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 25$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 80
4.16 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 0$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento. 80
4.17 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 250$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 81
4.18 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 100$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 81
4.19 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 50$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 82
4.20 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 25$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 82
4.21 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 0$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$. 83

4.22 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 0$ kN/m^2 , $k_{f-} = 2500$ kN/m^2 e sem amortecimento. 83
4.23 Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 0$ kN/m^2 , $k_{f-} = 10\,000$ kN/m^2 e sem amortecimento. 84

Lista de Tabelas

2.1 Propriedades do carril UIC60 (Dimitrovová e Rodrigues, 2012; UIC60, 2013). . . 16
2.2 Picos dos deslocamentos máximos para fundação linear uniforme com $k_f = 250$ kN/m^2. 18
2.3 Picos dos deslocamentos máximos para fundação linear uniforme com $k_f = 500$ kN/m^2. 18
2.4 Efeito da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos de meio vão para $v = 150$ m/s (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.17 e 2.19). 24
2.5 Efeito da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos de meio vão para $v = 200$ m/s (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.18 e 2.20). 24
2.6 Efeito da velocidade da carga nos deslocamentos e momentos flectores máximos de meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.22 e 2.24). 24
2.7 Efeito da velocidade da carga nos deslocamentos e momentos flectores máximos de meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.23 e 2.25). 25
2.8 Efeito do comprimento da viga nos deslocamentos e momentos flectores máximos a meio vão para $v = 50$ m/s e $k_f = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.27 e 2.31). 25
2.9 Efeito do comprimento da viga nos deslocamentos e momentos flectores máximos a meio vão para $v = 50$ m/s e $k_f = 1000$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.29 e 2.33). 25
2.10 Efeito do comprimento da viga nos deslocamentos e momentos flectores máximos a meio vão para $v = 150$ m/s e $k_f = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.28 e 2.32). 25
2.11 Efeito do comprimento da viga nos deslocamentos e momentos flectores máximos a meio vão para $v = 150$ m/s e $k_f = 1000$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.30 e 2.34). 26

3.1 Efeito da parcela não linear da rigidez nos deslocamentos máximos de pico para um sub-domínio, sem amortecimento, $k_l = 250$ kN/m^2 e $t \in [0, t_{on}]$. 42
3.2 Efeito da parcela não linear da rigidez nos deslocamentos máximos de pico para um sub-domínio, com amortecimento $\zeta = 2\%$, $k_l = 250$ kN/m^2 e $t \in [0, t_{on}]$. . . . 42

3.3 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -83.4$ kN, $v = 100$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.16 e 3.22). 50
3.4 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -83.4$ kN, $v = 150$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.17 e 3.23). 51
3.5 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -83.4$ kN, $v = 200$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.18 e 3.24). 51
3.6 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -834$ kN, $v = 100$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.25 e 3.31). 56
3.7 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -834$ kN, $v = 150$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.26 e 3.32). 56
3.8 Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -834$ kN, $v = 200$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.27 e 3.33). 56

4.1 Matriz de rigidez tangente e vector das forças internas elementares para os diferentes padrões de contacto do elemento finito considerados. 74

Lista de Símbolos

Símbolos gregos

δ Função delta de Dirac

ρ Massa volúmica

σ Campo de tensões

τ Tempo total que a carga demora a percorrer a viga

ε Campo de deformações

ζ Factor de amortecimento

Símbolos romanos

A Área da secção transversal

$\mathbf{C}$ Matriz de amortecimento

E Módulo de elasticidade

F Força pontual

I Momento de inércia de flexão

$\mathbf{K}_b$ Matriz de rigidez da viga

$\mathbf{K}_f$ Matriz de rigidez linear da fundação

$\mathbf{K}_{nl}$ Matriz de rigidez não linear da fundação

k_f Rigidez da fundação por unidade de comprimento

k_l Parcela linear da rigidez da fundação por unidade de comprimento

k_{nl} Parcela não linear da rigidez da fundação por unidade de comprimento

k_{f+} Rigidez da fundação à tracção por unidade de comprimento

k_{f-} Rigidez da fundação à compressão por unidade de comprimento

L Comprimento total da viga

l Comprimento do elemento finito

$\mathbf{M}$ Matriz de massa

M Campo de momentos flectores

$\mathbf{N}_i(x)$ Função de interpolação relativa à coordenada generalizada i

$\mathbf{p}$ Vector das forças internas

$\mathbf{Q}$ Vector das forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas

$\mathbf{q}$ Vector das coordenadas generalizadas

T Energia cinética total

U_b Energia potencial elástica da viga

U_f Energia potencial elástica da fundação

v Velocidade da força pontual

V Energia potencial elástica das forças aplicadas

w Campo de deslocamentos transversais

Subscritos

r rotação

t translação

Sobrescritos

din dinâmico

e elementar

est estático

T transposta

Capítulo 1

Introdução

O estudo da resposta dinâmica de uma viga sobre fundação elástica sujeita a carga móvel é um problema importante em Engenharia Civil que tem especial interesse e aplicação directa no dimensionamento e gestão de linhas de caminho de ferro de alta velocidade. Os primeiros comboios comerciais de alta velocidade começaram a operar no Japão em 1964 (Wikipedia, 2013) e desde então esta tecnologia espalhou-se pelos países industrializados, permitindo estabelecer ligações inter-cidades a velocidades médias de 300 km/h (Wikipedia, 2013). Como tal, para percursos entre 250 e 900 km, o comboio de alta velocidade consegue ser bastante competitivo face ao meio de transporte aéreo. Para ligações até 650 km, as durações de viagem para quem escolhe o comboio de alta-velocidade são mesmo inferiores às do avião, para o qual os tempos gastos em viagens de e para o aeroporto, no controlo de segurança e no embarque aumentam significativamente o tempo total da deslocação. A relevância deste meio de transporte pode ainda aumentar no futuro, uma vez que as velocidades de ponta destes comboios têm crescido sustentadamente nas últimas décadas. O recorde actual pertence ao comboio francês TGV, que atingiu em 2007 a velocidade de 507.8 km/h numa viagem de teste (Wikipedia, 2013).

Para velocidades elevadas ocorre porém uma amplificação das vibrações do carril induzidas pela passagem do comboio. Como possíveis efeitos negativos deste fenómeno destaca-se o desgaste das rodas do comboio, a degradação do carril, a fadiga dos materiais, o desconforto dos passageiros e a propagação de ondas para áreas vizinhas à linha do comboio que podem afectar o funcionamento de aparelhos sensíveis de alta precisão em hospitais e indústrias. Torna-se assim interessante estudar a resposta de vigas sobre fundação elástica actuadas por cargas móveis na procura da atenuação destes efeitos.

Apesar de os efeitos dinâmicos da passagem de comboios serem mais expressivos para altas velocidades, o problema da resposta de vigas actuadas por cargas móveis tem sido objecto de investigação desde há várias décadas. Refere-se desde logo os trabalhos pioneiros de Krylov (1905) e mais tarde de Timoshenko (1911) no início do século passado, nos quais estes autores determinaram as tensões (dinâmicas) que surgem numa viga simplesmente apoiada sujeita a carga móvel. Inglis (1934), Lowan (1935) e mais tarde Frýba (1972) estudaram as vibrações transversais que ocorrem para este problema, usando métodos analíticos que recorrem à sobreposição de múltiplos modos de vibração. O caso estático de uma viga sobre fundação elástica linear de Winkler (no qual o solo é aproximado a uma distribuição contínua de molas infinitamente próximas e independentes entre si) foi abordado por Hetenyi (1946). Timoshenko et al. (1974) resolveram analiticamente o problema da vibração livre de uma viga sobre fundação elástica.

Mais recentemente muitos autores publicaram artigos sobre este tema, dos quais se referem de seguida apenas alguns com relevância para esta dissertação. Começa-se por mencionar Thambiratnam e Zhuge (1996) que usaram o método dos elementos finitos para estudar o problema de uma viga com fundação elástica linear (de tipo Winkler) sujeita à acção de uma carga móvel. Estes autores analisaram a influência do comprimento da viga, velocidade da carga e rigidez da fundação nas amplificações do deslocamento e tensões a meio vão da viga. Dimitrovová e Rodrigues (2012) determinaram analiticamente (por sobreposição de modos de vibração) a velocidade crítica de uma viga sujeita a carga móvel sobre fundação elástica homogénea ou dividida em dois sub-domínios de diferentes rigidezes. Estes autores estudaram também os casos de viga finita ou infinita, com ou sem amortecimento. Dimitrovová (2010) estudou ainda o efeito da presença de uma descontinuidade na fundação da viga (devida a uma fundação não homogénea ou degradação do carril) nas amplificações das vibrações do sistema. A resposta de vigas sobre fundações com comportamento não-linear foi estudada recentemente por Senalp et al. (2010). Neste estudo usou-se o método de Galerkin e o método dos elementos finitos para a discretização espacial da análise dinâmica dos deslocamentos da secção de meio vão de uma viga finita sobre fundação não linear. Sapountzakis e Kampitsis (2011) utilizaram um método de elementos de fronteira para estudar um caso mais complexo em que tiveram em conta simultaneamente um comportamento não linear e bilinear (sem rigidez à tracção) da fundação. O modelo desenvolvido por estes autores tem ainda em conta a deformabilidade por corte da viga e a coesão do solo de fundação (interacção entre as molas que o modelam).

A presente dissertação tem como objectivo principal o desenvolvimento de um programa de elementos finitos em MatLab (The MathWorks, Inc., 2013) que permita analisar dinamicamente vigas sobre fundação elástica sujeitas a cargas móveis. A utilização do método dos elementos finitos surge como uma alternativa mais simples e prática aos métodos analíticos usados em muitos dos trabalhos mencionados. Tem também a vantagem de permitir resolver problemas não lineares, para os quais não existem soluções analíticas. Fizeram-se várias análises com este programa e os resultados foram comparados e validados com alguns dos artigos referidos. Estudou-se em especial os efeitos da velocidade das cargas móveis, da rigidez e amortecimento da fundação e do comprimento da viga na sua resposta dinâmica, nomeadamente na amplificação dos seus deslocamentos. De referir ainda que neste trabalho desenvolvem-se e analisam-se modelos simplificados que no futuro poderão ser aperfeiçoados para melhor simular o comportamento de uma via férrea de alta velocidade.

O trabalho está dividido em três partes, cada uma correspondente a um modelo diferente de resposta do solo de fundação. No Capítulo 2 estuda-se o caso mais simples de uma viga assente numa fundação elástica linear de Winkler. No Capítulo 3 assume-se também uma fundação elástica de Winkler mas com comportamento não linear do tipo cúbico. Seguidamente, no Capítulo 4 volta-se a considerar uma fundação elástica mas agora com comportamento bilinear, isto é, com rigidez diferente à tracção e à compressão, com o objectivo último de modelar a eventual perda de contacto do carril com o solo de fundação quando se considera uma rigidez da fundação nula à tracção. Em cada um destes capítulos começa-se por expor a formulação matemática do problema, prosseguindo com a explicação do método usado na resolução das equações diferenciais que regem o movimento e concluindo com a apresentação e discussão dos resultados obtidos nas diversas análises efectuadas. Por último, faz-se uma breve conclusão na qual se resumem os principais resultados obtidos e se referem aspectos importantes a ter em conta em investigações futuras.

Capítulo 2

Viga sobre fundação elástica linear de Winkler

Neste capítulo estuda-se então o caso mais simples e clássico de uma viga sobre fundação elástica linear (de Winkler) sujeita à passagem de uma carga móvel de intensidade constante. Explica-se de seguida o modelo contruído para a análise deste problema e que tem como ferramenta base o método dos elementos finitos. Discutem-se no fim os resultados das análises feitas com este modelo.

2.1 Teoria e formulação do problema

2.1.1 Matriz de rigidez elementar

Considera-se um elemento finito de viga de comprimento l definido entre dois nós genéricos i e j, conforme ilustrado na Figura 2.1. Desprezam-se as deformações axiais e as deformações por corte. O vector das coordenadas generalizadas é

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{Bmatrix}^T .$$

O elemento de viga considerado tem altura uniforme h mas poder-se-ia considerar o caso mais geral de altura variada ao longo do comprimento do elemento de viga. A quantidade k_f designa o módulo de rigidez por unidade de comprimento da fundação.

A matriz de rigidez elementar é a soma de duas parcelas, uma devida à rigidez da viga e outra devida à rigidez da fundação elástica. Assim sendo,

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_f^e.$$

Uma vez que os deslocamentos transversais são parametrizados por quatro coordenadas generalizadas, o campo desses deslocamentos transversais é descrito por um polinómio cúbico (definido

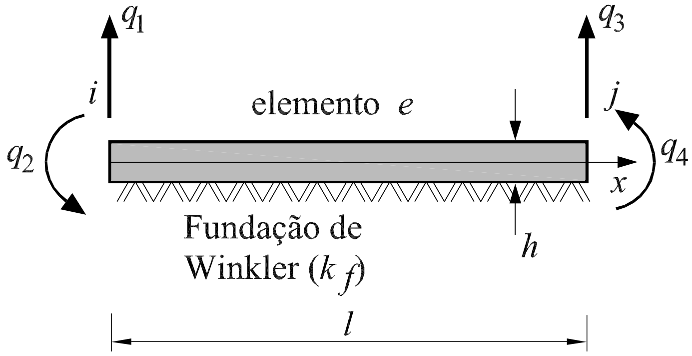


Figura 2.1: Elemento de viga sobre fundação elástica linear do tipo de Winkler clássica.

com o auxílio de quatro coeficientes a_i):

$$w(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{a}. \tag{2.1}$$

Particularizando a expressão anterior para os quatro deslocamentos generalizados q_i ($i = 1, \ldots, 4$) obtém-se

$$\begin{aligned} q_1 &= w(0) = a_1, \\ q_2 &= w'(0) = a_2, \\ q_3 &= w(l) = a_1 + a_2\,l + a_3\,l^2 + a_4\,l^3, \\ q_4 &= w'(l) = a_2 + 2\,a_3\,l + 3\,a_4\,l^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix},$$

ou ainda, de uma forma mais abreviada,

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{D}\mathbf{a}. \tag{2.2}$$

A notação w' designa a primeira derivada da função w em ordem a x. Assume-se que a rotação de uma secção se pode confundir com a derivada, o que só é válido na hipótese dos pequenos deslocamentos. Resolvendo (2.2) em ordem ao vector $\mathbf{a}$ e substituindo em (2.1) obtém-se (Thambiratnam e Zhuge, 1996)

$$w(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e. \tag{2.3}$$

A equação anterior descreve o campo de deslocamentos transversais em termos das quatro coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_i^e$ $(i = 1, \ldots, 4)$ do elemento finito genérico e. Nessa equação

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix},$$

pelo que

$$w(x) = \left\{ N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \right\} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \tag{2.4}$$

em que

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ N_2(x) &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, \\ N_3(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ N_4(x) &= x\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l}\right]. \end{aligned}$$

As funções $N_i(x)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ designam-se por funções de interpolação ou funções de forma ("shape functions" em Inglês).

Designando agora a rigidez de flexão da viga por EI, o campo de momentos flectores num elemento finito é dado por

$$M(x) = EI\frac{d^2w}{dx^2} = EI\,\mathbf{B}(x)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \tag{2.5}$$

em que $\mathbf{B}(x) = \mathbf{A}''(x) = [\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\ ]$. Visto tratar-se de um problema conservativo (em que as forças derivam de um potencial porque o trabalho por elas realizado não depende do caminho percorrido mas apenas das posições inicial e final) a energia potencial elástica devida à flexão é dada por

$$U_b = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{xx}\,\varepsilon_{xx}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_0^l w'' M\,\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

Tendo em conta que

$$w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = \left(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)'' = \mathbf{A}''\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e = \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e,$$

que o campo de momentos é dado por (2.5) e inserindo estas duas equações na expressão (2.6) da energia de deformação do elemento de viga , obtém-se

$$U_b = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^T EI\,\left(\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\,\mathrm{d}x.$$

A quantidade $\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e$ é um escalar, pelo que é igual à sua "transposta". Isso permite reescrever a expressão anterior de U_b, recorrendo à regra da álgebra linear de que "a transposta de um produto de matrizes é igual ao produto das transpostas das matrizes por ordem inversa", isto é $\left(\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^T = (\mathbf{q}^e)^T \left(\mathbf{D}^{-1}\right)^T \mathbf{B}^T$. Assim sendo:

$$U_b = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^e)^T \left(\mathbf{D}^{-1}\right)^T \int_0^l \mathbf{B}^T \, EI \, \mathbf{B} \, \mathrm{d}x \, \mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e. \tag{2.7}$$

Derivando (2.7) duas vezes em ordem a $\mathbf{q}^e$ obtém-se

$$\mathbf{K}_b^e = \frac{\partial^2 U_b}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e} = \left(\mathbf{D}^{-1}\right)^T \int_0^l \mathbf{B}^T \, EI \, \mathbf{B} \, \mathrm{d}x \, \mathbf{D}^{-1} = \tag{2.8}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}.$$

Deduz-se de seguida a parcela de rigidez do sistema devida à fundação elástica. A força por unidade de comprimento aplicada pela fundação à viga designa-se por F_f. Para um troço elementar da fundação de comprimento $\mathrm{d}x$ (Figura 2.2) tem-se que

$$\mathrm{d}U_f = \frac{1}{2} \, \mathrm{d}F_f \, w(x) = \frac{1}{2} \, k_f \, w(x) \, w(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

A energia potencial elástica acumulada na fundação de um elemento finito é então

$$U_f = \int_0^l \mathrm{d}U_f = \frac{1}{2} \int_0^l w(x)^T \, k_f \, w(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2.10}$$

As operações a efectuar são análogas às que foram seguidas para deduzir a matriz $\mathbf{K}_b$. Obtém-se então

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^T \, k_f \, \left(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}^e)^T \left(\mathbf{D}^{-1}\right)^T \int_0^l \mathbf{A}^T \, k_f \, \mathbf{A} \, \mathrm{d}x \, \mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e, \end{aligned} \tag{2.11}$$

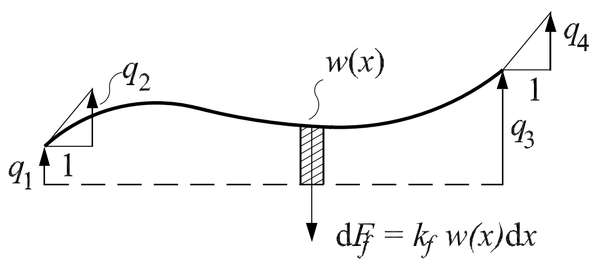


Figura 2.2: Força elástica num troço elementar de comprimento $\mathrm{d}x$ da fundação.

em que

$$\int_0^l \mathbf{A}^T\, k_f\, \mathbf{A}\, \mathrm{d}x = k_f \begin{bmatrix} l & \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{4} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5} \\ \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5} & \frac{l^6}{6} \\ \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5} & \frac{l^6}{6} & \frac{l^7}{7} \end{bmatrix},$$

o que conduz a

$$\mathbf{K}_f^e = k_f \begin{bmatrix} \frac{13}{35}l & \frac{11}{210}l^2 & \frac{9}{70}l & -\frac{13}{420}l^2 \\ \frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 & \frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 \\ \frac{9}{70}l & \frac{13}{420}l^2 & \frac{13}{35}l & -\frac{11}{210}l^2 \\ -\frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 & -\frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

A matriz de rigidez do elemento finito é então obtida pela soma das parcelas indicadas em (2.8) e (2.12): $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_f^e$.

2.1.2 Matriz de massa elementar

Neste trabalho considera-se apenas a energia cinética de translação que é uma boa aproximação da energia cinética total nos casos em que a viga é esbelta. Sendo ρ a massa por unidade de volume do material da viga, então

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\,\rho A\ \mathrm{d}x\, \dot{w}(x)^2 = \frac{1}{2}\,\dot{w}^T\,\rho A\,\dot{w}\,\mathrm{d}x, \tag{2.13}$$

em que ρA é a massa por unidade de comprimento da viga (o escalar A designa a área da secção transversal). A notação $\dot{w}$ designa a primeira derivada da função w em ordem ao tempo. A energia cinética do elemento finito de viga é

$$\begin{aligned} T &= \int_0^l \mathrm{d}T = \frac{1}{2}\int_0^l \dot{w}^T\,\rho A\,\dot{w}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\dot{\mathbf{q}}^e\right)^T\,\rho A\,\left(\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\dot{\mathbf{q}}^e\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^{e\,T}\,\mathbf{M}_t^e\,\dot{\mathbf{q}}^e, \end{aligned} \tag{2.14}$$

em que

$$\mathbf{M}_t^e = \left(\mathbf{D}^{-1}\right)^T \int_0^l \mathbf{A}^T\,\rho A\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1} = \frac{\rho A l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

2.1.3 Equações gerais do movimento

A aproximação do deslocamento transversal $w(x)$ pela combinação linear de quatro funções de forma (ou funções de interpolação),

$$w(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e = \mathbf{N}^e(x)\mathbf{q}^e$$

em que $\mathbf{N}^e(x) = \left\{ N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \right\}$, permite reescrever as energias cinética, potencial elástica e potencial das forças exteriores aplicadas ao elemento finito em função apenas das quatro coordenadas generalizadas que compõem o vector $\mathbf{q}^e = \left\{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \right\}^T$. Na Figura 2.3, a força $F(x) = F\delta\,(x - x_c)$ representa uma força concentrada, possivelmente móvel, instantaneamente na abcissa x_c contada a partir da extremidade esquerda do elemento finito. O factor $\delta\,(x - x_c)$ designa a função delta de Dirac centrada na abcissa x_c. O vector $\mathbf{F}^e = \left\{ F_1^e \quad F_2^e \quad F_3^e \quad F_4^e \right\}^T$ é composto pelas forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas $\mathbf{q}^e$; as quantidades Q_i^e representam as forças generalizadas que ligam o elemento finito aos dois elementos adjacentes.

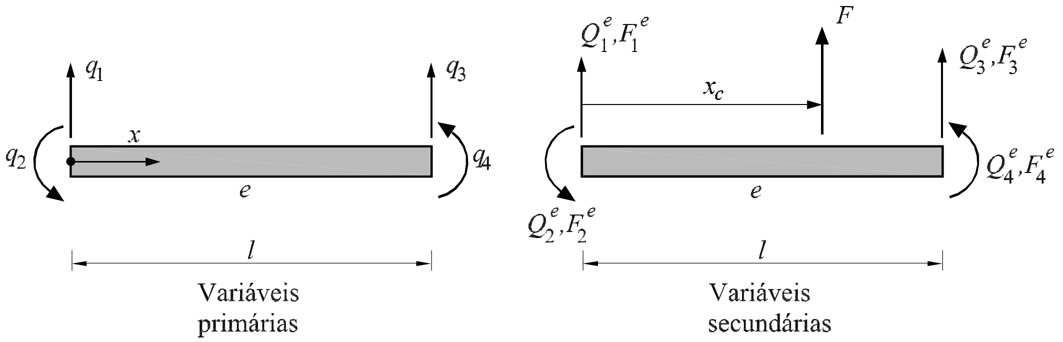


Figura 2.3: Variáveis primárias e secundárias de um elemento de viga.

Tem-se então a expressão da energia cinética

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\rho A \int_0^l \left(\mathbf{N}^e(x)\,\dot{\mathbf{q}}^e\right)^T \left(\mathbf{N}^e(x)\,\dot{\mathbf{q}}^e\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^{e\,T} \int_0^l \mathbf{N}^{e\,T}\,\rho A\,\mathbf{N}^e\,\mathrm{d}x\,\dot{\mathbf{q}}^e. \end{aligned} \tag{2.16}$$

A expressão da energia potencial elástica de um elemento finito de viga em fundação elástica é

$$\begin{aligned} U = U_b + U_f &= \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''\right)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l k_f\,w^2\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\mathbf{N}^{e\,\prime\prime}\,\mathbf{q}^e\right)^T EI\,\left(\mathbf{N}^{e\,\prime\prime}\,\mathbf{q}^e\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\mathbf{N}^e\mathbf{q}^e\right)^T k_f\,\left(\mathbf{N}^e\mathbf{q}^e\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbf{q}^{e\,T}\int_0^l \mathbf{B}^T\,EI\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}x\,\mathbf{q}^e + \frac{1}{2}\,\mathbf{q}^{e\,T}\int_0^l \mathbf{N}^{e\,T}\,k_f\,\mathbf{N}^e\,\mathrm{d}x\,\mathbf{q}^e \end{aligned} \tag{2.17}$$

e a expressão da energia potencial das forças aplicadas ao elemento é

$$\begin{aligned} V &= -\int_0^l F\delta\left(x - x_c\right) w(x)\,\mathrm{d}x - \mathbf{Q}^{e\,T}\,\mathbf{q}^e = \\ &= -F\int_0^l \delta\left(x - x_c\right)\mathbf{N}^e(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{q}^e - \mathbf{Q}^{e\,T}\,\mathbf{q}^e = \\ &= -F\mathbf{N}^e\left(x_c\right)\mathbf{q}^e - \mathbf{Q}^{e\,T}\,\mathbf{q}^e. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Pode-se agora usar as equações de Lagrange para deduzir as equações do movimento do sistema discretizado (elemento finito), cujo estado é descrito pelas coordenadas e velocidades generalizadas ($\mathbf{q}^e$, $\dot{\mathbf{q}}^e$):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^e} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}^e} + \frac{\partial (U+V)}{\partial \mathbf{q}^e} = \mathbf{0}. \tag{2.19}$$

Na equação anterior, **0** designa o vector nulo de dimensão apropriada e

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^e} &= \int_0^l \mathbf{N}^{e\,T}\ \rho A\,\mathbf{N}^e\,\mathrm{d}x\ \dot{\mathbf{q}}^e = \mathbf{M}_t^e\,\dot{\mathbf{q}}^e, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^e} &= \mathbf{M}_t^e\,\ddot{\mathbf{q}}^e, \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}^e} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}^e} &= \int_0^l \mathbf{B}^T\,EI\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}x\ \mathbf{q}^e + \int_0^l \mathbf{N}^{e\,T}\ k_f\,\mathbf{N}^e\,\mathrm{d}x\ \mathbf{q}^e = \\ &= \left(\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_f^e\right)\mathbf{q}^e = \\ &= \mathbf{K}^e\mathbf{q}^e, \\ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}^e} &= -F\ \mathbf{N}^{e\,T}\left(x_c\right) - \mathbf{Q}^e, \end{aligned}$$

o que permite obter

$$\mathbf{M}^e\ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{K}^e\mathbf{q}^e = F\ \mathbf{N}^{e\,T}\left(x_c\right) + \mathbf{Q}^e, \tag{2.20}$$

em que $F\ \mathbf{N}^{e\,T}\left(x_c\right)$ é o vector $\mathbf{F}^e = \left\{FN_1\left(x_c\right) \quad FN_2\left(x_c\right) \quad FN_3\left(x_c\right) \quad FN_4\left(x_c\right)\right\}^T$, que representa o vector das forças nodais estaticamente equivalentes à acção da força F a uma distância x_c do início do elemento finito (Figura 2.4).

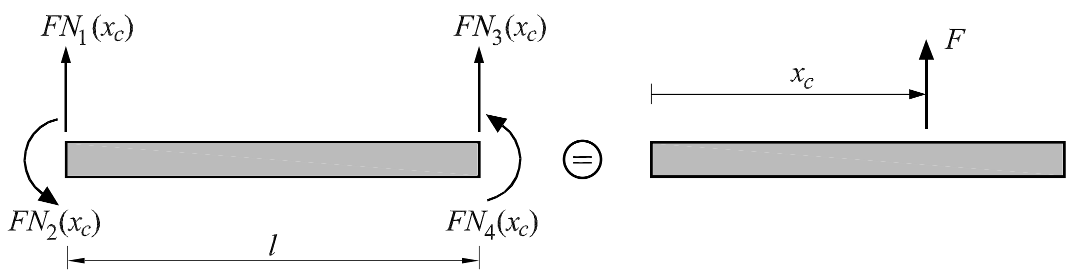


Figura 2.4: Forças nodais estaticamente equivalentes à acção de uma força pontual a uma distância x_c da secção esquerda do elemento de viga.

No processo de reunião dos elementos de viga para se construir o modelo completo, pelo princípio da acção-reacção as forças Q_k^e e Q_k^{e+1} $(k = 1, \ldots, 4)$ comuns a dois elementos adjacentes anulam-se. As forças generalizadas Q_1^1, Q_2^1, Q_3^n e Q_4^n (em que n é o número de elementos de discretização) relacionam-se com as reacções de apoio de uma viga simplesmente apoiada conforme ilustrado na Figura 2.5. Depois de impostas as condições de fronteira, isto é, depois de se eliminarem as duas equações correspondentes ao deslocamento transversal (nulo) da secção da esquerda do elemento 1 e ao deslocamento transversal (nulo) da secção da direita do elemento finito n, obtém-se (no caso de ausência de amortecimento) o sistema global que rege o movimento

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = F\mathbf{N}^T(x_c)\,, \tag{2.21}$$

em que $\mathbf{N}(x_c) = \Big\{ 0\,0\,0 \Big| 0\,0\,0\,0 \Big| \cdots \Big| N_1(x_c)\ N_2(x_c)\ N_3(x_c)\ N_4(x_c) \Big| \cdots \Big| 0\,0\,0\,0 \Big| 0\,0\,0 \Big\}$ é um vector linha de $4n-2$ componentes com todos os elementos nulos excepto os elementos correspondentes ao elemento finito e onde a carga se encontra no instante em análise e $\mathbf{q}$ é o vector dos deslocamentos globais obtido pela reunião dos vectores das coordenadas generalizadas elementares.

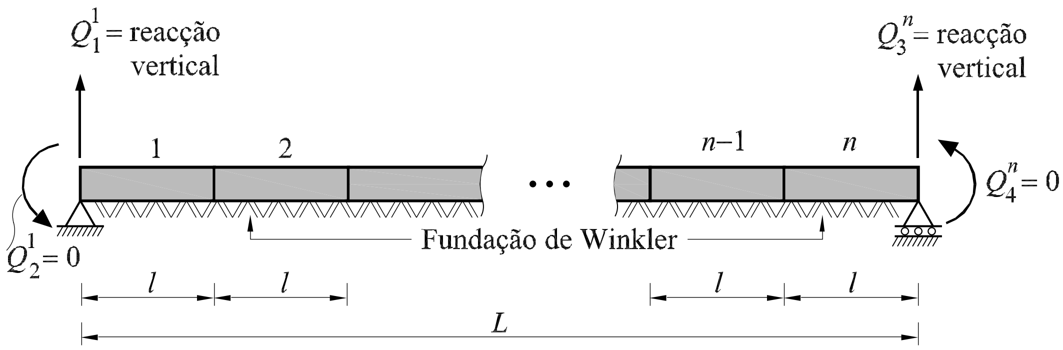


Figura 2.5: Viga discretizada apoiada numa fundação de Winkler. Indicação das forças generalizadas nas secções de extremidade.

O amortecimento é em geral tido em conta por adição da parcela $\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$ no membro da esquerda de (2.21). Considerando um amortecimento do tipo Rayleigh, a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, tal que

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}. \tag{2.22}$$

Neste trabalho utiliza-se a expressão

$$a_0 = 2\zeta\sqrt{\frac{2k_f}{\rho A}} \tag{2.23}$$

e ignora-se a parcela $a_1\mathbf{K}$, tal como sugerido por Dimitrovová e Rodrigues (2012), para efeitos de comparação dos resultados aqui obtidos com os daquela referência. Na equação anterior, ζ é o factor de amortecimento, o qual não deve ultrapassar 8% para que a equação (2.23) seja válida (Dimitrovová e Rodrigues, 2012).

O modelo completo, com amortecimento, da viga simplesmente apoiada em fundação elástica linear e submetida a uma força concentrada (eventualmente variável) é então

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = F\mathbf{N}^T (x_c) \,. \tag{2.24}$$

Notar que nos casos correntes de uma força descendente, o seu sinal algébrico na equação anterior é negativo.

2.1.4 Estática de vigas sobre fundação elástica linear

Mais adiante apresentam-se alguns resultados que requerem o cálculo de deslocamentos e momentos flectores na secção de meio vão do carril em regime estático quando a carga está aplicada a meio vão. Os deslocamentos estáticos podem ser calculados pelo método dos elementos finitos suprimindo os termos $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$ à expressão (2.24) e fazendo $x_c = L/2$ (carga a meio vão). Resolvendo o sistema de equações, obtém-se o vector de deslocamentos nodais $\mathbf{q}$, com o qual facilmente se obtém o momento flector a meio vão pela expressão (2.5). Confirmaram-se também os valores dos deslocamentos estáticos a meio vão obtidos poe este método pela expressão

$$w^{est}_{1/2 \text{ vão}} = \frac{2FL^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1,3,5,7,\ldots} \frac{1}{n^4 + \frac{k_f L^4}{\pi^4 EI}} \tag{2.25}$$

usada por Hetenyi (1946) para calcular de forma analítica o deslocamento transversal estático da secção de meio vão de uma viga simplesmente apoiada sobre uma fundação de Winkler clássica (em que as rigidezes à tracção e à compressão são iguais). Nesta expressão em série truncada, verifica-se ser necessário usar pelo menos 100 termos para que a diferença entre os dois métodos de cálculo de deslocamentos estáticos (analítico e recorrendo aos elementos finitos) seja inferior a 1%.

2.2 Integração temporal das equações do movimento

Para a resolução das equações gerais do movimento anteriormente deduzidas utilizou-se um esquema de integração implícita designado por método–α (Hilber et al., 1977), que é uma modificação do método de Newmark clássico. De acordo com este método, a discretização no tempo (n) da equação (2.24) é dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (1+\alpha)\mathbf{p}_{n+1} - \alpha\,\mathbf{p}_n = \mathbf{f}(t_{n+\alpha}) \tag{2.26}$$

em que $t_{n+\alpha} = (1+\alpha)t_{n+1} - \alpha t_n = t_{n+1} + \alpha\Delta t$, sendo Δt o incremento de tempo considerado. Na equação (2.26), $\mathbf{p} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q}$ representa o vector das forças internas e $\mathbf{f}(t_{n+\alpha})$ representa o vector $F\mathbf{N}^T(x_c)$ para a posição da carga no instante $t_{n+\alpha}$. A evolução no tempo das soluções aproximadas é dada pelas seguintes expressões em termos de diferenças finitas:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{n+1} + (\Delta t)^2\,\beta\,\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}, \tag{2.27}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \tilde{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} + \Delta t\,\gamma\,\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}, \tag{2.28}$$

em que

$$\tilde{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t\,\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2}(1-2\beta)\,\ddot{\mathbf{q}}_n, \tag{2.29}$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t(1-\gamma)\,\ddot{\mathbf{q}}_n. \tag{2.30}$$

Os valores $\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}$ e $\tilde{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1}$ são previsões para os deslocamentos e velocidades enquanto $\mathbf{q}_{n+1}$ e $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ são os respectivos valores corrigidos. Os parâmetros α e β controlam a precisão e estabilidade do método. O parâmetro α permite amortecer numericamente o efeito das frequências mais altas do sistema sem contudo afectar a taxa de convergência do método. O método de Newmark corresponde ao caso particular $\alpha = 0$. Em problemas lineares e simétricos, se os parâmetros α, γ e β forem seleccionados de forma a que $\alpha \in [-1/3\,,0]$, $\gamma = (1-2\alpha)/2$ e $\beta = (1-\alpha)^2/4$, o método de integração é estável, independentemente do tamanho do incremento de tempo. Nas análises realizadas neste trabalho usou-se sempre $\alpha = -0.1$.

