



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Modelação de Incertezas Múltiplas em Opções Reais

**Aplicação à avaliação do investimento
do novo transporte de alta velocidade ferroviário**

Iris Sofia Dourado Ferreira

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Matemática e Aplicações

Júri

Presidente: Professor Doutor António Pacheco Pires

Orientadora: Professora Doutora Cláudia Nunes Philippart

Vogal: Professora Doutora Conceição Amado

Junho de 2011

Agradecimentos

Agradeço a todos os que tornaram possível, de um forma ou de outra, a execução desta tese.

Primeiro que tudo, quero expressar os meus mais sinceros agradecimentos à minha orientadora, Prof. Cláudia Philippart, por toda a dedicação, disponibilidade e orientação, cruciais na realização desta dissertação. Sei que sem o seu apoio, incentivo, compreensão e até carinho não teria conseguido desenvolver o presente trabalho.

Mais que a todos, quero agradecer aos meus familiares, mais concretamente aos meus pais e à minha avó, que me apoiaram e “lutaram” comigo para que conseguisse estar hoje aqui. Ainda é a eles que devo tudo o que sou e tudo o que consegui até hoje. Foi tudo graças ao carinho, amor e compreensão que durante toda a vida me dedicaram. Não fazendo parte da minha família, mas considerando-a eu como tal, tenho um obrigada muito especial para a “minha outra mãe” que mais do que minha madrinha de Crisma, é uma “mãe” com quem posso sempre contar.

Pai e Mãe, a vocês em especial tenho muito de agradecer o que sempre me ensinaram... nunca baixar os braços e lutar sempre por aquilo que queremos. Hoje graças, em grande parte, a vocês estou a concretizar um sonho. Sempre estiveram comigo e sempre me disseram as palavras certas na altura certa, mesmo às vezes não sendo as que eu gostava de ouvir. Mas até pelos “sermões” vos tenho de agradecer. Foram cruciais para o meu desenvolvimento como pessoa e aluna. Muito obrigada por serem os pais maravilhosos que são e por estarem sempre comigo.

Claro que não pode faltar o tão merecido agradecimento ao meu namorado, que com a sua paciência, tolerância e compreensão sempre ouviu os meus desatinos com o decorrer da dissertação e com os problemas com que me deparei. O seu amor, carinho e apoio foram factores de grande importância e aos quais dou muito valor. David, obrigada por estares sempre comigo e por seres o “máior” namorado de sempre! Também merecem ter parte nos meus agradecimentos os pais, o irmão e avó do mesmo, que sempre tiveram um carinho e uma palavra de apoio.

Por fim, agradeço a todos os meus amigos, colegas de curso e de trabalho. Agradeço especialmente, e novamente, aos meus pais e ao meu namorado que, além de tudo, são os meus grandes amigos.

Muito obrigada a todos!

À minha avó

Resumo

O problema de determinação de uma política óptima de investimento é um problema da maior pertinência, quer a nível das consequências práticas e financeiras, quer pelo interesse matemático que tal desperta. Neste trabalho assume-se que a procura por determinado serviço segue um movimento Browniano geométrico com saltos de Poisson, e que ao decisor cabe determinar o momento em que deverá efectuar o investimento. Note-se que este momento de investimento é consequência de um balanço entre os custos de investimento envolvidos (que, como se verá, são irreversíveis) e da expectativa de ganhos futuros decorrentes deste investimento.

Em particular analisa-se a situação referente ao momento óptimo de investimento no transporte de alta velocidade ferroviário (vulgo TGV). Este estudo é realizado recorrendo à análise de opções reais (AOR), assumindo um contexto estocástico.

Tal como se verá no decorrer do trabalho, a determinação do dito momento óptimo de investimento pode ser vista como um problema de paragem óptima, pelo que uma das técnicas utilizada é a programação dinâmica.

Numa primeira situação assume-se que apenas há um processo estocástico envolvido (a procura pelo serviço), e numa segunda situação procura-se estudar o caso em que as próprias despesas de investimento podem ser modeladas por um processo estocástico. Esta segunda situação - mais próxima da realidade financeira - permite ainda considerar questões pertinentes (nomeadamente sobre a correlação dos processos envolvidos).

Os resultados teóricos são ilustrados recorrendo a simulações, permitindo nalgumas situações retirar conclusões sobre a política óptima de investimento, no tocante ao momento em que esta deve ser realizada e à despesa associada a esta decisão.

Palavras-chave: Opções Reais, Problema de Paragem Óptima, Programação Dinâmica, Valor Óptimo de Paragem, Momento Óptimo de Paragem, Movimento Browniano Geométrico, Processo de Poisson.

Abstract

The problem of determining an optimum investment policy is notable, both for its practical financial consequences and for its mathematical relevance. In this work, we assume that the demand for a certain good or service follows a Brownian geometric motion with Poisson jumps and that the agent must determine the moment in which the investment will be made. Notice that this investment moment is consequence of a trade off between the investment costs (which, as we will see, are irreversible) and the expected future earnings from that investment.

In particular, we analyze the optimal investment moment for the high speed transportation (the so called TGV). This case study is performed by using real option analysis, assuming a stochastic context.

As we will see, determining the optimal investment moment can be regarded as a optimal stopping problem, and as such, we will use dynamic programming.

At first, we assume a single stochastic process involved (the demand) and later we try to reason about the case where the investment expensed themselves are modeled by a stochastic process. The later situation - closer to the financial reality - allows us to consider interesting questions, like the correlation between the processes.

The theoretical results are presented with the aid of simulations, allowing us, in some cases, to draw conclusions about the optimal investment policy in regard to the moment when it should be executed and the expenses associated with such decision.

Keywords: Real Options, Optimal Stopping Problem, Dynamic Programming, Optimal Stopping Value, Optimal Stopping Time, Geometric Brownian Motion, Poisson Process

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	v
Abstract	vii
Lista de Figuras	xii
Lista de Símbolos e Acrónimos	xv
1 Introdução	1
2 Enquadramento Geral	7
2.1 Análise de Opções Reais	7
2.2 Investimento no Serviço de Alta Velocidade Ferroviária	8
2.3 Optimalidade das Decisões - Programação Dinâmica	12
3 Enquadramento Específico	17
3.1 Nível Crítico da Procura - Despesa de Investimento Constante	17
3.2 Nível Crítico da Procura - Despesa de Investimento Estocástica	24
4 Resultados Numéricos	29
4.1 Caso 1 - $\{X_t\}$ segue um MBG	30
4.2 Caso 2 - $\{X_t\}$ segue um MBGS	32
4.3 Caso 3 - $\{X_t\}$ segue um MBG com 2 incertezas	35
4.3.1 Correlação nula - alteração dos restantes parâmetros	35
4.3.2 Correlação positiva - alteração dos restantes parâmetros	38
4.3.3 Correlação negativa - alteração dos restantes parâmetros	40
4.4 Caso 4 - $\{X_t\}$ segue um MBGS com 2 incertezas	41
4.4.1 Correlação positiva - alteração dos restantes parâmetros	41
4.4.2 Correlação negativa - alteração dos restantes parâmetros	42
5 Conclusão	47
Bibliografia	49

Lista de Figuras

4.1	Programa Mathematica para cálculo de x^* para o Caso 1	30
4.2	Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de μ_x - valores da Tabela 4.2	31
4.3	Comportamento relativo de x^* e \widehat{t}^* em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.2	31
4.4	Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de σ_x - valores da Tabela 4.3	32
4.5	Código Mathematica para lidar com saltos	32
4.6	Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de μ_x - valores da Tabela 4.4	33
4.7	Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de σ_x - valores da Tabela 4.5	34
4.8	Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de λ - valores da Tabela 4.6	34
4.9	Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de u - valores da Tabela 4.7	35
4.10	Programa Mathematica para simulação do caso 3	36
4.11	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_x - valores da Tabela 4.8	37
4.12	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x - valores da Tabela 4.9	37
4.13	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - valores da Tabela 4.10	38
4.14	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - valores da Tabela 4.11	38
4.15	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x - valores da Tabela 4.12	39
4.16	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - valores da Tabela 4.13	40
4.17	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_x	40
4.18	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - valores da Tabela 4.14	41
4.19	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x	42
4.20	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_γ	42
4.21	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_x	43
4.22	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_γ	43
5.1	Comportamento relativo de x^* e \widehat{t}^* em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.2	53
5.2	Comportamento relativo de x^* e \widehat{t}^* em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.4	53
5.3	Comportamento relativo de x^* e \widehat{t}^* em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.6	54
5.4	Comportamento relativo de x^* e \widehat{t}^* em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.7	54
5.5	Comportamento relativo de x^* e \widehat{t}^* em função de λ - de acordo com a Figura 4.8	54
5.6	Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de u - de acordo com a Figura 4.9	55
5.7	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.11	55
5.8	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.12	56

5.9	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - de acordo com a Figura 4.13	56
5.10	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - de acordo com a Figura 4.14	56
5.11	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.15	57
5.12	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - de acordo com a Figura 4.16	57
5.13	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.17	57
5.14	Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - de acordo com a Figura 4.18 . . .	58
5.15	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.19	58
5.16	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - de acordo com a Figura 4.20	58
5.17	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.21	59
5.18	Comportamento relativo de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - de acordo com a Figura 4.22	59

Lista de Tabelas

4.1	Dados do cenário base	30
4.2	Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de μ_x , no caso 1	31
4.3	Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de σ_x , no caso 1	32
4.4	Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de μ_x , no caso 2	33
4.5	Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de σ_x , no caso 2	33
4.6	Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de λ , no caso 2	33
4.7	Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de U , no caso 2	34
4.8	Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de μ_x no caso 3 - correlação nula .	36
4.9	Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de σ_x no caso 3 - correlação nula .	37
4.10	Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de μ_γ no caso 3 - correlação nula .	37
4.11	Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de σ_γ no caso 3 - correlação nula .	38
4.12	Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de σ_x no caso 3 - correlação positiva	39
4.13	Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de μ_γ no caso 3 - correlação positiva	39
4.14	Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de σ_γ no caso 3 - correlação negativa	41
4.15	Resumo dos movimentos descritos em função da alteração de parâmetros no caso de duas incertezas	45

Lista de Símbolos e Acrónimos

TGV	Novo Serviço de Alta Velocidade Ferroviária
AOR	Análise de Opções Reais
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	Variável aleatória X seguindo uma distribuição Normal de valor esperado μ e variância σ^2
$E[.]$	Valor esperado (em relação à distribuição de probabilidades subjacente ao modelo)
$\{X_t\}$	Notação abreviada para o processo estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$
$\{N_t\}$	Notação abreviada para o processo de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$
$\{W_t\}$	Notação abreviada para o movimento Browniano $\{W_t, t \geq 0\}$
$\{\Gamma_t\}$	Notação abreviada para o processo estocástico $\{\Gamma_t, t \geq 0\}$

1 Introdução

Actualmente, o mercado financeiro é caracterizado por uma grande incerteza. Tal incerteza afecta necessariamente o Processo de Tomada de Decisão (processo através do qual se escolhe uma alternativa de entre o conjunto de acções potenciais em cada situação) de qualquer investimento.

Uma decisão àcerca de um investimento financeiro pode ser tomada de acordo com diversas condições:

- Condições de certeza: ocorrem quando a decisão é feita com pleno conhecimento de todos os estados da natureza, ou seja, existe a certeza do que irá ocorrer durante o período em que a decisão é tomada;
- Condições de risco: ocorrem quando são conhecidas as probabilidades associadas a cada um dos estados de natureza;
- Condições de incerteza: ocorrem quando é desconhecida a probabilidade associada aos eventos;
- Condições de competição ou condições de conflito: ocorrem quando estratégias e estados da natureza são determinados pela acção de competidores.

Naturalmente, a maioria das situações reais caem na categoria de decisão sob condições de incerteza.

Neste trabalho avaliamos a opção de realizar ou diferir um investimento num ambiente de incerteza (modelado estocasticamente) recorrendo à Análise de Opções Reais. Este tipo de análise introduz novas perspectivas sobre o impacto da incerteza no valor de um projecto. O método de análise de opções reais considera que na opção de investir se deve levar em conta que:

- o investimento pode ser um custo (parcial ou totalmente) irreversível;
- existe a possibilidade de adiar a concretização do projeto em virtude das incertezas.

A avaliação simplista de comparar *à priori* se os benefícios esperados do projecto são maiores que os seus custos e tomar a decisão de investimento nesse instante deve ser revista já que menospreza a incerteza existente no projecto, que o pode tornar rentável num instante posterior.

A análise de opções reais, apesar de conceptualmente simples, é de grande utilidade na análise de projectos influenciados por diversas fontes de incerteza. A sua aplicação envolve a elaboração de modelos matematicamente mais complexos quando comparados com outros métodos frequentemente utilizados, incluindo análise probabilística das opções.

O processo de tomada de decisão sobre um projecto de investimento em activos reais pode

ser afectado por vários tipos de opções reais. As mais utilizadas são, naturalmente, as que conferem um maior realismo à modelação, ou seja, as que se caracterizam pela flexibilidade que oferecem. Entre estas contam-se opções como a Opção de Diferimento, Opção de Expansão ou Opção de Abandono.

Nesta dissertação, vamos apenas debruçar-nos sobre o estudo da *opção de diferimento* que consiste, essencialmente, na oportunidade de esperar para realizar o investimento, o que pressupõe que seja possível quantificar o “valor” da espera.

De forma simples, o nosso objectivo é decidir se, em cada instante, devemos investir ou esperar - Opção de Diferimento. Em última análise, o que queremos saber é o momento em que se deve tomar a decisão de investir ou, em termos de problemas de decisão, queremos resolver um Problema de Paragem Óptima onde o instante em que se deve fazer o investimento é o Momento de Paragem Óptima.

Este problema é resolvido num ambiente estocástico, considerando uma ou duas incertezas e recorrendo à técnica de Programação Dinâmica que apresenta inúmeras aplicações no campo da economia e das finanças. Em [7] são apresentadas duas técnicas para optimização dinâmica sob incerteza: a programação dinâmica e a análise de activos contingentes.

Os resultados teóricos apresentados no decorrer da dissertação vão ser aplicados ao caso real do projecto de investimento no novo serviço de alta velocidade ferroviária (TGV). Assumiremos dois ambientes de incerteza:

1. a procura pelo TGV é a única fonte de incerteza;
2. além da procura pelo TGV, a despesa de investimento é também uma fonte de incerteza.

As incertezas aqui enunciadas são modeladas ou como um Movimento Browniano Geométrico ou como um Movimento Browniano Geométrico com saltos. Vamos derivar o valor da opção de diferimento e, assumindo os dados presentes em [13] e [6], obter valores numéricos que nos permitirão retirar algumas conclusões. Fazendo uma análise a simulações do Movimento Browniano Geométrico e do Movimento Browniano Geométrico com saltos, obteremos o momento óptimo para investir.

No presente trabalho usamos diversos conceitos e resultados de Matemática Financeira, Análise de Opções Reais e de Programação Dinâmica. Não é nosso objectivo fazer uma descrição nem formal nem alargada de tais conceitos. Sempre que tal se justificar, remeteremos para literatura apropriada. Porém, deixamos neste capítulo alguns conceitos e resultados chave. Seguindo a notação usada na literatura (por exemplo [2]), utilizaremos a forma diferencial das

equações estocásticas do tipo:

$$dX_t = f_1(X_t, t)dX_t + f_2(X_t, t)dW_t$$

onde $\{X_t, t \geq 0\}$ é usualmente designado por *processo de difusão* (sob determinadas condições para f_1 e f_2) e $\{W_t, t \geq 0\}$ é um *movimento Browniano*. Um movimento Browniano satisfaz as seguintes condições:

- $W_0 = 0$;
- $\{W_t, t \geq 0\}$ tem incrementos independentes e estacionários;
- $W_t \sim N(0, t)$.

Note-se que $\{W_t\}$ é um processo contínuo em toda a parte e diferenciável em parte alguma ([8]), pelo que a notação dW_t é abusiva (uma vez que não é possível derivar $\{W_t\}$ no sentido usual).

Este processo descreve a evolução de um activo assumindo que o valor da variável que o modela é alterado, em cada intervalo infinitesimal, por uma quantidade que é distribuída de acordo com uma normal (que modela o “ruído” a que a evolução do activo está sujeita). Em casos gerais, a distribuição normal é uma boa escolha para este ruído, já que modelamos todos os factores externos que influenciam o valor do activo como factores aleatórios independentes (o teorema do limite central garante que a soma destes factores é bem aproximada, sob determinadas condições, que assumimos serem satisfeitas, por uma distribuição normal).

Em alguns casos, faz sentido adicionar expressividade ao modelo permitindo a existência de “saltos”. Os saltos referem-se a choques súbitos no valor da variável que ocorrem aleatoriamente no tempo. A ideia é reconhecer que, para além do ruído de fundo da evolução contínua, existem eventos que têm um impacto profundo e imediato no valor do activo; por exemplo, um gestor conceituado que se reforma, um ataque terrorista, uma mudança de legislação ou governo, etc.

Caso o processo $\{X_t\}$ esteja sujeito a saltos (independentes do processo) regidos por um processo de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$, de taxa λ , então $\{X_t\}$ é descrito pela equação diferencial estocástica

$$dX_t = f_1(X_t, t)dX_t + f_2(X_t, t)dW_t + f_3(X_t, t)dN_t \quad (1.1)$$

$$\text{onde } dN_t = \begin{cases} (1 + U) & \text{com probabilidade } \lambda dt \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

com U a dimensão do salto (assumida constante e determinística, para simplificar a apresentação). Quando $\{X_t\}$ tem a dinâmica expressa pela equação (1.1), então as suas trajectórias têm saltos de descontinuidade modelados por um processo de Poisson. Entre saltos consecutivos as trajectórias são contínuas.