Para iniciar o algoritmo, as acelerações $\ddot{\mathbf{q}}_0$ obtêm-se a partir das condições iniciais $\mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}_0$ por resolução de

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{p}_0. \tag{2.31}$$

Seguidamente resolve-se o sistema (2.27) – (2.30) utilizando um método do tipo Newton-Raphson. Resumidamente, o algoritmo apresenta os seguintes passos:

1. Colocar a zero o contador de iterações: $i = 0$.

2. Começar a fase de previsão:

$$\mathbf{q}^i_{n+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t\,\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2(1-2\beta)\,\ddot{\mathbf{q}}_n,$$
$$\dot{\mathbf{q}}^i_{n+1} = \tilde{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t(1-\gamma)\,\ddot{\mathbf{q}}_n,$$
$$\ddot{\mathbf{q}}^i_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2\beta}\left(\mathbf{q}^i_{n+1} - \tilde{\mathbf{q}}_{n+1}\right) = \mathbf{0}.$$

3. Calcular a força residual utilizando a equação (2.26):

$$\Delta\mathbf{R}^i = \mathbf{f}(t_{n+\alpha}) - \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}}^i_{n+1} - (1+\alpha)\mathbf{p}^i_{n+1} + \alpha\,\mathbf{p}_n.$$

4. Obter a matriz de rigidez efectiva utilizando a expressão:

$$\mathbf{K}^* = \frac{1}{\Delta t^2\beta}\mathbf{M} + (1+\alpha)\mathbf{K}^i + \frac{(1+\alpha)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}^i.$$

5. Resolver o sistema:

$$\mathbf{K}^{*}\Delta\mathbf{q}^{i}=\Delta\mathbf{R}^{i}.$$

6. Fase de correcção:

$$\mathbf{q}_{n+1}^{i+1}=\mathbf{q}_{n+1}^{i}+\Delta\mathbf{q}^{i},$$
$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i+1}=\frac{1}{\Delta t^{2}\beta}\left(\mathbf{q}_{n+1}^{i+1}-\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}\right),$$
$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i+1}=\tilde{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1}+\Delta t\,\gamma\,\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i+1}.$$

7. Se $\Delta\mathbf{R}^{i}$ não satisfizer as condições de convergência então $i \leftarrow i+1$ e voltar ao passo 3; no caso contrário seguir para o passo 8.

8. Definir

$$\mathbf{q}_{n+1}=\mathbf{q}_{n+1}^{i+1},$$
$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1}=\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i+1},$$
$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}=\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{i+1},$$

para utilizar no próximo incremento de tempo. Atribuir $n \leftarrow n+1$, calcular $\mathbf{p}_n$ e voltar ao passo 1 para o próximo incremento de tempo.

2.3 Resultados e comentários

Apresentam-se de seguida os resultados obtidos (em forma de gráficos) de algumas análises efectuadas com o modelo de elementos finitos implementado em ambiente MatLab (The MathWorks, Inc., 2013) para o estudo de uma viga sobre fundação elástica linear sujeita a carga móvel. Na Tabela 2.1 resumem-se as propriedades mais importantes da viga estudada – carril UIC60 (Figura 2.6). Este carril é o mesmo que o usado por Dimitrovová e Rodrigues (2012) e permite assim a comparação directa de alguns resultados aqui obtidos com os daquela referência. De recordar que naquela referência a abordagem usada é do tipo analítico, envolvendo o cálculo numérico de um número muito elevado de frequências naturais. O valor da carga pontual móvel F usado nas análises é de -83.4 kN e corresponde a uma massa total por eixo de rodas de 17 000 kg (locomotiva do comboio de alta-velocidade da Thalys; Dimitrovová e Rodrigues, 2012).

2.3.1 Análises de velocidades críticas

Neste primeiro conjunto de resultados obtiveram-se curvas de deslocamentos máximos positivos (ascendentes) e negativos (descendentes) em função da velocidade de deslocamento da carga. O objectivo foi o de avaliar a velocidade que induz os maiores deslocamentos na viga, isto é, a velocidade crítica. Para obter estas curvas, foram feitas análises num intervalo de velocidades

Tabela 2.1: Propriedades do carril UIC60 (Dimitrovová e Rodrigues, 2012; UIC60, 2013).

Módulo de elasticidade	E	(GPa)	210
Inércia da secção transversal	I	(m^4)	3055×10^{-8}
Área da secção transversal	A	(m^2)	7684×10^{-6}
Altura do perfil	h	(mm)	172
Altura do centro de gravidade	d_G	(mm)	81
Massa volúmica	ρ	(kg/m^3)	7800

Figura 2.6: Carril UIC60 (Szerkesztő, 2010; UIC60, 2013).

entre 50 m/s e 300 m/s, com um passo de 1 m/s. Usou-se uma viga simplesmente apoiada de 200 m de comprimento, uma malha composta por 200 elementos finitos e um passo no tempo correspondente a um avanço no espaço de 0.2 m da carga pontual.

Consideraram-se dois casos de estudo: um em que se analisa uma viga com fundação uniforme (Figura 2.7) e outro em que se divide a viga em dois sub-domínios de igual comprimento e de rigidezes de fundação diferentes (Figura 2.8). No primeiro caso efectuaram-se 4 análises, fazendo-se variar entre elas a rigidez da fundação (250 kN/m^2 e 500 kN/m^2) e o factor de amortecimento global (0 e 2%). Para o segundo caso, definiram-se os valores de rigidez de fundação 250 kN/m^2 e 500 kN/m^2 no sub-domínio 1 e sub-domínio 2, respectivamente.

Estes valores de rigidez e amortecimento são iguais aos usados em Dimitrovová e Rodrigues (2012), sendo assim possível comparar as análises resultantes das condições acima descritas com os resultados obtidos nesse documento. Há no entanto que salientar que os valores de rigidez usados são demasiado baixos e não espelham de forma realista os valores da rigidez de uma fundação. A razão de se usar estes valores é a de se poder comparar os resultados obtidos com outros já reportados na literatura (nomeadamente, Dimitrovová e Rodrigues, 2012), para os quais as respectivas velocidades críticas tomam valores relativamente baixos. Para rigidezes mais elevadas e realistas (da ordem de grandeza de 10 000 kN/m^2), as velocidades críticas são superiores a 300 m/s (1080 km/h), o que é uma velocidade bastante elevada e impraticável nos comboios de alta-velocidade actuais.

Na Figura 2.9 representam-se as curvas obtidas para os deslocamentos máximos da viga numa fundação uniforme com k_f = 250 kN/m^2 e sem amortecimento. Por “deslocamentos máxi-

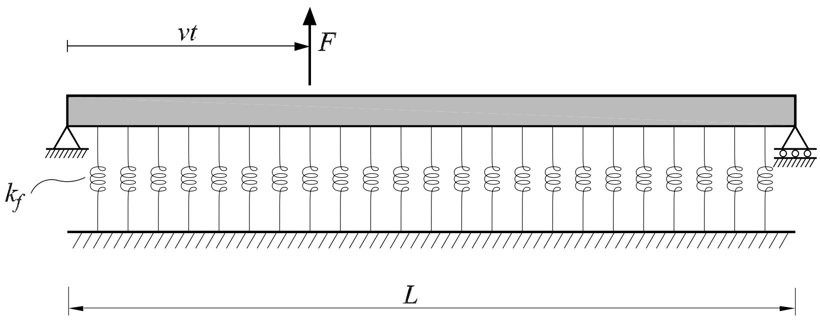


Figura 2.7: Viga sobre fundação uniforme sujeita a uma carga pontual F deslocando-se a velocidade constante.

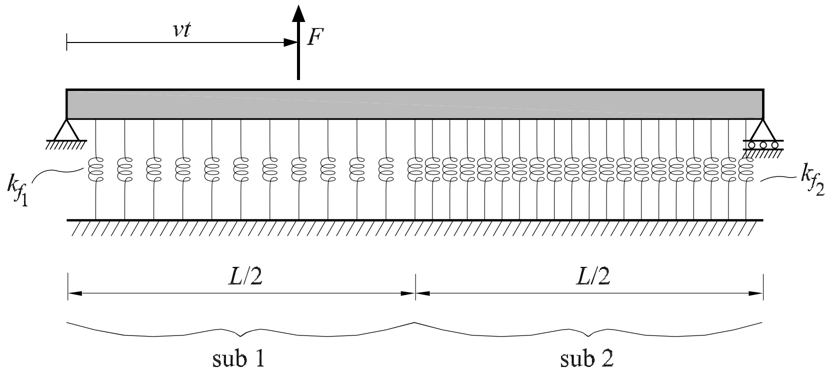


Figura 2.8: Viga sobre fundação dividida em dois sub-domínios de rigidezes diferentes sujeita a uma carga pontual F deslocando-se a velocidade constante.

mos" entenda-se os maiores deslocamentos observados em qualquer secção da viga. Esta figura reproduz os resultados da sua homóloga em Dimitrovová e Rodrigues (2012) (Figura 8). Designando por t_{on} o tempo que a força demora a percorrer a viga, as curvas "on", "off_2", "off_4" e "off_8" correspondem aos valores extremos positivo e negativo dos deslocamentos transversais da viga, w, nos intervalos de tempo $[0, t_{on}]$, $[t_{on}, 2\,t_{on}]$, $[2\,t_{on}, 4\,t_{on}]$ e $[4\,t_{on}, 8\,t_{on}]$, respectivamente. Observa-se que as velocidades críticas se situam próximo dos 200 m/s (720 km/h). Na Tabela 2.2 indicam-se os valores exactos dos picos da curva "on" bem como as velocidades para as quais ocorrem. Tanto estes valores como as curvas da Figura 2.9 são quase idênticos aos obtidos de forma analítica em Dimitrovová e Rodrigues (2012): para deslocamentos descendentes a velocidade crítica registada nessa referência é de 205.6 m/s e para deslocamentos ascendentes é de 208 m/s. Observa-se ainda que os deslocamentos máximos para velocidades supercríticas ocorrem na viga após a passagem da carga (curvas "off_2", "off_4" e "off_8") devido à reflexão de ondas nos apoios.

Ainda para um único sub-domínio e a mesma rigidez de 250 kN/m^2, verifica-se que a introdução de amortecimento no sistema (Figura 2.10, correspondendo a um factor de amortecimento $\zeta =$ 2%), tem o efeito de reduzir consideravelmente os deslocamentos extremos da viga. Contudo, a velocidade crítica não é alterada (Tabela 2.2).

Para o caso de fundação uniforme com rigidez de 500 kN/m^2 (Figuras 2.11 e 2.12), o efeito que se observa é o de um aumento da velocidade crítica e diminuição dos valores extremos dos deslocamentos relativamente à viga sobre fundação com rigidez $k_f = 250$ kN/m^2. Daí se poder afirmar, como referido anteriormente, que para valores correntes da rigidez da fundação a velocidade crítica se situa bem além de 300 m/s. Pela Tabela 2.3 verifica-se uma vez mais que as velocidades críticas são as mesmas para os casos com e sem amortecimento; como esperado, os deslocamentos máximos com amortecimento são inferiores aos do caso sem amortecimento.

Tabela 2.2: Picos dos deslocamentos máximos para fundação linear uniforme com $k_f = 250$ kN/m^2.

ζ (%)	v (m/s)	w_{max} (m)
0	206	-0.712
	208	0.600
2	206	-0.425
	208	0.317

Tabela 2.3: Picos dos deslocamentos máximos para fundação linear uniforme com $k_f = 500$ kN/m^2.

ζ (%)	v (m/s)	w_{max} (m)
0	245	-0.465
	246	0.395
2	245	-0.258
	246	0.192

Nas Figuras 2.13 – 2.16, mostra-se agora os resultados obtidos para o caso da viga estar dividida em dois sub-domínios. As curvas "sub1" e "sub2" referem-se aos deslocamentos extremos verificados, respectivamente, no sub-domínio 1 (o mais flexível) e no sub-domínio 2 (o mais rígido) quando a carga se encontra na viga, isto é, no intervalo de tempo $[0, t_{on}]$. Observa-se para este caso que os deslocamentos máximos mais elevados tanto no sub-domínio 1 como no 2 ocorrem quando a carga se encontra no sub-domínio 2 (Figura 2.14 e Figura 2.16). Da observação do par de Figuras 2.13 e 2.15 conclui-se que quando a carga está no sub-domínio mais flexível (o 1), o sub-domínio mais rígido (o 2) exibe a velocidade crítica do sub-domínio 1. Por outro lado, do par de Figuras 2.14 e 2.16 conclui-se que quando a carga está no sub-domínio mais rígido (o 2) verifica-se a existência de dois picos de deslocamento: para além do pico correspondente à velocidade crítica do sub-domínio 2 surge também um correspondente à velocidade crítica do sub-domínio mais flexível (o 1). É também interessante notar que os deslocamentos máximos não ultrapassam em termos absolutos os 0.40 m, estando assim numa gama de valores inferior aos obtidos para a fundação uniforme de rigidez $k_f = 500$ kN/m^2. Ou seja, contrariamente ao que seria de esperar, os deslocamentos verificados na viga com dois sub-domínios não são intermédios entre os correspondentes casos de viga uniforme. Relativamente à diferença entre o caso amortecido e não amortecido, verifica-se mais uma vez uma redução significativa dos deslocamentos no caso amortecido, sem alteração da velocidade crítica. Importa ainda referir que se poderia proceder a um refinamento da malha de elementos finitos na zona de transição entre os dois sub-domínios, para obter resultados mais precisos. Optou-se no entanto por não efectuar este refinamento para não tornar demasiado complexo o modelo de elementos finitos, considerando-se a malha de 200 elementos suficientemente refinada. A obtenção de gráficos muito semelhantes aos presentes em Dimitrovová e Rodrigues (2012) comprova que a malha usada é adequada.

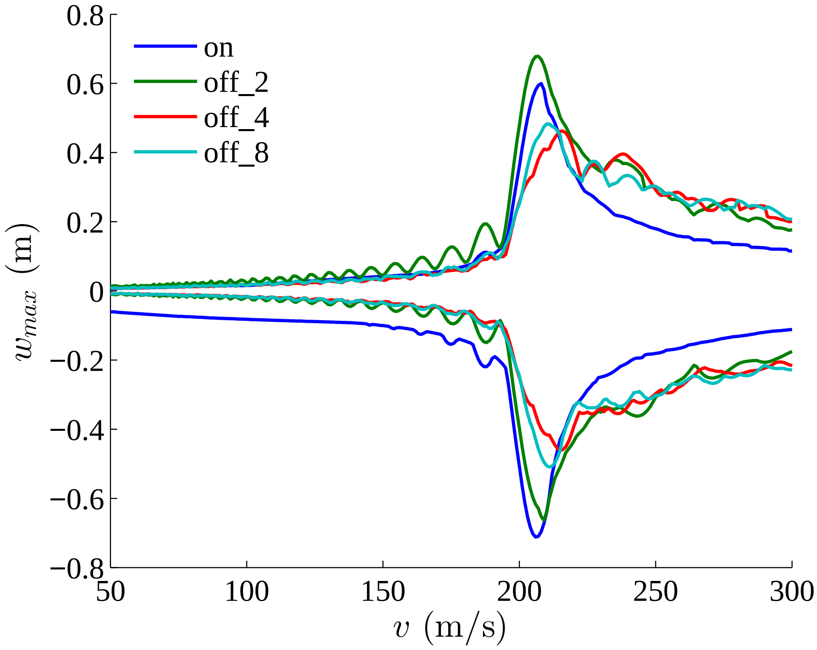


Figura 2.9: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_f = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

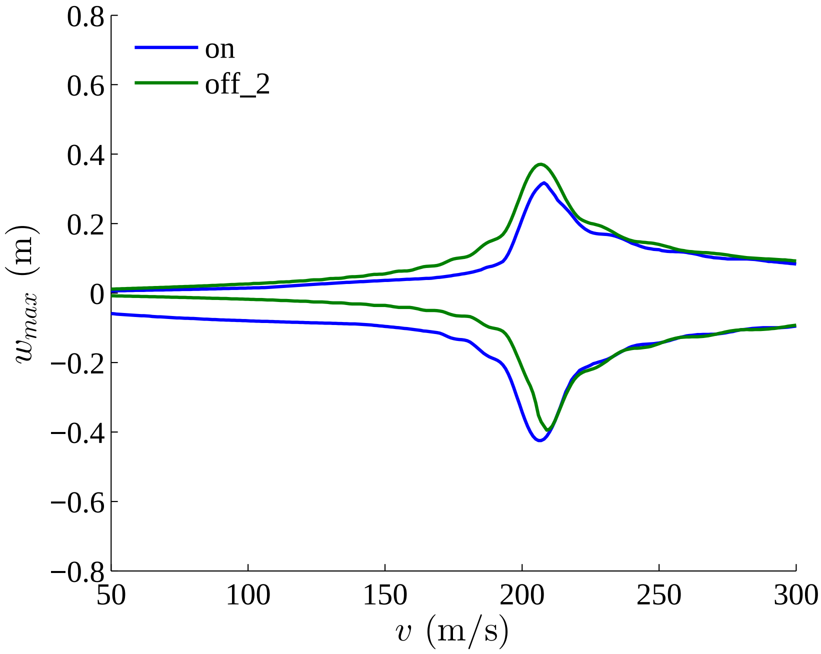


Figura 2.10: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_f = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

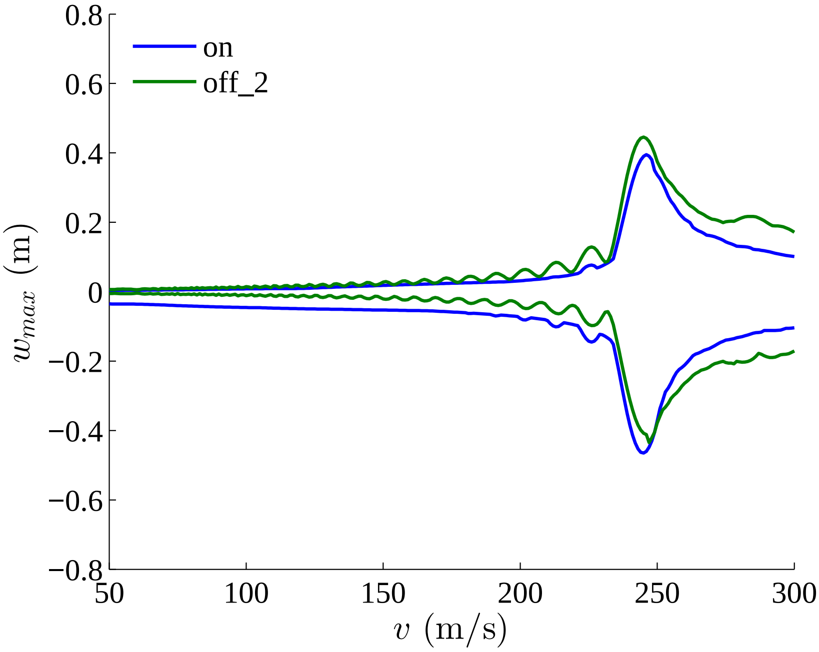


Figura 2.11: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_f = 500$ kN/m^2 e sem amortecimento.

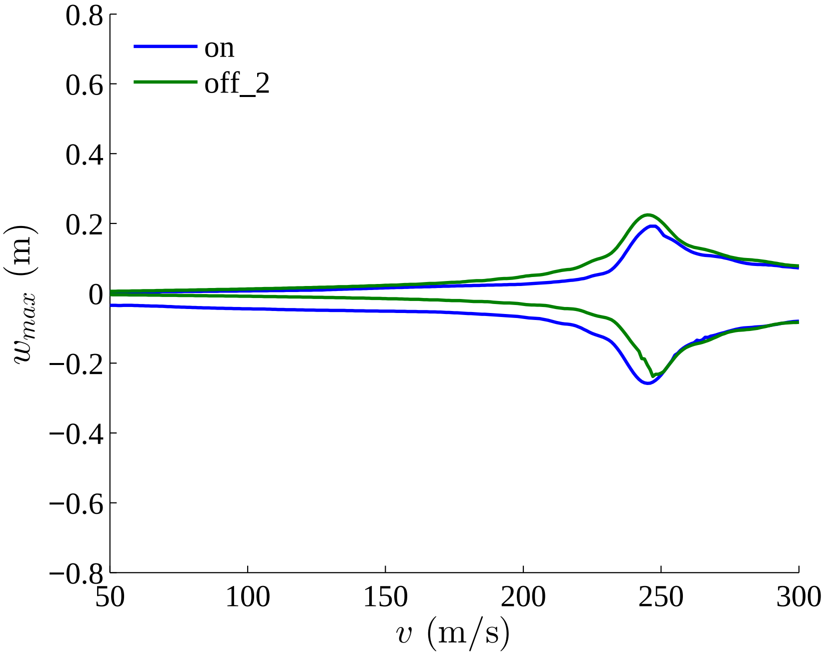


Figura 2.12: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_f = 500$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

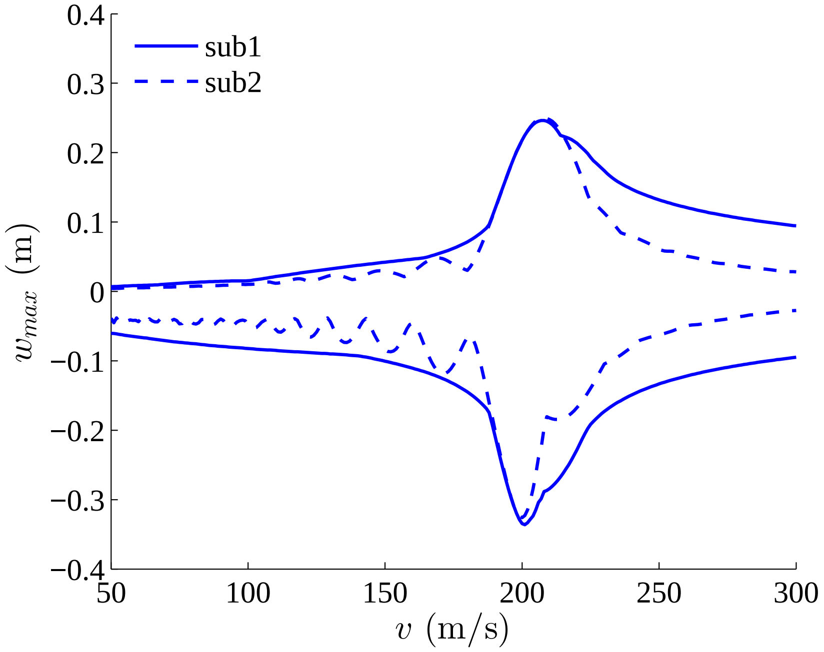


Figura 2.13: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação linear com dois sub-domínios e sem amortecimento (carga no sub-domínio 1).

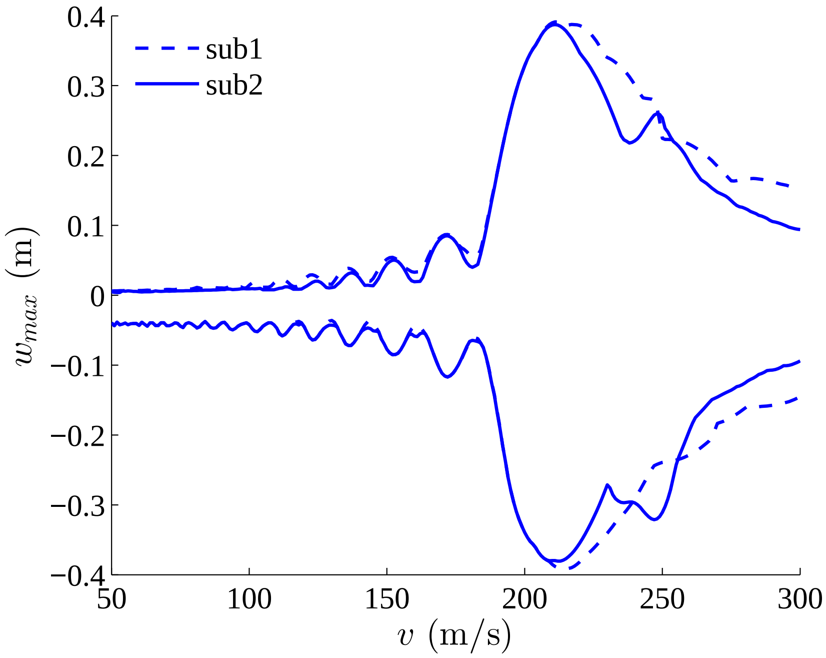


Figura 2.14: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação linear com dois sub-domínios e sem amortecimento (carga no sub-domínio 2).

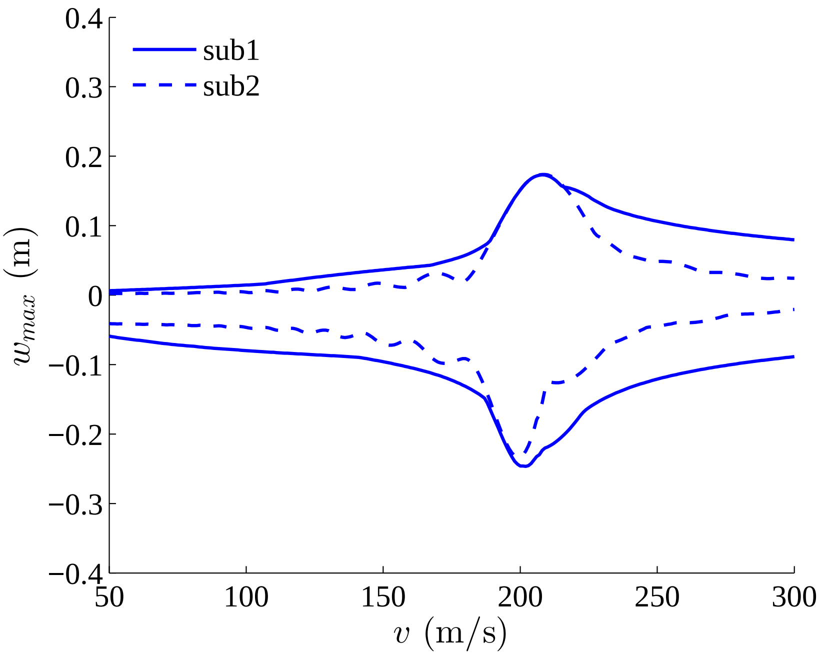


Figura 2.15: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação linear com dois sub-domínios e com amortecimento $\zeta = 2\%$ (carga no sub-domínio 1).

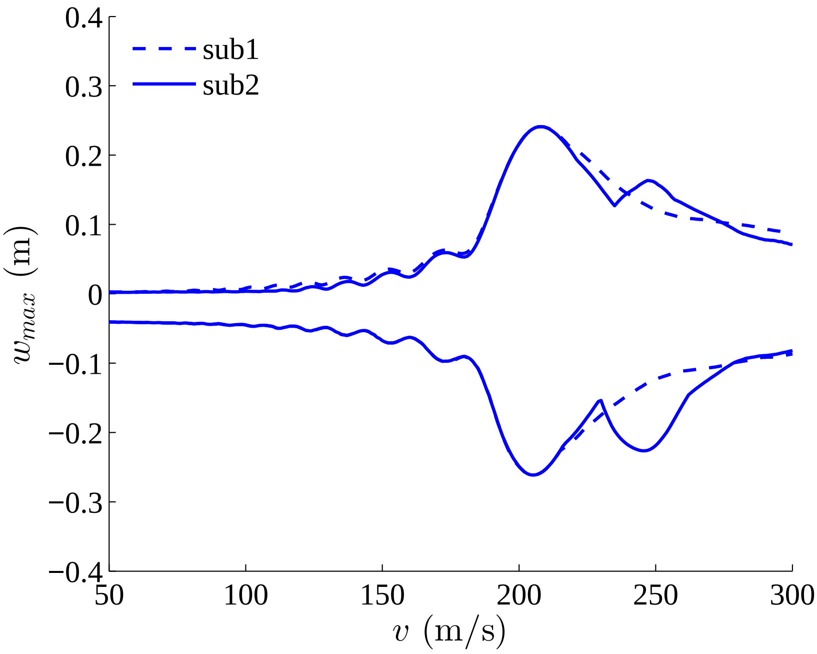


Figura 2.16: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação linear com dois sub-domínios e com amortecimento $\zeta = 2\%$ (carga no sub-domínio 2).

2.3.2 Estudos paramétricos

De seguida apresentam-se os resultados para um tipo de análise diferente das apresentadas na secção anterior. Os gráficos apresentados nesta secção ajudam a perceber melhor o efeito da rigidez da fundação, da velocidade da carga e do comprimento da viga na resposta dinâmica à passagem de uma força concentrada. Apresentam-se curvas que traduzem a amplificação do deslocamento transversal e momento flector da secção de meio vão da viga em função de t/τ, em que t denota o intervalo de tempo desde que a carga entrou na viga e τ o tempo total que a carga demora a percorrer a viga. Esta amplificação é dada pelas expressões

$$\phi_w = \frac{w^{din}_{1/2 \text{ vão}}}{w^{est}_{1/2 \text{ vão}}} \qquad\qquad \phi_M = \frac{M^{din}_{1/2 \text{ vão}}}{M^{est}_{1/2 \text{ vão}}},$$

em que $w^{din}_{1/2 \text{ vão}}$ e $M^{din}_{1/2 \text{ vão}}$ são, respectivamente, o deslocamento dinâmico instantâneo e o momento flector instantâneo da secção de meio vão da viga à passagem de uma força pontual F e $w^{est}_{1/2 \text{ vão}}$ e $M^{est}_{1/2 \text{ vão}}$ são, respectivamente, a flecha e o momento flector da secção de meio vão quando a viga é carregada estaticamente a meio vão por uma força de igual valor. Apresentam-se também alguns gráficos relativos à aceleração absoluta da secção de meio vão e, com o intuito de permitir ao leitor efectuar comparações quantitativas rigorosas, disponibilizam-se vários conjuntos de tabelas. No decorrer destas análises usou-se uma vez mais as especificações do carril UIC60 e uma força $F = -83.4$ kN. Manteve-se uma malha de elementos finitos da viga de 200 m correspondente a um comprimento de cada elemento finito de 1 m e o passo de tempo agora usado corresponde a uma progressão de 0.1 m da carga. De referir ainda que em nenhum dos casos estudados nesta secção se usou amortecimento.

Nas Figuras 2.17 – 2.21 estuda-se o efeito da rigidez da fundação (a) na amplificação dos deslocamentos (Figuras 2.17 e 2.18) e do momento flector (Figuras 2.19 e 2.20) e (b) no valor da aceleração (Figura 2.21) da secção de meio vão de uma viga com $L = 200$ m. Verifica-se que as maiores amplificações ocorrem quando a carga se encontra precisamente a meio vão. As Tabelas 2.4 e 2.5 ajudam na análise destas figuras e permitem observar uma tendência da diminuição de ϕ_w e ϕ_M com o aumento da rigidez da fundação para os valores (constantes) das velocidades considerados. De realçar que os valores elevados de ϕ_w e ϕ_M para $k_f = 250$ kN/m^2 e $v = 200$ m/s se explicam por esta velocidade estar bastante próxima da velocidade crítica encontrada na secção anterior (206 m/s) para uma fundação com esta rigidez. A Figura 2.21 mostra que as acelerações a meio vão tomam valores muito elevados para a velocidade considerada (150 m/s). No entanto, verificou-se que no caso de a rigidez de fundação ter o valor fisicamente mais realista de 10 000 kN/m^2 e o factor de amortecimento ser de 2%, as acelerações máximas, para $v = 150$ m/s, são menores (da ordem de 90 m/s^2).

Passando agora para o efeito da velocidade da carga (Figura 2.22 – 2.26) observa-se também aqui a ocorrência das maiores amplificações quando a carga passa na secção de meio vão. Da observação das Tabelas 2.6 e 2.7 verifica-se uma clara tendência de aumento das amplificações de deslocamentos e momentos flectores com o aumento da velocidade, para os valores da rigidez de fundação considerados. Na Figura 2.26 voltam a observar-se valores elevados das acelerações, especialmente para velocidades mais elevadas.

Nas Figuras 2.27 – 2.34 encontram-se os resultados das amplificações do deslocamento e momento flector de meio vão quando se varia o comprimento da viga. Observa-se uma vez mais a ocorrência do pico das amplificações à passagem da carga na secção de meio vão e, tal como anteriormente, o aumento da rigidez tem o efeito de diminuir as amplificações enquanto o aumento da velocidade tem o efeito de aumentar as amplificações. O único efeito perceptível da variação do comprimento da viga nestes gráficos é no achatamento das curvas para o instante $t/\tau = 0.5$. Analisando as Tabelas 2.8 – 2.11, verifica-se que a variação de L tem pouca influência nos resultados para os valores de velocidade e rigidez da fundação considerados. Detecta-se apenas um ligeiro e progressivo aumento das amplificações com o aumento do comprimento da viga quando a rigidez da fundação é igual a 1000 kN/m^2.

De referir por último que em todas estas análises verifica-se que o momento flector na secção de meio vão é sempre inferior ao momento de cedência do carril UIC60 com aço de classe R350 (EN13674-2 Railway applications, 2010), cuja tensão de cedência é de $f_y = 1175$ MPa.

Tabela 2.4: Efeito da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos de meio vão para $v = 150$ m/s (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.17 e 2.19).

k_f (kN/m^2)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
250	-0.0524	-0.0876	1.671	65.3	113.8	1.743
500	-0.0312	-0.0375	1.204	54.5	71.8	1.317
1000	-0.0185	-0.0228	1.228	45.4	58.7	1.291
2000	-0.0110	-0.0128	1.159	37.7	47.3	1.256

Tabela 2.5: Efeito da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos de meio vão para $v = 200$ m/s (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.18 e 2.20).

k_f (kN/m^2)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
250	-0.0524	-0.2667	5.089	65.3	317.2	4.858
500	-0.0312	-0.0476	1.528	54.5	89.7	1.645
1000	-0.0185	-0.0262	1.414	45.4	67.1	1.476
2000	-0.0110	-0.0133	1.205	37.7	50.7	1.345

Tabela 2.6: Efeito da velocidade da carga nos deslocamentos e momentos flectores máximos de meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.22 e 2.24).

v (m/s)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
50	0.0524	-0.0543	1.036	65.3	69.7	1.068
100		-0.0621	1.185		76.9	1.178
150		-0.0876	1.671		113.8	1.743
200		-0.2667	5.089		317.2	4.858

Tabela 2.7: Efeito da velocidade da carga nos deslocamentos e momentos flectores máximos de meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.23 e 2.25).

v (m/s)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
50	-0.0185	-0.0186	1.005	45.4	48.6	1.070
100		-0.0194	1.050		51.3	1.129
150		-0.0228	1.228		58.7	1.291
200		-0.0262	1.414		67.1	1.476

Tabela 2.8: Efeito do comprimento da viga nos deslocamentos e momentos flectores máximos a meio vão para $v = 50$ m/s e $k_f = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.27 e 2.31).

L (m)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
50	-0.0524	-0.0608	1.160	66.3	76.2	1.149
100	-0.0524	-0.0528	1.007	66.1	69.2	1.048
150	-0.0524	-0.0539	1.028	65.8	68.4	1.040
200	-0.0524	-0.0543	1.036	65.3	69.7	1.068
250	-0.0524	-0.0532	1.016	64.7	70.3	1.087
300	-0.0524	-0.0551	1.052	64.0	70.9	1.108

Tabela 2.9: Efeito do comprimento da viga nos deslocamentos e momentos flectores máximos a meio vão para $v = 50$ m/s e $k_f = 1000$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.29 e 2.33).

L (m)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
50	-0.0185	-0.0192	1.037	46.8	48.6	1.038
100	-0.0185	-0.0194	1.046	46.5	49.1	1.055
150	-0.0185	-0.0188	1.013	46.1	49.5	1.074
200	-0.0185	-0.0186	1.005	45.4	48.6	1.070
250	-0.0185	-0.0188	1.014	44.6	49.0	1.099
300	-0.0185	-0.0186	1.005	43.7	48.8	1.117

Tabela 2.10: Efeito do comprimento da viga nos deslocamentos e momentos flectores máximos a meio vão para $v = 150$ m/s e $k_f = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.28 e 2.32).

L (m)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
50	-0.0524	-0.0853	1.627	66.3	98.2	1.481
100	-0.0524	-0.0842	1.607	66.1	98.8	1.495
150	-0.0524	-0.0656	1.251	65.8	87.6	1.332
200	-0.0524	-0.0876	1.671	65.3	113.8	1.743
250	-0.0524	-0.0730	1.394	64.7	97.9	1.513
300	-0.0524	-0.0751	1.433	64.0	96.6	1.510

Tabela 2.11: Efeito do comprimento da viga nos deslocamentos e momentos flectores máximos a meio vão para $v = 150$ m/s e $k_f = 1000$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 2.30 e 2.34).

L (m)	$w^{est}_{1/2\ \text{vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\ \text{vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\ \text{vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\ \text{vão}}$ (kNm)	ϕ_M
50	-0.0185	-0.0212	1.143	46.8	55.6	1.187
100	-0.0185	-0.0220	1.188	46.5	56.9	1.222
150	-0.0185	-0.0225	1.213	46.1	58.2	1.264
200	-0.0185	-0.0228	1.228	45.4	58.7	1.291
250	-0.0185	-0.0229	1.235	44.6	58.1	1.302
300	-0.0185	-0.0230	1.243	43.7	59.3	1.358

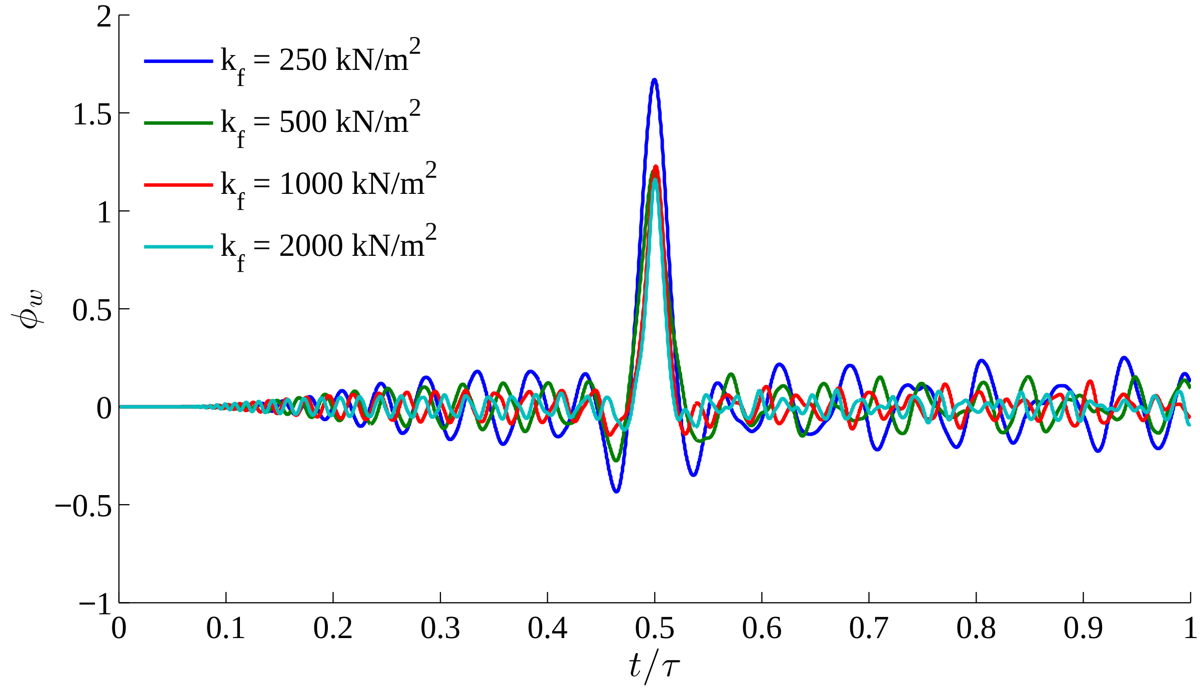


Figura 2.17: Efeito da rigidez da fundação na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $v = 150$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

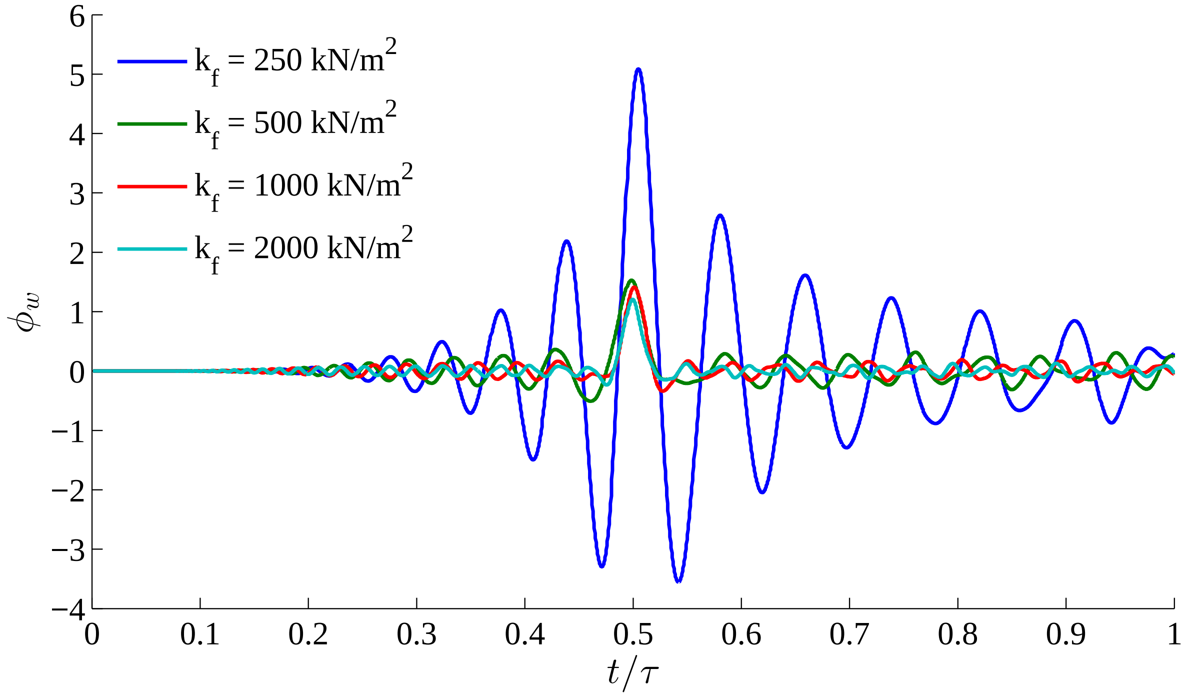


Figura 2.18: Efeito da rigidez da fundação na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $v = 200$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

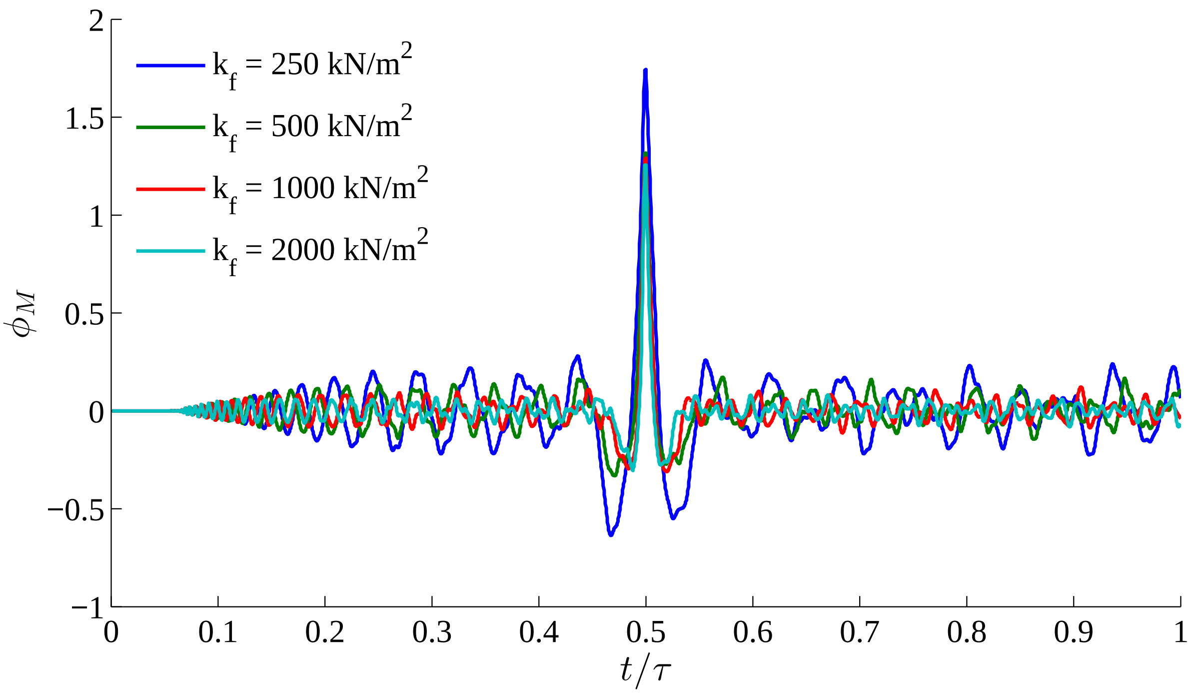


Figura 2.19: Efeito da rigidez da fundação na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $v = 150$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

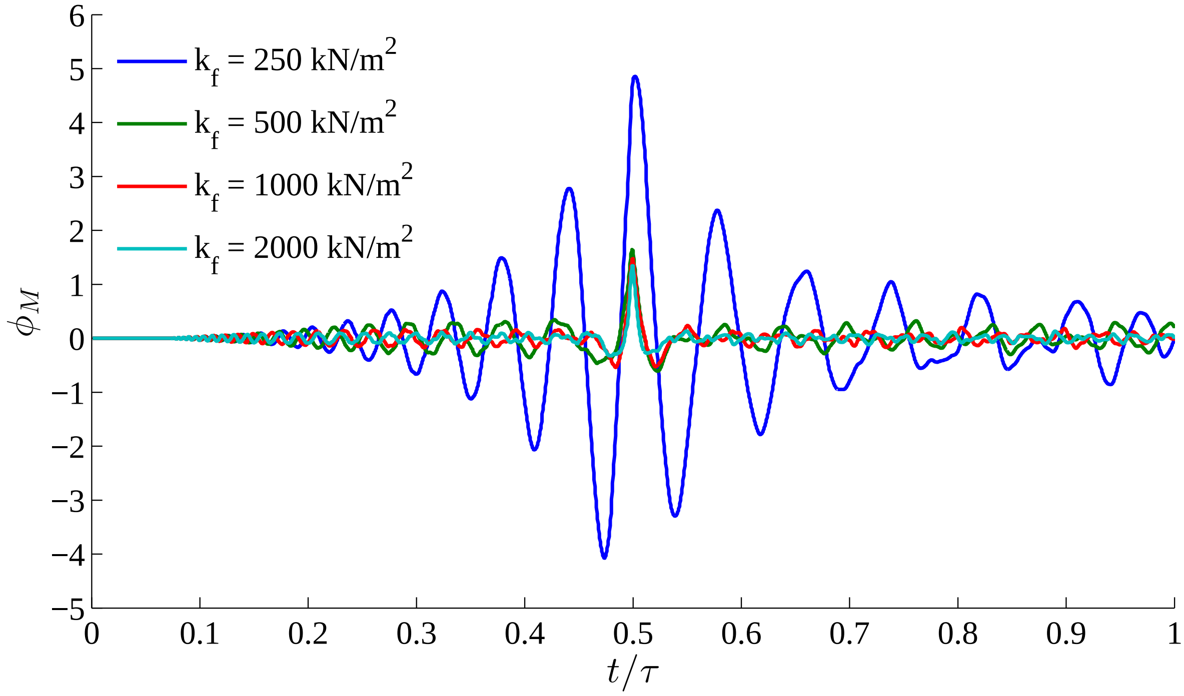


Figura 2.20: Efeito da rigidez da fundação na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $v = 200$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

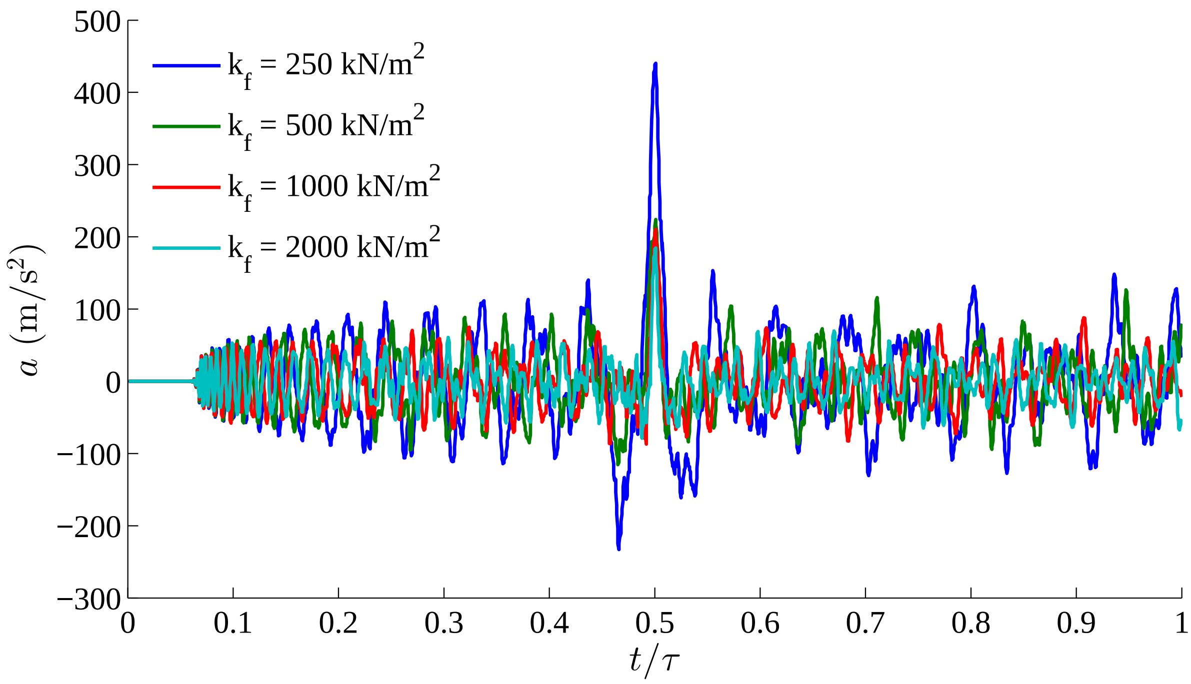


Figura 2.21: Efeito da rigidez da fundação na aceleração da secção transversal de meio vão para $v = 150$ m/s, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

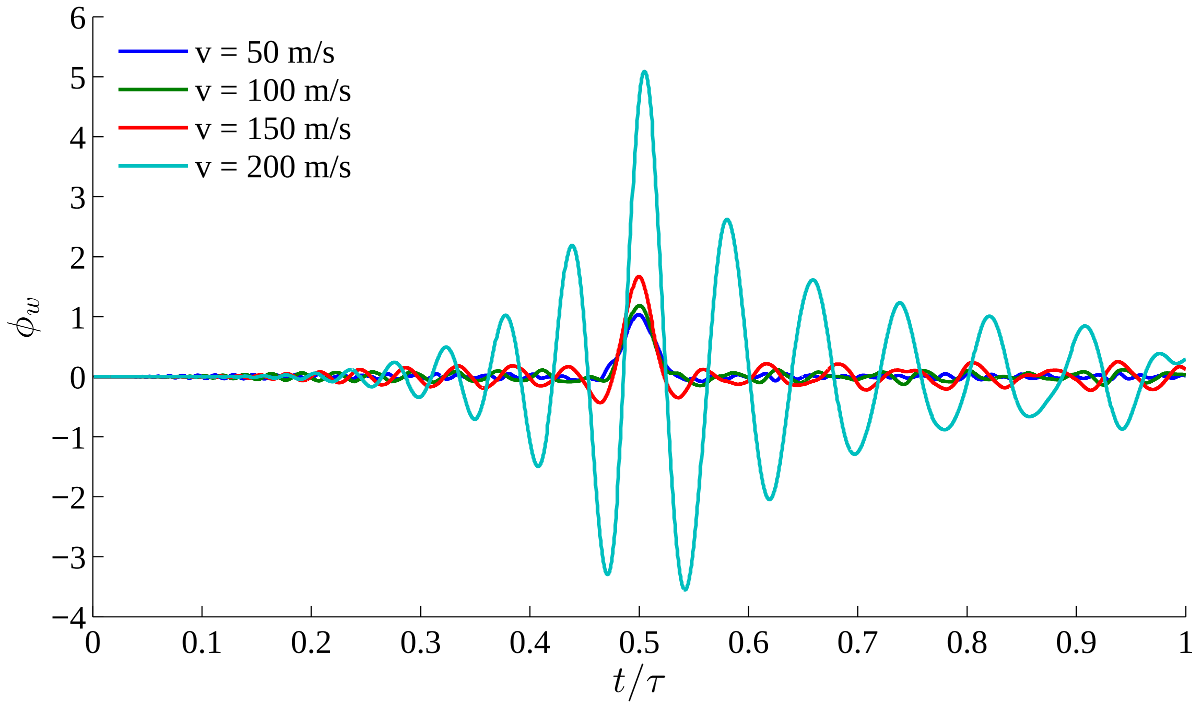


Figura 2.22: Efeito da velocidade da carga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

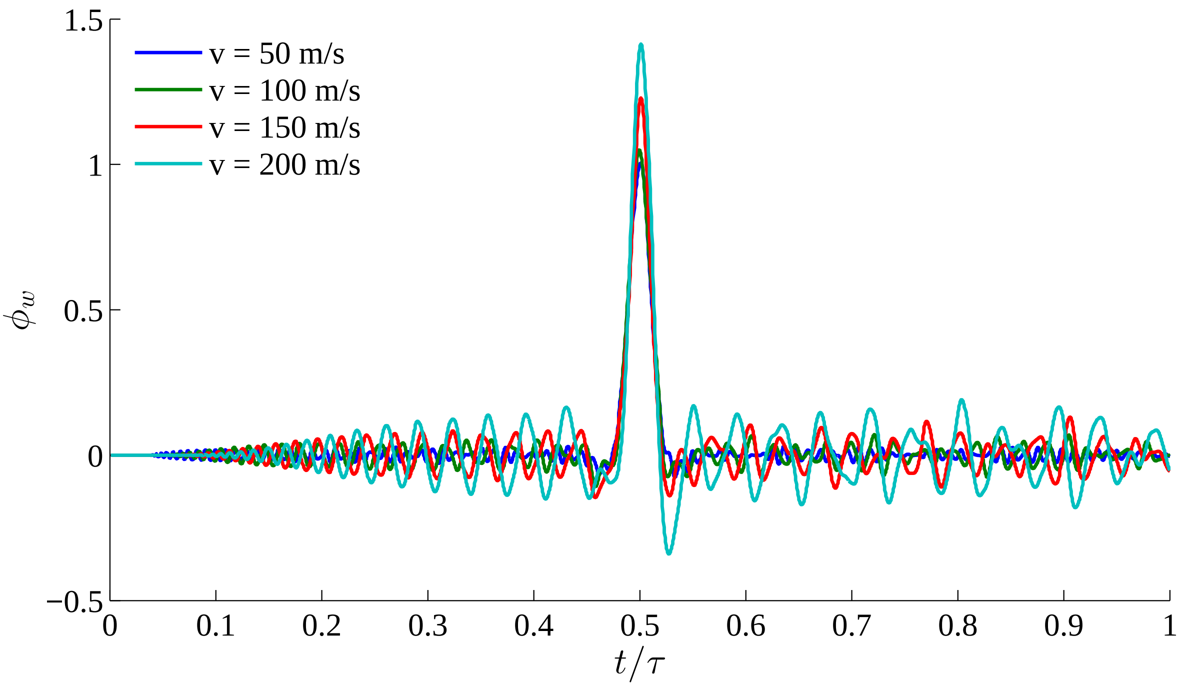


Figura 2.23: Efeito da velocidade da carga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

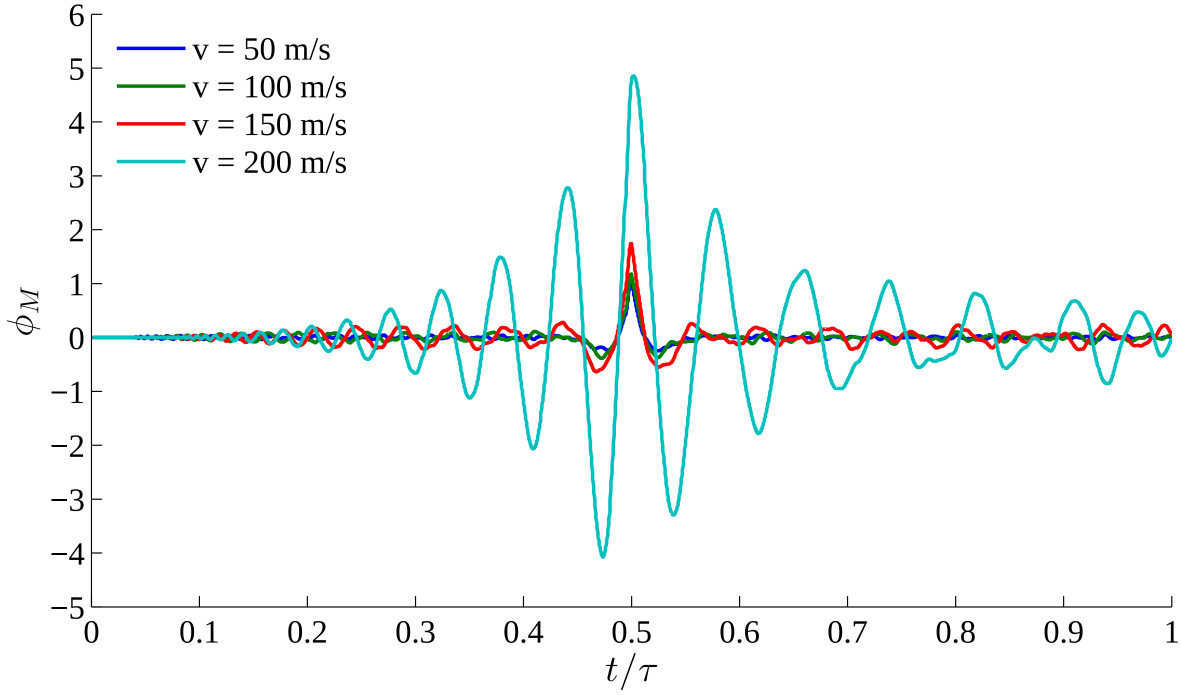


Figura 2.24: Efeito da velocidade da carga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 250\ \mathrm{kN/m^2}$, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

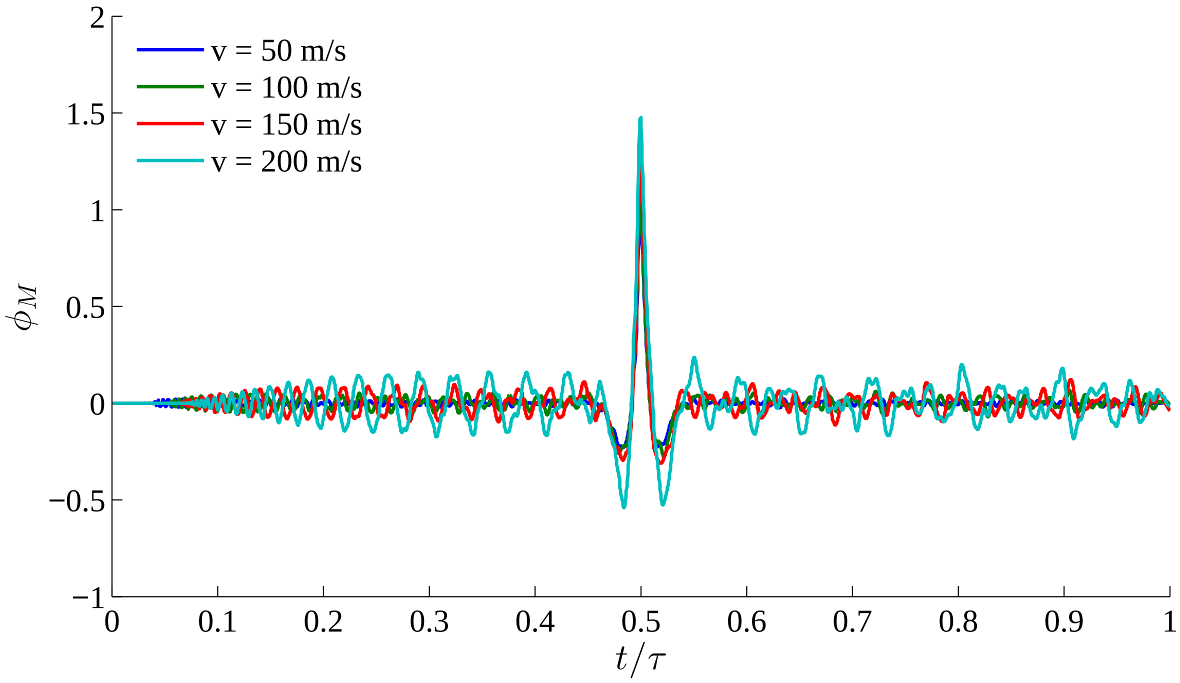


Figura 2.25: Efeito da velocidade da carga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 1000\ \mathrm{kN/m^2}$, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

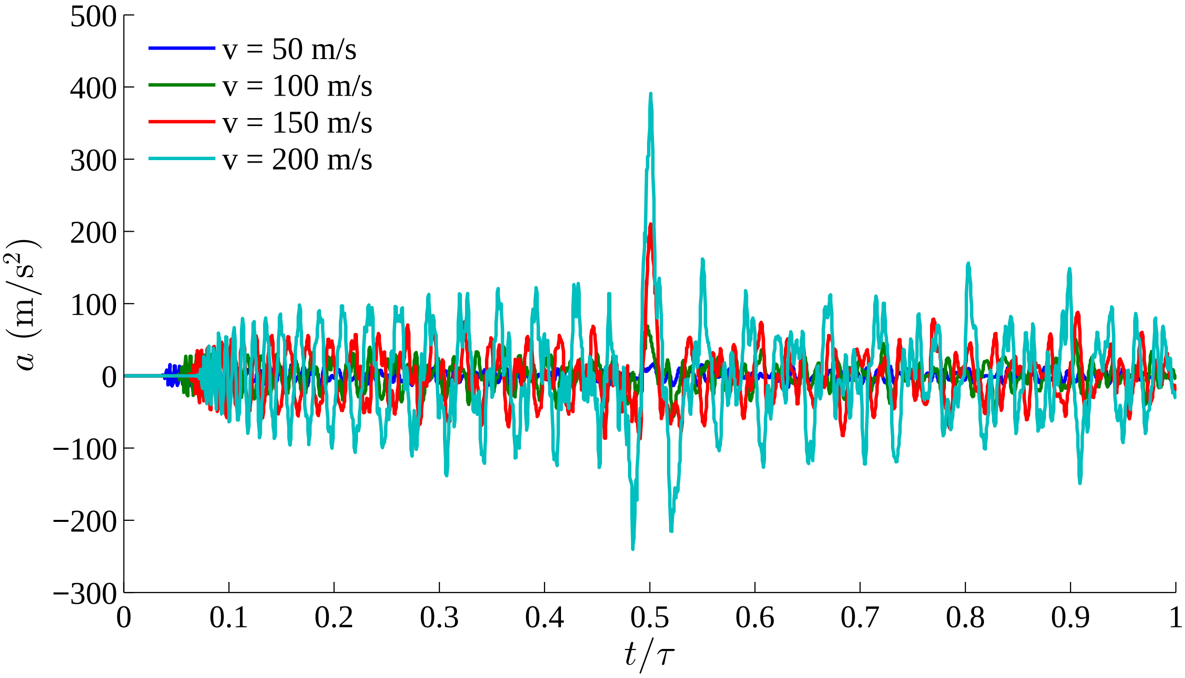


Figura 2.26: Efeito da velocidade da carga na aceleração da secção transversal de meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $L = 200$ m e $\zeta = 0\%$.

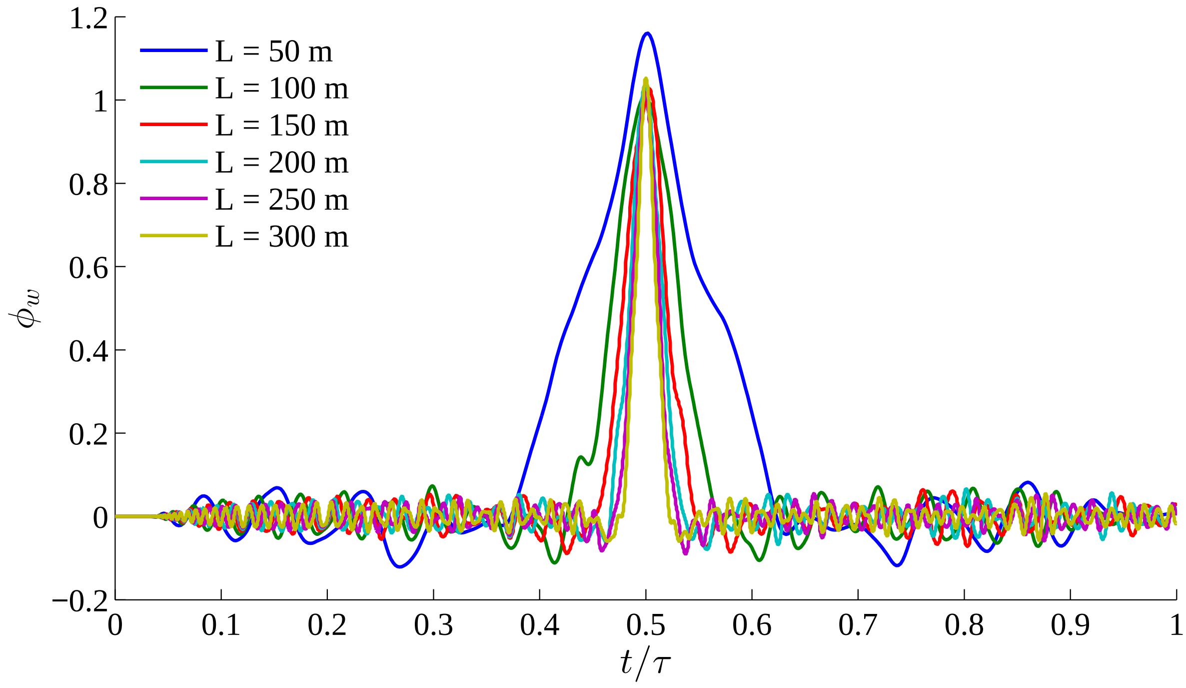


Figura 2.27: Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $v = 50$ m/s e $\zeta = 0\%$.

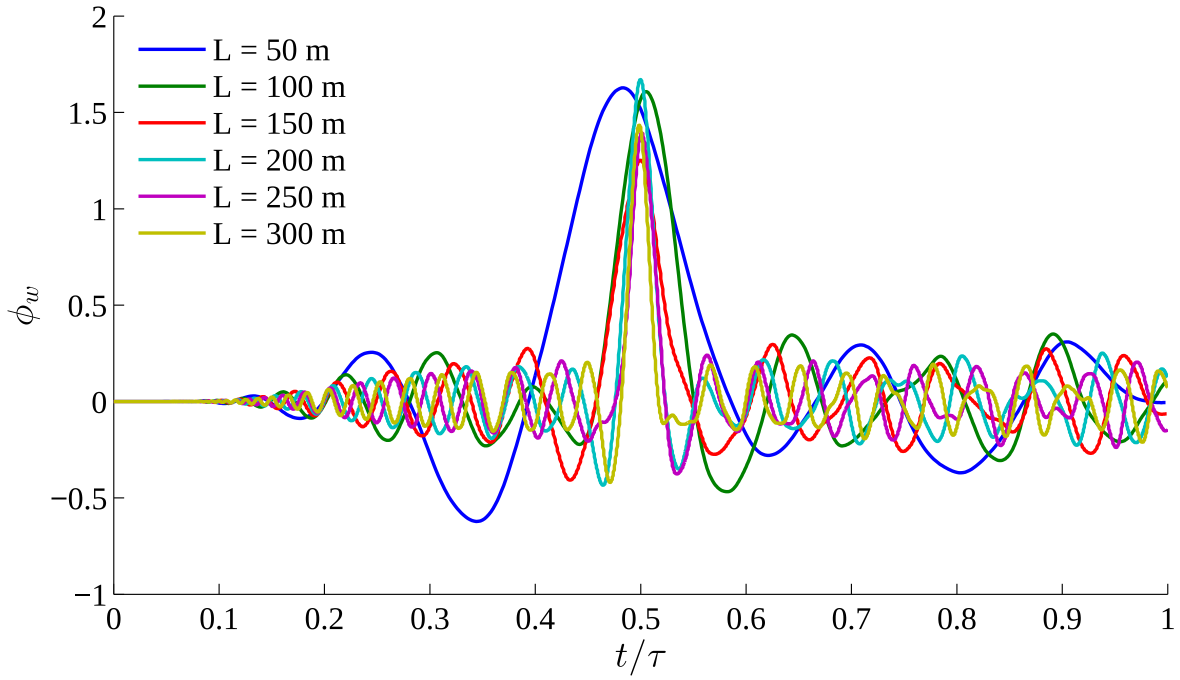


Figura 2.28: Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $v = 150$ m/s e $\zeta = 0\%$.

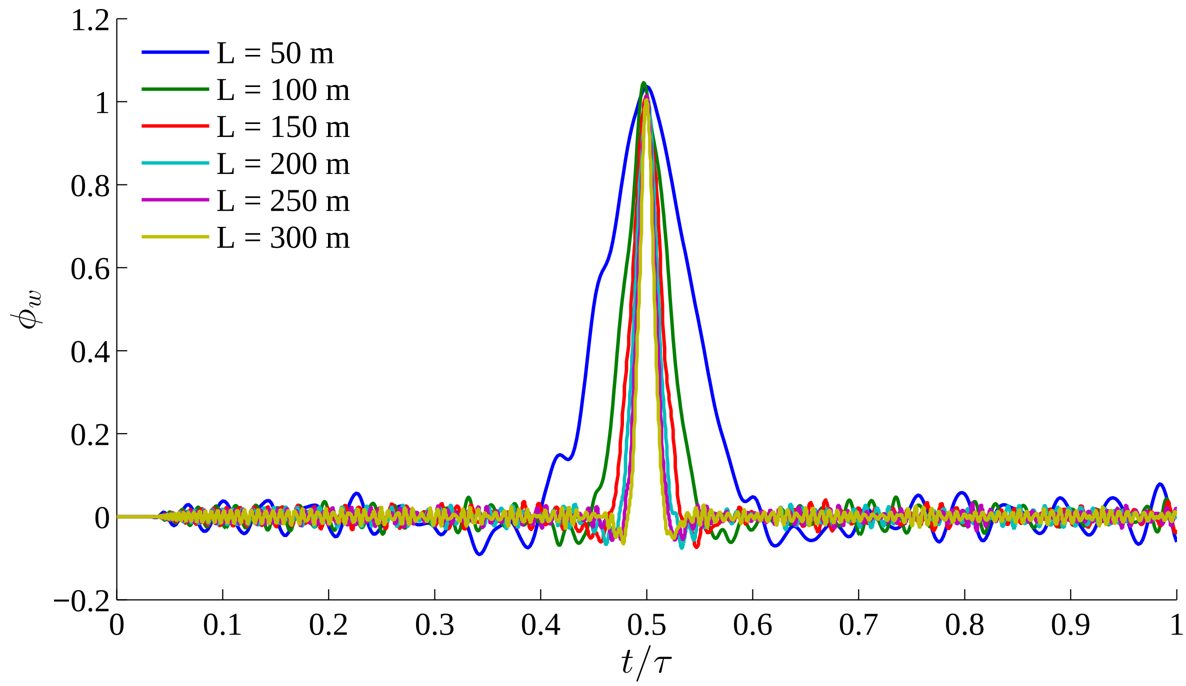


Figura 2.29: Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $v = 50$ m/s e $\zeta = 0\%$.