No trabalho que a seguir se apresenta, utilizaremos também alguns resultados provenientes do cálculo de Itô. Mais uma vez, escusamo-nos a apresentar os detalhes, que podem ser encontrados em [2] ou [12], entre outros. Referimos apenas, e mais uma vez em tom informal, a seguinte tabela de multiplicação para incrementos do tipo dt e dW_t :

- $(dt)^2 = 0$;
- $dW_t dt = 0$;
- $(dW_t)^2 = dt$;
- $E[dW_t] = 0$.

Note-se que em face das igualdades anteriores, segue que $(1 - \rho dt)(1 + \rho dt) = 1 - \rho dt + \rho dt + \rho^2 dt^2 = 1$. O significado e razão destas igualdades pode ser encontrada nas mesmas referências atrás citadas.

No caso particular em que $f_1(X_t, t) = \mu X_t$, $f_2(X_t, t) = \sigma X_t$ e $f_3(X_t, t) = 0$, onde μ e σ são constantes ($\mu \in \mathfrak{R}$ e $\sigma > 0$), vem que

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (1.2)$$

define o que é usualmente designado por Movimento Browniano Geométrico (ou Movimento Geométrico Browniano, do termo Anglo-Saxónico “Geometric Brownian Motion”). Neste caso, a equação diferencial estocástica (1.2) tem solução dada por:

$$X_t = x \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}$$

onde $x = X_0$ é o valor da procura pelo TGV em $t = 0$. Decorre das propriedades de $\{W_t\}$ (que, recorde-se, tem distribuição, para cada t , normal de valor esperado nulo e variância t) que X_t tem distribuição log-normal, ou seja,

$$\ln \frac{X_t}{X_0} \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$$

Neste caso, e uma vez que este resultado será posteriormente utilizado, é fácil ver que:

$$E \left[X_t^\theta \right] = x^\theta \exp \left\{ \mu t \theta + \theta(\theta - 1) \frac{\sigma^2 t}{2} \right\} \quad (1.3)$$

uma vez que a função geradora de momentos de uma variável aleatória Y com distribuição $N(a, b)$ é dada por

$$M_Y(s) = E \left[e^{Ys} \right] = \exp \left\{ as + \frac{b^2 s^2}{2} \right\}$$

de onde segue que

$$M_{\sigma W_t}(s) = \exp \left\{ \frac{\sigma^2 t s^2}{2} \right\}$$

Logo

$$E[X_t^\theta] = E\left[x^\theta \exp\left\{\mu - \frac{\sigma^2}{2}t\theta\right\} \exp\{\sigma W_t\theta\}\right] \quad (1.4)$$

$$= x^\theta \exp\left\{\mu - \frac{\sigma^2}{2}t\theta\right\} E[\exp\{\sigma W_t\theta\}] \quad (1.5)$$

$$= x^\theta \exp\left\{\mu - \frac{\sigma^2}{2}t\theta\right\} \exp\left\{\frac{t(\sigma\theta)^2}{2}\right\} \quad (1.6)$$

$$= x^\theta \exp\left\{\mu t\theta + \theta(\theta - 1)\frac{\sigma^2 t}{2}\right\} \quad (1.7)$$

Na tese é também utilizada a solução da equação (1.1) para $f_1(X_t, t) = \mu X_t$, $f_2(X_t, t) = \sigma X_t$ e $f_3(X_t, t) = X_t$. Quando tal se justificar, falaremos nesta solução

$$X_t = x \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\} (1 + U)^{N_t}$$

e respectiva função geradora de momentos

$$E[X_t^\theta] = x^\theta \exp\left\{\left(\theta\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\} E[\exp\{\theta\sigma W_t(1 + U)^{N_t}\}] \quad (1.8)$$

$$= x^\theta \exp\left\{\left(\theta\mu + \frac{\sigma^2}{2}\theta(\theta - 1) + \lambda(1 + U)^\theta - \lambda\right)t\right\} \quad (1.9)$$

A dissertação está estruturada como se segue. No Capítulo 2 apresentamos a maioria do conteúdo teórico. São desenvolvidos todos os resultados necessários à análise efectuada e aplicada no Capítulo 3 a um problema real (investimento no novo serviço de alta velocidade ferroviária). No Capítulo 3 é ainda apresentado, pela primeira vez, o procedimento para a obtenção do valor da opção de diferimento num ambiente estocástico com duas fontes de incerteza. No Capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos para todos os casos em análise. Finalmente, apresentam-se algumas conclusões relativamente ao trabalho efectuado.

2 Enquadramento Geral

Neste capítulo fazemos um breve resumo sobre os conceitos de análise de opções reais, processos de tomada de decisão e sobre os temas específicos que se tratam nesta dissertação.

É um capítulo necessariamente resumido, não sendo objectivo uma análise completa do assunto. Ao longo da exposição, deixaremos referências bibliográficas onde o tema é explorado com toda a formalidade e detalhe.

2.1 Análise de Opções Reais

Os investimentos que uma empresa pode fazer (presente ou futuramente) devem ser avaliados face ao quadro económico/financeiro/político/social ([17]), sendo necessário criar um procedimento racional sobre a tomada da decisão de realizar ou não tais investimentos (com os custos inerentes). Esta avaliação não é isenta de riscos pois existe incerteza àcerca das condições económicas/financeiras/políticas/sociais, quer num futuro próximo quer num futuro distante ([7]).

No contexto presente, a avultada incerteza que se verifica nos mercados gera a necessidade de otimizar o processo de decisão sobre oportunidades de investimento.

A Análise de Opções Reais ([18]), abreviadamente AOR, é uma abordagem que toma em consideração a incerteza ao longo do tempo no processo de decisão. Tradicionalmente, a incerteza àcerca de condições futuras é assumida como um factor negativo, inerente à própria essência humana que lida mal com incerteza e aleatoriedade; mas a análise de opções reais considera tal incerteza como uma mais-valia, modelando-a matematicamente em termos de decisão sobre investimentos. Quando o futuro é incerto, existe a possibilidade de surgirem novas oportunidades, sendo o decisor responsável por escolher aceitar tais oportunidades, consoante sejam favoráveis ou não (em termos imediatos ou futuros).

Uma opção real é o oposto de uma obrigação ([16]); é um direito de tomar uma decisão àcerca de um investimento. Possuindo uma opção, exemplos de acções que se podem tomar são:

- diferir (i.e., adiar a decisão àcerca da implementação);
- expandir (i.e., reforçar o propósito do investimento);
- abandonar (i.e., desistir do projecto);

Note-se que ao diferir decisões sobre investimento, pode-se, na verdade, estar a gerar lucro

para a empresa em relação a tomar a decisão no presente. O que presentemente pode resultar num certo lucro/prejuízo, no futuro, sob outras condições ambientais, pode gerar lucros maiores (ou prejuízos menores), sendo por isso a opção de diferimento uma ferramenta para a maximização dos lucros futuros esperados. Neste trabalho, estamos interessados em estudar o valor da Opção de Diferimento num determinado contexto.

Faz então sentido usar um processo de decisão que contemple a possibilidade de alterações no decorrer dos projectos. Em contraste com os métodos tradicionais, que ignoram esta possibilidade, o uso da AOR introduz a capacidade de diferimento dos projectos ([18]). Ou seja, o tempo em se deve fazer um investimento é um aspecto fundamental no processo de tomada de decisão pois durante o período de espera novas informações podem induzir mudanças nos projectos iniciais, podendo mesmo levar ao seu abandono.

Sendo possível adiar a realização de um investimento, torna-se desejável conhecer o valor da opção de diferimento e o momento óptimo para se investir. O uso de opções de diferimento tem grandes vantagens, uma vez que permite uma resolução progressiva das incertezas inerentes ao projecto. É então possível adiar um investimento que à partida não seja favorável até que se torne mais rentável.

A principal questão é saber quando é mais racional (em termos de maximização do lucro esperado) fazer um investimento (“Será agora ou devemos esperar por um contexto económico mais favorável?”). Ou seja, devemos incluir na opção de diferimento a oportunidade de investimento e o momento óptimo para a sua realização.

2.2 Investimento no Serviço de Alta Velocidade Ferroviária

Neste trabalho pretende-se analisar a política óptima de decisão sobre investimento no serviço de alta velocidade ferroviária. Trata-se de um exemplo típico de aplicação do estudo da opção de diferimento inerente à tomada de decisão. É um investimento de custo elevado e irreversível, influenciado por diversas incertezas que se traduzem na rentabilidade a médio e a longo prazo do projecto. Adicionalmente, a existência de um serviço de alta velocidade ferroviária tem impacto em termos da competitividade de outros serviços: linha convencional, auto-estradas, ligações aéreas, etc. Tem ainda um impacto social muito forte, podendo contribuir para o desenvolvimento das regiões onde é implementado ou ter consequências negativas para as

zonas de onde tais serviços eventualmente se realocizam. A análise deste investimento é portanto muito complexa, uma vez que envolve custos e benefícios de diversos tipos, alguns não contabilizáveis (custos sociais, por exemplo).

Aqui é feita uma análise matemática deste problema, em linha com a efectuada em [13]. Note-se, no entanto, que a análise não é exaustiva uma vez que não se lida com a competitividade entre serviços, com o impacto social/político/ambiental, ou com as consequências da possível realocização de indústrias associadas ao serviço ferroviário. Analisa-se o investimento *per si*, isto é, pensando apenas na geração de lucros por passageiros. Para uma melhor compreensão deste tema segerimos a leitura de [13].

A decisão de investir ou não no novo Serviço de Alta Velocidade Ferroviária - vulgo TGV (e doravante assim designado), tem vindo a ser fortemente discutida no nosso país. Estamos perante uma oportunidade de investimento que vamos avaliar através da AOR, já que a decisão acerca da adopção deste investimento tem as características necessárias a este tipo de análise ([7]): é irreversível (pois os custos de investimento na linha de alta velocidade não podem ser convertidos em investimentos na linha convencional, pelo menos de acordo com a tecnologia presente), é flexível (o investimento pode ser adiado até que condições *ideais* estejam reunidas) e existe incerteza em relação ao futuro. Inerente à decisão (binária) sobre investimento (ou não) está a derivação do instante óptimo em que esta se deve tomar.

Tal como atrás mencionado, não focaremos o nosso trabalho em todas as dimensões do problema. Analisaremos a optimalidade do investimento em termos da geração de lucros materiais devido à melhoria de qualidade e diminuição do tempo de viagem para os passageiros que adoptarem este serviço. Consideramos que o principal benefício associado à implementação do TGV é a redução do tempo de viagem. Também supomos que qualquer utilizador só opta por viajar no novo serviço se lhe for mais conveniente; em particular, se o seu benefício pessoal for mais elevado que o associado às viagens pelo serviço convencional actual. O serviço de TGV terá, para os passageiros, um impacto positivo (diminuindo o tempo de viagem) e um impacto negativo (pois a tarifa do bilhete é superior à que pagarão com o serviço convencional), pelo que a decisão de viajar no TGV é o resultado do balanço entre o factor tempo e o factor tarifa.

Assumiremos, por hora, que a incerteza associada a este projecto tem origem num único factor, que doravante designaremos por *procura* pelo TGV, que será modelado por um processo estocástico em tempo contínuo, que se denota por $\{X_t, t \geq 0\}$. Para definir a política óptima de investimento deveremos indicar:

- Nível crítico da procura, x^* : designa o valor da procura que justifica que se tome a decisão

de investir no projecto. Claramente, é função do balanço entre o investimento (que numa primeira fase se assume constante e igual a γ e que, posteriormente, se assume também aleatório) e os ganhos esperados futuros traduzidos pela própria procura pelo serviço;

- Momento óptimo para se investir, t^* : designa o instante em que, pela primeira vez, o nível da procura é superior ou igual ao nível x^* , pelo que t^* designa o instante em que se deve tomar a decisão de investimento.

Note-se que, na verdade, do ponto de vista probabilístico, t^* é uma variável aleatória, um tempo de paragem para o processo estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$, pois

$$t^* = \inf\{t : X_t \geq x^*\} \quad (2.1)$$

Formalmente, uma vez caracterizada a dinâmica estocástica da procura $\{X_t, t \geq 0\}$, e sabendo qual o nível de procura que justifica o investimento, x^* , então t^* deverá ser encontrado através da equação (2.1). Porém, a determinação de t^* raramente se consegue analiticamente (excepto para casos triviais de $\{X_t, t \geq 0\}$), pelo que teremos de recorrer a simulação de processos.

Ao longo da dissertação, assumiremos dois tipos de modelação estocástica para a procura $\{X_t, t \geq 0\}$:

- Movimento Geométrico Browniano (processo com trajectórias contínuas);
- Movimento Geométrico Browniano com Saltos (processo com trajectórias eventualmente descontínuas).

No primeiro caso, o modelo subjacente é:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (2.2)$$

onde $\{W_t, t \geq 0\}$ é o movimento Browniano padrão. Na equação (2.2), μ representa o “drift” (tendência) e σ a difusão (uma medida de volatilidade), que se assume serem ambos conhecidos. Note-se que adoptamos a notação usual de Matemática Financeira ([2]), nomeadamente pela utilização da notação (abusiva) do diferencial d .

No segundo caso, assumimos que $\{X_t, t \geq 0\}$ é modelado pela equação:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t + UX_t dN_t \quad (2.3)$$

onde $\{N_t, t \geq 0\}$ é um Processo de Poisson de taxa λ , independente de $\{W_t\}$, que modela a periodicidade dos saltos e U é o valor desses saltos. Note-se que esta equação significa que, caso ocorram saltos no intervalo infinitesimal $(t, t + h)$ então, omitindo a parte contínua,

$$X_{t+h} = (1 + U)X_t$$

Neste trabalho, seguiremos as hipóteses de [13] e [6], assim como os desenvolvimentos matemáticos neles apresentados.

Numa fase posterior, assumiremos que existe outra fonte de incerteza associada ao problema (para além da procura): a despesa de investimento. Do ponto de vista da aplicação, trata-se de uma hipótese realista, uma vez que a própria despesa de investimento deverá ser função de muitos factores, conduzindo ao seu carácter profundamente aleatório e dependente do instante em que a decisão sobre o investimento for tomada.

Assim, para além da dinâmica da procura $\{X_t, t \geq 0\}$, iremos também assumir que a despesa de investimento, doravante designada por $\{\Gamma_t, t \geq 0\}$, é um processo estocástico, com características idênticas ao processo de procura.

Para ambos os casos deduziremos x^* . Só determinaremos t^* recorrendo a simulações.

Assumiremos que o tempo entre a tomada de decisão sobre o investimento e a sua implementação é fixo e igual a n , i.e., n é o tempo que demora a construção do TGV, durante o qual só o serviço convencional funciona.

Para definir correctamente todas as variáveis e parâmetros que influenciam a tomada de decisão, precisaremos também de definir custos associados quer à tarifa da viagem, quer ao tempo que demora fazer a deslocação. Desta forma, para $s \leq t^* + n$ assumiremos que o custo de cada viagem é dado por ψ e que pode ser visto do seguinte modo:

$$\psi = \eta + p$$

onde η é o valor do tempo gasto numa viagem e p é a tarifa associada a essa deslocação, ambos função da procura da seguinte forma:

$$\eta(X_s) = \beta X_s^{\delta_\beta} \quad (2.4)$$

$$p(X_s) = \alpha X_s^{\delta_\alpha} \quad (2.5)$$

onde δ_β e δ_α são usualmente designados por elasticidade (sendo δ_β a elasticidade entre o valor do tempo, η , e a procura no instante s , X_s , e δ_α a elasticidade entre o valor da tarifa, p , e a procura, X_s) e α é o parâmetro de escala que relaciona a procura, X_s , e a tarifa, p . Note-se que se está a assumir uma única tarifa e um único tempo de viagem, pelo que se está a estudar na verdade um processo de comparação entre o serviço convencional e o serviço da alta velocidade para um projecto concreto. No decorrer deste estudo, vamos assumir que $\delta_\beta = \delta_\alpha = \delta$ (elasticidades iguais para a tarifa e para o tempo).

A equação (2.4) contabiliza o tempo da viagem em termos de custo total, sendo diferente consoante se considere o período anterior à implementação e o período após a implementação

do investimento. Tal relação é afectada pelo parâmetro β que assume dois valores distintos, β_1 e β_2 , tal que a diferença entre eles mede o impacto na redução do tempo da viagem.

Assim, o custo (total) da viagem difere consoante esta seja efectuada pelo serviço actual (ψ_1) ou pelo serviço TGV (ψ_2), dado por:

$$\psi_1(X_s) = \beta_1 X_s^\delta + \alpha X_s^\delta \quad (2.6)$$

$$\psi_2(X_s) = \beta_2 X_s^\delta \quad (2.7)$$

para $s \leq t^* + n$.

Note-se que em (2.7) não se inclui o custo associado à tarifa, pois tradicionalmente este custo é incorporado na despesa de investimento. A nosso ver, esta decisão é discutível, uma vez que do ponto de vista matemático seria possível incorporar o custo de forma semelhante na equação (2.6). Porém, seguimos a abordagem de [13] de forma a utilizar os desenvolvimentos aí apresentados.

Por último, assumimos a existência de custos operacionais constantes ao longo do projecto, designados por φ .

Posto isto, a questão que se coloca é, sob as hipóteses e o modelo subjacente para o custo de investimento e a procura do serviço de alta velocidade, qual a política óptima de investimento. Na verdade, pretende-se derivar uma regra que indique a partir de que nível de procura, para um dado valor de despesa de investimento, se deve avançar com a decisão de construção do novo serviço. Em linguagem de programação dinâmica, este problema pode ser enunciado como um problema de paragem óptima, pelo que na secção que se segue se descreve sucintamente a técnica de programação matemática.

2.3 Optimalidade das Decisões - Programação Dinâmica

Nesta secção descrevemos a técnica de programação dinâmica, apenas com o detalhe necessário para o restante do trabalho. Para uma leitura mais formal do tópico, sugere-se a consulta de [7], no qual nos baseámos para a redacção desta secção.

Numa primeira abordagem, vamos admitir que o tempo é discreto, com incrementos unitários.

Num problema de paragem óptimo existem controlos que actuam sobre o balanço dos lucros (fluxos de caixa, como usualmente são designados na literatura financeira). No caso presente,

em cada instante só é possível tomar uma de duas acções: continuar ou parar, como de seguida se enuncia. Seja então u_t a decisão tomada no instante t , com

$$u_t = \begin{cases} \text{continuar} \\ \text{parar} \end{cases}$$

Neste caso específico, *parar* significa que vamos implementar o novo serviço de alta velocidade ferroviária em t ; por outro lado, *continuar* significa que devemos esperar por um momento em que o investimento seja mais rentável. Além disso, assim que se decida parar, não há mais nenhum acção que se possa tomar.

Para um instante t , seja x_t o valor da variável de estado X_t (que no caso desta tese, é o nível da procura) nesse ponto, aqui assumido como conhecido. Adicionalmente, assume-se que:

- $\pi(x_t)$ designa o fluxo de caixa (balanço entre as receitas e as despesas no instante t , se nesse instante se adoptar a decisão de continuar, sendo a procura igual a x_t);
- $F(x_t)$ designa o lucro futuro (balanço de todas as receitas e despesas a partir do instante t);
- ρ designa a taxa de actualização (a qual se assume constante e determinística para todos os instantes).

Caso a decisão seja continuar, o lucro futuro em t , $F(x_t)$, é igual ao fluxo neste instante, $\pi(x_t)$, mais o valor esperado do lucro futuro em $t + 1$, devidamente descontado, i.e.:

$$\pi(x_t) + \frac{1}{1 + \rho} E [F(X_{t+1})|x_t] \quad (2.8)$$

onde o operador valor esperado em (2.8) é em relação à variável de estado X_{t+1} . Na literatura financeira o valor $E [F(X_{t+1})|x_t]$ é usualmente designado por *Valor de Continuidade*.

Seja $\Omega(x_t)$ o lucro associado à paragem (i.e., associado à decisão de implementação imediata do TGV, o caso em análise). Então se em cada instante se toma uma decisão que maximiza o lucro, estamos perante uma política óptima. Assim sendo, em cada instante deve-se comparar o lucro associado à paragem ($\Omega(x_t)$) e o lucro associado à continuação ($\pi(x_t) + \frac{1}{1+\rho} E [F(X_{t+1})|x_t]$).

Se $\pi(x_t) + \frac{1}{1+\rho} E [F(X_{t+1})|x_t] > \Omega(x_t)$, então é mais vantajoso para a empresa continuar (e adiar a decisão de investimento); caso contrário, a empresa deve parar e proceder ao investimento. A comparação entre os dois lucros deve ser feita até que, pela primeira vez, $\Omega(x_t)$ exceda o lucro de continuação. Temos então que o lucro futuro, $F(x_t)$, é dado pela seguinte equação:

$$F(x_t) = \max \left\{ \Omega(x_t), \pi(x_t) + \frac{1}{1 + \rho} E [F(X_{t+1})|x_t] \right\}$$

Definição 2.3.1 (Decisão Óptima, Região de Continuação, Região de Paragem).

No instante t , seja

$$C = \{x : \pi(x) + \frac{1}{1 + \rho} E [F(x_{t+1})|x] > \Omega(x)\}$$

Então, se $x \in C$, diz-se que a decisão óptima é continuar (i.e., adiar a decisão de investimento). Se, pelo contrário, $x \notin C$, então diz-se que a decisão óptima é parar (i.e., iniciar a implementação do TGV).

O conjunto C designa-se por Região de Continuação e o seu complementar por Região de Paragem.

Todas as definições apresentadas estão formalizadas em [7]. Caso $\bar{C} \neq \emptyset$, então existe necessariamente pelo menos um valor que define a fronteira entre as duas regiões, que será designado por nível crítico ou, de forma mais intuitiva, valor óptimo de paragem.

Segue-se que o momento óptimo de paragem, definido anteriormente na equação (2.1), pode, equivalentemente, ser definido da forma

$$t^* = \inf \left\{ t : \Omega(X_t) > \pi(X_t) + \frac{1}{1 + \rho} E [F(X_{t+1}) | X_t] \right\}$$

Então, decorre que o valor óptimo de paragem pode ser definido à custa de t^* , como a seguir se apresenta.

Definição 2.3.2 (Valor Óptimo de Paragem). O valor óptimo de paragem, x^* , é o valor para o qual a decisão de continuar é óptima se $X_t < x^*$ e a decisão de parar é óptima se $X_t \geq x^*$.

Tendo já definido, ainda que informalmente, a política óptima de decisão associada ao procedimento em tempo discreto, vamos generalizar os resultados para o caso de tempo contínuo.

Note-se que decorre da Equação de Bellman ([7, 15]) que na região de continuação o lucro é dado por:

$$F(x_t) = \pi(x_t) + \frac{1}{1 + \rho} E [F(X_{t+1}) | x_t] \quad (2.9)$$

Para um intervalo infinitésimo dt , para o qual a procura varia dX_t , a expressão (2.9) pode ser reescrita, em tempo contínuo, da seguinte forma:

$$F(x_t) = \pi(x_t)dt + \frac{1}{1 + \rho dt} E [F(X_{t+dt}) | x_t] \quad (2.10)$$

$$= \pi(x_t)dt + \frac{1}{1 + \rho dt} E [F(x_t + dX_t) | x_t] \quad (2.11)$$

pois

$$F(x_t + dX_t) = dF(X_t) + F(x_t) \quad (2.12)$$

pelo que

$$E [F(x_t + dX_t) | x_t] = E [dF(X_t) | x_t] + F(x_t)$$

Assim,

$$F(x_t) = \pi(x_t)dt + \frac{1}{1 + \rho dt} (E[dF(X_t) | x_t] + F(x_t))$$

\Leftrightarrow

$$(1 + \rho dt)F(x_t) = (1 + \rho dt)\pi(x_t)dt + E [dF(X_t) | x_t] + F(x_t) \quad (2.13)$$

Aplicando o factor $(1 - \rho dt)$ à expressão (2.13):

$$(1 - \rho dt)(1 + \rho dt)F(x_t) = (1 - \rho dt)(1 + \rho dt)\pi(x_t)dt + (1 - \rho dt)(E[dF(X_t)|x_t] + F(x_t))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F(x_t) = \pi(x_t)dt + (1 - \rho dt)F(x_t) + E[dF(X_t)|x_t] \quad (2.14)$$

dado que $dF(X_t)$ é da ordem de dt (em virtude de (2.2) e da fórmula de Itô), vem que:

$$(1 - \rho dt)dF(X_t) = dF(X_t) - \rho dt dF(X_t) = dF(X_t)$$

pois $dt dF(X_t) = (dt)^2 = 0$.

Por outro lado, na região de paragem,

$$F(x_t) = \Omega(x_t) \quad (2.15)$$

Combinando a região de continuação e a de paragem, resulta que se se aplicar o princípio de optimalidade de Bellman em cada instante, a função lucro F (para tempo contínuo) é solução da equação:

$$F(x_t) = \max \{ \Omega(x_t), \pi(x_t)dt + (1 - \rho dt)F(x_t) + E[dF(X_t)|x_t] \} \quad (2.16)$$

O objectivo é encontrar uma função F que obedeça a esta equação. Encontrando F estaremos também, pelo princípio de optimalidade de Bellman, a determinar a política óptima, uma vez que para cada instante t é determinada a decisão (óptima) u_t .

Na região de continuação, de acordo com a equação (2.14):

$$F(x_t) = \pi(x_t)dt + (1 - \rho dt)F(x_t) + E[dF(X_t)|x_t]$$

$$\Leftrightarrow \rho dt F(x_t) = \pi(x_t)dt + E[dF(X_t)|x_t]$$

$$\Leftrightarrow \rho F(x_t) = \pi(x_t) + \frac{1}{dt} E[dF(X_t)|x_t] \quad (2.17)$$

Note-se que nesta região temos $\pi(x_t) = 0$, pois a oportunidade de investimento não gera nenhum fluxo de caixa até ao momento em que este é feito, pelo que (2.17) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\rho dt F(x_t) = E[dF(X_t)|x_t] \quad (2.18)$$

Usando a Expansão da Série de Taylor ([9]) e desprezando os termos de ordem superior a 2, vem

$$dF(x_t) = F'(x_t)dx_t + \frac{1}{2}F''(x_t)dx_t^2 \quad (2.19)$$

Recordando que $\{X_t\}$ obedece à equação (2.2), vem que a equação (2.19), agora para X_t arbitrário e aleatório, é dada por:

$$dF(X_t) = F'(X_t) (\mu_x X_t dt + \sigma_x X_t dW_t^x) + \frac{1}{2} F''(X_t) (\mu_x X_t dt + \sigma_x X_t dW_t^x)^2 \quad (2.20)$$

Aplicando o operador valor esperado e usando as propriedades que decorrem do facto de $\{W_t\}$ ser um movimento Browniano (enunciadas na introdução), vem que

$$E [dF(X_t)|X_t] = F'(X_t)\mu_x X_t dt + \frac{1}{2}F''(X_t)\sigma_x^2 X_t^2 dt \quad (2.21)$$

Agora substituindo (2.21) em (2.18), vem

$$\frac{1}{2}F''(X_t)\sigma_x^2 X_t^2 + F'(X_t)\mu_x X_t = \rho F(X_t) \quad (2.22)$$

válida para qualquer $\{X_t\}$. Em particular, significa que:

$$\frac{1}{2}F''(x)\sigma_x^2 x^2 + F'(x)\mu_x x = \rho F(x)$$

que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem ([7]), cuja solução é dada por

$$F(X_t) = AX_t^a + BX_t^b + C \quad (2.23)$$

onde A , B e C dependem do problema em estudo.

A equação (2.23) tem três incógnitas, que podemos descobrir pela análise de três condições fronteira. Dado que se $X_t = 0$, então não haverá lucro, devemos ter a primeira condição de fronteira, conhecida por condição inicial, definida por:

$$F(0) = 0$$

Pela equação de Bellman (2.16) sabemos que na região de paragem (decisão de investir) temos $F(X_t) = \Omega(X_t)$. Então, por continuidade, podemos impor a seguinte condição:

$$F(x^*) = \Omega(x^*)$$

para todo o t . Esta condição é conhecida na literatura ([7]) por *Value Matching Condition*. No entanto, esta condição ainda não é suficiente para levantar todas as indeterminações do problema. Assim, introduzimos uma nova condição conhecida na literatura ([7]) por *Smooth Pasting Condition*, que consiste em exigir que para cada t , as funções F e Ω se encontrem tangencialmente em x^* , ou seja,

$$F'(x^*) = \Omega'(x^*)$$

Agora que já vimos como funciona a técnica de programação dinâmica, podemos ver no próximo capítulo o seu uso para a obtenção do valor crítico da procura pelo TGV.

3 Enquadramento Específico

No presente capítulo, deduzimos o nível crítico que justifica o investimento no TGV de acordo com o modelo e princípio de optimalidade de Bellman descrito no capítulo anterior.

Mais uma vez é seguido de perto o trabalho de [13], onde estão justificados todos os pressupostos económico-financeiros subjacentes ao modelo. Adoptaremos igualmente as definições, nomeadamente no tocante à função lucro (antes e após a implementação do projecto), aos valores dos parâmetros e demais hipóteses. A nossa contribuição encontra-se focada, no seu essencial, no modelo com duas incertezas e com saltos, situação ainda não tratada na literatura.

Recorde-se que assumimos dois casos, relativos às fontes de incerteza:

1. Existe apenas uma fonte de incerteza, a procura pelo TGV, representada por $\{X_t, t \geq 0\}$, assumindo-se que a despesa de investimento é constante;
2. Existem duas fontes de incerteza, a procura pelo TGV, e a despesa de investimento, representada por $\{\Gamma_t, t \geq 0\}$.

Em ambos os casos vamos considerar que as variáveis podem ser modeladas por um Movimento Browniano Geométrico ou por um Movimento Browniano Geométrico com Saltos.

Neste capítulo apresentaremos a dedução analítica do nível crítico de procura para as diferentes hipóteses consideradas.

3.1 Nível Crítico da Procura - Despesa de Investimento Constante

Neste caso, em que há apenas uma fonte de incerteza, assumimos que a procura pelo TGV pode ser modelada por:

- Caso 1: Movimento Browniano Geométrico;
- Caso 2: Movimento Browniano Geométrico com Saltos.

Caso 1

Seja

$$dX_t = X_t \mu_x dt + X_t \sigma_x dW_t^x \quad (3.1)$$

a equação que modela a procura pelo TGV, onde

- μ_x é a taxa de crescimento da procura pelo TGV;
- σ_x é a volatilidade da procura pelo TGV;
- $\{W_t^x, t \geq 0\}$ representa as variações aleatórias da procura pelo TGV. Esta variável aleatória segue um movimento Browniano padrão.

No decorrer deste trabalho vamos sempre admitir que μ_x e σ_x são constantes.

A solução da equação diferencial parcial (3.1) é dada, de acordo com [2], por:

$$X_t = x \exp \left\{ \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2} \right) t + \sigma_x W_t^x \right\} \quad (3.2)$$

onde x é o valor inicial da procura pelo TGV (i.e., $X_0 = x$).

Aplicando o operador valor esperado, e dado que X_t segue uma distribuição log-normal ([2]), vem que

$$E[X_t^\theta] = x^\theta \exp \left\{ \theta \mu_x t + \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) \sigma_x^2 t \right\} \quad (3.3)$$

como foi referido na introdução.

Seja t^* o instante a partir do qual o serviço de TGV está disponível para os utilizadores. Como vimos, t^* é uma variável aleatória, definida como o tempo de primeira passagem do nível de procura (vide equação (2.2)).

Vamos assumir que o valor do serviço convencional para um utilizador é a soma do custo da viagem e do tempo que demora, pelo que

$$v_1(X_s) = \beta_1 X_s^\delta + \alpha X_s^\delta \quad (3.4)$$

para $s \leq t^* + n$, reflecte o custo total no instante s (antes do TGV ser implementado). Na realidade esta fórmula não é mais do que (2.6), já introduzida no capítulo anterior.

Após a implementação do TGV, para além do custo definido em (2.7), temos também o custo associado ao investimento, γ , e o custo operacional (doravante assumido fixo), φ , pelo que o custo para $s > t^* + n$ é dado por

$$v_2(X_s) = \beta_2 X_s^\delta + \frac{\varphi}{X_s} + \frac{\rho \gamma e^{\rho n}}{X_s} \quad (3.5)$$

Note-se que:

- $\frac{\rho}{X_s}$ designa o custo fixo operacional por cada um dos indivíduos que compõem a procura pelo serviço de alta velocidade;
- $\frac{\rho \gamma e^{\rho n}}{X_s}$ representa o custo de investimento, por unidade de tempo e por indivíduo.

De referir que $\gamma e^{\rho n}$ representa o valor do investimento no final da construção do serviço, pelo que assumimos que este é pago apenas no final da construção, e portanto γ é o valor do investimento no instante em que se toma a decisão de investir.

Dado que o tempo de viagem com o serviço de alta velocidade é inferior ao do serviço convencional, temos que $\beta_2 < \beta_1$.

Então, o custo total no instante 0, para **todos** os utilizadores, para o horizonte temporal $(0, \infty)$, é dado por:

$$\int_0^{t^*+n} X_s v_1(X_s) e^{-\rho s} ds + \int_{t^*+n}^{\infty} X_s v_2(X_s) e^{-\rho s} ds \quad (3.6)$$

Note-se que o factor $e^{-\rho s}$ reflecte o desconto associado a valores futuros relativo ao instante presente.

Designa-se por $F(\cdot)$ o valor esperado do custo total, assumindo que $X_0 = x$, i.e.

$$F(x) = E_x \left[\int_0^{t^*+n} X_s v_1(X_s) e^{-\rho s} ds + \int_{t^*+n}^{\infty} X_s v_2(X_s) e^{-\rho s} ds \right] \quad (3.7)$$

onde $E_x[\cdot]$ designa o valor esperado condicionado em $X_0 = x$.

Note-se que, aplicando (3.4) e (3.5), (3.7) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$F(x) = E_x \left[\int_0^{\infty} (\beta_1 X_s^\theta + \alpha X_s^\theta) e^{-\rho s} ds + \int_{t^*+n}^{\infty} ((\beta_1 - \beta_2) X_s^\theta + \alpha X_s^\theta - \varphi - \rho \gamma e^{\rho n}) e^{-\rho s} ds \right] \quad (3.8)$$

fazendo $\theta = \delta + 1$. Ao reescrever $F(\cdot)$ fazemos realçar o facto de o primeiro integral em (3.8) não depender de t^* , i.e., não depender da política óptima.