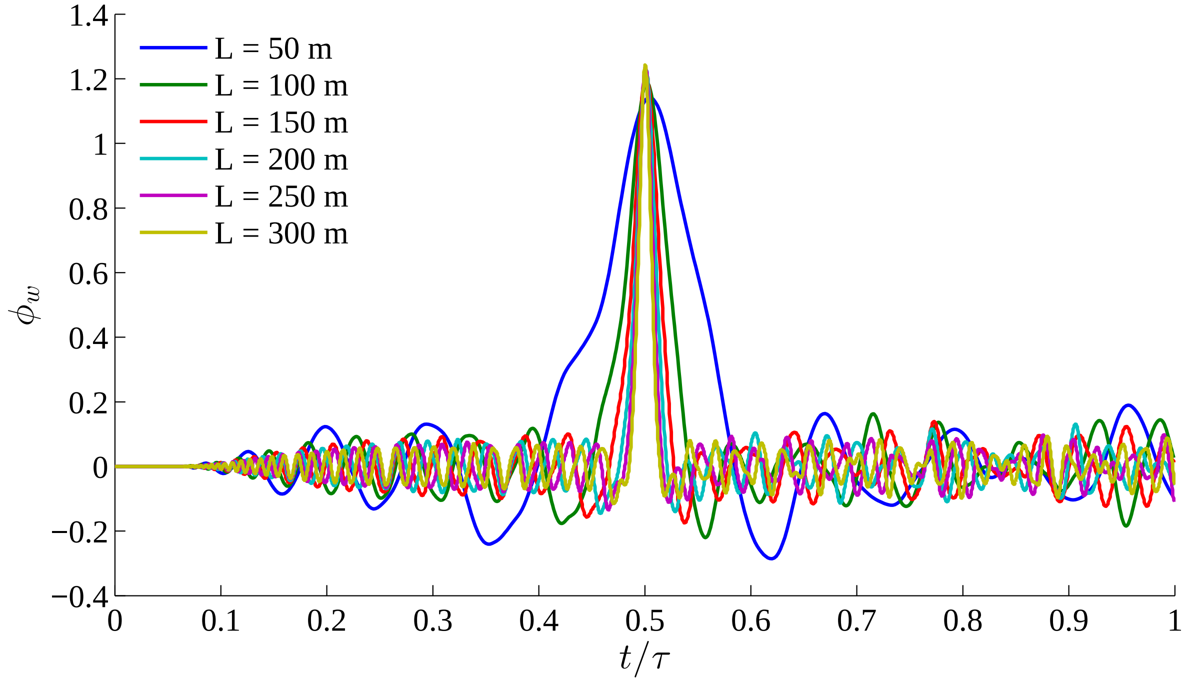


Figura 2.30: Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do deslocamento a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $v = 150$ m/s e $\zeta = 0\%$.

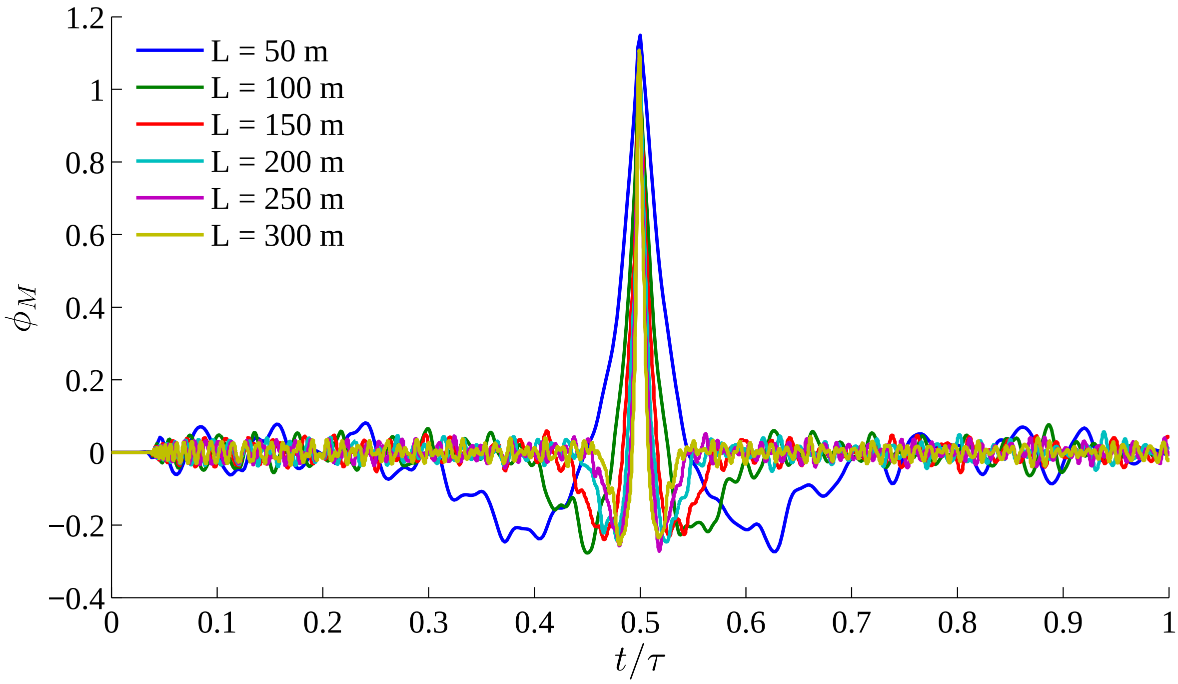


Figura 2.31: Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $v = 50$ m/s e $\zeta = 0\%$.

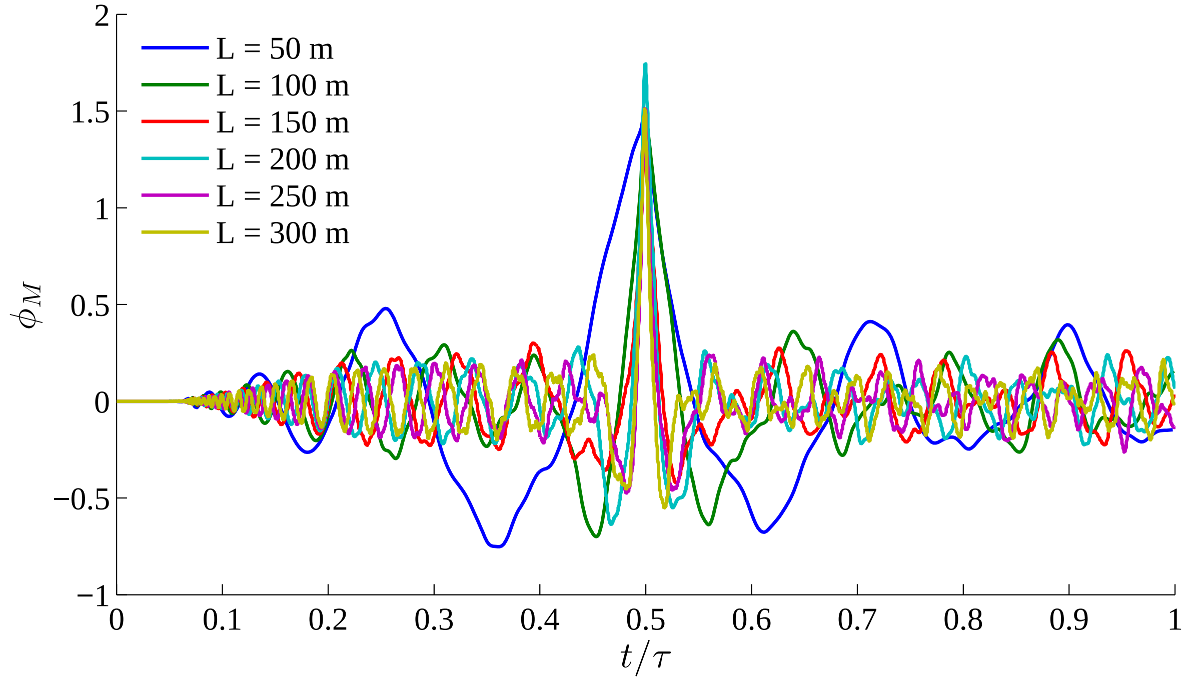


Figura 2.32: Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 250$ kN/m^2, $v = 150$ m/s e $\zeta = 0\%$.

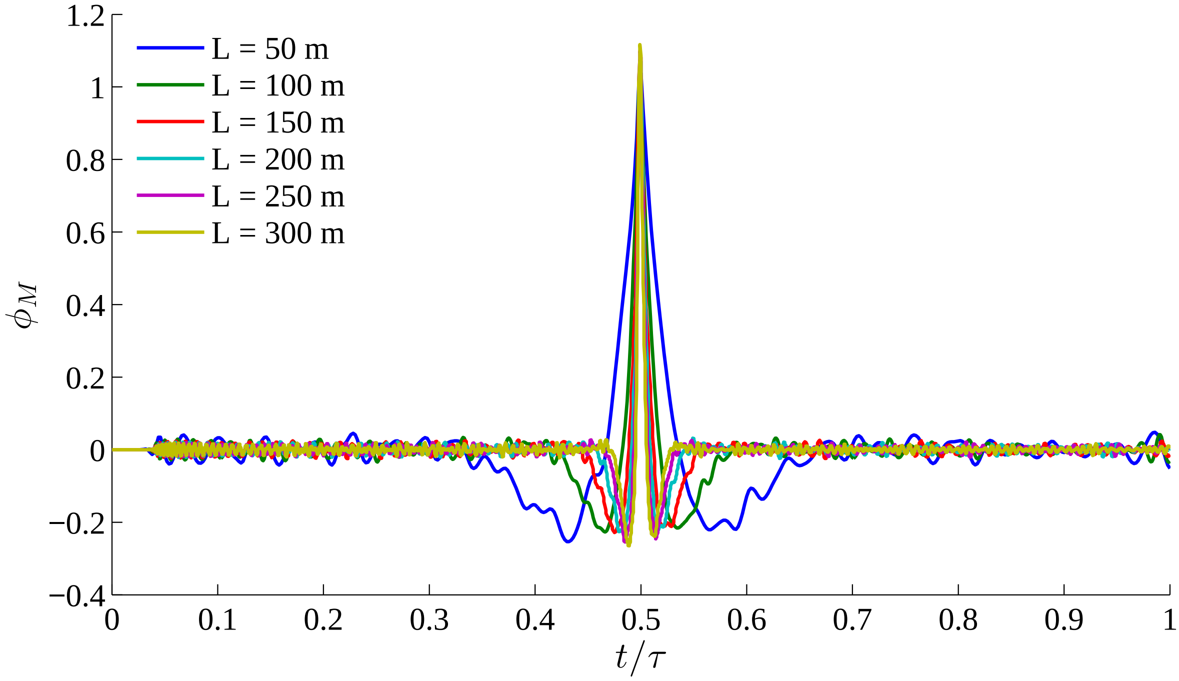


Figura 2.33: Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $v = 50$ m/s e $\zeta = 0\%$.

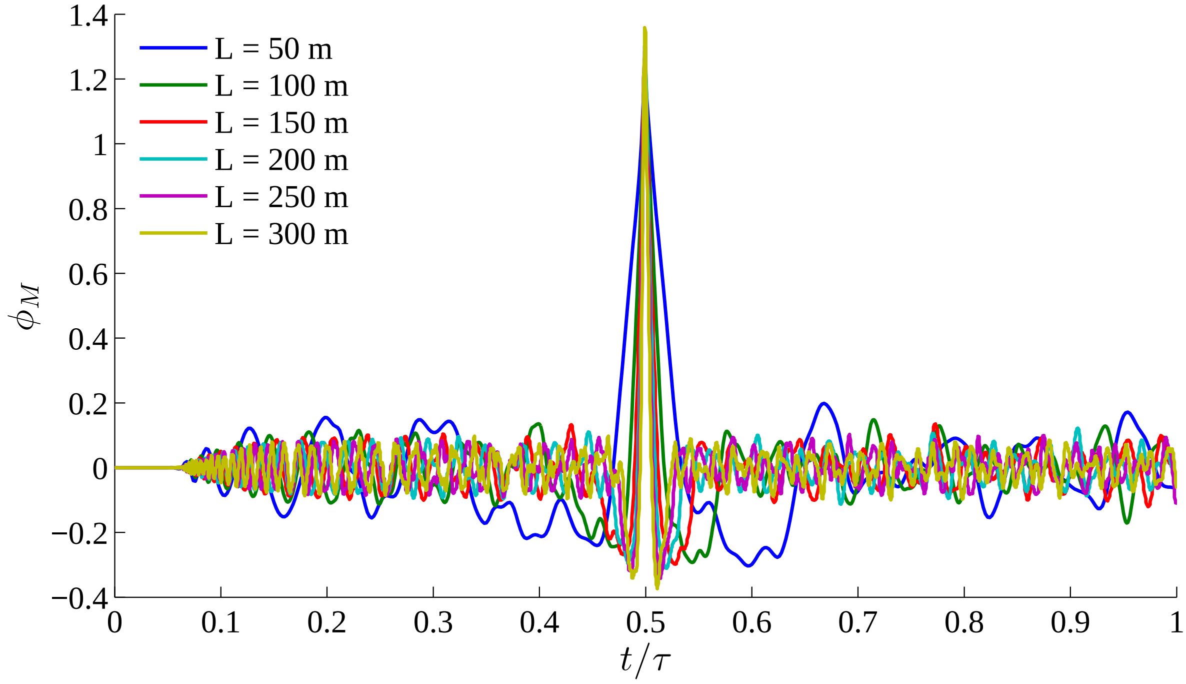


Figura 2.34: Efeito do comprimento da viga na amplificação dinâmica do momento flector a meio vão para $k_f = 1000$ kN/m^2, $v = 150$ m/s e $\zeta = 0\%$.

Capítulo 3

Viga sobre fundação elástica não linear

Aborda-se neste capítulo a resposta de uma viga sobre fundação elástica não-linear. Esquematiza-se de seguida o modelo de elementos finitos programado e discute-se no fim os resultados das análises feitas com este modelo.

3.1 Teoria e formulação do problema

3.1.1 Fundação elástica não linear

Assume-se agora que, para além de uma parcela linear, a força de reacção da fundação tem uma parcela não linear, tal que

$$F_f = F_l + F_{nl} = k_l w + k_{nl} w^3. \tag{3.1}$$

Esta relação constitutiva está representada graficamente na Figura 3.1. A energia de deformação elástica da fundação, por unidade de comprimento, é, para um deslocamento w,

$$u_f = \int_0^w F_f \,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\, k_l\, w^2 + \frac{1}{4}\, k_{nl}\, w^4. \tag{3.2}$$

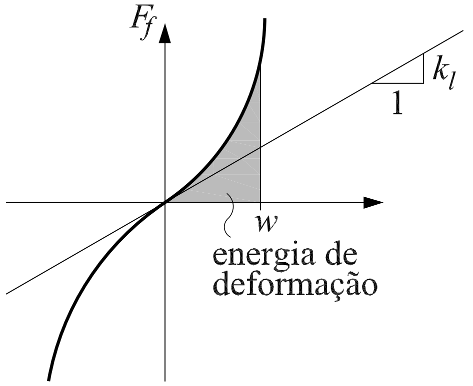


Figura 3.1: Representação gráfica da relação constitutiva de uma fundação não linear.

A energia de deformação elástica acumulada no troço de fundação que está por baixo de um elemento finito de comprimento l é

$$U_f = \int_0^l u_f \, \mathrm{d}x = \int_0^l \left(\frac{1}{2} \, k_l \, w^2 + \frac{1}{4} \, k_{nl} \, w^4 \right) \mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

Usando a igualdade (2.3) (aproximação dos deslocamentos $w(x)$ em função das coordenadas generalizadas $\mathbf{q}^e$) na equação (3.3), obtém-se

$$U_f = \int_0^l \frac{1}{2} \, k_l \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^2 + \frac{1}{4} \, k_{nl} \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^4 \mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

3.1.2 Estática de vigas sobre fundação elástica não linear

Resume-se de seguida a formulação matemática para uma análise estática não linear de uma viga de Euler-Bernoulli em fundação de Winkler (não linear) sujeita à acção de uma força concentrada imóvel e constante, usando o método dos elementos finitos. Esta análise é relevante para a obtenção dos factores de amplificação de deslocamentos e momentos, conceito já explicado no Capítulo 2.

Começa-se por derivar o vector de forças internas associadas às forças elásticas de fundação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_f}{\partial \mathbf{q}^e} &= \int_0^l \frac{1}{2} \, k_l \, \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^e} \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^2 + \frac{1}{4} \, k_{nl} \, \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^e} \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^4 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^l k_l \, \mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \left(\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \right) + k_{nl} \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^3 \left(\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^l \mathbf{D}^{-T} \mathbf{A}^T(x) \, k_l \, \mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e + \mathbf{D}^{-T} \mathbf{A}^T(x) \, k_{nl} \, \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^3 \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A segunda parcela deste vector depende não linearmente de $\mathbf{q}^e$. Como tal, a expressão integral desta parcela, que vem em função de $\mathbf{q}^e$, l e k_{nl}, foi deduzida simbolicamente usando o programa Mathematica (Wolfram Research, Inc., 2013) e programada posteriormente em MatLab (The MathWorks, Inc., 2013) para a obtenção dos resultados numéricos. Por sua vez, a parcela da matriz de rigidez tangente referente à fundação elástica obtém-se de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_f}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^e} \int_0^l \mathbf{D}^{-T} \mathbf{A}^T(x) \, k_l \, \mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e + \mathbf{D}^{-T} \mathbf{A}^T(x) \, k_{nl} \, \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^3 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^l \mathbf{D}^{-T} \mathbf{A}^T(x) \, k_l \, \mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \; + 3 \mathbf{D}^{-T} \mathbf{A}^T(x) \, k_{nl} \, \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^2 \left(\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \mathbf{D}^{-T} \left(\int_0^l \mathbf{A}^T(x) \, k_l \, \mathbf{A}(x) \, \mathrm{d}x \right) \mathbf{D}^{-1} \\
&\quad + \; \mathbf{D}^{-T} \left(\int_0^l 3 \mathbf{A}^T(x) \, k_{nl} \left[\mathbf{A}(x) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{q}^e \right]^2 \mathbf{A}(x) \, \mathrm{d}x \right) \mathbf{D}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

A primeira parcela da matriz de rigidez tangente da fundação é independente de $\mathbf{q}^e$; trata-se da matriz de rigidez da fundação $\mathbf{K}_f^e$ já obtida quando o comportamento da fundação é linear. A segunda parcela da matriz de rigidez tangente é quadrática nos deslocamentos nodais. Sendo assim, a dedução da expressão integral desta parcela foi feita uma vez mais em Mathematica (Wolfram Research, Inc., 2013) e programada em MatLab (The MathWorks, Inc., 2013) para a obtenção dos resultados numéricos.

Com estes dois resultados pode-se deduzir a equação de equilíbrio estático para um elemento de viga em fundação elástica não linear submetido a uma carga concentrada por aplicação da equação de Lagrange, suprimindo o termo de inércia. Vem então que

$$\frac{\partial\left(U_b+U_f+V\right)}{\partial\mathbf{q}^e}=\mathbf{0}. \tag{3.7}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_b}{\partial\mathbf{q}^e}&=\mathbf{K}_b^e\mathbf{q}^e,\\
\frac{\partial U_f}{\partial\mathbf{q}^e}&=\int_0^l \mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(x)\,k_l\,\mathbf{A}(x)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e+\mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(x)\,k_{nl}\,\left[\mathbf{A}(x)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right]^3\,\mathrm{d}x,\\
\frac{\partial V}{\partial\mathbf{q}^e}&=-F\,\mathbf{N}^{e\,T}\left(x_c\right)-\mathbf{Q}^e,
\end{aligned}$$

a equação de equilíbrio estático do elemento finito genérico e escreve-se na forma

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K}_b^e\mathbf{q}^e+\underbrace{\mathbf{D}^{-T}\int_0^l \mathbf{A}^T(x)\,k_l\,\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}}_{\mathbf{K}_f^e}\mathbf{q}^e\\
&+\mathbf{D}^{-T}\int_0^l \mathbf{A}^T(x)\,k_{nl}\,\left[\mathbf{A}(x)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right]^3\,\mathrm{d}x-F\,\mathbf{N}^{e\,T}\left(x_c\right)-\mathbf{Q}^e=\mathbf{0},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{K}^e\mathbf{q}^e+\mathbf{Q}_{nl}^e(\mathbf{q}^e)-F\,\mathbf{N}^{e\,T}\left(x_c\right)-\mathbf{Q}^e=\mathbf{0}, \tag{3.8}$$

em que

$$\mathbf{K}^e=\mathbf{K}_b^e+\mathbf{K}_f^e$$

e

$$\mathbf{Q}_{nl}^e(\mathbf{q}^e)=\mathbf{D}^{-T}\int_0^l \mathbf{A}^T(x)\,k_{nl}\,\left[\mathbf{A}(x)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right]^3\,\mathrm{d}x.$$

Para se obter o sistema (não linear) global que rege o equilíbrio faz-se a reunião dos elementos de viga em fundação não linear analogamente ao descrito no Capítulo 2, o que resulta na expressão

$$\mathbf{K}\mathbf{q}+\mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q})-F\mathbf{N}^T(x_c)=\mathbf{0}, \tag{3.9}$$

em que $\mathbf{Q}_{nl}\left(\mathbf{q}\right)$ é o vector global das forças internas correspondentes à parcela não linear das forças da fundação elástica, resultante do espalhamento dos vectores $\mathbf{Q}_{nl}^e\,(e=1,\ldots,n)$.

O sistema de equações algébricas não lineares (3.9) resolve-se pelo método de Newton-Raphson. Adoptando a letra minúscula i para índice da iteração genérica, a linearização do sistema (3.9) em torno de $\mathbf{q}^i$ conduz a

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q}) - F\mathbf{N}^T(x_c)\right]^i + \\
&\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q}) - F\mathbf{N}^T(x_c)\right)\right]^i \left(\mathbf{q}^{i+1} - \mathbf{q}^i\right) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

em que

$$\left[\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q}) - F\mathbf{N}^T(x_c)\right]^i = \mathbf{K}\mathbf{q}^i + \mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q}^i) - F\mathbf{N}^T(x_c)$$

e

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q}) - F\mathbf{N}^T(x_c)\right)\right]^i = \\
&= \mathbf{K} + \left[\frac{\partial \mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right]^i = \\
&= \mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl}\left(\mathbf{q}^i\right).
\end{aligned}$$

Na expressão anterior $\mathbf{K}_{nl}\left(\mathbf{q}^i\right)$ é a parcela da matriz de rigidez global tangente devida apenas à parte não linear das forças generalizadas da fundação elástica. A matriz $\mathbf{K}_{nl}\left(\mathbf{q}^i\right)$ resulta do espalhamento das matrizes

$$\mathbf{K}^e_{nl}\left(\mathbf{q}^{e\,i}\right) = \mathbf{D}^{-T}\int_0^l 3\mathbf{A}^T(x)\,k_{nl}\,\left[\mathbf{A}(x)\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{q}^{e\,i}\right]^2 \mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1} \tag{3.11}$$

em que $e = 1, \ldots, n$. O sistema de equações lineares (3.10) cuja incógnita é o vector $\mathbf{q}^{i+1}$ escreve-se então na forma

$$\left(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{nl}\left(\mathbf{q}^i\right)\right)\mathbf{q}^{i+1} = F\mathbf{N}^T(x_c) + \mathbf{K}_{nl}\left(\mathbf{q}^i\right)\mathbf{q}^i - \mathbf{Q}_{nl}\left(\mathbf{q}^i\right). \tag{3.12}$$

O sistema (3.12) deve ser resolvido em cada iteração em ordem a $\mathbf{q}^{i+1}$ até que

$$\left\|\mathbf{K}\mathbf{q}^{i+1} + \mathbf{Q}_{nl}\left(\mathbf{q}^{i+1}\right) - F\mathbf{N}^T(x_c)\right\| \leq \varepsilon$$

com ε suficientemente pequeno.

Uma vez calculado o vector de deslocamentos nodais $\mathbf{q}$, o campo de momentos flectores na viga obtém-se usando a expressão

$$M(x) = EI\frac{d^2w}{dx^2} = EI\,\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e.$$

3.1.3 Dinâmica de vigas sobre fundação elástica não linear

A formulação da teoria referente ao caso de uma viga sobre fundação de Winkler não linear sujeita a carga móvel (problema dinâmico) é semelhante à descrita para o caso estático, mudando apenas a dedução da equação geral que rege o movimento através das equações de Lagrange.

Contabilizando agora os termos de inércia, obtém-se

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q}) - F\mathbf{N}^T(x_c) = \mathbf{0}. \tag{3.13}$$

Para a resolução do sistema (3.13) utiliza-se uma vez mais o método–α de Hilber et al. (1977) (ver secção 2.2), sendo que agora o vector das forças internas $\mathbf{p}$ toma a forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Q}_{nl}(\mathbf{q}). \tag{3.14}$$

Uma vez que o vector das forças internas e a matriz de rigidez não linear dependem dos deslocamentos nodais da viga $\mathbf{q}$, estas grandezas têm de ser corrigidas (isto é, calculadas de novo) em cada iteração i do método–α. Após esta correcção é necessário proceder à reunião dos elementos da viga e prosseguir com os restantes passos do algoritmo.

3.2 Resultados e comentários

Os resultados apresentados nesta secção são análogos aos obtidos nas análises efectuadas no Capítulo 2, pretendendo-se agora perceber sobretudo a influência da introdução de uma parcela não linear de rigidez da fundação. As condições das análises são idênticas, usando-se o mesmo tipo de carril (UIC60) e o mesmo comprimento da viga simplesmente apoiada (200 m). Quando considerado, o factor amortecimento ζ continua a ser de 2%.

3.2.1 Análises de velocidades críticas

Começa-se por apresentar os resultados de um estudo sobre as velocidades críticas num intervalo de velocidades entre 50 m/s e 300 m/s. Consideraram-se os mesmos casos de estudo – 1 e 2 sub-domínios, com e sem amortecimento. Manteve-se também a malha de elementos finitos, o passo de tempo e o valor da força concentrada $F = -83.4$ kN.

Nas Figuras 3.2 – 3.5 observa-se então o efeito da introdução de uma parcela de rigidez não linear nas curvas de deslocamentos máximos positivos e negativos para o caso de um único sub-domínio (fundação uniforme com $k_l = 250$ kN/m^2) e sem consideração de amortecimento. Notar que da Figura 3.2 para a Figura 3.5 a rigidez não linear cresce exponencialmente (factor 10 entre cada duas figuras consecutivas). Verifica-se que a velocidade crítica aumenta e que os picos dos deslocamentos sofrem reduções significativas com o aumento da parcela não linear da rigidez da fundação. Na Figura 3.6 agrupam-se as curvas "on" das Figuras 3.2 a 3.5 num só gráfico para se visualizar melhor o efeito da parcela não linear da rigidez. Na Tabela 3.1 comparam-se os valores de pico dos deslocamentos para diferentes valores de k_{nl} (incluindo zero, ou seja, o caso linear). Observa-se, como seria expectável, uma clara redução destes valores com o aumento de k_{nl}. É também interessante observar nesta tabela que esta redução não é directamente proporcional à variação de k_{nl}, facto que seria de esperar uma vez que o modelo de fundação é não linear. A introdução de amortecimento (Figuras 3.7 – 3.11 e Tabela 3.2) tem o único efeito de reduzir os valores absolutos dos deslocamentos, especialmente na zona em redor da velocidade crítica.

Nas Figuras 3.12 – 3.15, apresenta-se os resultados obtidos no intervalo de tempo $[0, t_{on}]$ para o caso da viga estar dividida em dois sub-domínios (sub-domínio 1: metade esquerda menos rígida; sub-domínio 2: metade da direita mais rígida). Para os gráficos das Figuras 3.12 e 3.14 (curvas em que a carga se encontra no sub-domínio 1), as curvas a traço cheio correspondem aos deslocamentos máximos no sub-domínio 1 (curvas "sub1") e as curvas a traço interrompido correspondem aos deslocamentos máximos no sub-domínio 2 (curvas "sub2"). Para os gráficos das Figuras 3.13 e 3.15 (curvas em que a carga se encontra no sub-domínio 2), as curvas a traço cheio correspondem aos deslocamentos máximos no sub-domínio 2 (curvas "sub2") e as curvas a traço interrompido correspondem aos deslocamentos máximos no sub-domínio 1 (curvas "sub1"). Tal como para o caso linear, observa-se que os deslocamentos máximos ocorrem quando a carga percorre o sub-domínio 2 e que o amortecimento tem o efeito de reduzir os deslocamentos. Verifica-se igualmente a existência de dois picos de deslocamento máximo quando a carga se encontra sub-domínio 2. No entanto, à medida que a parcela não linear da rigidez aumenta, esses picos atenuam-se. O aumento da parcela não linear da rigidez tem também o efeito de aumentar as velocidades críticas e reduzir os deslocamentos.

Tabela 3.1: Efeito da parcela não linear da rigidez nos deslocamentos máximos de pico para um sub-domínio, sem amortecimento, $k_l = 250$ kN/m^2 e $t \in [0, t_{on}]$.

k_{nl} (kN/m^4)	w^+_{max} (m)	w^-_{max} (m)
0	0.600	-0.712
2.5×10^3	0.349	-0.400
2.5×10^4	0.188	-0.204
2.5×10^5	0.108	-0.118
2.5×10^6	0.034	-0.041

Tabela 3.2: Efeito da parcela não linear da rigidez nos deslocamentos máximos de pico para um sub-domínio, com amortecimento $\zeta = 2\%$, $k_l = 250$ kN/m^2 e $t \in [0, t_{on}]$.

k_{nl} (kN/m^4)	w^+_{max} (m)	w^-_{max} (m)
0	0.317	-0.425
2.5×10^3	0.242	-0.306
2.5×10^4	0.150	-0.183
2.5×10^5	0.085	-0.101
2.5×10^6	0.030	-0.039

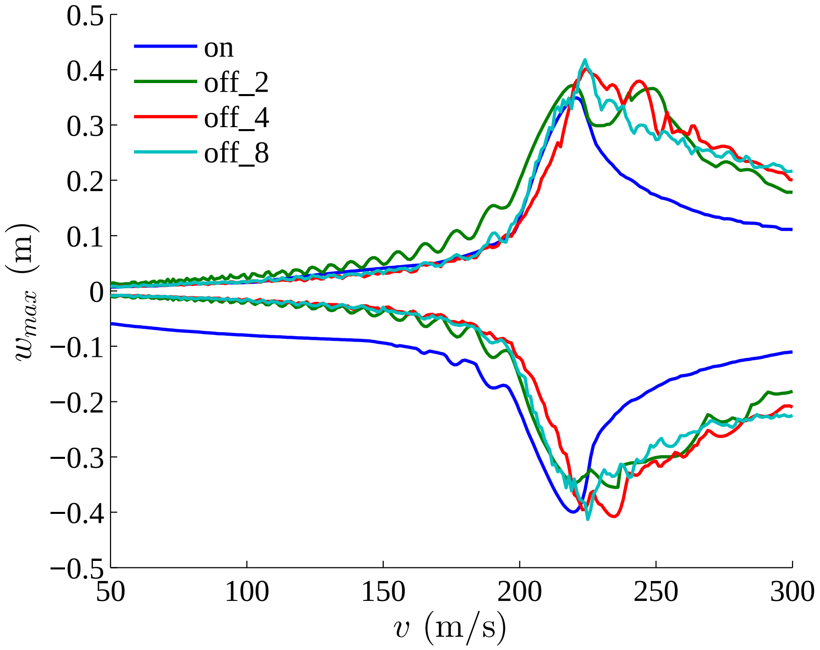


Figura 3.2: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^3$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

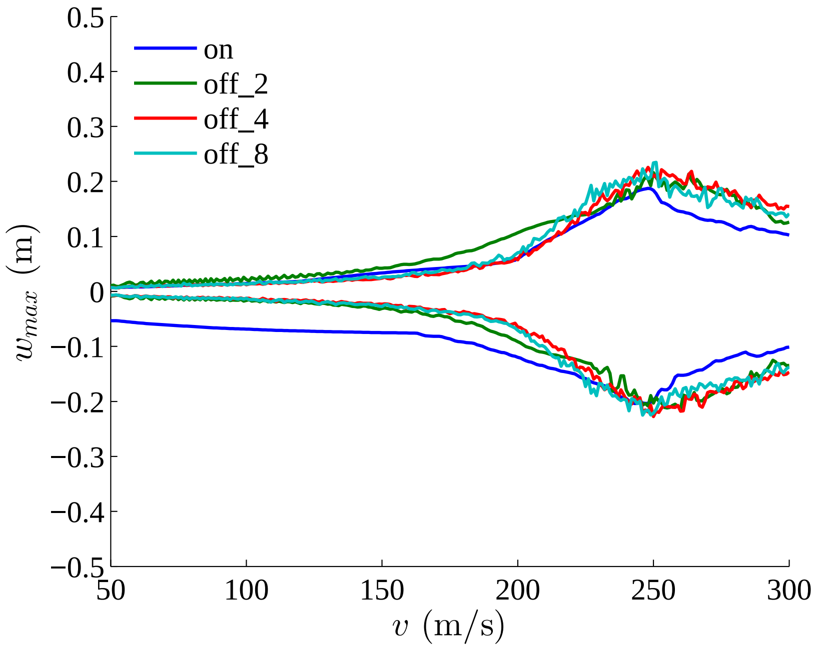


Figura 3.3: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^4$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

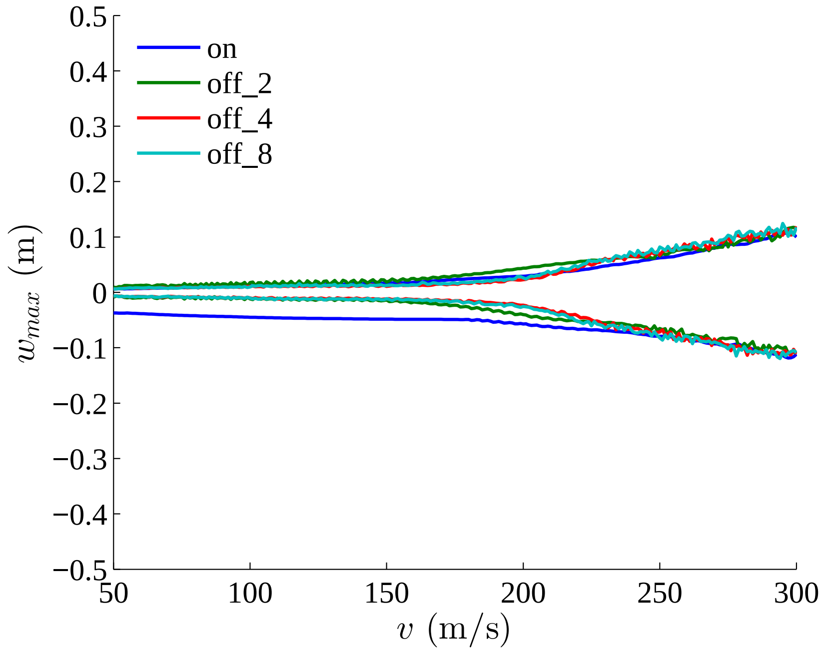


Figura 3.4: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^5$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

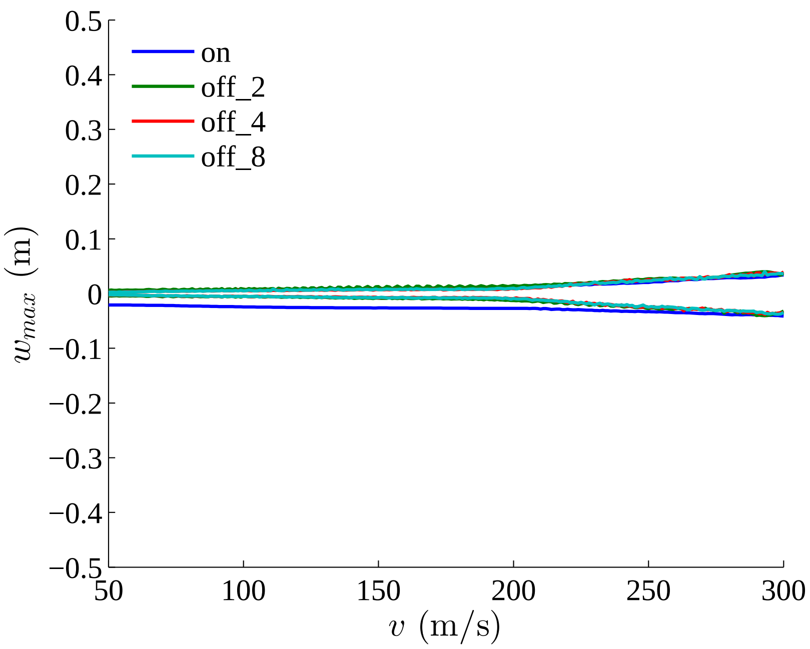


Figura 3.5: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^6$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

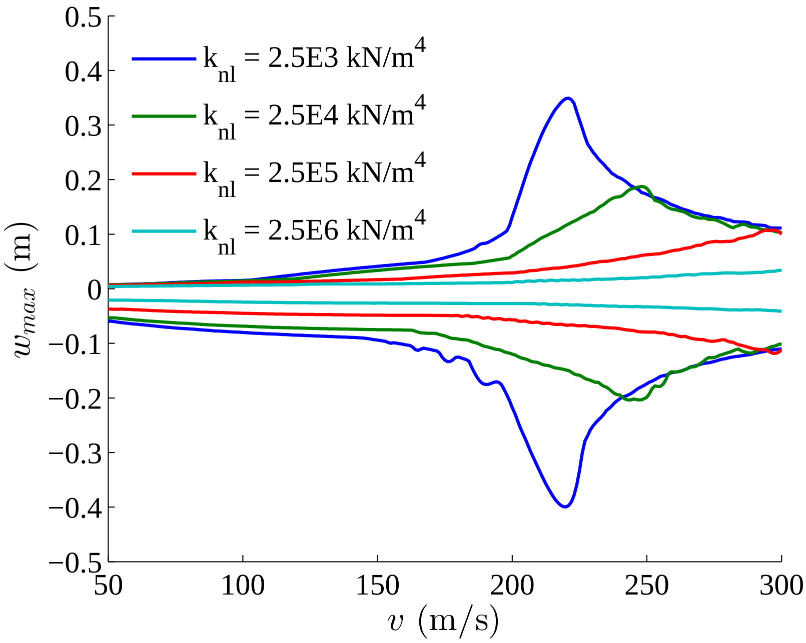


Figura 3.6: Efeito da parcela não linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação uniforme com $k_l = 250$ kN/m^2, sem amortecimento e $t \in [0, t_{on}]$.