Então, a política óptima de investimento consiste em determinar o valor t^* , que maximiza $F(x)$, i.e.

$$\sup_{t^*} E_x \left[\int_{t^*+n}^{\infty} ((\beta_1 - \beta_2) X_s^\theta + \alpha X_s^\theta - \varphi - \rho \gamma e^{\rho n}) e^{-\rho s} ds \right] \quad (3.9)$$

Relembramos que t^* é um tempo de paragem para $\{X_t\}$; por outro lado, $\{X_t\}$ é um processo de Markov (pois é função determinística do movimento Browniano, de acordo com (3.2), ele próprio um processo de Markov). Estamos pois em condições de aplicar a propriedade fortemente Markoviana ([10]) a (3.9). Note-se que em face desta propriedade, podemos assumir que

$$\sup_{t^*} E_x \left[\int_{t^*+n}^{\infty} ((\beta_1 - \beta_2) X_s^\theta + \alpha X_s^\theta - \varphi - \rho \gamma e^{\rho n}) e^{-\rho s} ds \right] \quad (3.10)$$

$$= \sup_{t^*} E_x \left[\int_{t^*}^{\infty} ((\beta_1 - \beta_2) X_{s+n}^\theta + \alpha X_{s+n}^\theta - \varphi - \rho \gamma e^{\rho n}) e^{-\rho(s+n)} ds \right] \quad (3.11)$$

$$= \sup_y E_y \left[\int_0^{\infty} ((\beta_1 - \beta_2) X_{s+n}^\theta + \alpha X_{s+n}^\theta - \varphi - \rho \gamma e^{\rho n}) e^{-\rho(s+n)} ds \right] \quad (3.12)$$

onde y designa o valor da procura no instante t^* , i.e, $X_{t^*} = y$.

Seja então

$$x^* = \arg \sup_y E_y \left[\int_0^{\infty} ((\beta_1 - \beta_2) X_{s+n}^\theta + \alpha X_{s+n}^\theta - \varphi - \rho \gamma e^{\rho n}) e^{-\rho(s+n)} ds \right] \quad (3.13)$$

e $F(x^*)$ o correspondente valor esperado respeitante a (3.8).

Finalmente, pelo Teorema da Convergência Dominada ([10]), podemos permutar o valor esperado com o integral, ficando com:

$$F(x^*) = \int_0^{\infty} ((\beta_1 - \beta_2) E_{x^*} [X_{s+n}^\theta] + \alpha E_{x^*} [X_{s+n}^\theta] - \varphi - \rho \gamma e^{\rho n}) e^{-\rho(s+n)} ds \quad (3.14)$$

Como forma de garantir que o valor crítico é certamente alcançado, precisamos de estabelecer uma condição que garanta que a taxa de crescimento esperada da procura nunca é superior

à taxa de actualização. Note-se então, que a taxa de crescimento esperada da procura é o argumento da exponencial na expressão que define o $E[X_t^\theta]$, ou seja, $\theta\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2\theta(\theta - 1)$. Por outro lado, a taxa de actualização é ρ . Assim, a condição necessária é:

$$\rho > \theta\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2\theta(\theta - 1) \quad (3.15)$$

Reescrevendo a equação (3.14), após simplificações algébricas, obtemos a seguinte equação ¹:

$$F(x^*) = Ax^{*\theta} + Bx^{*\theta} + C \quad (3.16)$$

onde:

$$A = \frac{2(\beta_1 - \beta_2) \exp\left\{\left(\mu_x\theta + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma_x^2 - \rho\right)n\right\}}{2\rho - 2\mu_x\theta - \theta^2\sigma_x^2 + \theta\sigma_x^2} \quad (3.17)$$

$$B = \frac{2\alpha \exp\left\{\left(\mu_x\theta + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma_x^2 - \rho\right)n\right\}}{2\rho - 2\mu_x\theta - \theta^2\sigma_x^2 + \theta\sigma_x^2} \quad (3.18)$$

$$C = -\frac{\varphi e^{-\rho n} + \gamma}{\rho} \quad (3.19)$$

Note-se que a equação (3.16) é a instanciação, para o nosso problema específico, da equação (2.23) obtida no capítulo anterior, equação esta que vem da aplicação do princípio da optimalidade de Bellman ([15]). Nesse Capítulo vimos que a equação (2.23) é precisamente solução da equação diferencial parcial (2.22) obtida por aplicação das regras do cálculo de Itô ([2]) (visto que F é função de um processo estocástico que obedece a uma equação diferencial estocástica). No caso da ilustração em causa, a equação diferencial parcial que se obtém é:

$$\frac{1}{2}\sigma_x^2x^2F''(x) + \mu_xxF'(x) - \rho F(x) = 0 \quad (3.20)$$

(que resulta de (2.16) com as devidas substituições). No caso presente, esta equação é também designada de equação de Cauchy-Euler ([3]), para a qual a solução é dada pela seguinte expressão

$$F(x) = a_1x^{r_1} + a_2x^{r_2} \quad (3.21)$$

onde r_1 e r_2 são, respectivamente, a raiz positiva e negativa da seguinte equação:

$$\frac{1}{2}\sigma_x^2r(r - 1) + \mu_xr - \rho = 0$$

Recorde-se, tal como visto no Capítulo 2, que a solução de (3.21) tem de obedecer às condições atrás designadas como condições de fronteira. Nomeadamente, é necessário verificar que $F(0) = 0$, donde resulta que $a_2 = 0$, pois se $r_2 < 0$, então $x^{r_2} \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0$, excepto se $a_2 = 0$.

¹Os cálculos para a obtenção de A , B e C encontram-se nos anexos.

Assim, concluímos que (3.20) tem a seguinte solução

$$F(x) = a_1 x^{r_1} \quad (3.22)$$

onde

$$a_1 = Ax^{*\theta-r_1} + Bx^{*\theta-r_1} \quad (3.23)$$

pela condição *Value-Matching*, ou seja, de forma a garantir que $F(x^*) = Ax^{*\theta} + Bx^{*\theta} + C$. Em face de (3.22) e de (3.23), concluímos que a solução da equação (3.20) é dada por

$$F(x) = [Ax^{*\theta-r_1} + Bx^{*\theta-r_1} + Cx^{*-r_1}] x^{r_1} \quad (3.24)$$

para qualquer x . Recordemo-nos que x é precisamente o valor inicial da procura (i.e., $X_0 = x$), conhecido, e que x^* é o valor, desconhecido e a determinar, da procura no instante t^* em que se procede à tomada de decisão sobre o investimento. Então, em face de (3.13), temos que maximizar $Ax^{*\theta-r_1} + Bx^{*\theta-r_1} + Cx^{*-r_1}$, pelo que x^* é dado pela solução da seguinte equação

$$\begin{aligned} A(\theta - r_1)x^{*\theta-r_1} + B(\theta - r_1)x^{*\theta-r_1} - Cr_1x^{*-r_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ (A + B)(\theta - r_1)x^{*\theta-r_1} &= Cr_1x^{*-r_1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, a fórmula explícita para o valor crítico da procura pelo TGV é dada por

$$x^* = \exp \left\{ \frac{1}{\theta} \ln \left\{ \frac{-r_1 C}{(A + B)(r_1 - \theta)} \right\} \right\} \quad (3.26)$$

Caso 2

Neste caso, a procura pelo TGV segue um movimento Browniano Geométrico com Saltos tal que:

$$dX_t = X_t \mu_x dt + X_t \sigma_x dW_t^x + X_t dN_t \quad (3.27)$$

onde $\{N_t\}$ é um Processo de Poisson com taxa λ , independente de $\{X_t\}$, tal que $dN_t = 1 + U$ com probabilidade λdt , sendo U a magnitude (determinística) do salto. Os restantes parâmetros são definidos como no caso anterior ([6, 11]).

Neste caso, a solução da equação diferencial (3.27) é dada, de acordo com [11], por:

$$X_t = x \exp \left\{ \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2} \right) t + \sigma_x W_t^x \right\} (1 + U)^{N_t} \quad (3.28)$$

e o valor esperado $E[X_t^\theta]$ passa a ser escrito como

$$E[X_t^\theta] = x^\theta \exp \left\{ \theta \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2} \right) t \right\} E \left[e^{\theta \sigma_x W_t^x} (1 + U)^{N_t \theta} \right] \quad (3.29)$$

Como assumimos que os saltos são independentes do movimento Browniano,

$$E[X_t^\theta] = x^\theta \exp \left\{ \theta \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2} \right) t \right\} E \left[e^{\theta \sigma_x W_t^x} \right] E \left[(1+U)^{N_t \theta} \right] \quad (3.30)$$

$$= x^\theta \exp \left\{ \theta \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2} \right) t \right\} E \left[e^{\theta \sigma_x W_t^x} \right] E \left[(1+U)^{N_t \theta} \right] \quad (3.31)$$

$$= x^\theta \exp \left\{ \theta \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2} \right) t \right\} \exp \left\{ \frac{t(\sigma_x \theta)^2}{2} \right\} E \left[(1+U)^{N_t \theta} \right] \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

Se $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então a sua função geradora de momentos é dada por:

$$E \left[e^{tY} \right] = e^{\lambda e^t - \lambda}$$

donde resulta que:

$$E[(1+U)^{N_t \theta}] = E \left[e^{\log(1+U)^{N_t \theta}} \right] \quad (3.34)$$

$$= E \left[e^{N_t \theta \log(1+U)} \right] \quad (3.35)$$

$$= e^{\lambda t (e^{\log(1+U)^\theta} - 1)} \quad (3.36)$$

$$= e^{\lambda t (e^{(1+U)^\theta} - 1)} \quad (3.37)$$

$$(3.38)$$

Portanto,

$$E[X_t^\theta] = x^\theta \exp \left\{ \theta \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2} \right) t \right\} \exp \left\{ \frac{t(\sigma_x \theta)^2}{2} \right\} \exp^{\lambda t (e^{(1+U)^\theta} - 1)} \quad (3.39)$$

$$= x^\theta \exp \left\{ \left(\theta \mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2} \theta (\theta - 1) + \lambda (1+U)^\theta - \lambda \right) t \right\} \quad (3.40)$$

Note-se que a resolução do problema de paragem para este caso é idêntica à efectuada no cenário anterior, exceptuando os cálculos que envolvem $E[X_t^\theta]$. Assim, podemos começar a nossa análise já a partir da equação (3.14), ou seja,

$$F(x^*) = \int_0^\infty ((\beta_1 - \beta_2) E_{x^*} [X_{s+n}^\theta] + \alpha E_{x^*} [X_{s+n}^\theta] - \varphi - \rho \gamma) e^{-\rho(s+n)} ds \quad (3.41)$$

A condição

$$\rho > \theta \mu_x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \theta (\theta - 1) + \lambda (1+U)^\theta - \lambda \quad (3.42)$$

garante que o valor crítico da procura pelo TGV é certamente atingido, onde $\theta \mu_x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \theta (\theta - 1) + \lambda (1+U)^\theta - \lambda$ é a taxa de crescimento esperada da procura pelo TVG assumindo que a mesma é modelada por um movimento Browniano geométrico com Saltos e ρ é a taxa de actualização do processo.

Mais uma vez por resolução e simplificação do integral (3.41)¹, obtemos:

$$F(x^*) = Ax^{*\theta} + Bx^{*\theta} + C \quad (3.43)$$

onde:

$$A = \frac{2(\beta_1 - \beta_2) \exp\left\{\left(\mu_x\theta + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma_x^2 + \lambda(1 + U)^\theta - \lambda - \rho\right)n\right\}}{2\rho - 2\mu_x\theta - \theta^2\sigma_x^2 + \theta\sigma_x^2 + 2\lambda(1 + U)^\theta + 2\lambda} \quad (3.44)$$

$$B = \frac{2\alpha \exp\left\{\left(\mu_x\theta + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma_x^2 + \lambda(1 + U)^\theta - \lambda - \rho\right)n\right\}}{2\rho - 2\mu_x\theta - \theta^2\sigma_x^2 + \theta\sigma_x^2 + 2\lambda(1 + U)^\theta + 2\lambda} \quad (3.45)$$

$$C = -\frac{\varphi e^{-\rho n} + \gamma}{\rho} \quad (3.46)$$

Como $F(\cdot)$ é função do processo de procura $\{X_t\}$, que segue um movimento Browniano geométrico com saltos, ao aplicarmos novamente o Lema de Itô ([11]), tal como no caso anterior, a $F(\cdot)$, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{1}{2}\sigma_x^2 x^2 F''(x) + \mu_x x F'(x) - (\rho + \lambda)F(x) + \lambda E[F((1 + U)x)] = 0 \quad (3.47)$$

que satisfaz as condições de fronteira da mesma forma que no caso anterior.

A solução da equação diferencial homogênea desta equação de Cauchy-Euler (3.47) é dada por:

$$F(x) = a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} \quad (3.48)$$

onde r_1 e r_2 são, respectivamente, a raiz positiva e a raiz negativa da seguinte equação:

$$\frac{1}{2}\sigma_x^2 r(r - 1) + \mu_x r - (\rho + \lambda) + \lambda(1 + U)^r = 0 \quad (3.49)$$

Pela mesma razão apresentada anteriormente, a equação (3.47) tem a seguinte solução:

$$F(x) = a_1 x^{r_1} \quad (3.50)$$

onde

$$a_1 = Ax^{*\theta-r_1} + Bx^{*\theta-r_1} \quad (3.51)$$

pela condição *Value-Matching*.

Repetindo os passos feitos no caso anterior, obtemos a mesma fórmula explícita para o valor crítico da procura pelo TGV, ou seja,

$$x^* = \exp\left\{\frac{1}{\theta} \ln\left\{\frac{-r_1 C}{(A + B)(r_1 - \theta)}\right\}\right\} \quad (3.52)$$

Concluimos então que a única distinção entre os dois casos está na condição que garante a existência do valor crítico (3.42), nos valores de A , B e C , e na raiz da equação (3.49).

3.2 Nível Crítico da Procura - Despesa de Investimento Estocástica

Nesta secção, assume-se que existem duas fontes de incerteza.

- procura pelo TGV - $\{X_t\}$;
- despesa de investimento - $\{\Gamma_t\}$.

Procedemos tal como no cenário anterior, ou seja, vamos apresentar dois casos distintos:

- Caso 1
 - $\{X_t\}$ é modelado por um Movimento Browniano Geométrico;
 - $\{\Gamma_t\}$ é modelado por um Movimento Browniano Geométrico.
- Caso 2
 - $\{X_t\}$ é modelado por um Movimento Browniano Geométrico com Saltos;
 - $\{\Gamma_t\}$ é modelado por um Movimento Browniano Geométrico com Saltos.

Tanto quanto sabemos, não existem referências bibliográficas sobre este caso.

Caso 1

Neste caso os processos estocásticos de interesse são:

- $\{X_t\}$, o processo que modela a procura pelo TGV, que se assume seguir um Movimento Browniano Geométrico, dado por (3.1);
- $\{\Gamma_t\}$ é o processo que modela a despesa de investimento, que se assume seguir um Movimento Browniano Geométrico, tal que:

$$\Gamma_t = \mu_\gamma \Gamma_t dt + \sigma_\gamma \Gamma_t dW_t^\gamma$$

com μ_γ e σ_γ representando, respectivamente, a taxa de crescimento e a volatilidade da despesa de investimento, e $\{W_t^\gamma\}$ representando as variações aleatórias da despesa no TGV.

Note-se que estamos a assumir que os processos não seguem necessariamente o mesmo movimento Browniano, podendo nalgumas situações ter correlação nula (i.e., serem independentes) ou correlação não nula. Na verdade tal significa que se (W_t^x, W_t^γ) designar o par aleatório do movimento Browniano no instante t para X_t e para Γ_t , respectivamente, então este par (W_t^x, W_t^γ) tem distribuição normal-bivariada com vector dos valores esperados nulo e matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} t & cov(W_t^x, W_t^\gamma) \\ cov(W_t^x, W_t^\gamma) & t \end{bmatrix}$$

Nesta situação, com duas incertezas, poderíamos adoptar a mesma abordagem que no caso de a despesa de investimento ser constante. Neste caso, o lucro, $F(\cdot, \cdot)$, (que no caso anterior é apenas função do nível da procura) seria também função da despesa de investimento, agora

estocástica. Na verdade, para resolver esta situação seguindo um procedimento semelhante ao caso anterior, tendo como base [13], teríamos de resolver a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma_\gamma^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + 2 \text{corr}(x, \gamma) \sigma_x \sigma_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial \gamma} \right] F(x, \gamma) + \mu_x x \frac{\partial}{\partial x} F(x, \gamma) + \mu_\gamma \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} F(x, \gamma) - \rho F(x, \gamma) = 0 \quad (3.53)$$

onde x designa o nível da procura e γ o valor do investimento no instante inicial, sendo $F(x, \gamma)$ o valor do lucro quando a procura é x e o investimento é γ . Porém, esta equação é de difícil resolução analítica, pelo que será necessário recorrer a outro procedimento, que de seguida se descreve resumidamente (mais detalhes poderão ser encontrados em [13]).

Com o intuito de obter desenvolvimentos analíticos para a solução, vamos considerar (para além das hipóteses atrás referidas sobre as constantes de elasticidade) que os custos de exploração são dados por

$$C = l\gamma$$

i.e., os custos de exploração são uma proporção (l) da despesa de investimento no instante inicial. Adicionalmente, assumiremos que a função de lucro $F(., .)$ obedece à seguinte condição:

$$F(kX_t, k\Gamma_t) = kf(X_t^\theta, \Gamma_t)$$

onde $f(., .)$ é uma função a definir. Note-se que a condição anterior apenas explicita que o lucro do projecto afecta, na mesma proporção, o lucro gerado pelo investimento (função de X_t) e a despesa de investimento (Γ_t), desde que tanto o valor da procura como da despesa de investimento sejam afectados por uma constante multiplicativa k .

Para x e γ arbitrários, em face da condição sobre F , temos que

$$F(x, \gamma) = F\left(\gamma \frac{x}{\gamma}, \gamma \frac{\gamma}{\gamma}\right) = \gamma f\left(\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\theta, 1\right) = \gamma f(q)$$

onde $q = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^\theta$. Neste caso, fazendo

$$q^* = \left(\frac{x^*}{\gamma}\right)^\theta \quad (3.54)$$

(onde x^* e γ são os valores que delimitam a região de valores (x, γ) em que não é óptimo investir) temos que a política óptima pode ser definida em função deste rácio q^* .

Resta-nos pois encontrar uma função f que obedeça a condições económicas semelhantes às do nosso problema. Para tal vamos recorrer à equação (3.53) e às sucessivas derivadas de

$F(x, \gamma)$, onde x e γ são valores arbitrários.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F(x, \gamma) &= \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\theta-1}\theta f'(q) \\ \frac{\partial}{\partial \gamma}F(x, \gamma) &= f(q) - \frac{x\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-1+\theta}\theta f'(q)}{\gamma} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x, \gamma) &= \frac{\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-2+\theta}(-1+\theta)\theta f'(q)}{\gamma} + \frac{\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-2+2\theta}(\theta)^2\theta f''(q)}{\gamma} \\ \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}F(x, \gamma) &= \frac{x^2\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-2+\theta}(-1+\theta)\theta f'(q)}{(\gamma)^3} + \frac{x^2\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-2+2\theta}(\theta)^2\theta f''(q)}{(\gamma)^3} \\ \frac{\partial^2}{\partial \gamma \partial x}F(x, \gamma) &= \frac{x\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-2+\theta}(-1+\theta)\theta f'(q)}{(\gamma)^2} + \frac{x\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-2+2\theta}(\theta)^2\theta f''(q)}{(\gamma)^2}\end{aligned}$$

onde f' e f'' são, respectivamente, a primeira e a segunda derivada de f .

Tal como nos casos apresentados anteriormente, a equação (3.53) com as devidas alterações de acordo com as derivadas anteriormente apresentadas é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem de Cauchy-Euler ([7]), tendo como solução

$$f(q) = b_1q^{s_1} + b_2q^{s_2}$$

onde s_1 e s_2 são, respectivamente, a raiz positiva e a raiz negativa da seguinte equação:

$$\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 \theta^2 + \sigma_\gamma^2 - 2\sigma_x \sigma_\gamma \text{corr}(x, \gamma) \theta \right] s(s-1) + \left[\mu_x \theta + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \theta (\theta-1) - \mu_\gamma \right] s - (\rho - \mu_\gamma) = 0 \quad (3.55)$$

Pelos mesmos argumentos que anteriormente, conclui-se que $b_2 = 0$, donde a solução $f(\cdot)$ é dada por:

$$f(q) = b_1q^{s_1} \quad (3.56)$$

que satisfaz as condições de fronteira usuais. Em particular, satisfaz a condição *Value-Matching*, ou seja,

$$f(q^*) = q^* (A + B) - l - 1 \quad (3.57)$$

Resulta daqui que $b_1 = q^{*1-s_1}(A + B) - (l + 1)q^{*-s_1}$. De acordo com (3.56) e (3.57), obtemos o seguinte expressão

$$f(q) = \left[q^{*1-s_1}(A + B) - (l + 1)q^{*-s_1} \right] q^{s_1}$$

que também pode ser encontrada em [13].

Assim, o valor que maximiza $\left[q^{*1-s_1}(A + B) - (l + 1)q^{*-s_1} \right]$ é dado por:

$$\left[\frac{l+1}{A+B} \right] \left[\frac{s_1}{s_1-1} \right]$$

Donde

$$q^* = \left[\frac{l+1}{A+B} \right] \left[\frac{s_1}{s_1-1} \right]$$

Sendo que anteriormente assumimos que $q = \left(\frac{x}{\gamma} \right)^\theta$, podemos reescrever esta expressão para o caso óptimo, ou seja, $q^* = \left(\frac{x^*}{\gamma} \right)^\theta$ e a partir desta obter o valor crítico x^* :

$$x^* = \left[\frac{l+1}{A+B} \frac{s_1}{s_1-1} \gamma^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \quad (3.58)$$

onde A e B são definidos, de acordo com, (3.17) e (3.18), respectivamente.

Caso 2

Neste caso, assumimos que ambas as incertezas são modeladas por um movimento Browniano geométrico com saltos, ou seja,

$$dX_t = X_t \mu_x dt + X_t \sigma_x dW_t^x + X_t dN_t$$

$$d\Gamma_t = \Gamma_t \mu_\gamma dt + \Gamma_t \sigma_\gamma dW_t^\gamma + \Gamma_t dN_t$$

onde $\{N_t\}$ é um processo de Poisson de taxa λ , tal como no caso anterior (em que havia apenas uma fonte de incerteza). Assume-se que o processo de saltos rege tanto a procura como o investimento. Os resultados que a seguir se derivam podem ser também extensíveis ao caso de dois processos de saltos independentes, com as devidas alterações. Fica em aberto o caso de processos de salto com correlação não nula mas distintos. Porém, esta situação não é muito interessante do ponto de vista económico, razão pela qual não foi objecto de investigação. Na verdade, a situação mais interessante é precisamente a que aqui estudamos.

Nesta secção vamos concluir que o valor crítico x^* é obtido como uma combinação dos resultados obtidos nos casos anteriores (caso de uma incerteza com saltos e duas incertezas). Na verdade x^* é dado pela equação (3.58), com as devidas alterações (idênticas às do caso de uma incerteza com saltos).

Começemos por escrever a equação diferencial ordinária que representa o caso em estudo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma_\gamma^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + 2 \text{corr}(x, \gamma) \sigma_x \sigma_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial \gamma} \right] F(x, \gamma) + \mu_x x \frac{\partial}{\partial x} F(x, \gamma) \\ & + \mu_\gamma \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} F(x, \gamma) - (\rho + \lambda) F(x, \gamma) + \lambda E [F((1+U)x, (1+U)\gamma)] = 0 \end{aligned}$$

Esta expressão é obtida simplesmente pela combinação de dois casos anteriores: o caso em que estávamos perante uma única incerteza modelada por movimento com saltos e o único caso, até agora, em que estudamos as duas incertezas inerentes ao problema.

Assumimos as mesmas hipóteses do caso anterior, em particular

$$F(x, \gamma) = \gamma f(q)$$

com $q = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^\theta$.

Recorrendo às derivadas apresentadas no caso anterior, obtemos novamente uma diferencial ordinária que satisfaz condições de fronteira idênticas ao caso anterior e tem por solução geral, já após simplificação,

$$f(q) = b_1 q^{s_1}$$

sendo s_1 a raiz positiva da equação quadrática

$$\frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 \theta_\gamma^2 - 2\sigma_x \sigma_\gamma \text{corr}(x, \gamma) \theta \right] s(s-1) + \left[\mu_x \theta + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \theta (\theta - 1) - \mu_\gamma \right] s - (\rho + \lambda - \mu_\gamma) \lambda (1 + U)^{2s} = 0 \quad (3.59)$$

Assim, pelo mesmo raciocínio, concluímos que o valor crítico x^* é dado por

$$x^* = \left[\frac{l+1}{A+B} \frac{s_1}{s_1-1} \gamma^\theta \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (3.60)$$

onde A e B são dados por (3.45) e (3.46) e l a proporção definida anteriormente. Embora a fórmula para o cálculo de x^* para este caso pareça ser igual à do caso anterior (ver (3.58)), a diferença reside na determinação da raiz da equação (3.59), enquanto que no primeiro caso é a raiz de (3.55).

4 Resultados Numéricos

Neste capítulo vamos ilustrar numericamente os resultados apresentados e obtidos no capítulo anterior. Em particular vamos considerar várias simulações com vista à determinação da política óptima de investimento, procurando também analisar a influência dos diversos parâmetros (por exemplo, $\mu_x, \mu_\gamma, \sigma_x$ e σ_γ) na tomada de decisão. No caso em que estamos perante duas incertezas, vamos também avaliar três situações distintas:

$$\text{corr}(X_t, \Gamma_t) = \begin{cases} 0 \\ >0 \\ <0 \end{cases}$$

Adicionalmente, e com base nestas simulações, vamos também derivar estimativas para o tempo, \widehat{t}^* , em que se alcança o valor crítico, x^{*1} .

Os cálculos e simulações foram feitos recorrendo à linguagem de programação *Mathematica*. Em todas as situações, foram consideradas 100 instâncias do problema, geradas e simuladas de forma independente.

O valor de x^* (referente a milhões de passageiros, e que designa o nível de procura que despoleta a decisão de investimento) é fixo, calculado com as expressões deduzidas no capítulo anterior, consoante a situação em análise. Por outro lado, o valor de \widehat{t}^* (referente a anos, e que neste capítulo denota o tempo médio até decisão respeitante ao investimento) é calculado através de simulações, sendo por isso apresentada a média aritmética dos 100 valores obtidos nas 100 simulações consideradas.

O cenário base de estudo baseia-se nos dados presentes no artigo [6] e na tese [13]. Estes dados estão presentes na tabela (4.1). Refira-se ainda que a despesa de investimento (γ) é em milhões de Euros, os valores associados aos custos das viagens (η_1 , para via convencional, e η_2 , para via de alta velocidade), assim como a tarifa da viagem (p) são em Euros, e ψ , os custos fixos de operação, são expressos em milhões de Euros.

Seguidamente vamos ilustrar cada um dos casos analisados, seguindo a mesma nomenclatura e ordem. Refira-se que em todas as ilustrações numéricas que se apresentam, excepto menção contrária, contempla-se apenas a alteração de um dos parâmetros do problema, mantendo os restantes iguais aos do cenário base. Assim, sempre que representarmos gráficos em função de um dos parâmetros estamos a assumir que os restantes parâmetros se mantêm inalterados com valor igual ao do cenário base.

¹Após análise de todos os casos, decidiu-se apresentar apenas casos ilustrativos, devido ao volume de informação que seria necessário expor caso fossemos exaustivos. Todas as análises podem ser revistas nos ficheiros .nb e .xls anexos a este documento.

Tabela 4.1: Dados do cenário base

Parâmetros	x	γ	η_1	η_2	p	φ	ρ	μ_x
Valor	3	5000	30	10	25	90	0.009	0.1
Parâmetros	σ_x	n	δ	μ_γ	σ_γ	λ	u	l
Valor	0.22	5	0.5	0.001	0.01	0.1	0.1	0.5

4.1 Caso 1 - $\{X_t\}$ segue um MBG

Na Figura 4.1 apresentamos o programa usado para o cálculo de x^* para este caso.

```

Beta0 = Function [{eta0, x, delta},
  N[eta0 * (x)^(-delta)];

Beta1 = Function [{eta1, x, delta},
  N[eta1 * (x)^(-delta)];

Alfa = Function [{p, x, delta},
  N[p * (x)^(-delta)];

ValorPresente = Function [{beta0, beta1, mu, delta, sigma, n, e, lambda, rho},
  theta = 1 + delta;
  2 * (beta0 - beta1) * Exp[(theta * mu + 1/2 * theta * (theta - 1) * sigma^2 + lambda * e - lambda - rho) * n]
  / (2 * rho - 2 * theta * mu - theta * (theta - 1) * sigma^2 - 2 * lambda * e + 2 * lambda)];

ValorPresenteConvencional = Function [{a, mu, delta, sigma, n, e, lambda, rho},
  theta = 1 + delta;
  2 * a * Exp[(theta * mu + 1/2 * theta * (theta - 1) * sigma^2 + lambda * e - lambda - rho) * n]
  / (2 * rho - 2 * theta * mu - theta * (theta - 1) * sigma^2 - 2 * lambda * e + 2 * lambda)];

ValorPresenteFixo = Function [{e, rho, n},
  -e * Exp[-rho * n]
  / rho];

ValorDespesas = Function [gamma,
  -gamma];

xasterisco = Function [{delta, a, b, d, dd, x},
  theta = 1 + delta;
  Exp[1/theta * Log[(x * (d + dd)) / ((a + b) * (x - theta))]]];

```

Figura 4.1: Programa Mathematica para cálculo de x^* para o Caso 1

Na Tabela (4.2) apresentam-se os diferentes valores para x^* e para a estimativa de t^* , denotada por $\widehat{t^*}$, em função de μ_x .

Pela análise destes dados verificamos que, com o aumento do valor de μ_x , os valores de x^* e $\widehat{t^*}$ diminuem. De forma a tornar mais clara esta afirmação, apresentamos o gráfico 4.2.

Foi efectuada a análise em termos relativos para os casos aqui apresentados; não acres-

Tabela 4.2: Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de μ_x , no caso 1

μ_x	0.08	0.085	0.09	0.095	0.1	0.105	0.11	0.115	0.12
x^*	7.88084	7.6164	7.36455	7.12437	6.89511	6.67607	6.46657	6.26595	6.07377
\widehat{t}^*	17.36	15.2253	13.5697	12.3097	10.9123	9.9394	8.88442	8.08811	7.36086

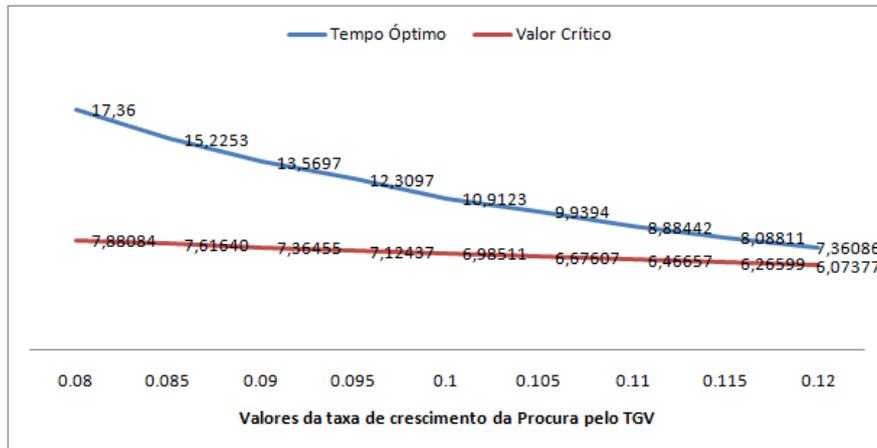


Figura 4.2: Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de μ_x - valores da Tabela 4.2

centando nada de novo, remetemos para os anexos, deixando aqui a Figura (5.1) em tom de exemplo. Assim de acordo, com a Figura (5.1), verificamos que o aumento de μ_x altera mais a evolução de t^* que a de x^* .

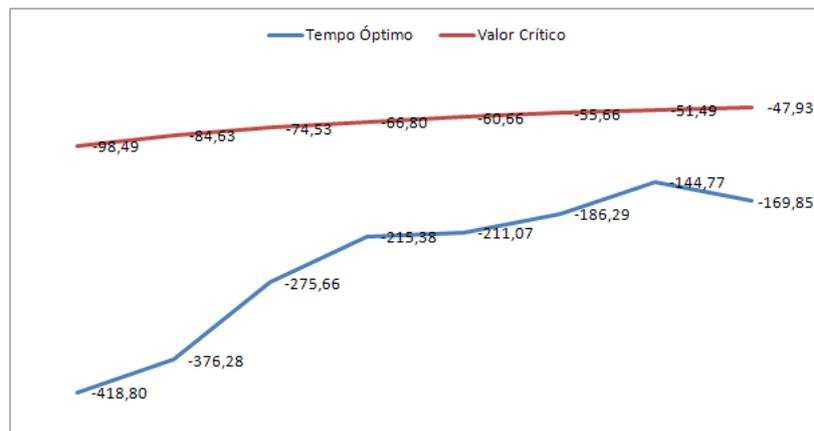


Figura 4.3: Comportamento relativo de x^* e \widehat{t}^* em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.2

A mesma análise foi feita em termos de σ_x , apresentada na Tabela (4.3) e ilustrada na Figura (4.4).

Note-se que o comportamento de x^* e de \widehat{t}^* é distinto com μ_x e σ_x ; assim enquanto que x^* e \widehat{t}^* diminuem com μ_x , aumentam com σ_x . Este comportamento é o expectável tendo em conta considerações económicas: um aumento de μ_x significa que há uma tendência crescente

Tabela 4.3: Valores de x^* e \hat{t}^* com alteração dos valores de σ_x , no caso 1

σ_x	0.18	0.187	0.198	0.209	0.22	0.231	0.242	0.253	0.26
x^*	6.60389	6.65226	6.73063	6.81167	6.89511	6.98069	7.06814	7.15716	7.21452
\hat{t}^*	9.44101	9.66556	10.1057	10.4247	10.9123	11.3935	12.1503	12.7743	13.1816

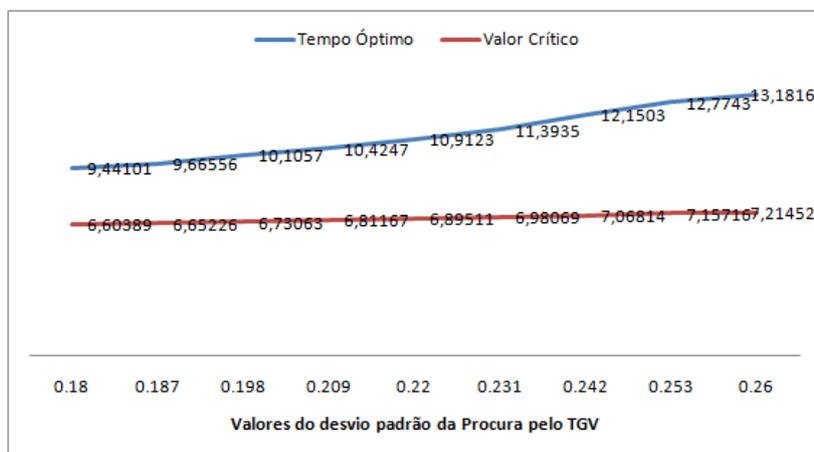


Figura 4.4: Comportamento de x^* e \hat{t}^* em função de σ_x - valores da Tabela 4.3

na procura, pelo que o nível óptimo pode ser mais pequeno e mais rapidamente alcançado. Por outro lado o aumento de σ_x significa um aumento da volatilidade, cujo impacto - sobejamente conhecido da literatura de opções reais (e.g. [18]) - é adiar as tomadas de decisão (com consequente aumento do nível óptimo).