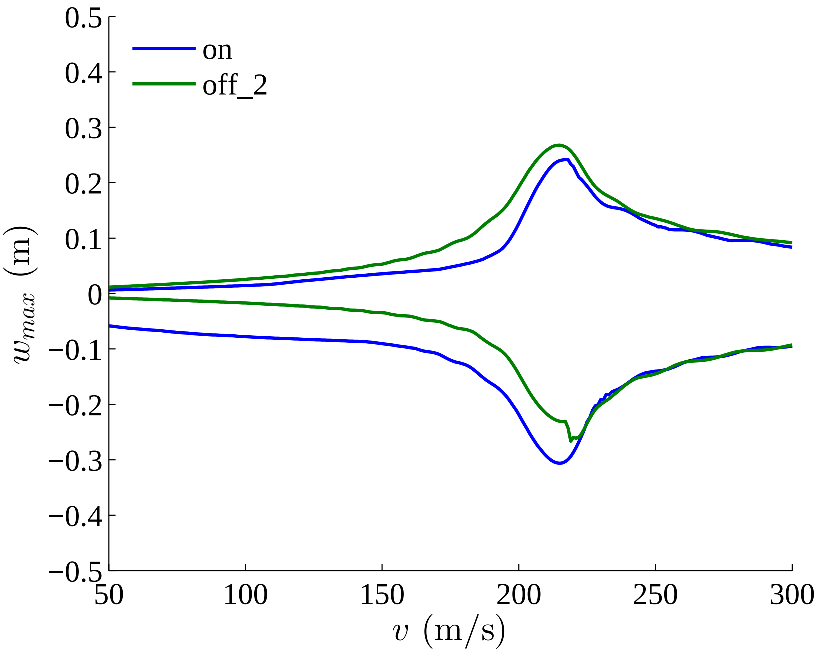


Figura 3.7: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^3$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

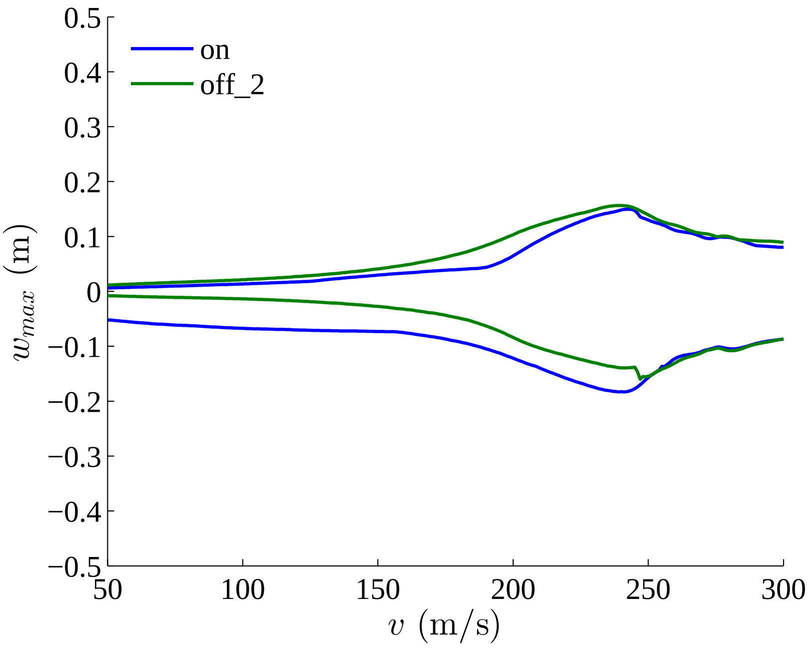


Figura 3.8: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^4$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

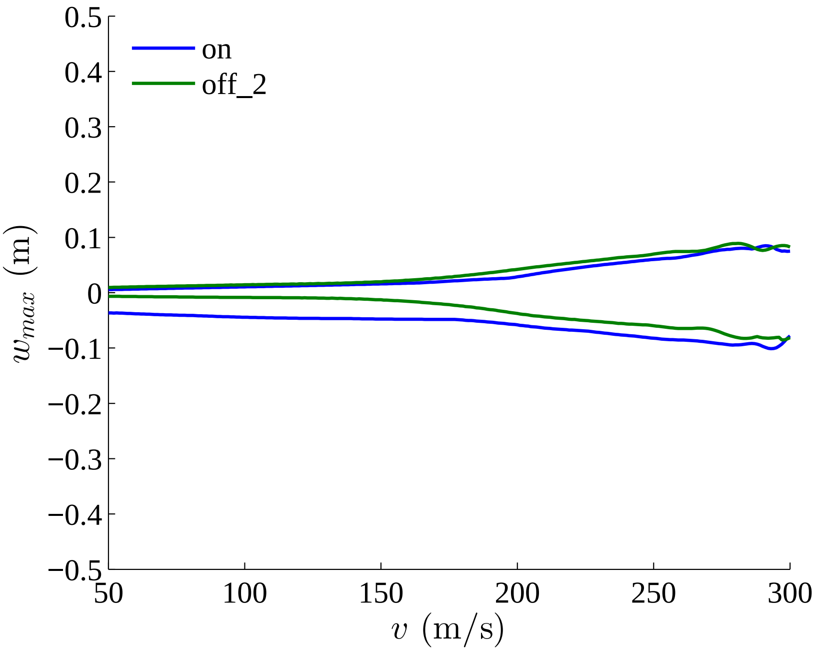


Figura 3.9: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^5$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

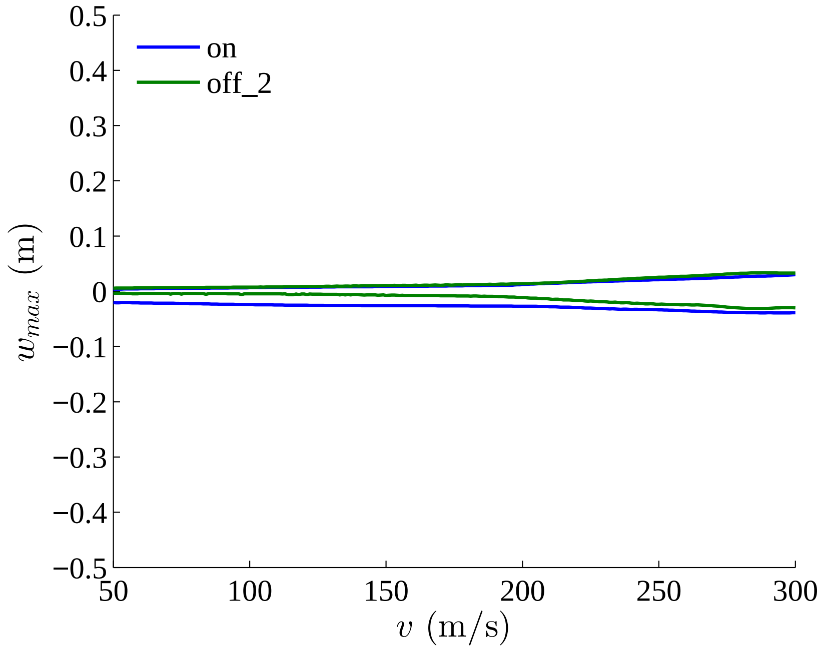


Figura 3.10: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{nl} = 2.5 \times 10^6$ kN/m^4, $k_l = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

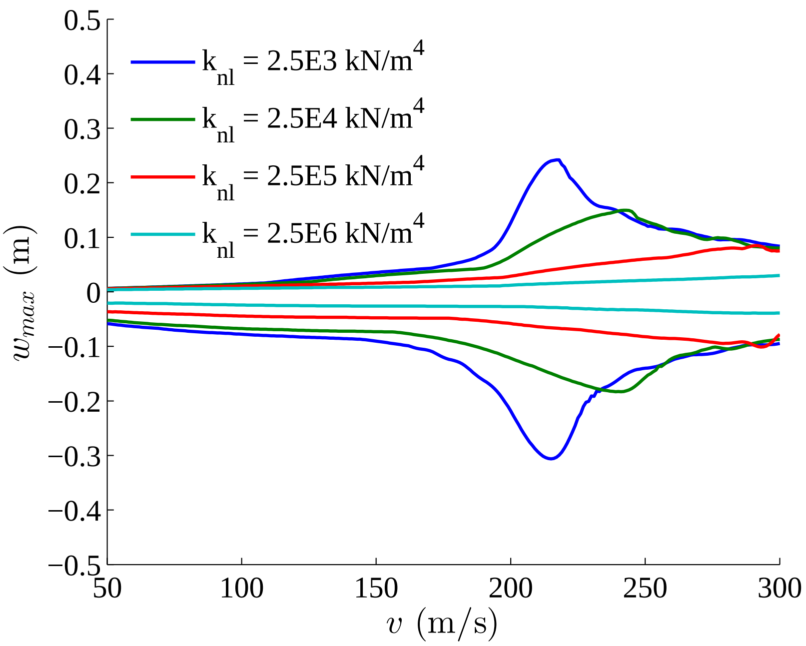


Figura 3.11: Efeito da parcela não linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação uniforme com $k_l = 250$ kN/m^2, com amortecimento $\zeta = 2\%$ e $t \in [0, t_{on}]$.

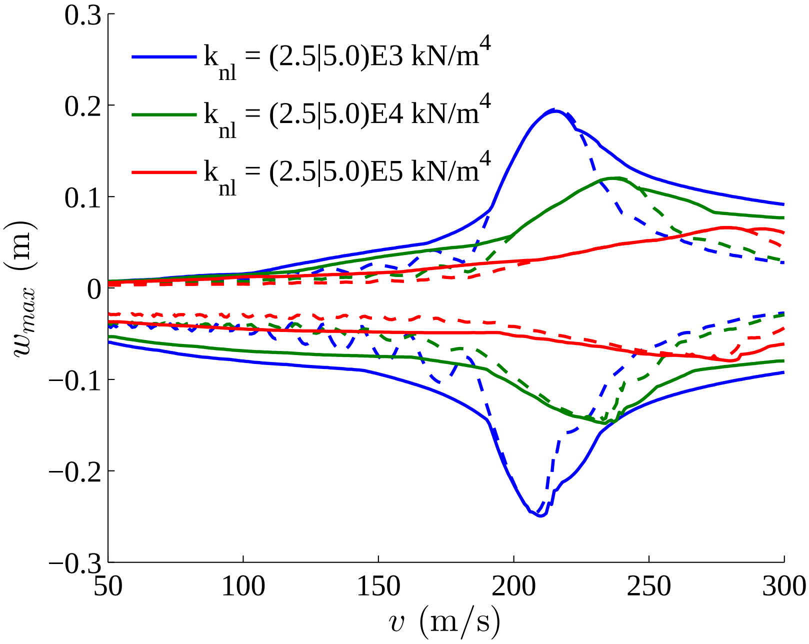


Figura 3.12: Efeito da parcela não-linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação com dois sub-domínios, sem amortecimento, $k_l = 250$ kN/m^2 (metade esquerda), $k_l = 500$ kN/m^2 (metade direita) e $t \in [0, t_{on}]$ (carga no sub-domínio 1).

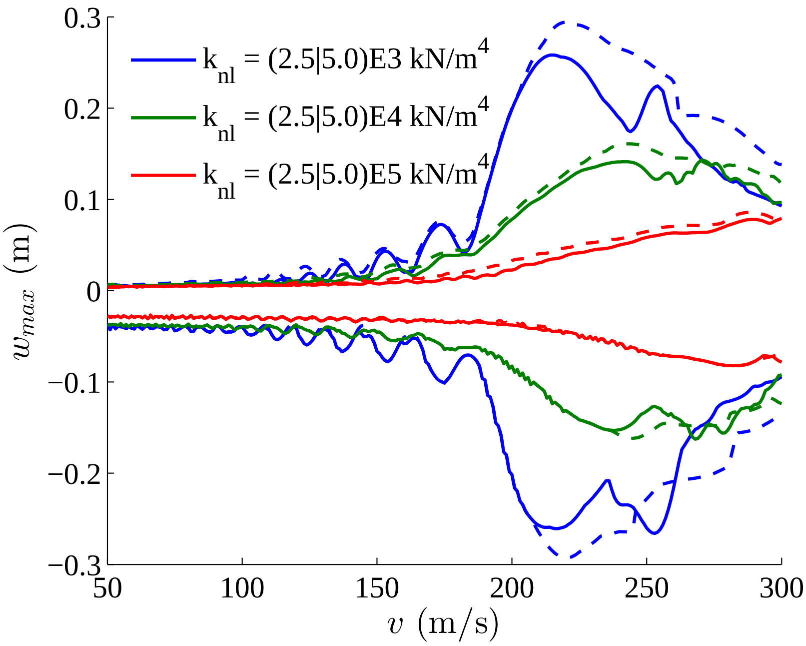


Figura 3.13: Efeito da parcela não-linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação com dois sub-domínios, sem amortecimento, $k_l = 250$ kN/m^2 (metade esquerda), $k_l = 500$ kN/m^2 (metade direita) e $t \in [0, t_{on}]$ (carga no sub-domínio 2).

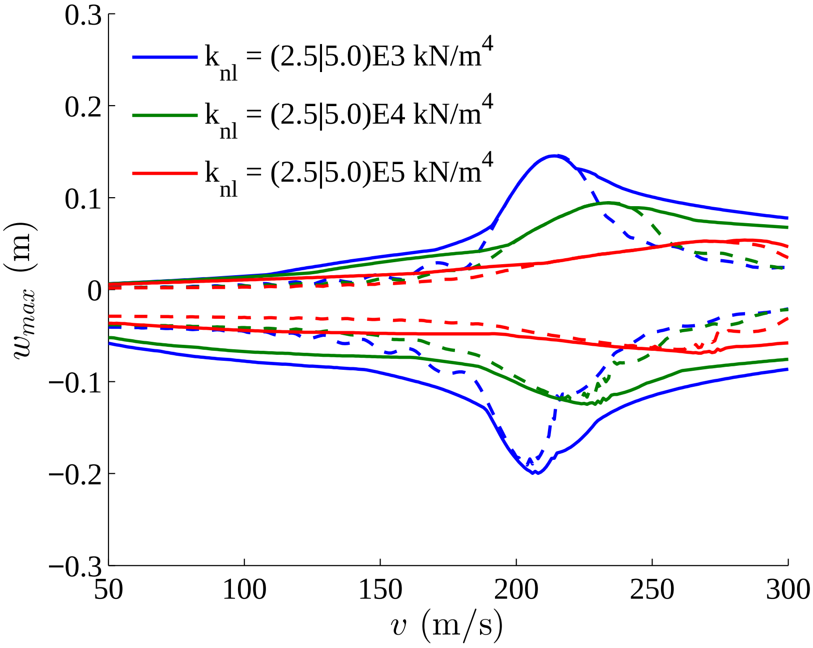


Figura 3.14: Efeito da parcela não-linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação com dois sub-domínios, com amortecimento $\zeta = 2\%$, $k_l = 250$ kN/m^2 (metade esquerda), $k_l = 500$ kN/m^2 (metade direita) e $t \in [0, t_{on}]$ (carga no sub-domínio 1).

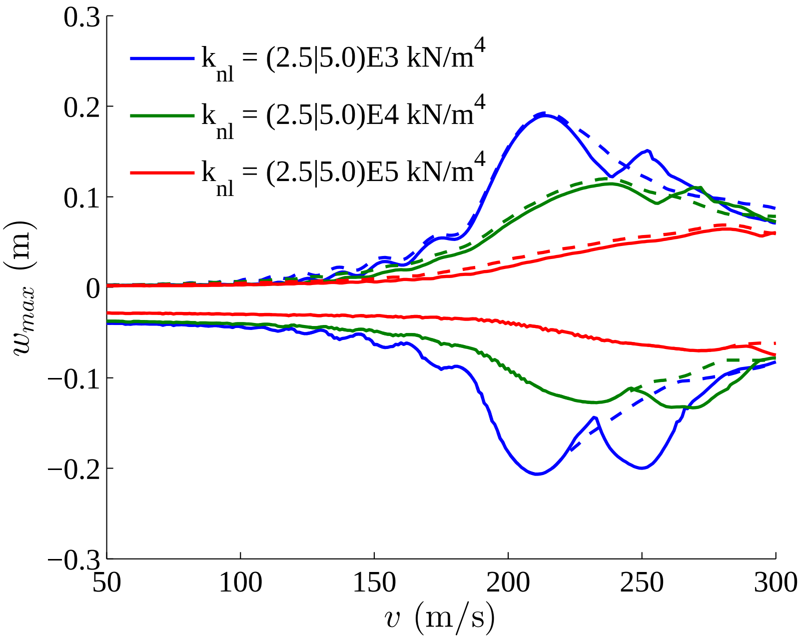


Figura 3.15: Efeito da parcela não-linear da rigidez nos deslocamentos máximos ascendente e descendente para fundação com dois sub-domínios, com amortecimento $\zeta = 2\%$, $k_l = 250$ kN/m^2 (metade esquerda), $k_l = 500$ kN/m^2 (metade direita) e $t \in [0, t_{on}]$ (carga no sub-domínio 2).

3.2.2 Estudos paramétricos

Nesta secção apresentam-se uma vez mais alguns gráficos sobre a evolução temporal das amplificações dos deslocamentos e momento flector da secção de meio vão do carril. Faz-se agora variar os parâmetros velocidade da carga (v), rigidez linear (k_l) e rigidez não linear (k_{nl}) para duas análises distintas, uma com $F = -83.4$ kN e outra com $F = -834$ kN. Efectuam-se estas duas análises uma vez que o comportamento da fundação já não é linear, ou seja, a resposta já não é directamente proporcional à acção. As variáveis ϕ_w, ϕ_M, t e τ têm o mesmo significado anterior (recordar a secção 2.3.2). As análises foram realizadas com as mesmas propriedades da viga, refinamento da malha, passo temporal e amortecimento dos estudos apresentados na secção análoga do Capítulo 2.

Força pontual móvel igual a -83.4 kN

Analisando os dois conjuntos de Figuras 3.16 – 3.18 ($k_l = 250$ kN/m^2) e 3.19 – 3.21 ($k_l = 500$ kN/m^2), nota-se uma vez mais o aumento das amplificações de deslocamentos com a velocidade de passagem da carga e a presença das maiores amplificações quando esta passa a meio vão. O efeito da parcela não-linear da rigidez só é visível quando as amplificações dos deslocamentos começam a ser maiores, isto é, para zonas da deformação na relação constitutiva da Figura 3.1 marcadamente não lineares. Para estes casos (Figura 3.17 e 3.18) as amplificações são tanto menores quanto maior a parcela não linear da rigidez. As Figuras 3.22 – 3.24 ilustram o factor de amplificação do momento flector a meio vão para $k_l = 250$ kN/m^2 que, à semelhança do factor de amplificação do deslocamento a meio vão, aumenta com a velocidade da carga. Com o objectivo de proporcionar ao leitor valores numéricos que lhe permitam comparações quantitativas, construíram-se as Tabelas 3.3 – 3.5. Verifica-se nestas tabelas que o momento flector na secção de meio vão é, tal como anteriormente, sempre inferior ao momento de cedência do carril UIC60 com aço de classe R350 (EN13674-2 Railway applications, 2010), cuja tensão de cedência é de $f_y = 1175$ MPa.

Tabela 3.3: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -83.4$ kN, $v = 100$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.16 e 3.22).

k_{nl} (kN/m^4)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
2.5×10^3	-0.0517	-0.0590	1.141	64.8	74.8	1.153
2.5×10^4	-0.0471	-0.0518	1.099	61.7	68.5	1.127
2.5×10^5	-0.0338	-0.0379	1.121	52.3	60.3	1.154

Tabela 3.4: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -83.4$ kN, $v = 150$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.17 e 3.23).

k_{nl} (kN/m^4)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
2.5×10^3	-0.0517	-0.0800	1.547	64.8	107.0	1.651
2.5×10^4	-0.0471	-0.0624	1.324	61.7	92.2	1.494
2.5×10^5	-0.0338	-0.0407	1.202	52.3	73.6	1.408

Tabela 3.5: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -83.4$ kN, $v = 200$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.18 e 3.24).

k_{nl} (kN/m^4)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
2.5×10^3	-0.0517	-0.1684	3.258	64.8	231.2	3.566
2.5×10^4	-0.0471	-0.0878	1.863	61.7	134.5	2.180
2.5×10^5	-0.0338	-0.0460	1.359	52.3	84.6	1.618