4.2 Caso 2 - $\{X_t\}$ segue um MBGS

O programa usado neste caso para o cálculo de x^* pouco difere do anterior; apenas temos de contemplar os saltos. As linhas de código mostradas na Figura (4.5) reflectem esta situação, permitindo a definição dos saltos inerentes ao problema.

```
esperado = Function[{u, d},
  theta = 1 + d;
  (1 + u)^theta];
```

Figura 4.5: Código Mathematica para lidar com saltos

Assim, o programa mostrado na Figura (4.2) juntamente com o da Figura (4.5), permitem-nos calcular o valor de x^* no caso em que $\{X_t\}$ segue um movimento Browniano Geométrico com Saltos.

Neste caso, além de analisarmos os resultados tendo por base a alteração dos valores de μ_x e σ_x , também fizemos a análise tendo em conta os valores U e λ , como se apresenta na Tabela

(4.4).

Tabela 4.4: Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de μ_x , no caso 2

μ_x	0.08	0.085	0.09	0.095	0.1	0.105	0.11	0.115	0.12
x^*	9.00592	8.51348	8.09031	7.71766	7.38368	7.08036	6.80205	6.54461	6.30494
\widehat{t}^*	17.0648	14.9708	13.0894	11.7111	10.6342	9.57884	8.64739	7.92356	7.07433

A Figura (4.6) representa os dados da Tabela 4.4.

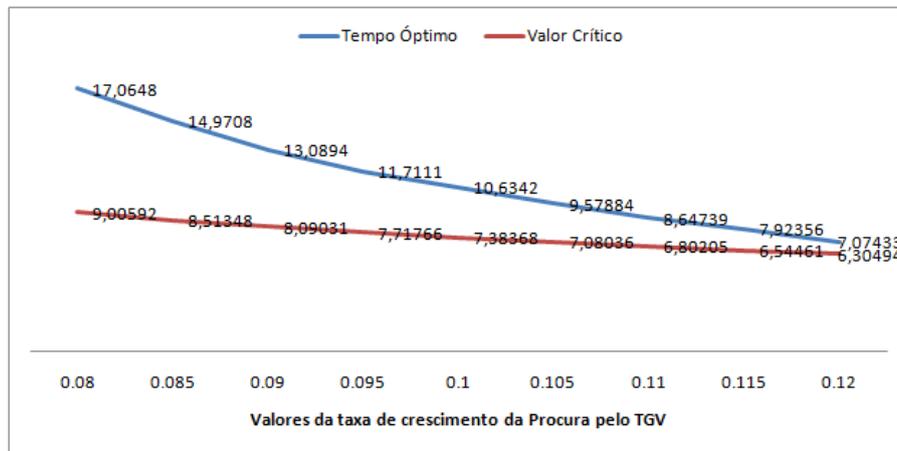


Figura 4.6: Comportamento de x^* e \widehat{t}^* em função de μ_x - valores da Tabela 4.4

Tabela 4.5: Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de σ_x , no caso 2

σ_x	0.18	0.187	0.198	0.209	0.22	0.231	0.242	0.253	0.26
x^*	7.13611	7.17729	7.24395	7.31286	7.38368	7.45627	7.53036	7.60568	7.65416
\widehat{t}^*	9.35386	9.58082	9.78267	10.1713	10.6342	11.1045	11.3697	12.0429	12.4659

Passemos à análise da Figura (4.7). Como λ e u foram mantidos constantes, é natural que as conclusões a retirar sejam semelhantes ao caso em que $\{X_t\}$ segue um movimento Browniano geométrico sem saltos, ou seja, quando o μ_x aumenta, x^* e \widehat{t}^* diminuem, e quando o σ_x aumenta, também aumentam x^* e \widehat{t}^* .

Tabela 4.6: Valores de x^* e \widehat{t}^* com alteração dos valores de λ , no caso 2

λ	0.08	0.085	0.09	0.095	0.1	0.105	0.11	0.115	0.12
x^*	7.29536	7.31785	7.34007	7.36201	7.38368	7.40508	7.42622	7.44709	7.46769
\widehat{t}^*	10.6636	10.8163	10.8444	10.6768	10.6342	10.545	10.3495	10.4777	10.6382

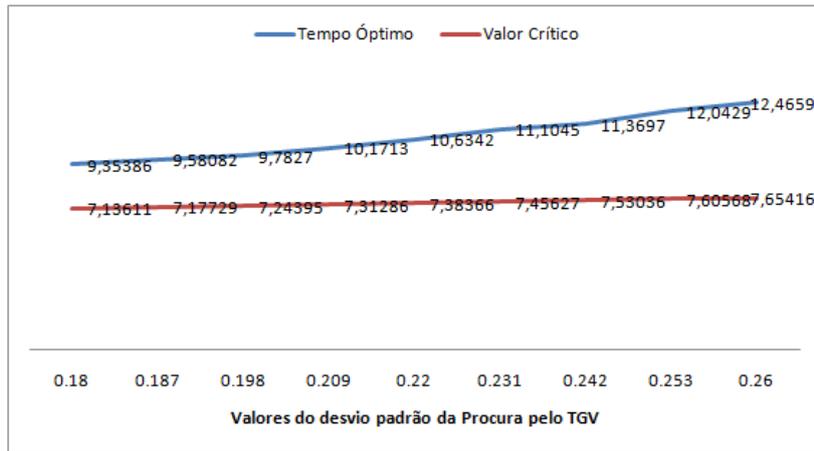


Figura 4.7: Comportamento de x^* e \hat{t}^* em função de σ_x - valores da Tabela 4.5

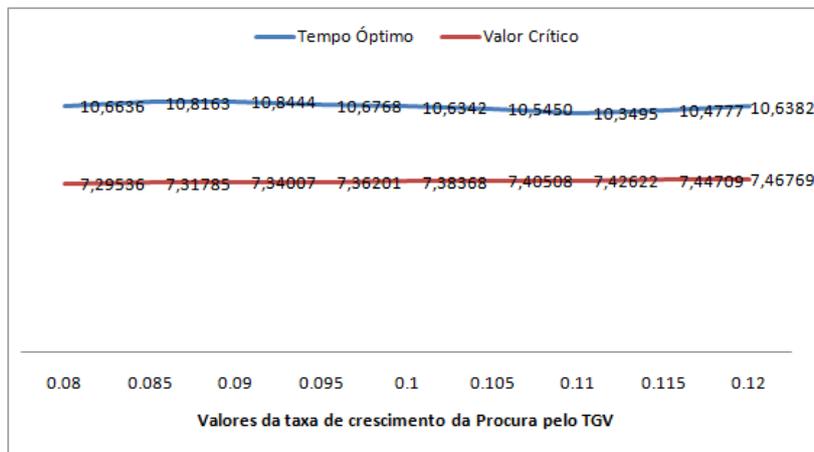


Figura 4.8: Comportamento de x^* e \hat{t}^* em função de λ - valores da Tabela 4.6

Tabela 4.7: Valores de x^* e \hat{t}^* com alteração dos valores de U , no caso 2

U	0.08	0.085	0.09	0.095	0.1	0.105	0.11	0.115	0.12
x^*	7.29364	7.3165	7.33913	7.36151	7.38368	7.40561	7.42731	7.44877	7.47001
\hat{t}^*	10.8599	10.6693	10.4136	10.8361	10.6342	10.4276	10.7462	10.5244	10.5693

Pela análise dos resultados numéricos apresentados nas Tabelas (4.6) e (4.7), verificamos que o nível x^* se mantém praticamente constante, com uma pequena tendência para crescimento. Esta conclusão é de difícil análise embora à partida se esperasse que x^* e \hat{t}^* diminuíssem com o aumento de λ e de U , como no caso do comportamento em função de μ_x .

Por contraste, o comportamento de \hat{t}^* não é monótono nem com λ nem com U . De referir que nesta situação há dois factores com impactos opostos, pelo que é expectável que \hat{t}^* não tenha necessariamente um comportamento monótono. Assim, e dado que x^* aumenta (quer com λ quer com U), então o nível óptimo encontra-se num patamar cada vez mais elevado, o

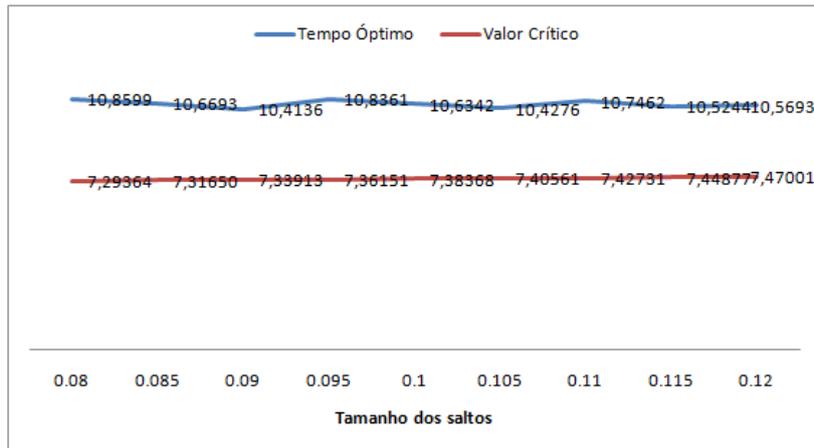


Figura 4.9: Comportamento de x^* e \hat{t}^* em função de u - valores da Tabela 4.7

que poderia levar ao aumento de \hat{t}^* . Por outro lado, o aumento de λ e de U têm o efeito de “puxar” o processo de procura $\{X_t\}$ para níveis superiores mais rapidamente, o que poderia levar a uma diminuição de \hat{t}^* . Na verdade, \hat{t}^* será o balanço destas duas tendências contrárias.

4.3 Caso 3 - $\{X_t\}$ segue um MBG com 2 incertezas

Neste caso, fazemos quatro análises distintas, alterando os parâmetros μ_x , μ_γ , σ_x e σ_γ com:

- correlação nula;
- correlação positiva e igual a 0.5;
- correlação negativa e igual a -0.5 .

Em todos eles o programa base para o cálculo de x^* é mostrado na Figura (4.10):

Além de calcular os valores de x^* e \hat{t}^* , neste caso, também calculamos uma estimativa de γ^* , denotada por $\hat{\gamma}^*$ que é o valor do investimento no instante em que este é realizado. Desde já, para precaver alguma confusão, onde aparece o termo “investimento ótimo” nada mais queremos dizer que $\hat{\gamma}^*$.

4.3.1 Correlação nula - alteração dos restantes parâmetros

Começemos por analisar os valores de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ quando procedemos à alteração dos valores da taxa de crescimento da procura, μ_x

Tal como era esperado, uma vez que estamos a assumir que a correlação entre os dois processos (o de procura e o de investimento) é zero, as conclusões tiradas pela análise da Tabela (4.8) e respectivo gráfico, a Figura (4.11) são semelhantes às mencionadas nos casos em que estamos perante uma única incerteza. Seguidamente, vamos verificar que o mesmo acontece com a alteração dos valores de σ_x .

```

Beta0 = Function[{p0, x, d},
  N[p0 * (x)^-d]];

Beta1 = Function[{p1, x, d},
  N[p1 * (x)^-d]];

Alfa = Function[{p, x, d},
  N[p * (x)^-d]];

var = Function[{sx, d, cox, sy},
  theta = 1 + d;
  (sx)^2 * (theta)^2 - 2 * sx * sy * cox + theta * (sy)^2
];

espe = Function[{mu, d, sx, sy},
  theta = 1 + d;
  mu * theta + (1/2) * (sx)^2 * theta * (theta - 1) - sy
];

raiz1 = Function[{sq, mu, rho, sy},
  (1/2 * sq - mu) + sqrt((mu - 1/2 * sq)^2 + 2 * sq * (rho - sy))
  / sq
];

ValorPresente = Function[{beta, beta1, mu, d, sigma, n, e, lambda, rho},
  theta = 1 + d;
  2 * (beta - beta1) * Exp[(theta * mu + 1/2 * theta * (theta - 1) * sigma^2 + lambda * e - lambda - rho) * n]
  / (2 * rho - 2 * theta * mu - theta * (theta - 1) * sigma^2 - 2 * lambda * e + 2 * lambda)
];

ValorPresenteConvencional = Function[{alpha, mu, d, sigma, n, e, lambda, rho},
  theta = 1 + d;
  2 * alpha * Exp[(theta * mu + 1/2 * theta * (theta - 1) * sigma^2 + lambda * e - lambda - rho) * n]
  / (2 * rho - 2 * theta * mu - theta * (theta - 1) * sigma^2 - 2 * lambda * e + 2 * lambda)
];

xasterisco = Function[{d, a, b, dd, s, gamma},
  theta = 1 + d;
  (dd + 1) * (s / (s - 1) * gamma)^(1/theta)
];

```

Figura 4.10: Programa Mathematica para simulação do caso 3

Tabela 4.8: Valores de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de μ_x no caso 3 - correlação nula

μ_x	0.08	0.085	0.09	0.095	0.1	0.105	0.11	0.115	0.12
x^*	7.47	7.20592	6.95522	6.71702	6.49045	6.27473	6.06911	5.87292	5.68551
\hat{t}^*	16.1728	14.3935	12.7186	11.4489	10.2347	9.15869	8.18484	7.40548	6.71108
$\hat{\gamma}^*$	14.8277	14.7235	14.5248	14.4965	14.4093	14.3181	14.2747	14.2021	14.1721

Sendo o processo de investimento modelado (tal como o processo de procura) por um movimento Browniano Geométrico é de esperar que os valores obtidos para $\hat{\gamma}^*$ se comportem de maneira idêntica aos obtidos para x^* .

Pela análise gráfica concluímos que o aumento de μ_γ leva a uma diminuição de x^* e \hat{t}^* e a um aumento de $\hat{\gamma}^*$. Acontece exactamente o contrário com o aumento de σ_γ .

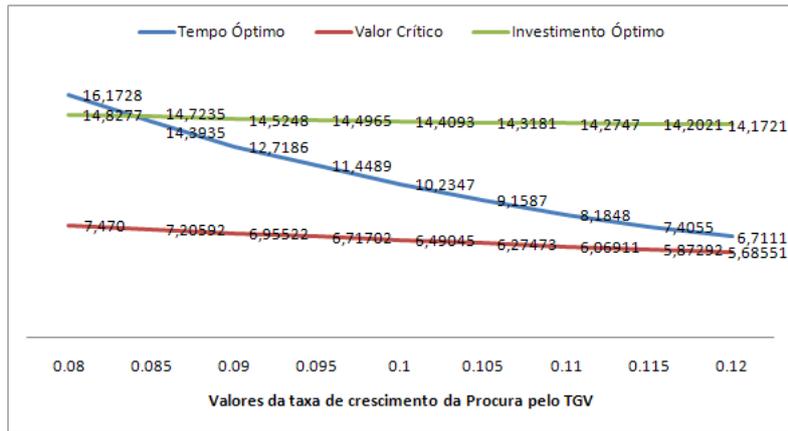


Figura 4.11: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_x - valores da Tabela 4.8

Tabela 4.9: Valores de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de σ_x no caso 3 - correlação nula

σ_x	0.176	0.187	0.198	0.209	0.22	0.231	0.242	0.253	0.264
x^*	6.16953	6.24548	6.32445	6.4062	6.49045	6.57696	6.66544	6.75563	6.84724
\hat{t}^*	8.51387	8.87197	9.29147	9.72643	10.2347	10.7623	11.2106	12.0323	12.6963
$\hat{\gamma}^*$	14.3026	14.3241	14.3414	14.3832	14.4093	14.4453	14.4823	14.5435	14.6026

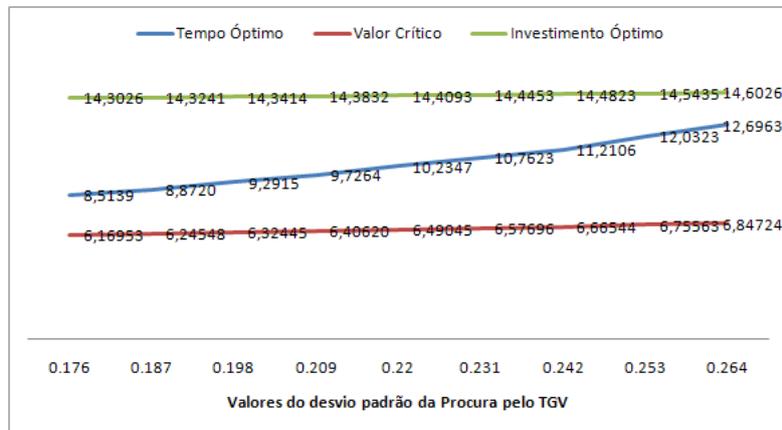


Figura 4.12: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_x - valores da Tabela 4.9

Tabela 4.10: Valores de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de μ_γ no caso 3 - correlação nula

μ_γ	0.008	0.0085	0.009	0.0095	0.01	0.0105	0.011	0.0115	0.012
x^*	6.5756	6.55439	6.53313	6.51182	6.49045	6.46904	6.44757	6.42604	6.40446
\hat{t}^*	10.4143	10.4176	10.2308	10.196	10.2347	10.139	10.0234	10.0338	9.98739
$\hat{\gamma}^*$	14.1314	14.1854	14.2796	14.3699	14.4093	14.4824	14.5158	14.6124	14.6693

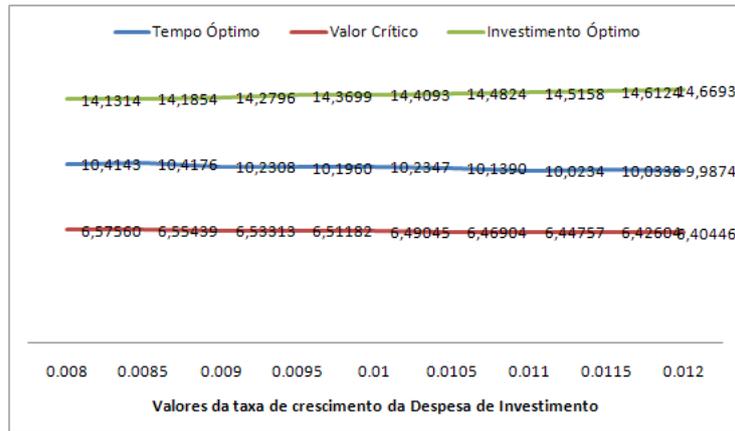


Figura 4.13: Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - valores da Tabela 4.10

Tabela 4.11: Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de σ_γ no caso 3 - correlação nula

σ_γ	0.08	0.085	0.09	0.095	0.1	0.105	0.11	0.115	0.12
x^*	6.44461	6.4551	6.46624	6.47802	6.49045	6.50354	6.51727	6.53165	6.54669
\widehat{t}^*	10.036	10.0816	10.1507	10.1124	10.2347	10.2379	10.1545	10.2306	10.297
$\widehat{\gamma}^*$	14.6703	14.6412	14.5112	14.5058	14.4093	14.3639	14.2482	14.19	14.0838

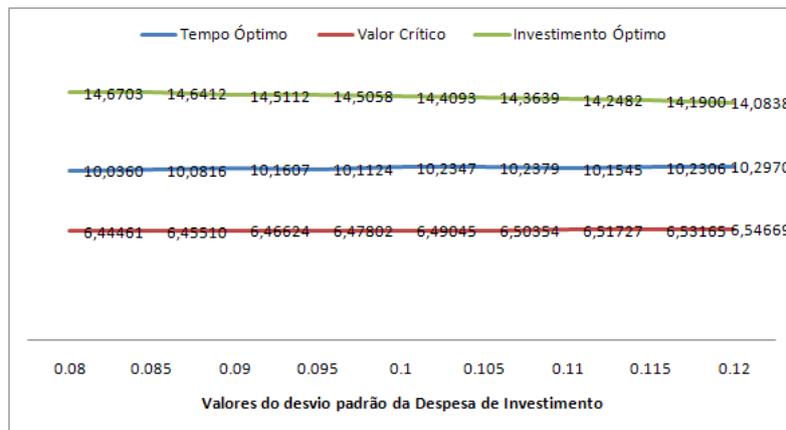


Figura 4.14: Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - valores da Tabela 4.11

4.3.2 Correlação positiva - alteração dos restantes parâmetros

O valor da correlação entre os dois processos usado neste caso é constante e igual a 0.5. Vamos analisar o comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de parâmetros que já estudámos, para que os resultados sejam comparáveis².

Assim, para variações de μ_x , registámos o mesmo comportamento descrito no caso em

² Para não saturar o leitor com uma sobreabundância de informação essencialmente repetitiva, não vamos apresentar aqui as tabelas e gráficos de todos os casos estudados.

estamos perante uma única incerteza. Concluimos que o valor de $\widehat{\gamma}^*$ também diminui com o aumento de μ_x .

Passamos a analisar x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x de acordo com a Tabela (4.12).

Tabela 4.12: Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de σ_x no caso 3 - correlação positiva

σ_x	0.176	0.187	0.198	0.209	0.22	0.231	0.242	0.253	0.264
x^*	5.83332	5.88937	5.9487	6.0111	6.07635	6.1442	6.21444	6.2868	6.36106
\widehat{t}^*	7.65677	7.82389	7.98222	8.22762	8.36164	8.55562	8.78138	8.80103	8.86944
$\widehat{\gamma}^*$	15.0018	15.0449	15.1082	15.1572	15.2337	15.2564	15.3098	15.401	15.6136

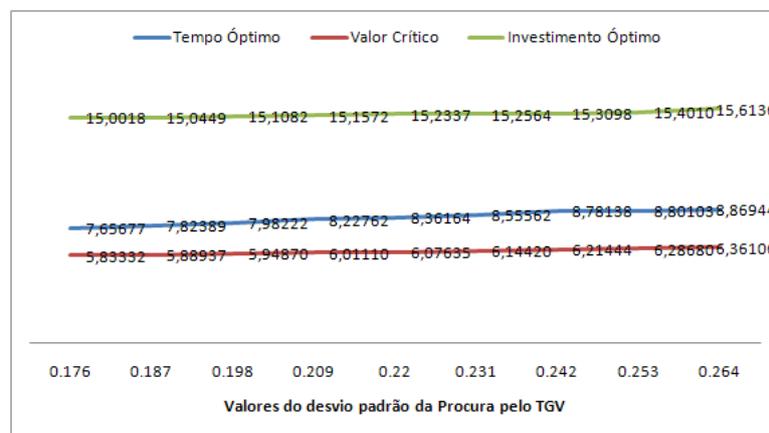


Figura 4.15: Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x - valores da Tabela 4.12

Mais uma vez, as conclusões retiradas neste caso vão de encontro às descritas no caso em que estávamos perante um única incerteza e no caso de haver duas fontes de incerteza mas correlação nula.

De forma a contemplarmos também a variação dos parâmetros do processo de investimento, vamos analisar as variações de μ_γ , na Tabela 4.13 e Figura 4.16

Tabela 4.13: Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de μ_γ no caso 3 - correlação positiva

μ_γ	0.008	0.0085	0.009	0.0095	0.01	0.0105	0.011	0.0115	0.012
x^*	6.16206	6.14071	6.11931	6.09785	6.07635	6.05479	6.03318	6.01151	5.98979
\widehat{t}^*	9.9478	9.8988	9.8867	9.8780	9.8664	9.8261	9.8085	9.4523	9.4496
$\widehat{\gamma}^*$	14.4366	14.5044	14.5498	14.5900	14.6276	14.6602	14.6849	14.8284	14.8790

Podemos verificar que quando aumentamos o valor de μ_γ apesar de os valores de x^* e \widehat{t}^*

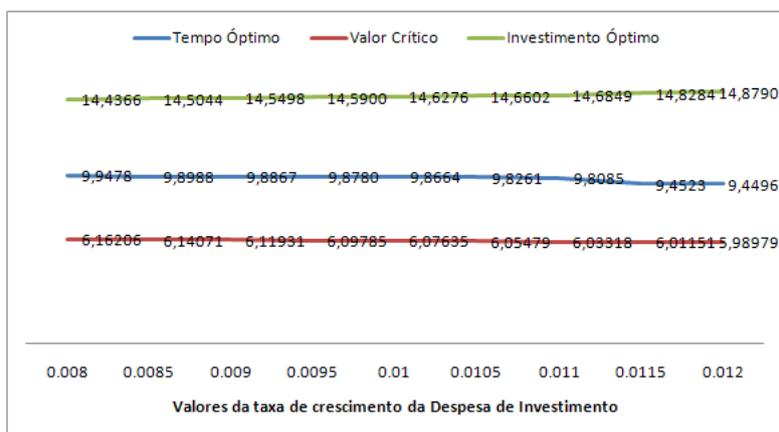


Figura 4.16: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - valores da Tabela 4.13

diminuirem, os valores de $\hat{\gamma}^*$ aumentam, o que se deve ao facto de μ_γ influenciar directamente o movimento que modela a despesa de investimento.

4.3.3 Correlação negativa - alteração dos restantes parâmetros

De referir que correlação negativa significa que fixamos a correlação em -0.5 .

Neste caso, vamos deixar de apresentar algumas tabelas, uma vez que em muitos casos estas não trazem mais valor que o representado graficamente. Vejamos então, graficamente, a evolução de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_x na Figura (4.17)

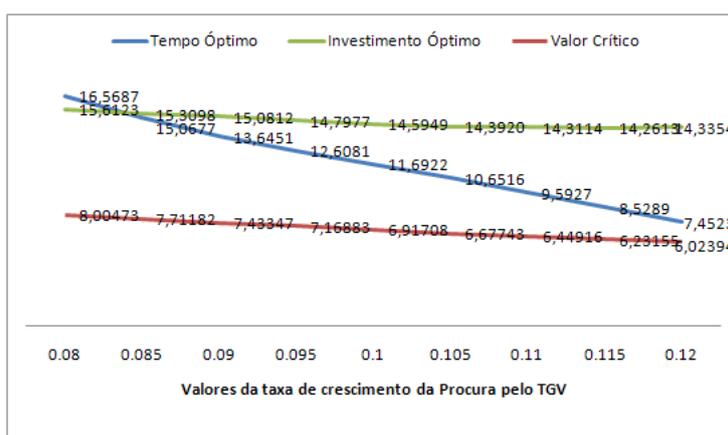


Figura 4.17: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_x

Podemos concluir que face ao aumento de μ_x se verifica uma diminuição de x^* e \hat{t}^* . Tal diminuição não é suficiente para grandes variações de $\hat{\gamma}^*$, que praticamente se mantém inalterado, com uma pequena tendência para diminuir.

Vamos agora apresentar os dados referentes às variações σ_γ na Tabela (4.14) e Figura (4.18)

Tabela 4.14: Valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ com alteração dos valores de σ_γ , no caso 3 - correlação negativa

σ_γ	0.08	0.085	0.09	0.095	0.1	0.105	0.11	0.115	0.12
x^*	6.78408	6.81627	6.84916	6.88276	6.91708	6.95210	6.98784	7.02430	7.06147
\widehat{t}^*	14.2436	13.3781	12.1870	11.7932	11.0367	10.4088	9.9384	9.0202	8.6890
$\widehat{\gamma}^*$	15.2592	15.0698	14.9710	14.8753	14.7881	14.7356	14.6003	14.6722	14.5733

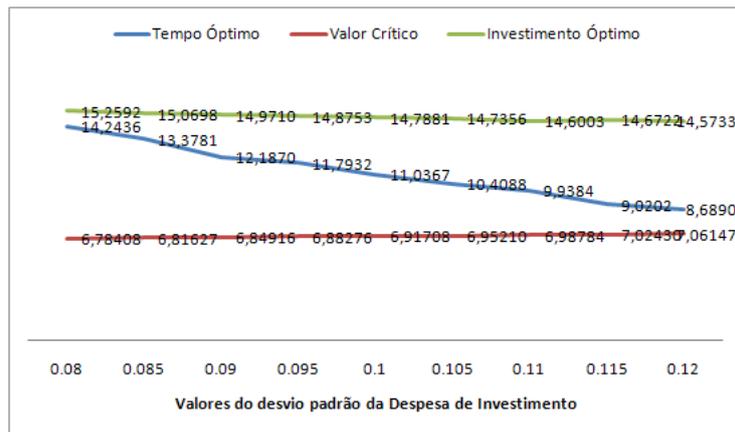


Figura 4.18: Comportamento de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - valores da Tabela 4.14

4.4 Caso 4 - $\{X_t\}$ segue um MBGS com 2 incertezas

A análise efectuada neste caso é em tudo idêntica à realizada no caso anterior. Não querendo tornar maçadora a apresentação, mais uma vez não serão apresentados todos os gráficos e respectivas tabelas. O programa usado para calcular o valor de x^* é idêntico ao apresentado no caso anterior.

Para a situação em que estamos a considerar a correlação nula, a análise efectuada é a mesma que a já descrita no caso em que estamos perante modelos sem saltos. Assim, apesar de os valores obtidos, não serem, evidentemente, os mesmos, as conclusões são semelhantes.

4.4.1 Correlação positiva - alteração dos restantes parâmetros

Note-se que, quando referimos correlação positiva, significa que fixamos um valor constante para a correlação, que neste caso, foi 0.5.

Começamos por analisar os valores de x^* , \widehat{t}^* e $\widehat{\gamma}^*$ em função de σ_x , de acordo com a Figura (4.19)

Mais uma vez, concluímos que o aumento do valor de σ_x leva a um aumento dos parâmetros em estudo, o que faz sentido, uma vez que o aumento da volatilidade necessariamente leva a um aumento do tempo necessário para se tomar uma decisão.

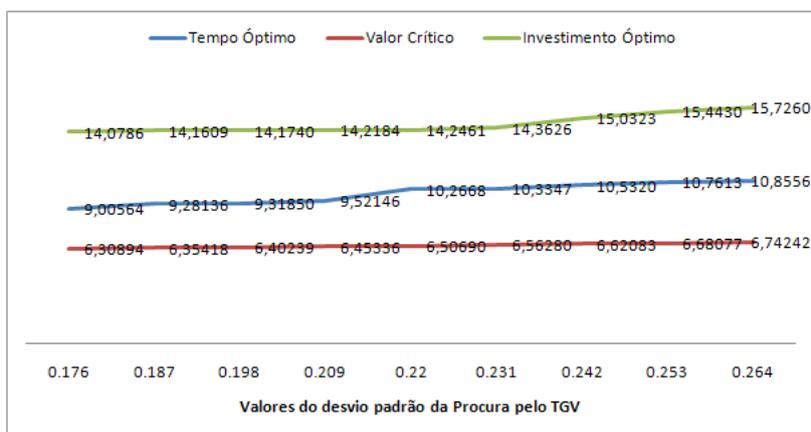


Figura 4.19: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_x

Analisemos o caso em que alteramos um parâmetro pertencente ao movimento que modela a despesa de investimento, ou seja, considerem-se alterações no valor de μ_γ . De acordo, com as simulações geradas, obtivemos os dados representados graficamente na Figura (4.20).

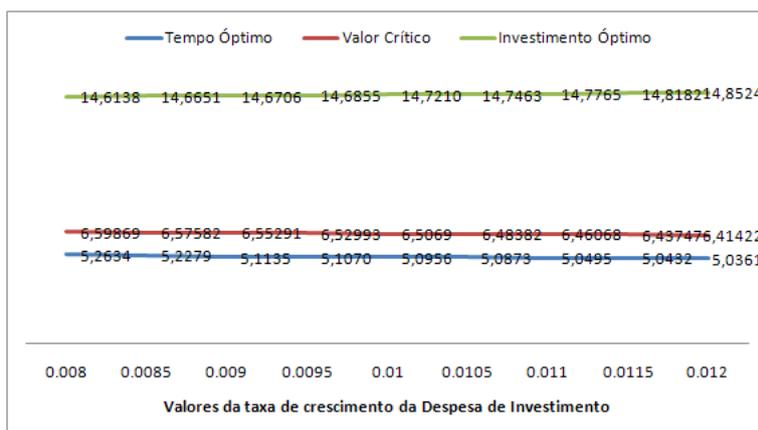


Figura 4.20: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_γ

Podemos verificar que quando o valor de μ_γ aumenta, apesar de os valores de x^* e \hat{t}^* diminuírem, os valores de $\hat{\gamma}^*$ também aumentam, tal como no caso em que estudámos Movimentos Brownianos sem saltos. Assim, conjecturamos que o uso de um modelo com saltos não traz novos comportamentos ao sistema no que toca a alterações no parâmetro μ_γ .

4.4.2 Correlação negativa - alteração dos restantes parâmetros

Tal como no caso anterior, podemos verificar uma diminuição dos três valores em estudo quando existe um aumento de μ_x , como evidenciado na Figura (4.21)

Neste caso o movimento decrescente nem sempre é patente.

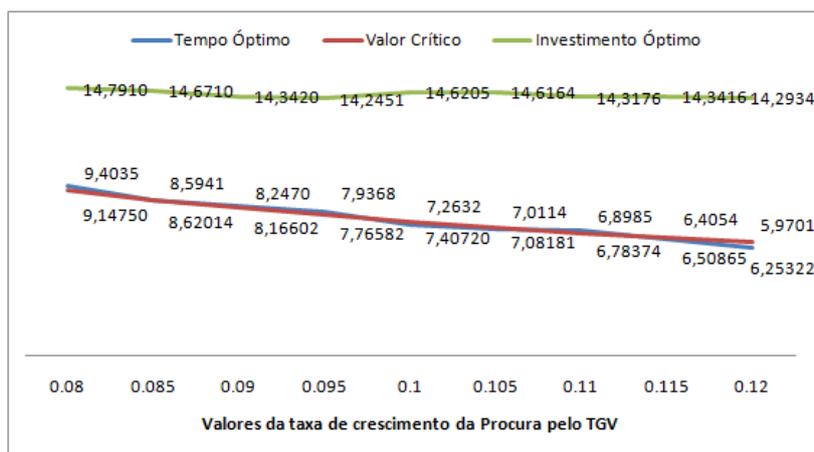


Figura 4.21: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_x

Apresentamos um caso final para terminar este capítulo. A Figura (4.22) apresenta o comportamento do sistema com variações de σ_γ :



Figura 4.22: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_γ

Nota: Apesar de não estar aqui apresentada, a análise de todos os casos foi efectuada e pode ser consultada nos ficheiros .nb anexos à tese.