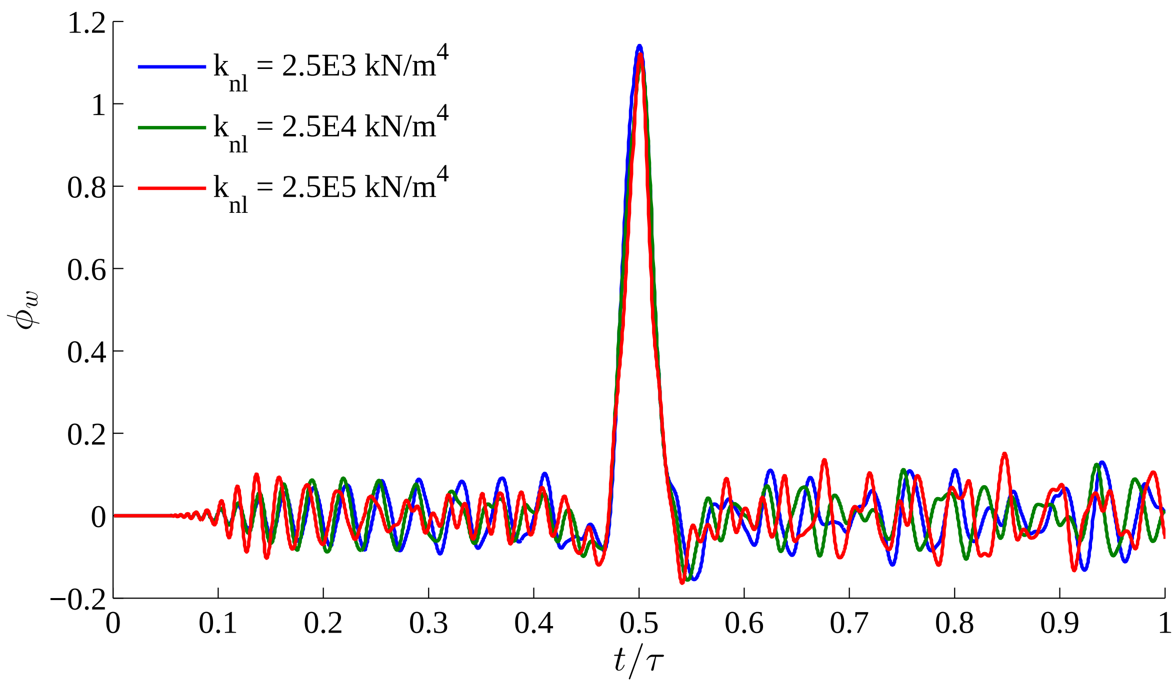


Figura 3.16: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

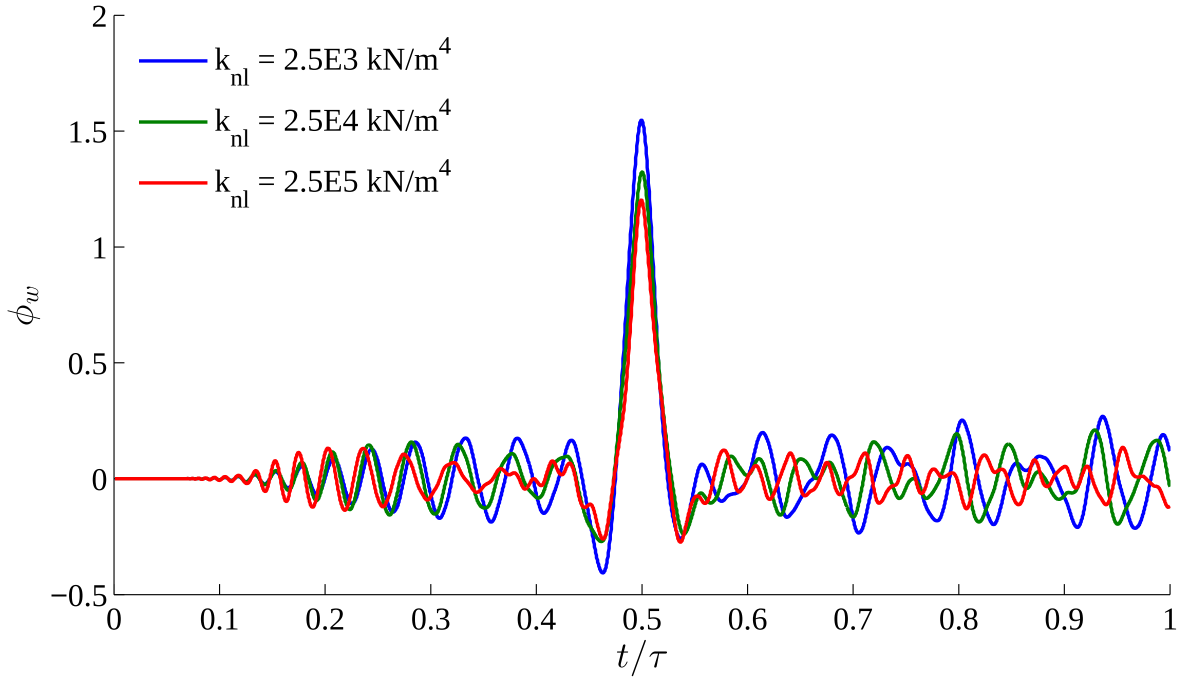


Figura 3.17: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

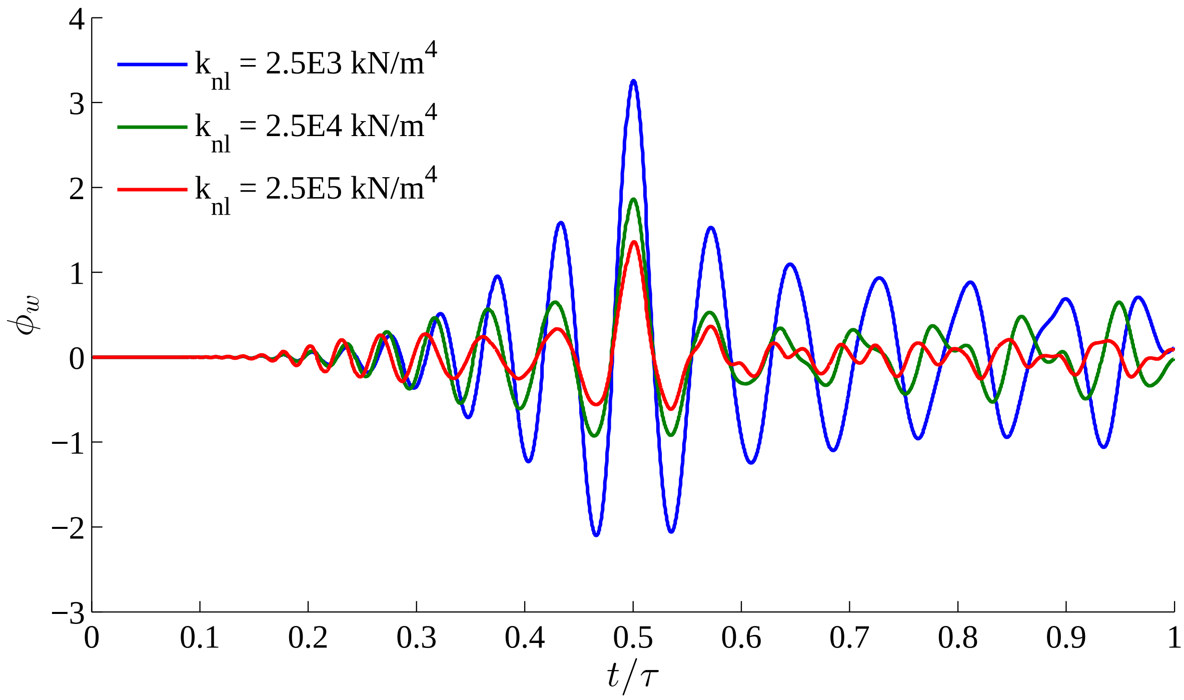


Figura 3.18: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

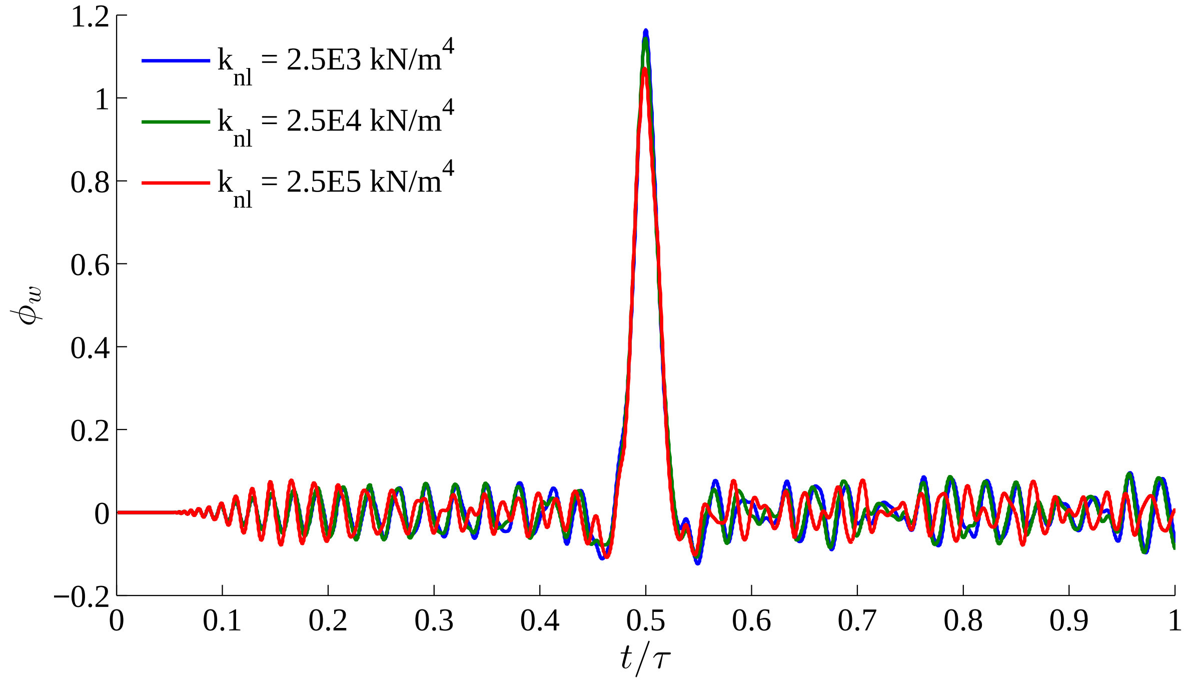


Figura 3.19: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

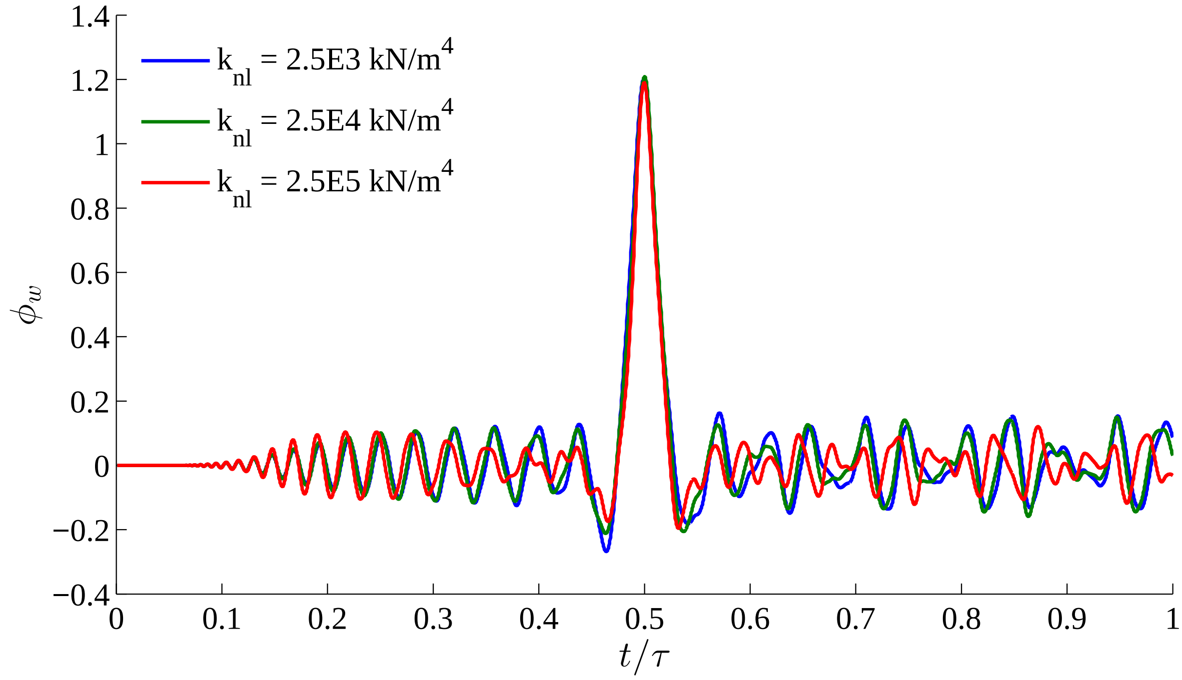


Figura 3.20: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

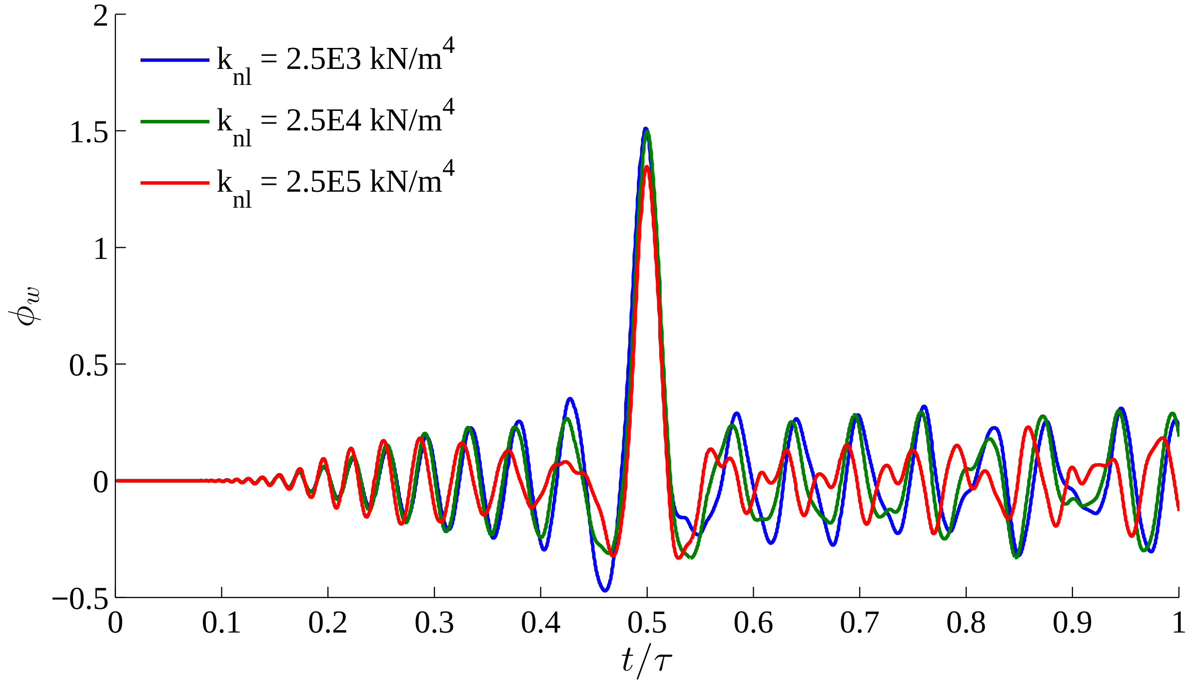


Figura 3.21: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

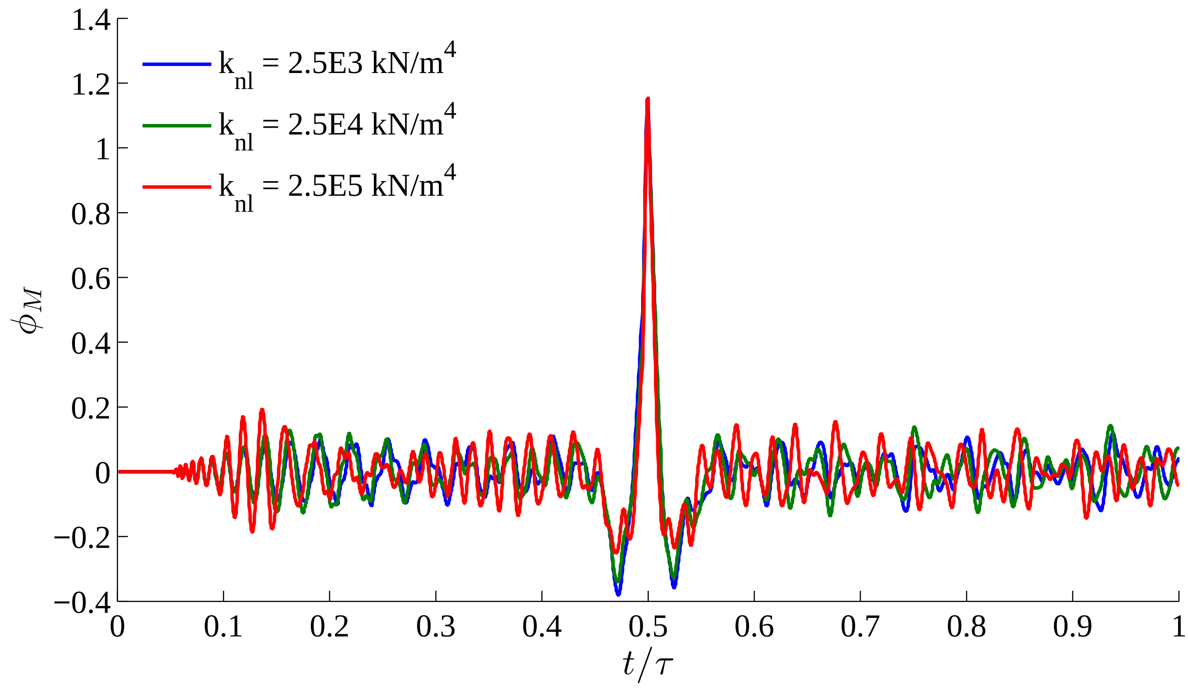


Figura 3.22: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

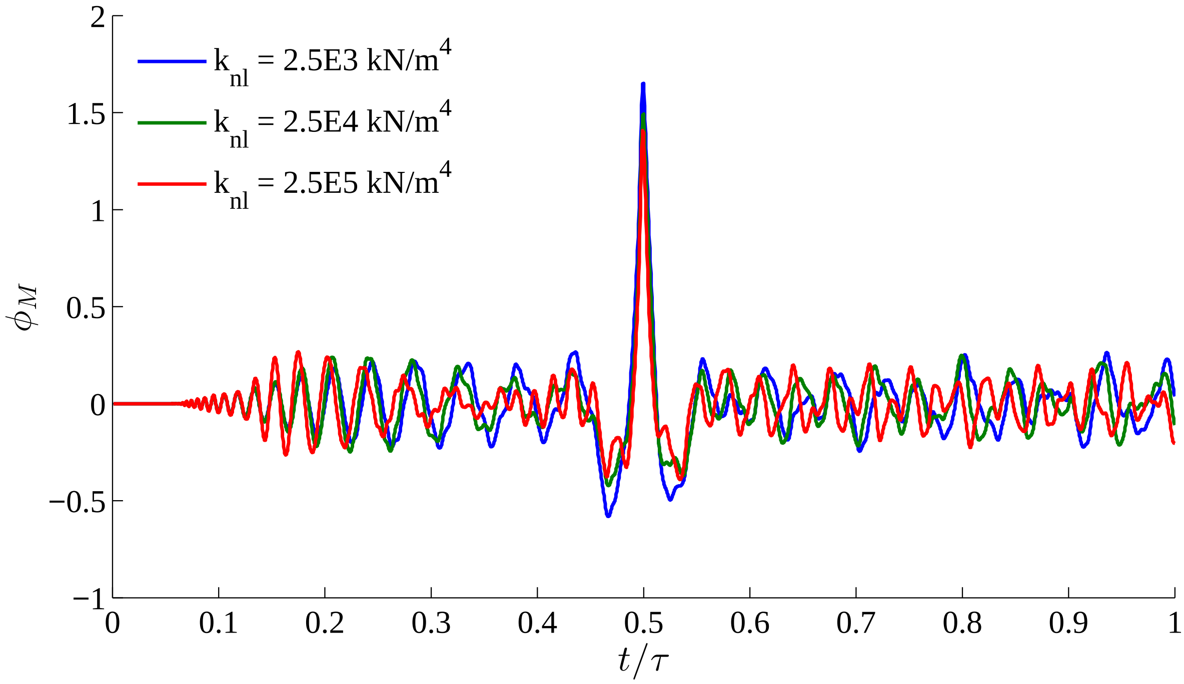


Figura 3.23: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

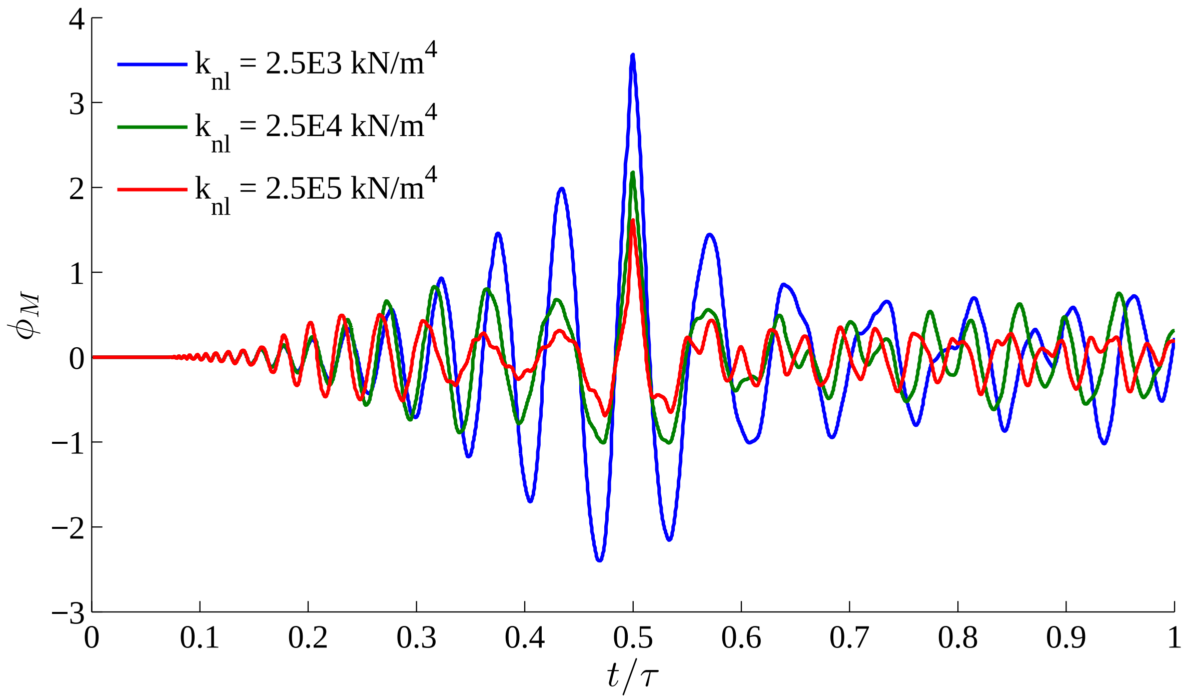


Figura 3.24: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -83.4$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

Força pontual móvel igual a -834 kN

Apresentam-se agora os resultados obtidos com uma força propositadamente exagerada de valor 10 vezes superior. Por observação das Figuras 3.25 – 3.33 e das Tabelas 3.6 – 3.8 observa-se em primeiro lugar que existe uma diminuição das amplificações com o aumento da rigidez não linear da fundação, sobretudo para as velocidades de 150 m/s e 200 m/s. Para estas, os deslocamentos absolutos são muito elevados e, tal como verificado anteriormente, encontram-se numa gama para a qual o comportamento não linear é já muito acentuado. Por comparação com o caso anterior (Tabelas 3.3 – 3.5), observa-se também que os valores absolutos de deslocamentos e momentos não são 10 vezes superiores aos anteriores e que são tão mais pequenos em termos relativos quanto maior o valor da rigidez não linear. Verifica-se ainda que para a velocidade de 100 m/s (metade da velocidade crítica para $F = -83.4$ kN), o efeito da não linearidade é quase imperceptível nas amplificações de deslocamentos e momentos flectores, quer quando se faz variar k_{nl} quer em comparação com os valores análogos obtidos para $F = -83.4$ kN. De referir por último que para esta força propositadamente elevada o momento de cedência do carril seria sempre ultrapassado.

Tabela 3.6: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -834$ kN, $v = 100$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.25 e 3.31).

k_{nl} (kN/m^4)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
2.5×10^3	-0.3384	-0.3795	1.121	523.1	603.4	1.154
2.5×10^4	-0.1966	-0.2015	1.025	407.9	478.2	1.172
2.5×10^5	-0.1041	-0.1054	1.012	311.4	331.1	1.063

Tabela 3.7: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -834$ kN, $v = 150$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.26 e 3.32).

k_{nl} (kN/m^4)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
2.5×10^3	-0.3384	-0.4069	1.202	523.1	736.3	1.408
2.5×10^4	-0.1966	-0.2066	1.051	407.9	489.8	1.201
2.5×10^5	-0.1041	-0.1043	1.001	311.4	372.4	1.196

Tabela 3.8: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação nos deslocamentos e momentos flectores máximos para $F = -834$ kN, $v = 200$ m/s e $k_l = 250$ kN/m^2 (esta tabela apoia a interpretação das Figuras 3.27 e 3.33).

k_{nl} (kN/m^4)	$w^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	$w^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (m)	ϕ_w	$M^{est}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	$M^{din}_{1/2\text{ vão}}$ (kNm)	ϕ_M
2.5×10^3	-0.3384	-0.4600	1.359	523.1	846.3	1.618
2.5×10^4	-0.1966	-0.2427	1.235	407.9	631.0	1.547
2.5×10^5	-0.1041	-0.1169	1.123	311.4	410.5	1.318

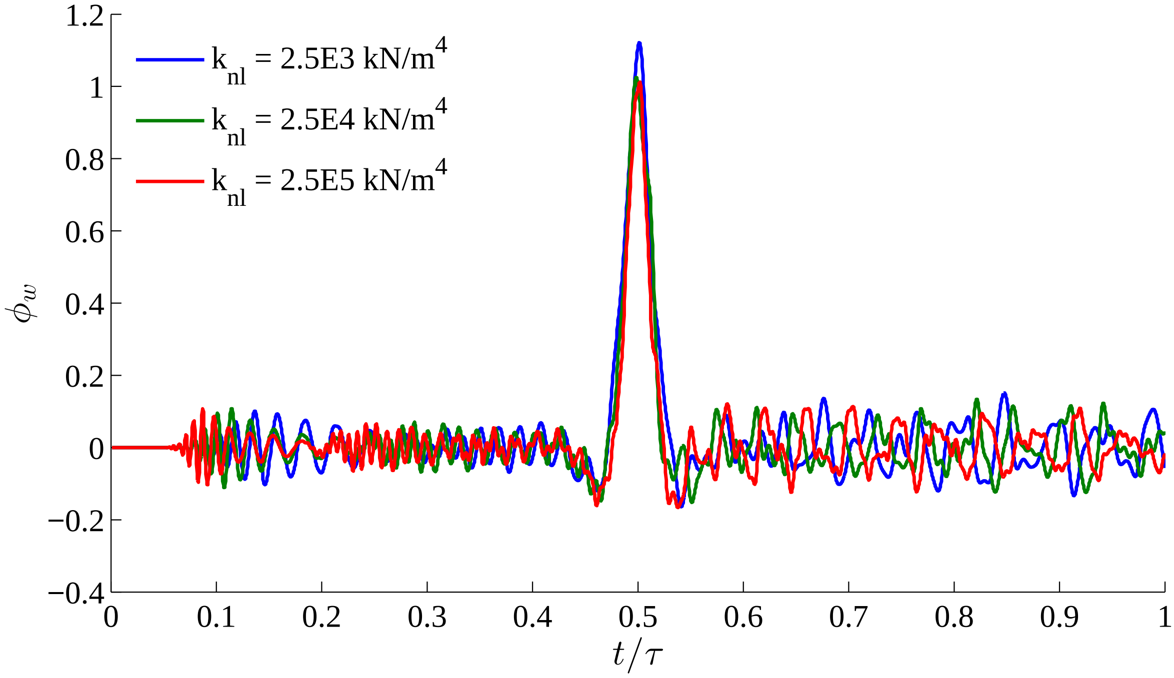


Figura 3.25: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

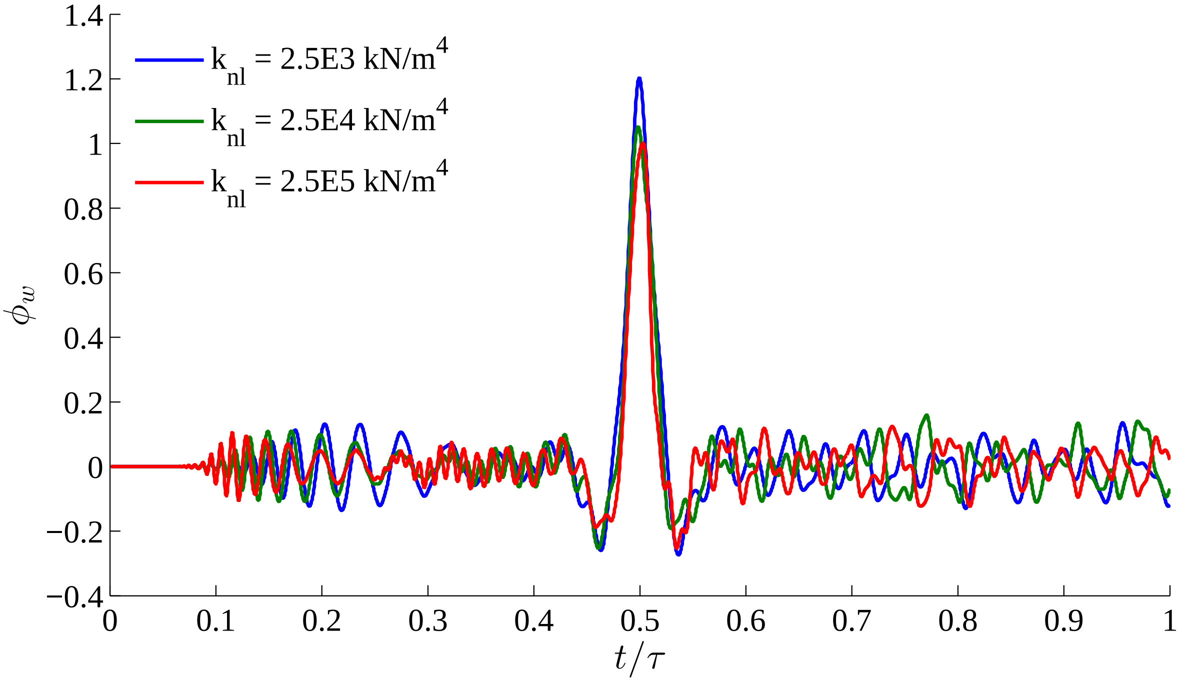


Figura 3.26: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

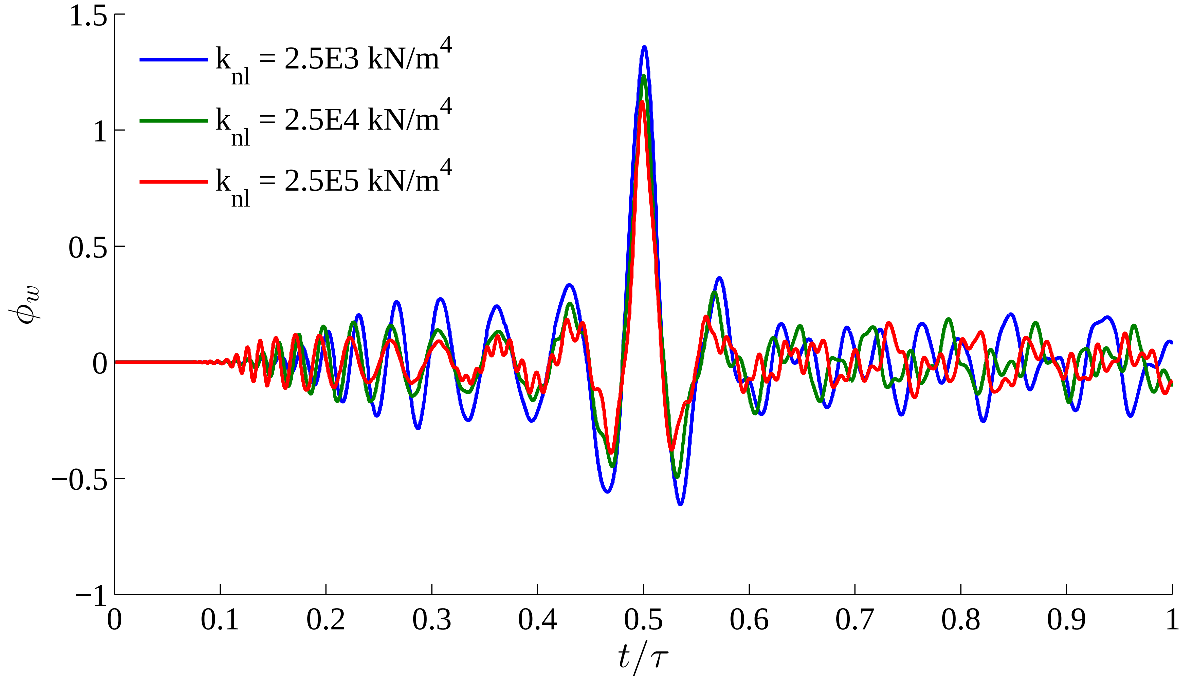


Figura 3.27: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

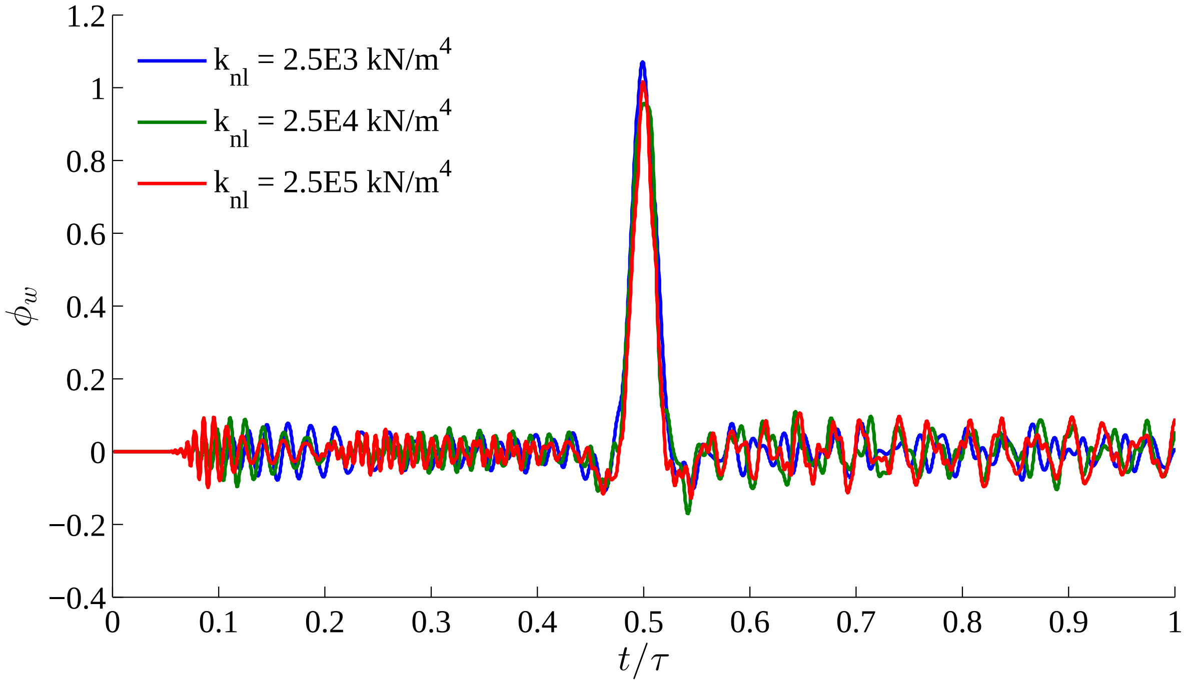


Figura 3.28: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

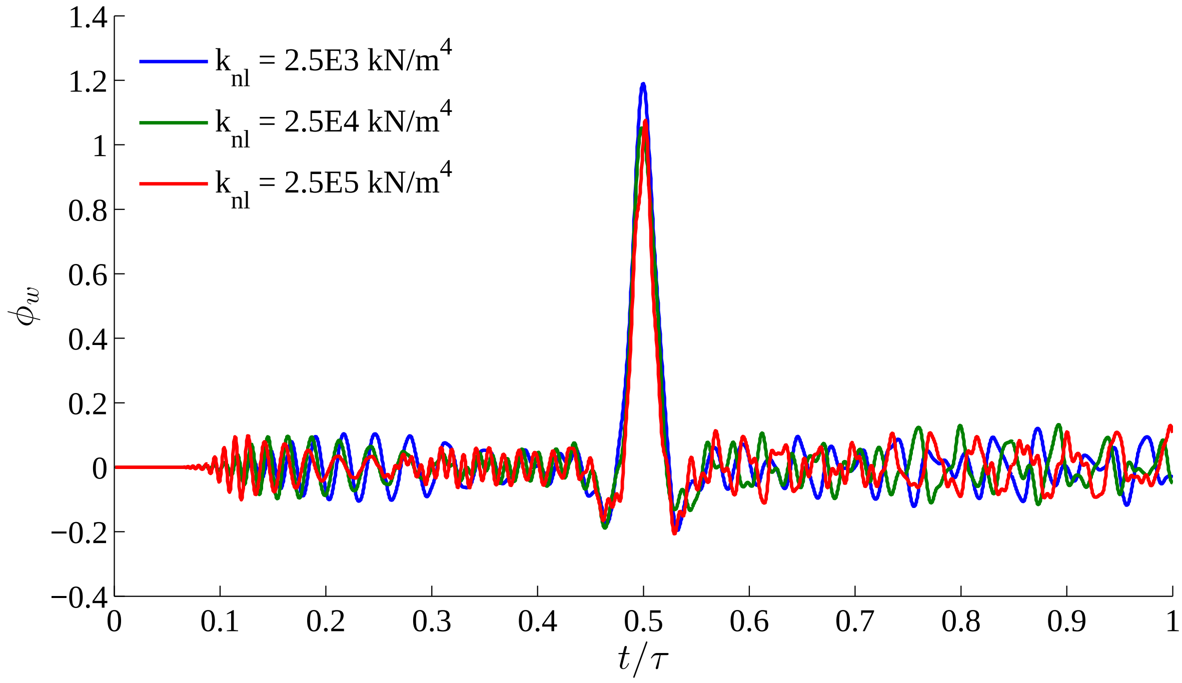


Figura 3.29: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

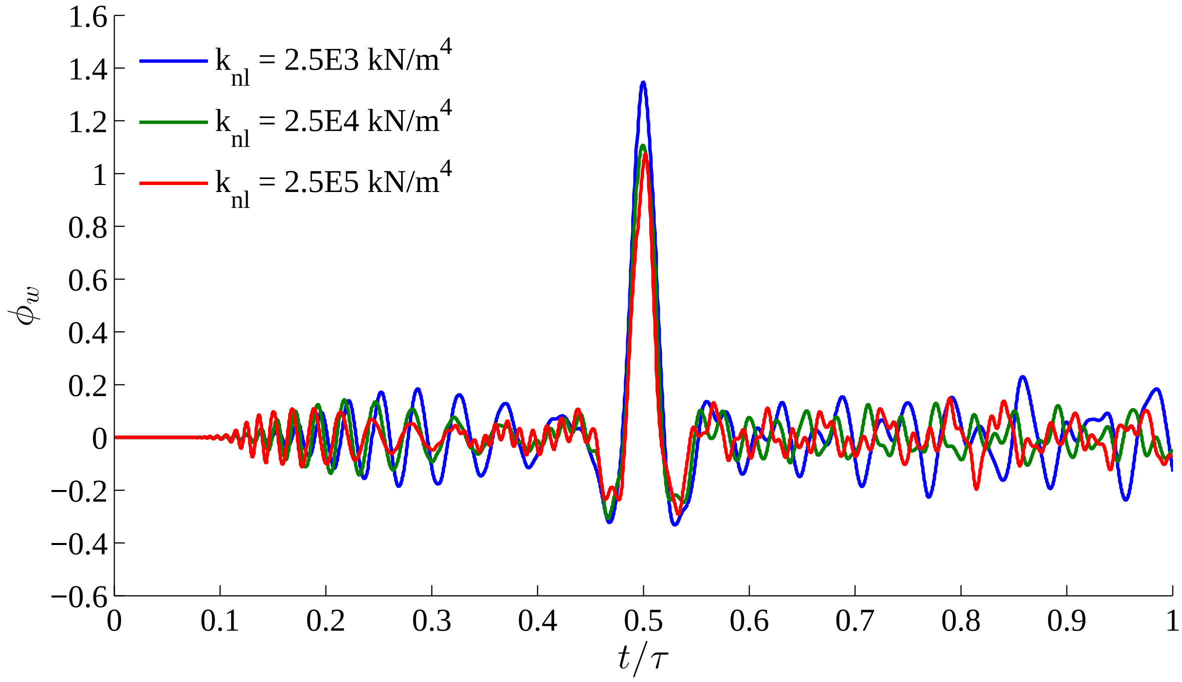


Figura 3.30: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do deslocamento a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 500$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

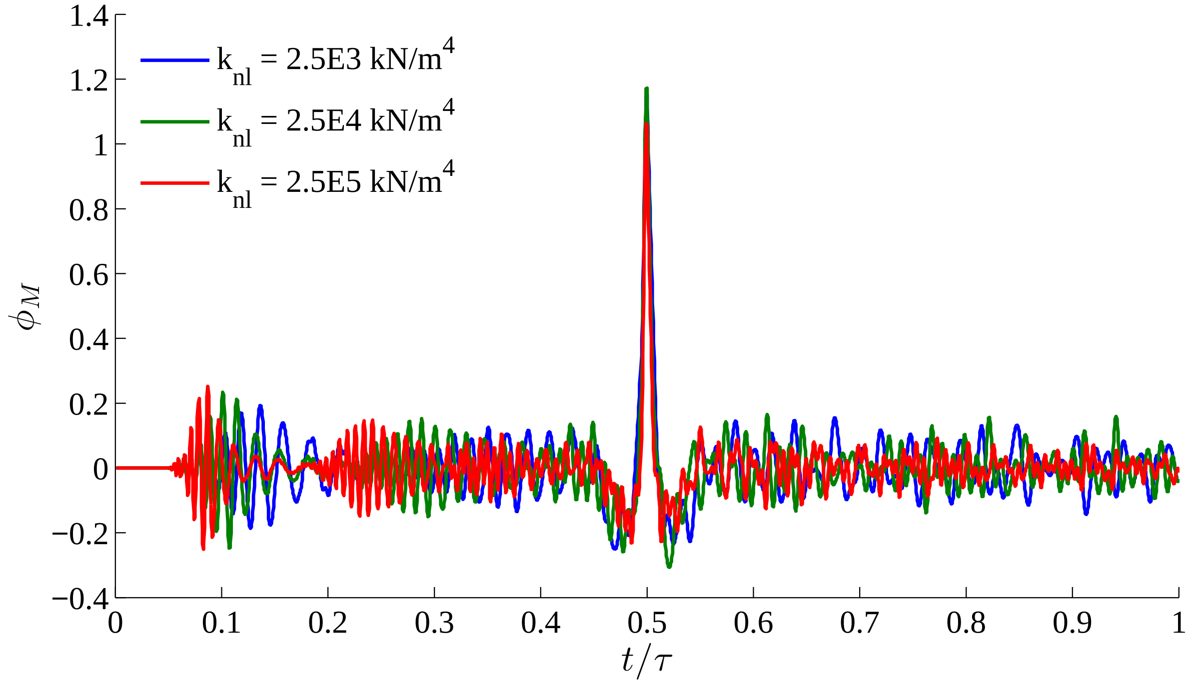


Figura 3.31: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 100$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

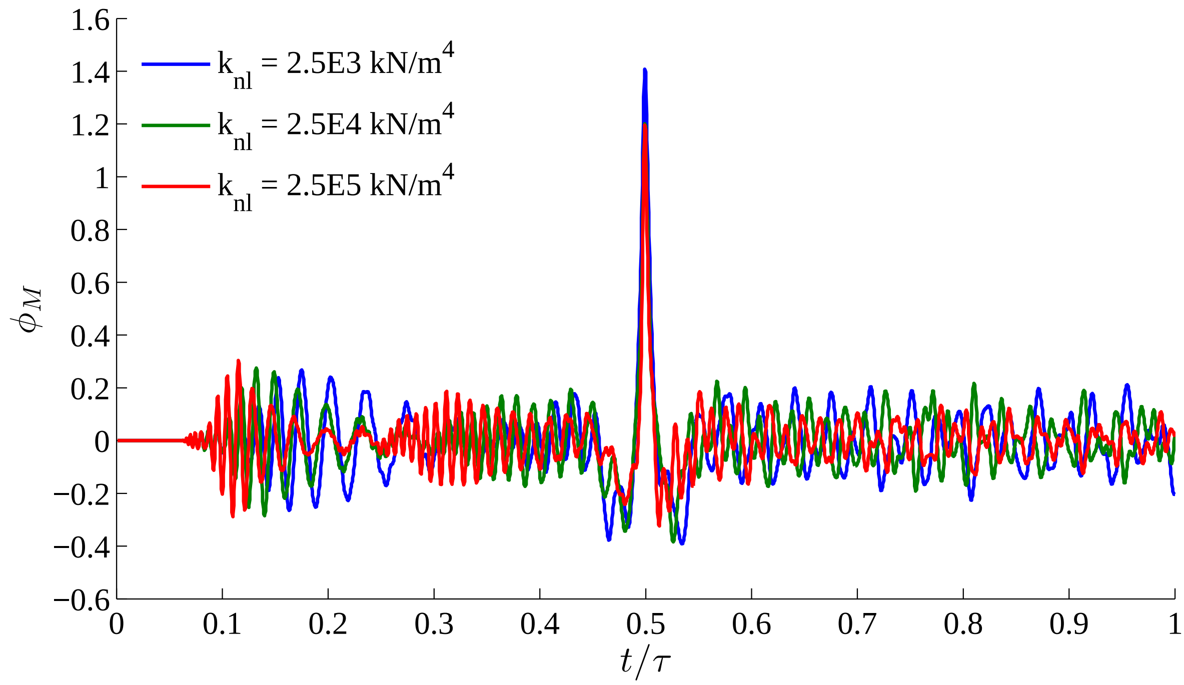


Figura 3.32: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 150$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

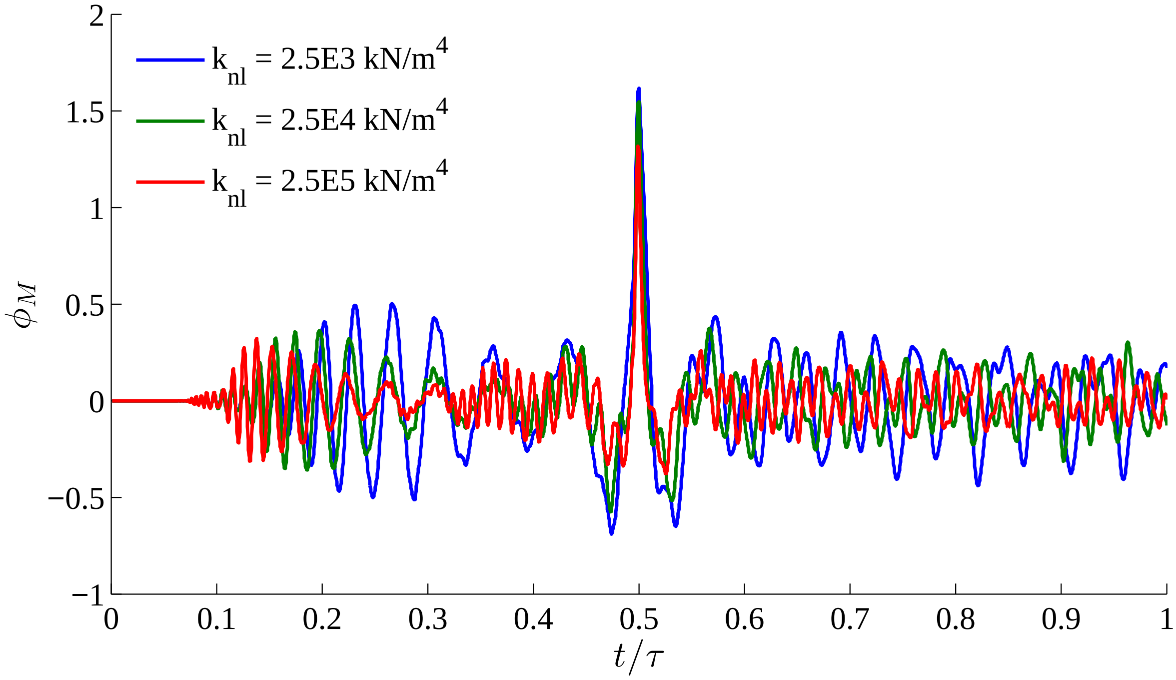


Figura 3.33: Efeito da parcela não linear da rigidez da fundação na amplificação do momento flector a meio vão para $F = -834$ kN, $v = 200$ m/s, $k_l = 250$ kN/m^2 e $\zeta = 0\%$.

Capítulo 4

Viga sobre fundação elástica bilinear

Neste capítulo simula-se a resposta de uma viga sobre fundação elástica com comportamento bilinear (diferente à tracção e à compressão). Esquematiza-se de seguida o modelo de elementos finitos programado e posteriormente discute-se os resultados das análises feitas com este modelo.

4.1 Teoria e formulação do problema

Deduz-se de seguida a matriz de rigidez elementar e o vector das forças internas de um elemento finito de viga (2 graus de liberdade por nó: deslocamento transversal e rotação) em presença de uma fundação elástica com comportamento bilinear (Figura 4.1). Distinguem-se as seis situações principais de contacto da viga com o solo de fundação, representadas na Figura 4.2:

(a) levantamento do lado esquerdo;

(b) levantamento do lado direito;

(c) levantamento dos dois lados;

(d) levantamento do meio;

(e) levantamento total;

(f) sem levantamento.

Nesta figura, k_{f+} corresponde à rigidez à tracção da fundação (para um movimento ascendente) e k_{f-} à rigidez à compressão (para um movimento descendente). Opta-se por não considerar o padrão para o qual existem 3 raízes quando os deslocamentos transversais q_1 e q_3 têm sinais opostos porque se assume um refinamento da malha de elementos finitos da viga suficiente para impedir a ocorrência desta situação (nos testes numéricos realizados verificou-se que um refinamento suficiente garante a não ocorrência deste padrão).

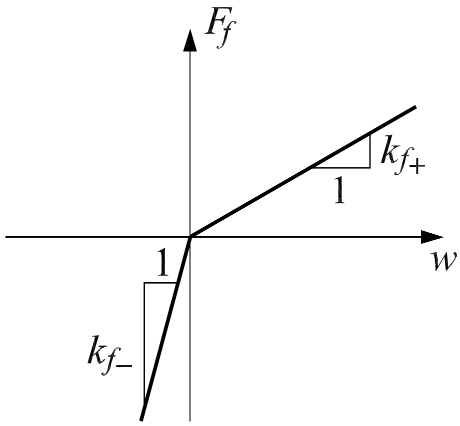
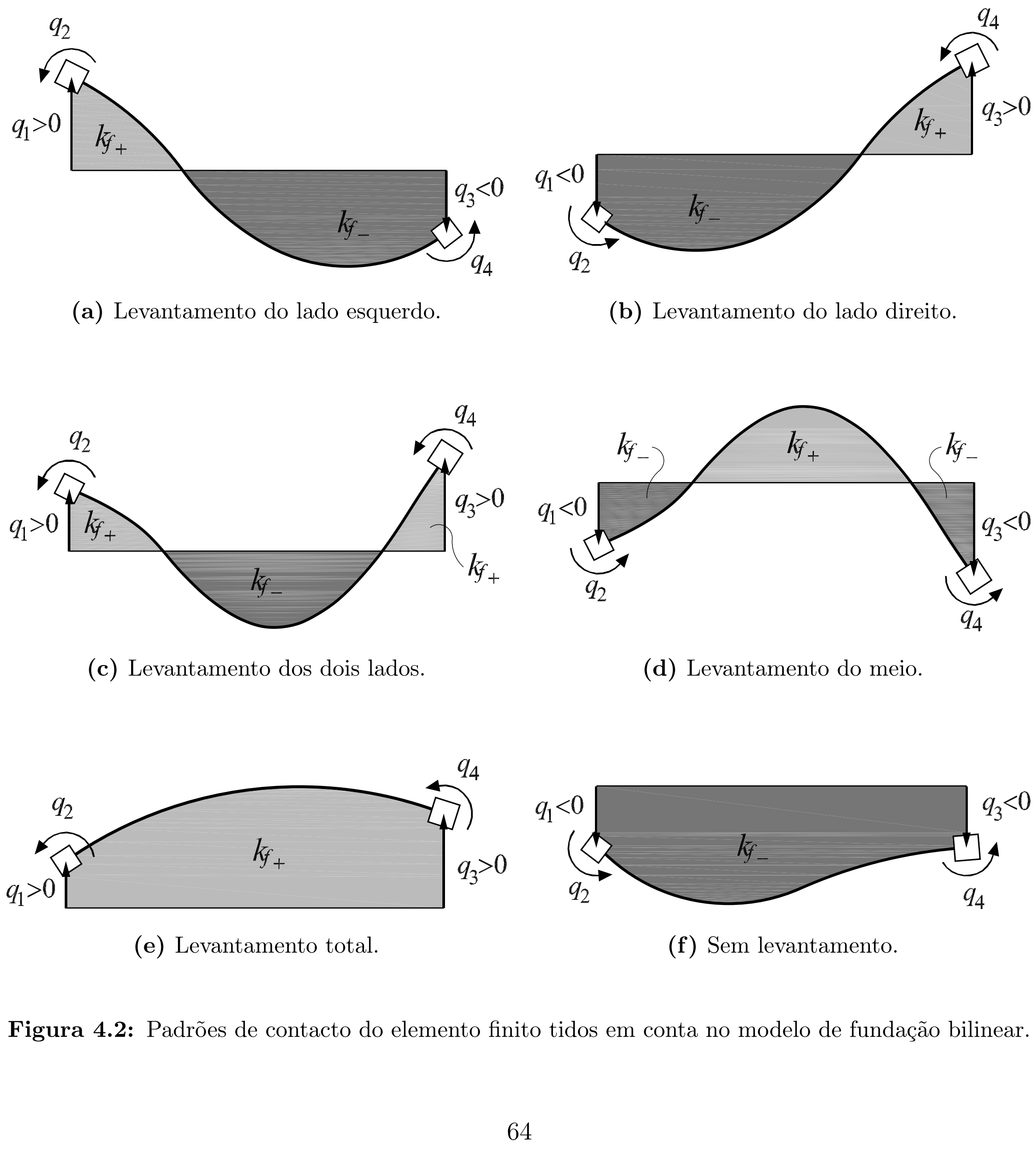


Figura 4.1: Representação gráfica da relação constitutiva de uma fundação bilinear. Rigidez para movimentos ascendentes: k_{f+}. Rigidez para movimentos descendentes: k_{f-}.



(a) Levantamento do lado esquerdo.

(b) Levantamento do lado direito.

(c) Levantamento dos dois lados.

(d) Levantamento do meio.

(e) Levantamento total.

(f) Sem levantamento.

Figura 4.2: Padrões de contacto do elemento finito tidos em conta no modelo de fundação bilinear.

4.1.1 Levantamento do lado esquerdo

Começa-se por considerar o caso em que o elemento de viga de comprimento l levanta num troço de comprimento s encostado ao nó esquerdo e baixa no troço de comprimento $l - s$ na restante parte (do lado direito), conforme ilustrado na Figura 4.3. A secção transversal da viga que está na transição entre a zona do elemento que levanta e a que baixa está na abcissa s, que depende do vector das coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$: $s = s(\mathbf{q})$. Tendo isto em conta, a energia potencial elástica da fundação é dada por

$$U_f = \frac{1}{2}\int_0^{s(\mathbf{q}^e)} w(x)^T\, k_{f+}\, w(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{s(\mathbf{q}^e)}^{l} w(x)^T\, k_{f-}\, w(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

Desenvolvendo a expressão anterior mediante o uso de 2.3, chega-se a

$$\begin{aligned} U_f = &\frac{1}{2}k_{f+}\ \mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\ &+\ \frac{1}{2}k_{f-}\ \mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_{s(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e. \end{aligned} \tag{4.2}$$

O vector das forças internas da fundação $\mathbf{p}^e$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_f}{\partial \mathbf{q}^e} = &\ k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\ &+\ k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_{s(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\ &+\ \frac{1}{2}(k_{f+} - k_{f-})\left(\mathbf{A}(s(\mathbf{q}^e))\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T. \end{aligned} \tag{4.3}$$

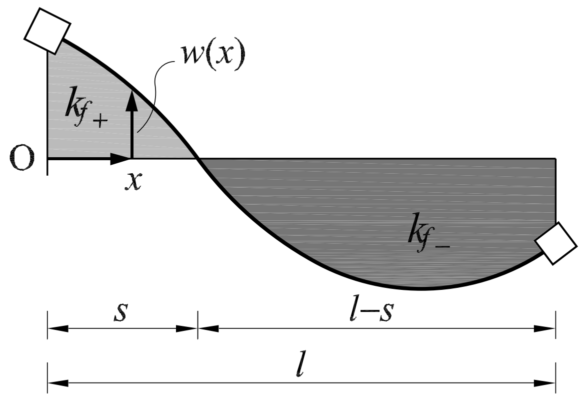


Figura 4.3: Elemento de viga com levantamento do lado esquerdo.

Por sua vez, a matriz de rigidez tangente da fundação $\mathbf{K}_f^e$ para um elemento finito é dada por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_f}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e} &= k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1} \\
&+ k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_{s(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1} \\
&+ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left[\mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T\left(s(\mathbf{q}^e)\right)\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right] \\
&+ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left[\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\mathbf{A}\left(s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\right] \\
&+ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}'\left(s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left(\mathbf{A}\left(s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right) \\
&+ \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\frac{\partial^2 s}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

em que as expressões $\partial s/\partial \mathbf{q}^e$ e $\partial^2 s/\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e$ se deduzem abaixo. Nas derivações anteriores usa-se a regra de derivação de um integral em que os limites de integração também dependem da variável de integração:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x + f(\phi_2(\alpha),\alpha)\frac{\partial \phi_2(\alpha)}{\partial \alpha} \\
- f(\phi_1(\alpha),\alpha)\frac{\partial \phi_1(\alpha)}{\partial \alpha}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Nas expressões (4.3) e (4.4), a grandeza $\partial s/\partial \mathbf{q}^e$ é obtida por diferenciação da condição de anulamento da flecha em $x = s(\mathbf{q}^e)$

$$
\mathbf{A}(s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e = 0 \tag{4.6}
$$

e é dada por

$$
\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e} = -\frac{\mathbf{A}(s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}}{\mathbf{A}'(s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e}, \tag{4.7}
$$

em que $\mathbf{A}'$ é a primeira derivada em ordem a x do vector $\mathbf{A}(x)$. Derivando a expressão (4.7), obtém-se

$$
\frac{\partial^2 s}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e} = \frac{f(\mathbf{q}^e)}{g(\mathbf{q}^e)}, \tag{4.8}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{q}^e) &= \mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(s(\mathbf{q}^e))\left[\left(\mathbf{A}''(s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e} + \mathbf{A}'(s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\right] \\
&\quad - \left(\mathbf{A}'(s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\mathbf{D}^{-T}\,\mathbf{A}'^T\left(s(\mathbf{q}^e)\right)\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}, \\
g(\mathbf{q}^e) &= \left[\mathbf{A}'(s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right]^2,
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{A}''$ designa a segunda derivada em ordem a x do vector $\mathbf{A}(x)$. Para determinar s, basta resolver a equação cúbica (4.6), que se escreve explicitamente na forma

$$a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + a_4 s^3 = 0, \tag{4.9}$$

em que

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1, \\ a_2 &= q_2, \\ a_3 &= -\frac{3\,q_1}{l^2} - \frac{2\,q_2}{l} + \frac{3\,q_3}{l^2} - \frac{q_4}{l}, \\ a_4 &= \frac{2\,q_1}{l^3} + \frac{q_2}{l^2} - \frac{2\,q_3}{l^3} + \frac{q_4}{l^2}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Das raízes deste polinómio, interessa apenas reter a que seja real positiva e menor que o comprimento do elemento finito l.

4.1.2 Levantamento do lado direito

O caso que se considera de seguida é o de um elemento de viga em que a parte esquerda correspondente a $x \in [0, l - s(\mathbf{q})]$ baixa em relação ao perfil da fundação indeformada e a parte restante mais perto do nó direito levanta em relação a esse perfil, tal como indicado na Figura 4.4. Tem-se agora que

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2}\int_0^{l-s(\mathbf{q}^e)} w(x)^T\, k_{f-}\, w(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{l-s(\mathbf{q}^e)}^{l} w(x)^T\, k_{f+}\, w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}k_{f-}\,\mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_0^{l-s(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\ &+\ \frac{1}{2}k_{f+}\,\mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e, \end{aligned} \tag{4.11}$$

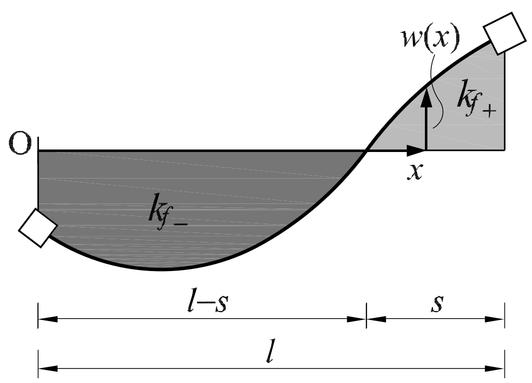


Figura 4.4: Elemento de viga com levantamento do lado direito.

sendo que o vector das forças internas da fundação e matriz de rigidez tangente da fundação são dados, respectivamente, por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_f}{\partial \mathbf{q}^e} &= k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_0^{l-s(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+\ k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+\ \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_f}{\partial \mathbf{q}^e\partial \mathbf{q}^e} &= k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_0^{l-s(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1} \\
&+\ k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1} \\
&+\ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left[\mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(l-s(\mathbf{q}^e))\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right] \\
&+\ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left[\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\mathbf{A}\left(l-s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\right] \\
&+\ (k_{f-}-k_{f+})\left(\mathbf{A}'\left(l-s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left(\mathbf{A}\left(l-s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}\right) \\
&+\ \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\frac{\partial^2 s}{\partial \mathbf{q}^e\partial \mathbf{q}^e}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Usa-se uma vez mais a regra de derivação (4.5) na dedução destas expressões. A primeira derivada de s em ordem a $\mathbf{q}$ é obtida da diferenciação de

$$\mathbf{A}(l-s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e = 0$$

que resulta em

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e} = \frac{\mathbf{A}(l-s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}}{\mathbf{A}'(l-s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e}. \tag{4.14}$$

Derivando a expressão (4.14), obtém-se

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \mathbf{q}^e\partial \mathbf{q}^e} = \frac{f(\mathbf{q}^e)}{g(\mathbf{q}^e)}, \tag{4.15}$$

em que

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{q}^e) &= \mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(l-s(\mathbf{q}^e))\left[\left(\mathbf{A}''(l-s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e}-\mathbf{A}'(l-s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\right] \\
&\quad -\ \left(\mathbf{A}'(l-s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\mathbf{D}^{-T}\ \mathbf{A}'^{\,T}(l-s(\mathbf{q}^e))\frac{\partial s}{\partial \mathbf{q}^e} \\
g(\mathbf{q}^e) &= \left[\mathbf{A}'(l-s(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right]^2.
\end{aligned}
$$

Para determinar $l - s$, resolve-se a equação cúbica

$$a_1 + a_2(l - s) + a_3(l - s)^2 + a_4(l - s)^3 = 0, \tag{4.16}$$

cujos coeficientes são dados por (4.10). Das raízes s deste polinómio, retém-se a que seja real positiva e menor que o comprimento do elemento finito l.

4.1.3 Levantamento dos dois lados

O padrão de contacto que se descreve agora é caracterizado pela existência de duas raízes, s_1 e s_2, em que ocorre levantamento da viga junto às extremidades do elemento, como ilustrado na Figura 4.5. A energia potencial da fundação é dada por

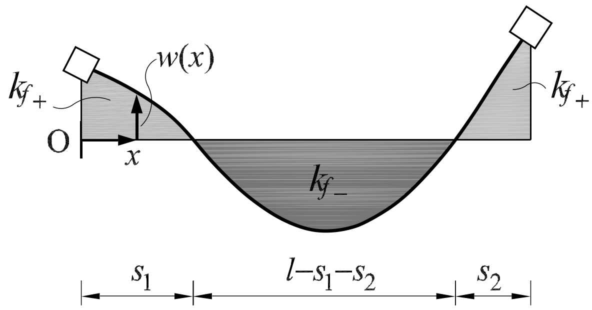


Figura 4.5: Elemento de viga com levantamento dos dois lados.

$$\begin{aligned}
U_f &= \frac{1}{2}\int_0^{s_1(\mathbf{q}^e)} w(x)^T\, k_{f+}\, w(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{s_1(\mathbf{q}^e)}^{l-s_2(\mathbf{q}^e)} w(x)^T\, k_{f-}\, w(x)\,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_{l-s_2(\mathbf{q}^e)}^{l} w(x)^T\, k_{f+}\, w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}k_{f+}\; \mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s_1(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+ \frac{1}{2}k_{f-}\; \mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_{s_1(\mathbf{q}^e)}^{l-s_2(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+ \frac{1}{2}k_{f+}\; \mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s_2(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

O vector das forças internas da fundação e a matriz de rigidez tangente da fundação são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_f}{\partial \mathbf{q}^e} &= k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s_1(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+ k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_{s_1(\mathbf{q}^e)}^{l-s_2(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+ k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s_2(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\ \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}(s_1(\mathbf{q}^e))\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\left(\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\\
&+\ \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\left(\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_f}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e} = {}& k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s_1(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\\
&+\ k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_{s_1(\mathbf{q}^e)}^{l-s_2(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\\
&+\ k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s_2(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathbf{D}^{-1}\\
&+\ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left[\mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(s_1(\mathbf{q}^e))\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right]\\
&+\ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left[\left(\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\mathbf{A}\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\right]\\
&+\ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left[\mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(l-s_2(\mathbf{q}^e))\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right]\\
&+\ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left[\left(\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\mathbf{A}\left(l-s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\right]\\
&+\ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}'\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left(\mathbf{A}(s_1(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\left(\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right)\\
&-\ (k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}'\left(l-s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left(\mathbf{A}\left(l-s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T\left(\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right)\\
&+\ \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}(s_1(\mathbf{q}^e))\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\frac{\partial^2 s_1}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e}\\
&+\ \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\frac{\partial^2 s_2}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e},
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

usando-se também aqui a regra de derivação 4.5 já mencionada para os casos anteriores. As grandezas $\partial s_1/\partial \mathbf{q}^e$ e $\partial^2 s_1/\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e$ são determinadas, respectivamente, pelas expressões (4.7) e (4.8), substituindo s por s_1. Já as grandezas $\partial s_2/\partial \mathbf{q}^e$ e $\partial^2 s_2/\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e$ são determinadas, respectivamente pelas expressões (4.14) e (4.15), substituindo $l-s$ por $l-s_2$. As quantidades s_1 e $l-s_2$ são, respectivamente, a menor e a maior raízes positivas inferiores a l do polinómio (4.9).

4.1.4 Levantamento do meio

Apresenta-se de seguida a situação caracterizada pela existência de 2 raízes, s_1 e s_2, em que ocorre levantamento da viga no meio, como ilustrado na Figura 4.6. Tem-se agora que a energia

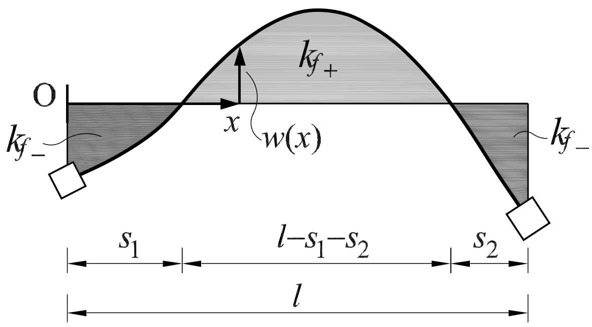


Figura 4.6: Elemento de viga com levantamento do meio.

potencial da fundação é

$$
\begin{aligned}
U_f &= \frac{1}{2}\int_0^{s_1(\mathbf{q}^e)} w(x)^T\, k_{f-}\, w(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{s_1(\mathbf{q}^e)}^{l-s_2(\mathbf{q}^e)} w(x)^T\, k_{f+}\, w(x)\,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_{l-s_2(\mathbf{q}^e)}^{l} w(x)^T\, k_{f-}\, w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}k_{f-}\; \mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s_1(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+ \frac{1}{2}k_{f+}\; \mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_{s_1(\mathbf{q}^e)}^{l-s_2(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+ \frac{1}{2}k_{f-}\; \mathbf{q}^{e\,T}\,\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s_2(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

O vector das forças internas da fundação e matriz de rigidez tangente da fundação são dados, respectivamente, por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_f}{\partial \mathbf{q}^e} &= k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s_1(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+ k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_{s_1(\mathbf{q}^e)}^{l-s_2(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&+ k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s_2(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e \\
&- \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}(s_1(\mathbf{q}^e))\,\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\left(\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T \\
&- \frac{1}{2}(k_{f+}-k_{f-})\left(\mathbf{A}\left(l-s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2\left(\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_f}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e} &= k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_0^{s_1(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1} \\
&+ k_{f+}\mathbf{D}^{-T}\int_{s_1(\mathbf{q}^e)}^{l-s_2(\mathbf{q}^e)} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1} \\
&+ k_{f-}\mathbf{D}^{-T}\int_{l-s_2(\mathbf{q}^e)}^{l} \mathbf{A}^T(x)\mathbf{A}(x)\,\mathrm{d}x\;\mathbf{D}^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (k_{f+} - k_{f-}) \left(\mathbf{A}\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \left[\mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(s_1(\mathbf{q}^e))\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right] \\
&- (k_{f+} - k_{f-}) \left(\mathbf{A}\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \left[\left(\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T \mathbf{A}\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\right] \\
&- (k_{f+} - k_{f-}) \left(\mathbf{A}\left(l - s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \left[\mathbf{D}^{-T}\mathbf{A}^T(l - s_2(\mathbf{q}^e))\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right] \\
&- (k_{f+} - k_{f-}) \left(\mathbf{A}\left(l - s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \left[\left(\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T \mathbf{A}\left(l - s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\right] \\
&- (k_{f+} - k_{f-}) \left(\mathbf{A}'\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \left(\mathbf{A}\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \left(\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T \left(\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}^e}\right) \\
&+ (k_{f+} - k_{f-}) \left(\mathbf{A}'\left(l - s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \left(\mathbf{A}\left(l - s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right) \left(\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right)^T \left(\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}^e}\right) \\
&- \frac{1}{2}(k_{f+} - k_{f-}) \left(\mathbf{A}\left(s_1(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2 \frac{\partial^2 s_1}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e} \\
&- \frac{1}{2}(k_{f+} - k_{f-}) \left(\mathbf{A}\left(l - s_2(\mathbf{q}^e)\right)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q}^e\right)^2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial \mathbf{q}^e \partial \mathbf{q}^e},
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

usando-se uma vez mais a regra de derivação 4.5 já mencionada para os casos anteriores. O cálculo de s_1 e s_2 bem como das suas primeiras e segundas derivadas em ordem a $\mathbf{q}^e$ é exactamente igual ao descrito para o caso anterior (de levantamento dos lados).

4.1.5 Levantamento total

A formulação matemática do caso de levantamento total, ilustrado na Figura 4.7, é mais simples que os casos anteriores. Para obter a matriz de rigidez tangente elementar da fundação basta substituir k_f por k_{f+} na equação (2.12) do Capítulo 2 e o vector das forças internas elementar da fundação é dado por $\mathbf{K}_f^e\,\mathbf{q}^e$.

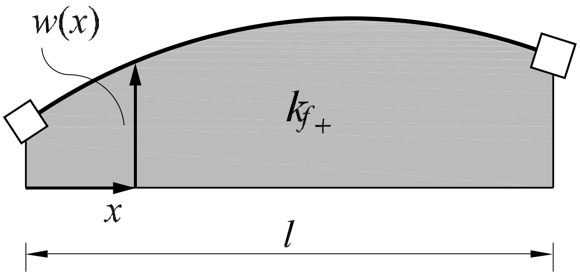


Figura 4.7: Elemento de viga com levantamento total.

4.1.6 Sem levantamento

Na Figura 4.8 ilustra-se o caso correspondente a um campo de deslocamentos descendente em todo o comprimento do elemento finito (sem levantamento). Tal como para o caso anterior, a matriz de rigidez tangente elementar da fundação é dada pela expressão (2.12) do Capítulo 2, sendo agora $k_f = k_{f-}$. O vector das forças internas elementar é dado uma vez mais por $\mathbf{K}_f^e\,\mathbf{q}^e$.

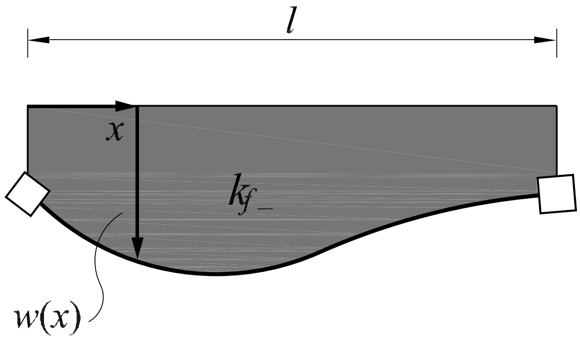


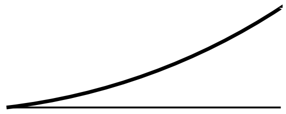
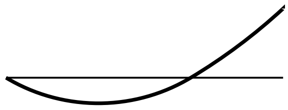
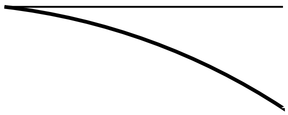
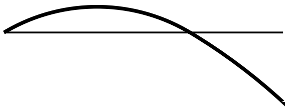
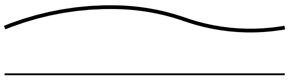
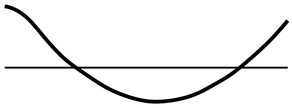
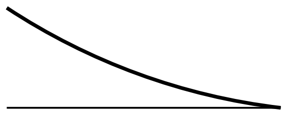
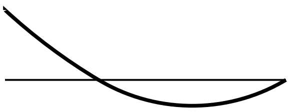
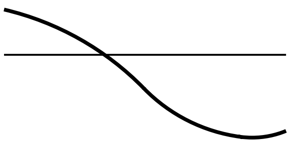
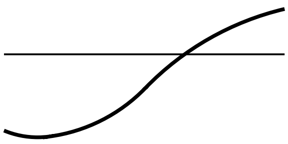
Figura 4.8: Elemento de viga sem levantamento.

4.1.7 Equações gerais do movimento

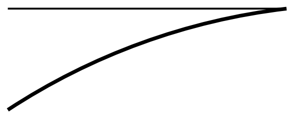
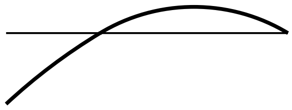
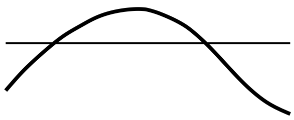
Importa antes de mais referir que para todos os casos descritos anteriormente, a dedução simbólica da matriz de rigidez tangente e do vector das forças internas da fundação foi feita uma vez mais usando o programa Mathematica (Wolfram Research, Inc., 2013) e programada posteriormente em MatLab (The MathWorks, Inc., 2013) com vista aos cálculos numéricos. Para além do vector das coordenadas generalizadas $\mathbf{q}^e$ e do comprimento do elemento finito l, a matriz de rigidez tangente e o vector das forças internas são também função das rigidezes k_{f+} e k_{f-} e da abcissa s (ou s_1 e s_2).

Uma vez definidos os vectores das forças internas e as matrizes de rigidez tangentes da fundação para os padrões de contacto descritos, a resolução do sistema global de equações que regem o movimento decorre de forma semelhante ao exposto no Capítulo 3. No algoritmo do método–α (Hilber et al., 1977), é necessário uma vez mais corrigir em cada iteração o vector das forças internas e matriz de rigidez tangente de cada elemento finito que compõe a viga, após o que se procede à reunião desses elementos para se obter o modelo global. Para este caso de estudo em que a fundação tem comportamento bilinear, a matriz de rigidez tangente e vector das forças internas tomam formas distintas consoante o padrão de contacto de cada elemento. Na Tabela 4.1 esquematiza-se a forma destas grandezas em função do sinal algébrico de q_1 e q_3 (coordenadas generalizadas correspondentes ao deslocamento transversal) e do número de raízes reais do polinómio cúbico que descreve o campo de deslocamentos $w(x)$.

Tabela 4.1: Matriz de rigidez tangente e vector das forças internas elementares para os diferentes padrões de contacto do elemento finito considerados.

q_1	q_3	n° de raízes reais	Esquema	$\mathbf{K}_f^e$	$\mathbf{p}^e$
$=0$	>0	0		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f+}^e$	$(\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f+}^e)\mathbf{q}$
		1		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{LD}^e$	$\mathbf{K}_b^e\,\mathbf{q} + \mathbf{p}_{LD}$
$=0$	<0	0		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f-}^e$	$(\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f-}^e)\mathbf{q}$
		1		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{LE}^e$	$\mathbf{K}_b^e\,\mathbf{q} + \mathbf{p}_{LE}$
>0	>0	0		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f+}^e$	$(\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f+}^e)\mathbf{q}$
		2		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{LL}^e$	$\mathbf{K}_b^e\,\mathbf{q} + \mathbf{p}_{LL}$
>0	$=0$	0		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f+}^e$	$(\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f+}^e)\mathbf{q}$
		1		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{LE}^e$	$\mathbf{K}_b^e\,\mathbf{q} + \mathbf{p}_{LE}$
>0	<0	1		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{LE}^e$	$\mathbf{K}_b^e\,\mathbf{q} + \mathbf{p}_{LE}$
<0	>0	1		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{LD}^e$	$\mathbf{K}_b^e\,\mathbf{q} + \mathbf{p}_{LD}$

Continua na próxima página

q_1	q_3	nº de raízes reais	Esquema	$\mathbf{K}_f^e$	$\mathbf{p}^e$
< 0	$= 0$	0		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f-}^e$	$(\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f-}^e)\mathbf{q}$
		1		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{LD}^e$	$\mathbf{K}_b^e\,\mathbf{q} + \mathbf{p}_{LD}$
< 0	< 0	0		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f-}^e$	$(\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{f-}^e)\mathbf{q}$
		2		$\mathbf{K}_b^e + \mathbf{K}_{LM}^e$	$\mathbf{K}_b^e\,\mathbf{q} + \mathbf{p}_{LM}$

Índices
b: da viga.
$f-$: da fundação com $k_f = k_{f-}$.
$f+$: da fundação com $k_f = k_{f+}$.
LE: da fundação para o caso em que a viga levanta à esquerda.
LD: da fundação para o caso em que a viga levanta à direita.
LL: da fundação para o caso em que a viga levanta dos lados.
LM: da fundação para o caso em que a viga levanta ao meio.

Chama-se a atenção para o facto de a presença de amortecimento acrescentar a parcela $\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$ ao vector das forças internas elementar $\mathbf{p}^e$.

4.2 Resultados e comentários

Para o caso de uma fundação com comportamento bilinear realizaram-se apenas análises para a obtenção das curvas "on" (enquanto a carga se encontra no vão da viga) de deslocamentos máximos positivos e negativos em função da velocidade. As condições das análises são idênticas às dos capítulos anteriores, usando-se o mesmo tipo de carril e o mesmo valor da carga pontual móvel (-83.4 kN). No entanto, contrariamente às análises dos capítulos anteriores, neste capítulo considerou-se também uma carga distribuída igual ao peso próprio por unidade de comprimento da viga, que se revela especialmente importante no caso em que a fundação não tem rigidez à tracção – a consideração do peso próprio promove o contacto com a fundação. Mantém-se o comprimento da viga em 200 m, a malha de 200 elementos finitos e o passo de tempo correspondente a um avanço no espaço de 0.2 m. Estuda-se apenas o caso de um sub-domínio.

A sequência de Figuras 4.9 – 4.16 mostra os deslocamentos máximos positivos e negativos em função da velocidade de carga numa situação de ausência de amortecimento; da Figura 4.9 para a 4.16 a rigidez k_{f+} (para movimentos ascendentes) diminui de 250 kN/m^2 até zero, com $k_{f-} = 250$ kN/m^2 em todos os casos. A Figura 4.9 coincide com a curva "on" da Figura 2.9 do caso linear tratado no Capítulo 2. Verifica-se que a diminuição da rigidez k_{f+} implica um aumento dos deslocamentos máximos positivos (ascendentes), uma diminuição da velocidade crítica e uma maior irregularidade das curvas. Para a rigidez k_{f+} nula (fundação não resistente à tracção), os deslocamentos positivos são mesmo exageradamente elevados e ultrapassam o domínio de validade da hipótese dos pequenos deslocamentos. Por sua vez, os deslocamentos negativos mantém-se praticamente constantes, o que está de acordo com o facto de se manter constante a rigidez de compressão da fundação.

As Figuras 4.17 – 4.21 ilustram o efeito do amortecimento que, como seria de esperar, provoca uma redução generalizada dos deslocamentos. Importa referir que o valor de k_f usado na expressão do amortecimento (2.23) apresentada no Capítulo 2 é o correspondente ao da rigidez de compressão da fundação. Ainda que esta expressão já não seja adequada para uma fundação com comportamento bilinear, o seu uso aqui serve apenas para ilustrar o efeito da introdução de amortecimento neste caso de estudo.

Apresenta-se por último o efeito do aumento da rigidez de compressão, para valores com maior correspondência com a realidade nas Figuras 4.22 e 4.23. Estas figuras dizem respeito a casos de perda de contacto da viga com o solo nas zonas com levantamento, ou seja, $k_{f+} = 0$ kN/m^2. Nota-se aqui que o aumento de k_{f+} face à rigidez anteriormente usada de 250 kN/m^2 provoca uma redução significativa dos deslocamentos da viga para velocidades sub-críticas e que a velocidade crítica aumenta, situação já verificada para o caso de fundação com comportamento elástico linear. Tal como antes, observa-se também aqui que os deslocamentos ascendentes para velocidades superiores à crítica são exageradamente elevados e sem validade no domínio da hipótese dos pequenos deslocamentos.

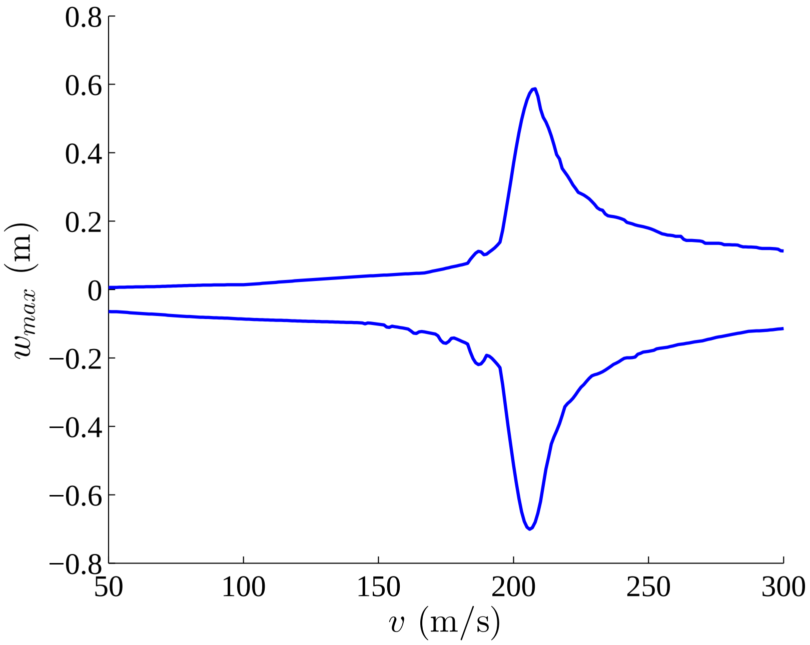


Figura 4.9: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 250$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

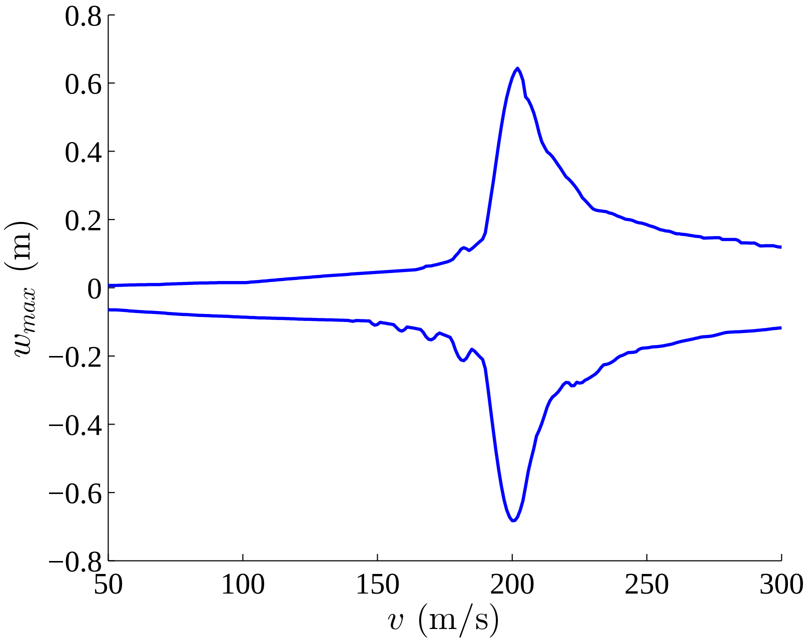


Figura 4.10: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 200$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

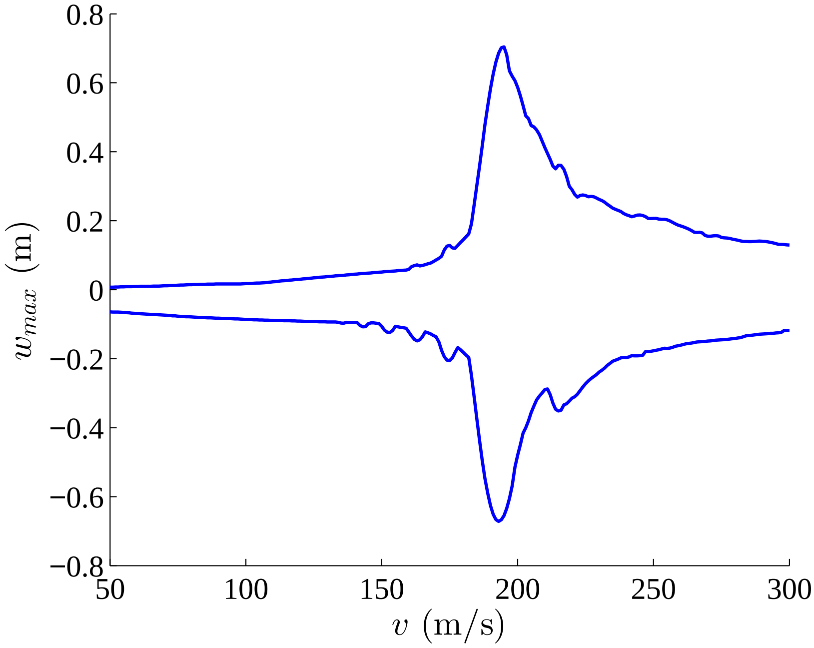


Figura 4.11: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 150$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

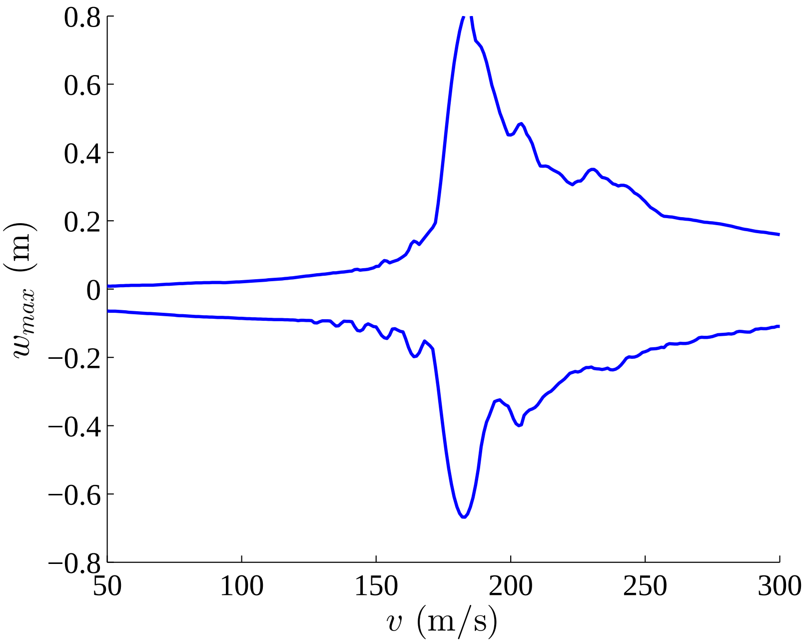


Figura 4.12: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 100$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

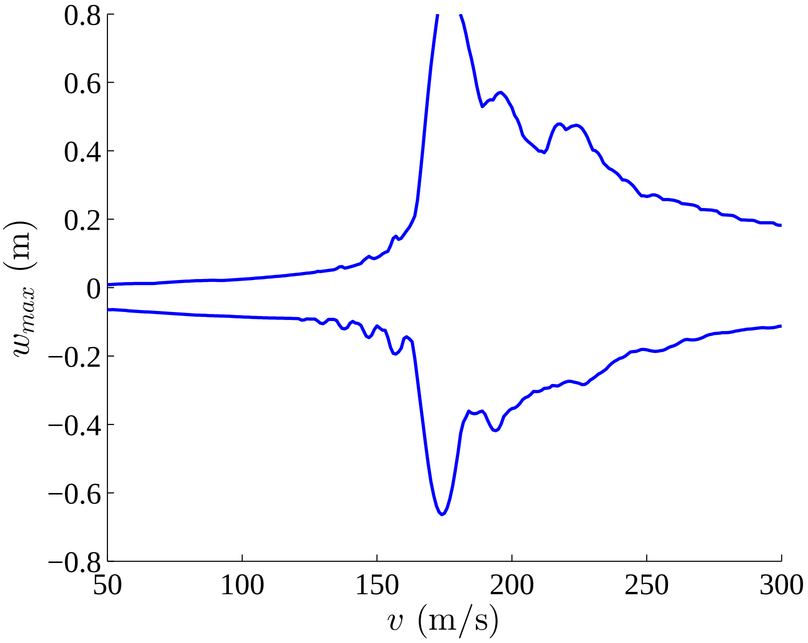


Figura 4.13: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 75$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

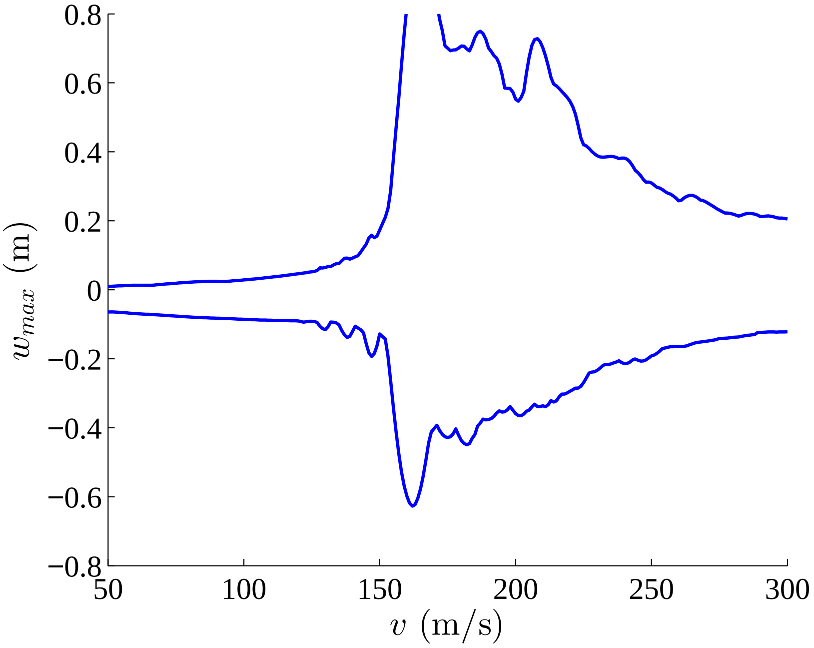


Figura 4.14: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 50$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

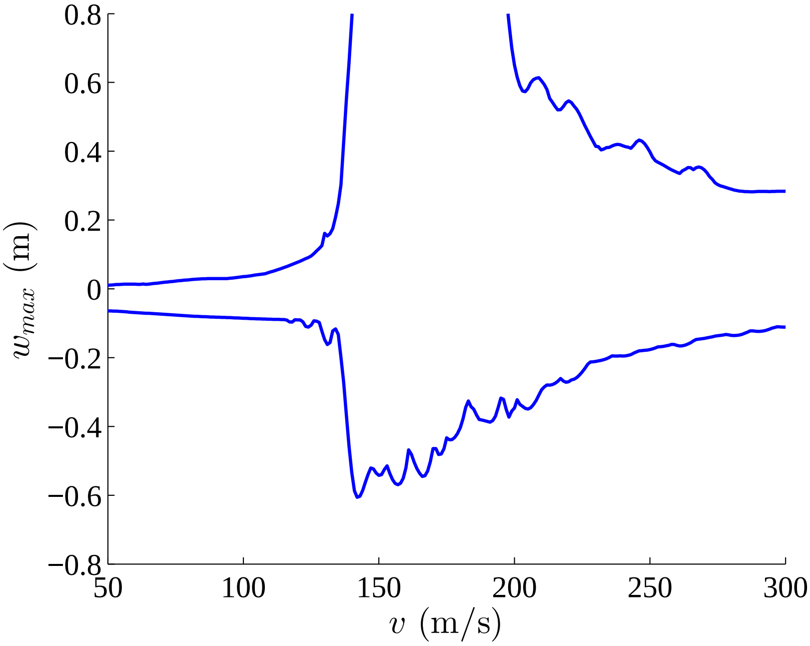


Figura 4.15: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 25$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

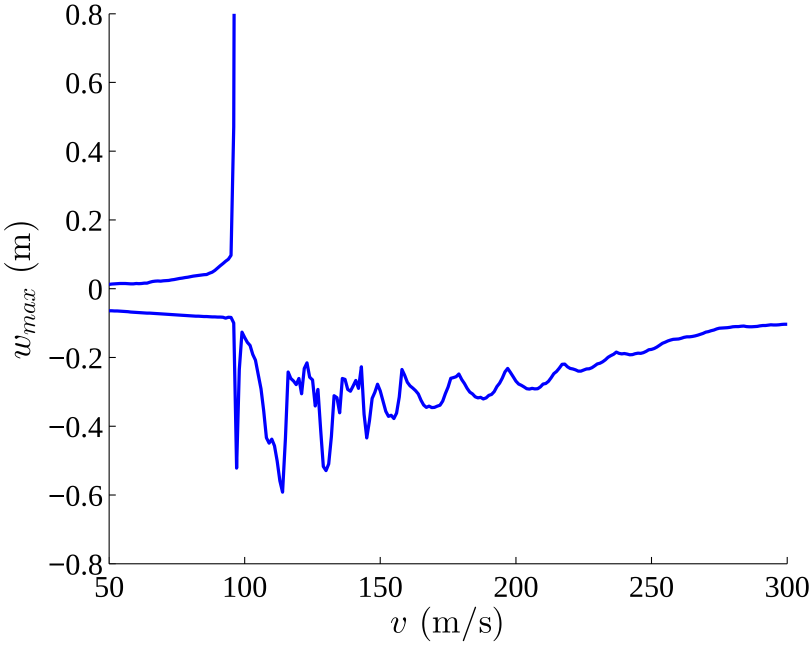


Figura 4.16: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 0$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e sem amortecimento.

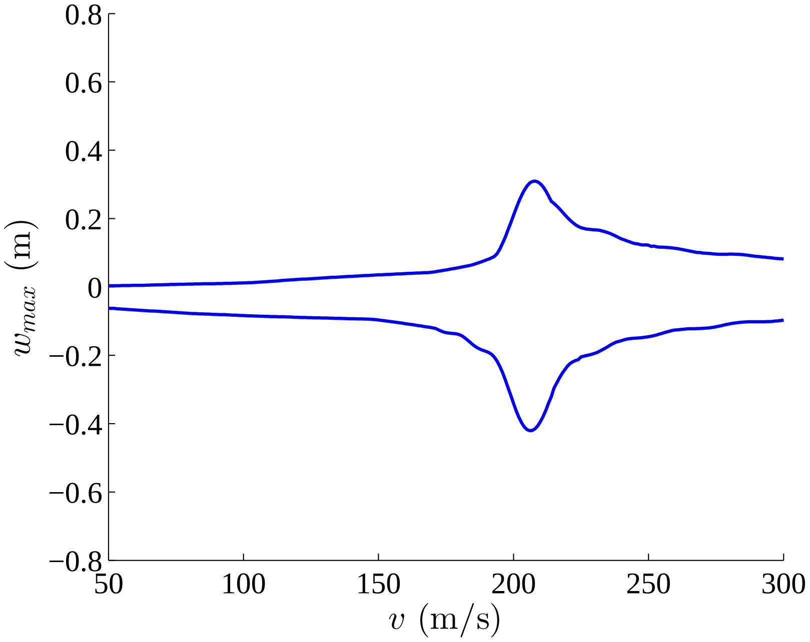


Figura 4.17: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 250$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

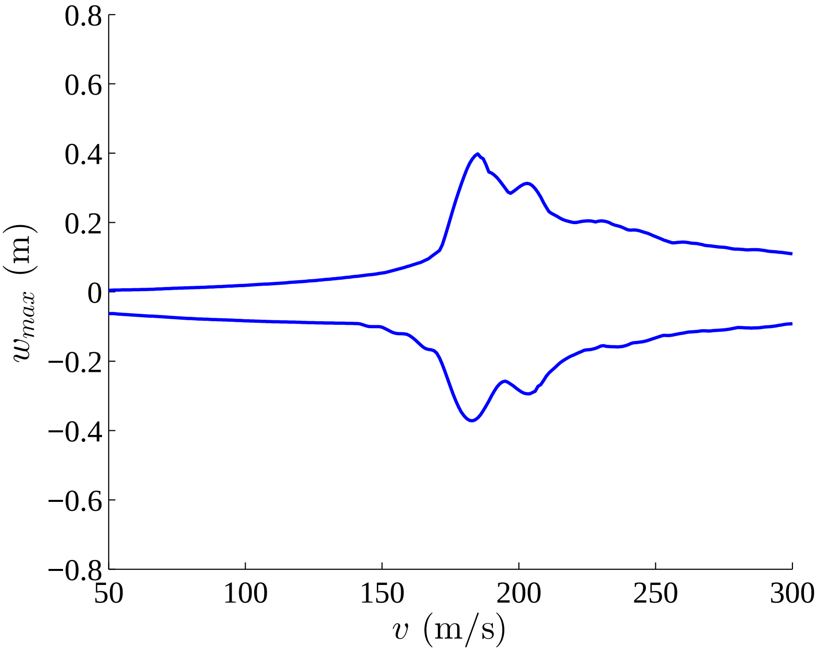


Figura 4.18: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 100$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

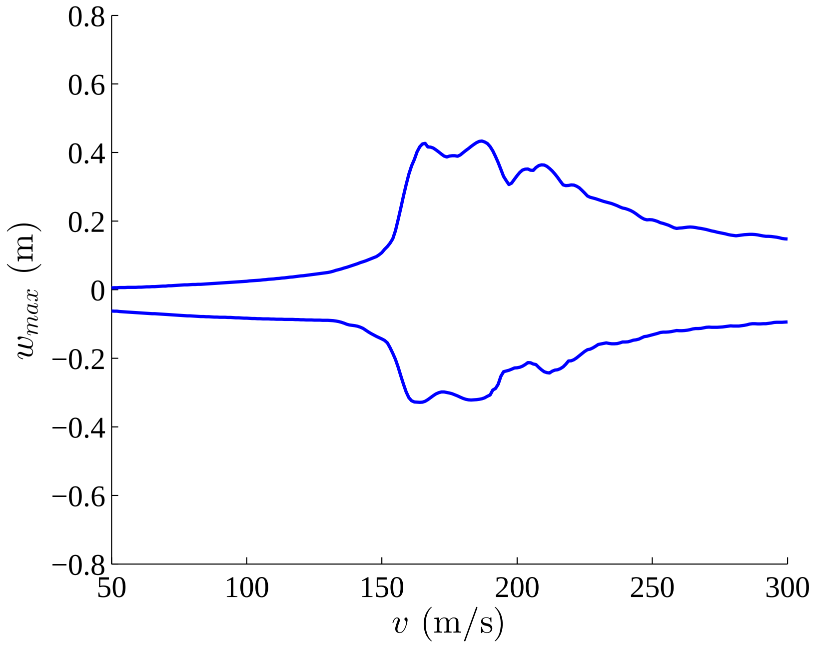


Figura 4.19: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 50$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

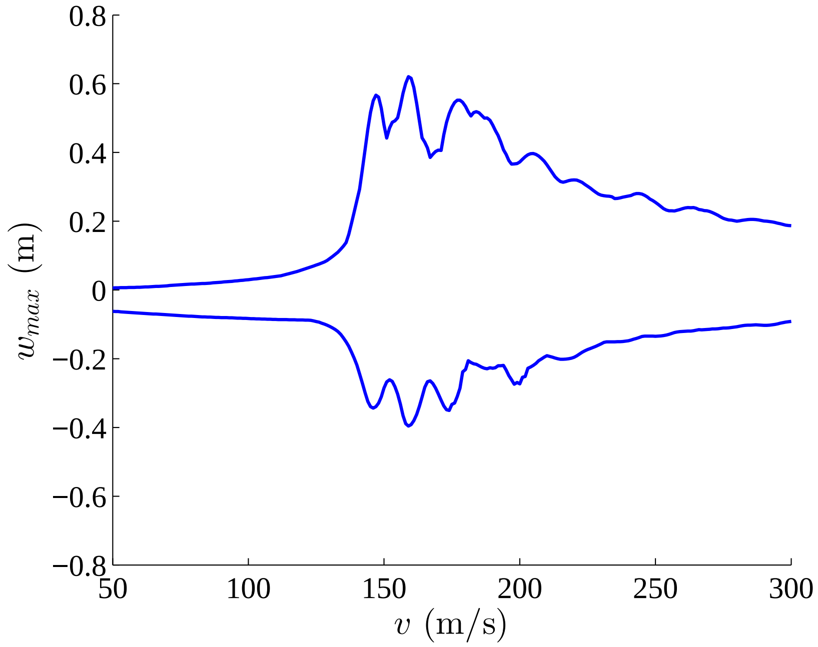


Figura 4.20: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 25$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

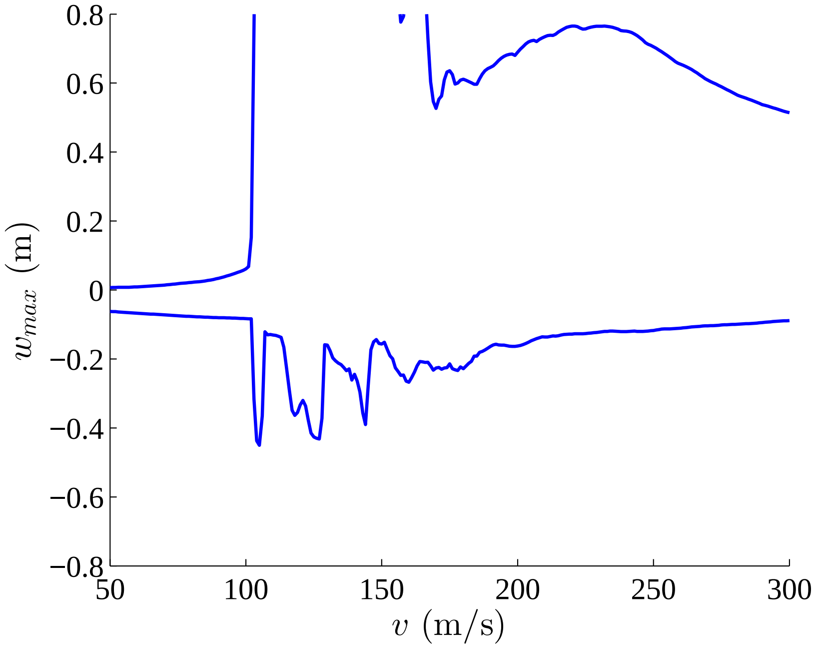


Figura 4.21: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 0$ kN/m^2 , $k_{f-} = 250$ kN/m^2 e com amortecimento $\zeta = 2\%$.

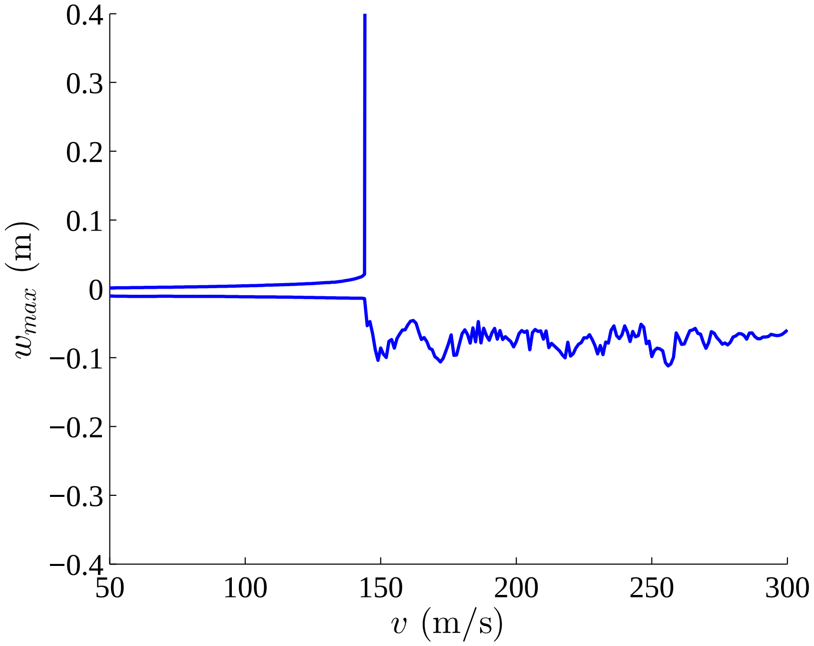


Figura 4.22: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 0$ kN/m^2 , $k_{f-} = 2500$ kN/m^2 e sem amortecimento.

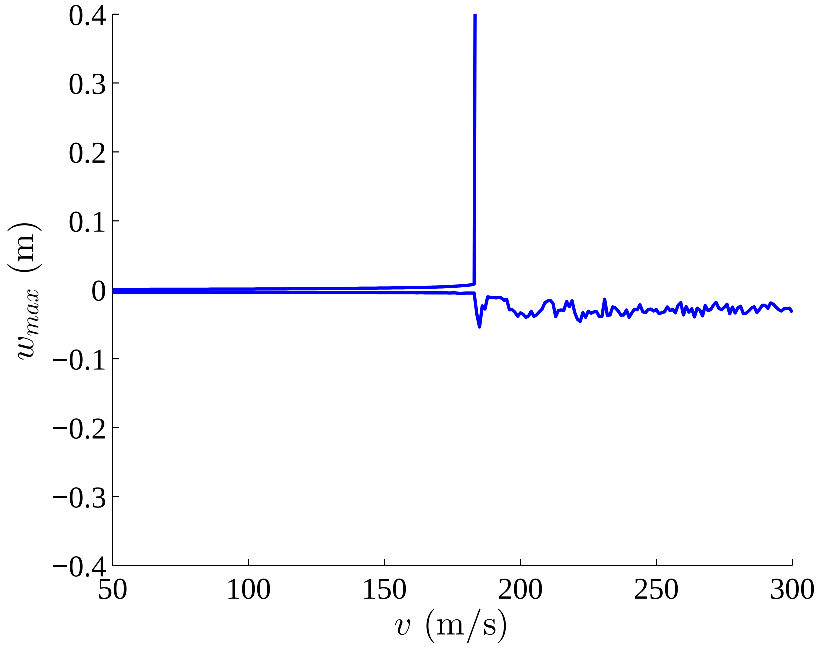


Figura 4.23: Deslocamentos máximos ascendente e descendente em função da velocidade da carga para fundação uniforme com $k_{f+} = 0$ kN/m^2 , $k_{f-} = 10\,000$ kN/m^2 e sem amortecimento.

Capítulo 5

Conclusões e desenvolvimentos futuros

Neste trabalho desenvolveu-se um programa de elementos finitos em ambiente MatLab para a análise dinâmica de uma viga simplesmente apoiada sobre fundação elástica sujeita à acção de uma carga móvel. Como já foi referido, esta análise tem interesse prático no estudo do comportamento de carris usados em linhas de comboio de alta velocidade. Há que realçar a vantagem do uso do método dos elementos finitos sobre métodos analíticos pela versatilidade daquele para lidar sobretudo com problemas não lineares.

Consideraram-se três modelos distintos de comportamento da fundação: (a) elástico linear, (b) elástico não linear e (c) elástico bilinear. Para cada um deles, fizeram-se várias análises para diferentes valores da velocidade da carga, rigidez da fundação e comprimento da viga. Quanto à rigidez da fundação, é devida uma palavra sobre a ordem de grandeza (baixa) dos valores usados para esta grandeza. Usaram-se os mesmos valores que os da literatura (nomeadamente os de Dimitrovová e Rodrigues, 2012) para possibilitar comparações, embora se saiba que são artificialmente baixos (tal como indicado em Dimitrovová e Rodrigues, 2012).

Resumem-se de seguida as principais características observadas na resposta do sistema para cada tipo de fundação estudado.

Fundação elástica linear

- O modelo de elementos finitos reproduziu os resultados da literatura, nomeadamente os de Dimitrovová e Rodrigues (2012).
- Um aumento da rigidez da fundação provoca aumento da velocidade crítica, redução dos picos de deslocamentos máximos e redução das amplificações de deslocamentos relativamente ao caso estático.
- Os maiores deslocamentos podem ocorrer já depois de a carga abandonar a viga.
- Para uma fundação dividida em dois sub-domínios de rigidez distinta, os deslocamentos máximos ocorrem quando a força percorre o sub-domínio mais rígido e não são intermédios

entre os correspondentes casos de fundação uniforme. Além disso, observa-se a presença de um pico de deslocamentos (correspondente ao caso da fundação uniforme menos rígida) quando a carga percorre o sub-domínio menos rígido e de dois picos (correspondentes aos dois casos de fundação uniforme) quando a carga percorre o sub-domínio mais rígido.

- O aumento da velocidade da carga tem o efeito de amplificar os deslocamentos e momentos flectores da viga relativamente ao caso estático.
- O comprimento da viga tem pouca influência na resposta do sistema.

Fundação elástica não linear

- Quanto maior a componente não linear da rigidez, menores são os deslocamentos máximos e maior a velocidade crítica.
- Para velocidades bastante inferiores às críticas, o efeito da presença de uma parcela não linear da rigidez é pouco perceptível na amplificação de deslocamentos e momentos flectores relativamente ao caso estático.
- O efeito da presença de uma parcela não linear da rigidez na amplificação de deslocamentos e momentos flectores relativamente ao caso estático é mais visível para velocidades elevadas. Nesta situação, as amplificações são tanto menores quanto maior a parcela não linear da rigidez.
- A consideração de uma carga dez vezes superior evidencia quantitativamente o comportamento não linear da fundação. No entanto, qualitativamente, as amplificações obtidas são muito semelhantes às do caso em que a força é menor. Exceptua-se o caso em que a velocidade da carga móvel é de 200 m/s (próxima da velocidade crítica para a força menor). Isto sugere que o aumento da força faz variar a velocidade crítica do modelo, facto que deverá ser comprovado em estudos futuros.

Fundação elástica bilinear

- A diminuição progressiva da rigidez da fundação à tracção (para movimentos ascendentes) tem o efeito de aumentar os deslocamentos positivos (ascendentes) da viga; o aumento destes deslocamentos é especialmente elevado para valores da rigidez à tracção próximos de zero.
- A velocidade crítica também decresce com a diminuição da rigidez à tracção da fundação.
- Na situação de $k_{f+} = 0$ kN/m^2 (sem rigidez à tracção), os deslocamentos ascendentes para velocidades superiores à crítica são exageradamente elevados e sem validade no domínio da hipótese dos pequenos deslocamentos.

De referir ainda que para todos os tipos de fundação, a presença de amortecimento tem o efeito de reduzir substancialmente os deslocamentos máximos.

Conclui-se assim destas observações que, para um mesmo tipo de comportamento da fundação (linear, não linear ou bilinear), a velocidade da força móvel, a rigidez linear da fundação e o amortecimento do sistema são as variáveis com maior influência na resposta do sistema. Comparando os três tipos de comportamento da fundação, nota-se uma maior diferença na resposta dinâmica do sistema quando se modela o solo com dois tipos de rigidez (lei bilinear), sobretudo ao nível dos deslocamentos positivos. Apesar de não ter muita influência na amplificação de deslocamentos e momentos flectores face ao caso estático, a presença de uma parcela não linear no comportamento do solo tem o efeito claro de reduzir em termos absolutos estas grandezas.

Apesar dos modelos da fundação não linear e bilinear serem mais sofisticados e terem maior correspondência com o comportamento real dos solos, existem aspectos que podem ser incluídos em trabalhos futuros e que permitem certamente uma análise mais precisa do problema estudado. O primeiro a ser referido é o de tentar modelar o caso de uma viga infinita. Como já foi dito, outros autores já estudaram com sucesso este caso, recorrendo a métodos analíticos. Usando o método dos elementos finitos, pode-se simular uma viga infinita aumentando progressivamente o comprimento da viga simplesmente apoiada até os resultados obtidos convergirem. Verificou-se porém neste trabalho que tal procedimento requer um grande esforço computacional se se mantiver um refinamento da malha constante para os vários comprimentos da viga. Em alternativa, é possível simular correctamente vigas infinitas se se adoptarem condições de fronteira absorventes de ondas incidentes, isto é, que não reflictam estas ondas ("absorbing boundary conditions" em Inglês). Outras desenvolvimentos possíveis ao modelo são, por exemplo, actuar a viga por mais do que uma força pontual, construir um modelo de viga em fundação elástica com rigidez nula à tracção e uma reacção à compressão de tipo cúbico ou considerar a massa associada à força pontual interagindo com a viga e a fundação por intermédio de um sistema mola–amortecedor. A consideração deste último caso pode ser relevante para esclarecer se as elevadas acelerações calculadas no Capítulo 2 se atenuam.

Referências

Z. Dimitrovová. A general procedure for the dynamic analysis of finite and infinite beams on piece-wise homogeneous foundation under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 329: 2635–2653, 2010.

Z. Dimitrovová e A.F.S. Rodrigues. Critical velocity of a uniformly moving load. *Advances in Engineering Software*, 50:44–56, 2012.

EN13674-2 Railway applications, 2010.

L. Frýba. *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads. Research Institute of Transport.* Research Institute of Transport, Prague, 1972.

M. Hetenyi. *Beams on Elastic Foundation.* The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1946.

H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, e R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:283–292, 1977.

C.E. Inglis. *A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridges.* Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

A.N. Krylov. Uber die Erzwungenen Schwingungen von Gleichformigen Elastichen Stäben (About forced vibrations of prismatic elastic beams). *Mathematische Annalen*, 61:211–234, 1905.

A.N. Lowan. On transverse oscillations of beams under the action of moving variable loads. *Philosophical Magazine*, 19(127):708–715, 1935.

E.J. Sapountzakis e A.E. Kampitsis. Nonlinear response of shear deformable beams on tensionless nonlinear viscoelastic foundation under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 330: 5410–5426, 2011.

A.D. Senalp, I. Ozkol, A. Arikoglu, e V.Z. Dogan. Dynamic response of a finite length euler-bernoulli beam on linear and nonlinear viscoelastic foundations to a concentrated moving force. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 24(10):1957–1961, 2010.

J.J. Szerkesztő. UIC60 type rail at Budapest–Kelebia railway line, made by Thyssen in 1995. URL: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:THYSSEN\_95\_UIC\_60.jpg`, 2010.

D. Thambiratnam e Y. Zhuge. Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 198(2):149–169, 1996.

The MathWorks, Inc. MatLab. URL: `http://www.mathworks.com/products/matlab`, 2013.

S.P. Timoshenko. Erzwungene Schwingungen Prismaticher Stäbe (Forced vibrations of prismatic beams). *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 51(2):163–203, 1911.

S.P. Timoshenko, D.H. Young, e W. Weaver. *Vibration Problems in Engineering.* John Wiley, New York, fourth edition, 1974.

UIC60. URL: http://www.kardemir.com/images/urunler/kesit/60E1-UIC60-SBBVI.jpg, 2013.

Wikipedia. High-speed rail. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/High-speed_rail, 2013.

Wolfram Research, Inc. Mathematica. URL: http://www.wolfram.com, 2013.