Podemos apresentar aqui um pequeno resumo do comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_x , σ_x , μ_γ e σ_γ para todos os casos apresentados, tendo por base a seguinte notação:

Símbolos	Significado
n.a.	não aplicável
↗	movimento monótono crescente
↘	movimento monótono decrescente
~	movimento não monótono

Modelos com 1 incerteza				
Modelo	Parametros	x^*	\widehat{t}^*	$\widehat{\gamma}^*$
Sem Saltos	μ_x	\searrow	\searrow	n.a.
	σ_x	\nearrow	\nearrow	n.a.
Com Saltos	μ_x	\searrow	\searrow	n.a.
	σ_x	\nearrow	\nearrow	n.a.
	λ	\nearrow	\sim	n.a.
	U	\nearrow	\sim	n.a.

Tabela 4.15: Resumo dos movimentos descritos em função da alteração de parâmetros no caso de duas incertezas

Modelos com 2 incertezas - $corr = -0.5$				
Modelo	Parametros	x^*	\hat{t}^*	$\hat{\gamma}^*$
Sem Saltos	μ_x	↗	↗	↗
	σ_x	↗	↗	↗
	μ_γ	↘	↘	↘
	σ_γ	↗	↘	↘
Com Saltos	μ_x	↘	~	~
	σ_x	↗	~	~
	μ_γ	↗	~	~
	σ_γ	↗	~	~
Modelos com 2 incertezas - $corr = 0$				
Modelo	Parametros	x^*	\hat{t}^*	$\hat{\gamma}^*$
Sem Saltos	μ_x	↘	↘	↘
	σ_x	↗	↗	↗
	μ_γ	↘	~	↗
	σ_γ	↗	~	↘
Com Saltos	μ_x	↘	↘	↘
	σ_x	↗	↗	↗
	μ_γ	↘	~	↗
	σ_γ	↘	↘	↘
Modelos com 2 incertezas - $corr = 0.5$				
Modelo	Parametros	x^*	\hat{t}^*	$\hat{\gamma}^*$
Sem Saltos	μ_x	↘	↘	↘
	σ_x	↗	↗	↗
	μ_γ	↘	↘	↗
	σ_γ	↘	↘	↘
Com Saltos	μ_x	↘	~	~
	σ_x	↗	↗	↗
	μ_γ	↘	↘	↗
	σ_γ	↘	↘	↘

5 Conclusão

No decorrer desta dissertação foi abordado o problema da tomada de decisão sobre um investimento usando opções reais e recorrendo a técnicas de programação dinâmica (em particular, utilizando o princípio da optimalidade de Bellman e respectivos resultados).

Fizemos uma análise teórica e prática tendo por base o estudo efectuado em [13] e [6] sobre o investimento no novo serviço da alta velocidade ferroviária. Considerámos dois processos aleatórios: o de procura pelo TGV e da despesa de investimento. Assim, numa primeira fase, estudámos a obtenção do valor crítico da procura pelo TGV assumindo que o processo de procura era modelado por um movimento Browniano geométrico, sendo a procura a única incerteza a influenciar o processo de tomada de decisão. Posteriormente, considerámos que o processo de procura era modelado por um movimento Browniano Geométrico com saltos, admitindo ainda a existência de uma única incerteza.

Ao considerarmos como aleatória também a despesa de investimento, passámos a estar perante duas incertezas (a procura pelo TGV e a despesa de investimento). Neste caso, considerámos primeiramente que os dois processos eram modelados por movimentos Brownianos geométricos e numa fase posterior que eram modelados por movimentos Brownianos geométricos com saltos.

Os valores da procura que justificam o investimento (os chamados valores críticos), x^* , dependem dos parâmetros escolhidos. Por outro lado, o tempo em que tal valor é alcançado, t^* , é obtido via simulações e estatísticas (e nesse caso, obtêm-se estimativas). No caso em que analisámos os processos admitindo duas incertezas, calculámos também um valor (estimativas de) γ^* (obtido também através de simulações), que é simplesmente o valor do investimento em t^* (sendo este valor apenas calculado no caso em que supomos a existência de duas incertezas, uma vez que no outro caso o valor do investimento é constante).

Voltamos a apresentar aqui o cenário base:

Parâmetros	x	γ	η_1	η_2	p	φ	ρ	μ_x
Valor	3	5000	30	10	25	90	0.009	0.1
Parâmetros	σ_x	n	δ	μ_γ	σ_γ	λ	u	l
Valor	0.22	5	0.5	0.001	0.01	0.1	0.1	0.5

que vai servir para fazermos um resumo de todos os resultados obtidos ao longo da disser-

tação para esse caso específico.

- 1 incerteza:

Movimento	MGB	MGBS
x^*	6.89511	7.38368
t^*	10.9123	10.6342

- 2 incertezas:

- $corr = -0.5$:

Movimento	MGB	MGBS
x^*	6.91708	7.2632
t^*	14.5949	7.40720

- $corr = 0$:

Movimento	MGB	MGBS
x^*	6.49045	6.95035
t^*	10.2347	9.9687

- $corr = 0.5$:

Movimento	MGB	MGBS
x^*	6.07635	6.50690
t^*	8.36164	5.37886

Fazendo uma análise simples, verificámos que em todos os casos, o valor de x^* é superior quando estamos perante modelos com saltos. Tal seria de esperar, uma vez que os saltos aumentam a aleatoriedade dos processos. É sabido da teoria das opções reais que a aleatoriedade leva quase certamente a uma decisão que ocorre em níveis críticos mais elevados do que os que seriam de esperar numa situação com menos aleatoriedade.

Em termos de t^* , nunca deixando de referir que os valores foram calculados através de simulações, concluímos que se alcança primeiramente o valor x^* quando estamos perante processos com saltos. Tal facto é mais visível nos casos em que assumimos a influência de duas incertezas, uma vez que temos uma maior componente aleatória (que gera um acréscimo no número de saltos) o que leva a uma diminuição significativa no valor de t^* .

Ficam ainda outras questões para trabalho futuro:

- Considerar um processo modelado por um movimento Browniano geométrico e outro modelado por um movimento Browniano geométrico com saltos;
- Expandir o processo para um maior número de incertezas, uma vez que a incerteza é um factor que sugere uma maior aproximação à realidade.

Bibliografia

- [1] M. Amram and N. Kulatilaka. *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*. Harvard Business School Press, New York, 1999. Concepts, algorithms, and applications.
- [2] M. Baxter and A. Rennie. *Financial Calculus : An Introduction to Derivative*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] G. Birkhoff and G.C. Rota. *Ordinary differential equations*. Wiley, 1989.
- [4] T. Bjork. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2004.
- [5] T. Copeland and V. Antikarov. *Real Options - A Practitioner's Guide*. Texere, 2003.
- [6] G. Couto, C. Nunes, and P. Pimentel. High speed rail transport valuation and conjuncture shocks. In *6th Portuguese Conference*, 2010.
- [7] A. Dixit and R. Pindyck. *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press, 1994.
- [8] L. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, 1998.
- [9] J. C. Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Gulbenkian, 1995.
- [10] A. F. Karr. *Probability*. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [11] R. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, (3):25, 1975.
- [12] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations (3rd ed.): An Introduction with Applications*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1992.
- [13] P. Pimentel. *Avaliação do Investimento na Alta Velocidade Ferroviária*. PhD thesis, Instituto Superior de Economia e Gestão, 2009.
- [14] S. Resnick. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [15] I. Rosu. *The Bellman Principle of Optimality*. <http://appli8.hec.fr/rosu/research/notes/bellman.pdf>. 2002.
- [16] B. Silva. *Estudo do Instante Ótimo de Relocalização*. Master's thesis, Instituto Superior Técnico, 2007.
- [17] J. Soares, A. Fernandes, A. Marçó, and J. Marques. *Avaliação de Projectos de Investimento na Óptica Empresarial*. Edições Sílabo, Lisboa, 2007.

- [18] L. Trigeorgis. *Real Options - Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. MIT Press, Cambridge, 1996.

Anexos

De acordo com o apresentado no Capítulo 2 e 3, ao encontrar a função F que obedeça a:

$$F(x_t) = \max \{ \Omega(x_t), \pi(x_t)dt + (1 - \rho dt)F(x_t) + E [dF(X_t)|x_t] \}$$

estaremos a determinar a política óptima de investimento.

Vimos que esta equação diferencial tem solução dada por:

$$F(X_t) = AX_t^a + BX_t^b + C$$

No presente trabalho, determinámos a política óptima assumindo dois modelos distintos:

- movimento Browniano geométrico;
- movimento Browniano geométrico com saltos.

Assim, para o caso em que a procura pelo TGV é modelada por um movimento Browniano geométrico, obedecendo a:

$$dX_t = X_t \mu_x dt + X_t \sigma_x dW_t^x$$

concluimos que

$$F(x^*) = Ax^{*\theta} + Bx^{*\theta} + C$$

onde:

$$A = \frac{2(\beta_1 - \beta_2) \exp \left\{ \left(\mu_x \theta + \frac{1}{2} \theta (\theta - 1) \sigma_x^2 - \rho \right) n \right\}}{2\rho - 2\mu_x \theta - \theta^2 \sigma_x^2 + \theta \sigma_x^2}$$

$$B = \frac{2\alpha \exp \left\{ \left(\mu_x \theta + \frac{1}{2} \theta (\theta - 1) \sigma_x^2 - \rho \right) n \right\}}{2\rho - 2\mu_x \theta - \theta^2 \sigma_x^2 + \theta \sigma_x^2}$$

$$C = -\frac{\varphi e^{-\rho n} + \gamma}{\rho}$$

Vamos aqui clarificar a obtenção de A , B e C , de acordo com

$$F(x^*) = \int_0^\infty ((\beta_1 - \beta_2) E_{x^*} [X_{s+n}^\theta] + \alpha E_{x^*} [X_{s+n}^\theta] - \varphi - \rho \gamma e^{\rho n}) e^{-\rho(s+n)} ds \quad (5.1)$$

e recordando que $E [X_t^\theta] = x^\theta \exp \left\{ \mu t \theta + \theta (\theta - 1) \frac{\sigma^2 t}{2} \right\}$,

$$\begin{aligned}
F(x^*) &= \int_0^\infty ((\beta_1 - \beta_2)E_{x^*}[X_{s+n}^\theta] + \alpha E_{x^*}[X_{s+n}^\theta] - \varphi - \rho\gamma e^{\rho n})e^{-\rho(s+n)} ds \\
&= \int_0^\infty (\beta_1 - \beta_2)E_{x^*}[X_{s+n}^\theta]e^{-\rho(s+n)} ds + \int_0^\infty \alpha E_{x^*}[X_{s+n}^\theta]e^{-\rho(s+n)} ds + \int_0^\infty (-\varphi - \rho\gamma e^{\rho n})e^{-\rho(s+n)} ds \\
&= \int_0^\infty (\beta_1 - \beta_2)(x^\theta \exp\left\{\mu t\theta + \theta(\theta - 1)\frac{\sigma_x^2 t}{2}\right\})e^{-\rho(s+n)} ds \\
&\quad + \int_0^\infty \alpha(x^\theta \exp\left\{\mu t\theta + \theta(\theta - 1)\frac{\sigma_x^2 t}{2}\right\})e^{-\rho(s+n)} ds + \int_0^\infty (-\varphi - \rho\gamma e^{\rho n})e^{-\rho(s+n)} ds \\
&= \left(\frac{2(\beta_1 - \beta_2) \exp\left\{\left(\mu_x\theta + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma_x^2 - \rho\right)n\right\}}{2\rho - 2\mu_x\theta - \theta^2\sigma_x^2 + \theta\sigma_x^2}\right)x^{*\theta} + \left(\frac{2\alpha \exp\left\{\left(\mu_x\theta + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma_x^2 - \rho\right)n\right\}}{2\rho - 2\mu_x\theta - \theta^2\sigma_x^2 + \theta\sigma_x^2}\right)x^{*\theta} + \\
&\quad \left(-\frac{\varphi e^{-\rho n} + \gamma}{\rho}\right) \\
&= Ax^{*\theta} + Bx^{*\theta} + C
\end{aligned}$$

Quando analisamos o caso em que a procura pelo TGV era modelada por um movimento Browniano geométrico com saltos, obtivemos exactamente a mesma expressão

$$F(x^*) = Ax^{*\theta} + Bx^{*\theta} + C$$

sendo A , B e C calculados de acordo com (5.1) e relembrando que

$$E[X_t^\theta] = x^\theta \exp\left\{\left(\theta\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}\theta(\theta - 1) + \lambda(1 + U)^\theta - \lambda\right)t\right\}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
F(x^*) &= \int_0^\infty ((\beta_1 - \beta_2)E_{x^*}[X_{s+n}^\theta] + \alpha E_{x^*}[X_{s+n}^\theta] - \varphi - \rho\gamma)e^{-\rho(s+n)} ds \\
&= \int_0^\infty ((\beta_1 - \beta_2)E_{x^*}[X_{s+n}^\theta]e^{-\rho(s+n)} ds + \int_0^\infty \alpha E_{x^*}[X_{s+n}^\theta]e^{-\rho(s+n)} ds + \int_0^\infty (-\varphi - \rho\gamma)e^{-\rho(s+n)} ds \\
&= \int_0^\infty ((\beta_1 - \beta_2)(x^\theta \exp\left\{\left(\theta\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}\theta(\theta - 1) + \lambda E[(1 + U)^\theta] - \lambda\right)t\right\})e^{-\rho(s+n)} ds \\
&\quad + \int_0^\infty \alpha(x^\theta \exp\left\{\left(\theta\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}\theta(\theta - 1) + \lambda E[(1 + U)^\theta] - \lambda\right)t\right\})e^{-\rho(s+n)} ds + \int_0^\infty (-\varphi - \rho\gamma)e^{-\rho(s+n)} ds \\
&= \left(\frac{2(\beta_1 - \beta_2) \exp\left\{\left(\mu_x\theta + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma_x^2 + \lambda E[(1 + U)^\theta] - \lambda - \rho\right)n\right\}}{2\rho - 2\mu_x\theta - \theta^2\sigma_x^2 + \theta\sigma_x^2 + 2\lambda E[(1 + U)^\theta] + 2\lambda}\right)x^{*\theta} \\
&\quad + \left(\frac{2\alpha \exp\left\{\left(\mu_x\theta + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma_x^2 + \lambda E[(1 + U)^\theta] - \lambda - \rho\right)n\right\}}{2\rho - 2\mu_x\theta - \theta^2\sigma_x^2 + \theta\sigma_x^2 + 2\lambda E[(1 + U)^\theta] + 2\lambda}\right)x^{*\theta} + \left(-\frac{\varphi e^{-\rho n} + \gamma}{\rho}\right) \\
&= Ax^{*\theta} + Bx^{*\theta} + C
\end{aligned}$$

ou seja,

$$A = \frac{2(\beta_1 - \beta_2) \exp \left\{ \left(\mu_x \theta + \frac{1}{2} \theta (\theta - 1) \sigma_x^2 + \lambda E[(1 + U)^\theta] - \lambda - \rho \right) n \right\}}{2\rho - 2\mu_x \theta - \theta^2 \sigma_x^2 + \theta \sigma_x^2 + 2\lambda E[(1 + U)^\theta] + 2\lambda} \quad (5.2)$$

$$B = \frac{2\alpha \exp \left\{ \left(\mu_x \theta + \frac{1}{2} \theta (\theta - 1) \sigma_x^2 + \lambda E[(1 + U)^\theta] - \lambda - \rho \right) n \right\}}{2\rho - 2\mu_x \theta - \theta^2 \sigma_x^2 + \theta \sigma_x^2 + 2\lambda E[(1 + U)^\theta] + 2\lambda} \quad (5.3)$$

$$C = -\frac{\varphi e^{-\rho n} + \gamma}{\rho} \quad (5.4)$$

De acordo com os dados e casos apresentados no Capítulo 4, apresentamos aqui os gráficos que representam a variação relativa de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função dos diversos parâmetros em estudo.

Para cada gráfico apresentado no Capítulo 4, fazemos aqui a correspondência em termos relativos.

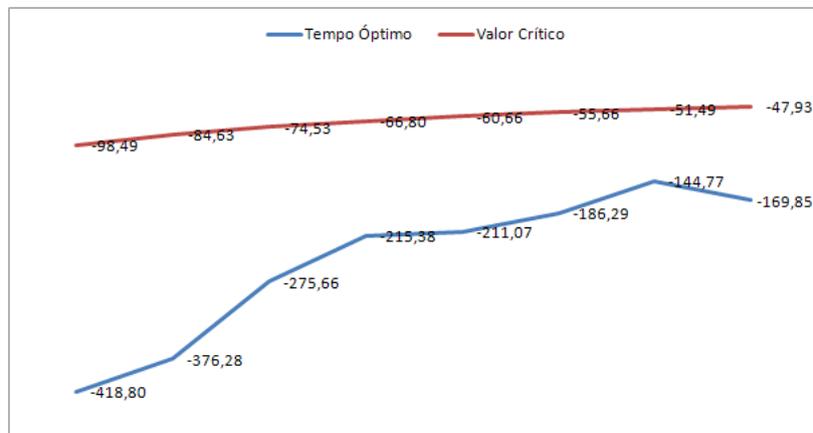


Figura 5.1: Comportamento relativo de x^* e \hat{t}^* em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.2

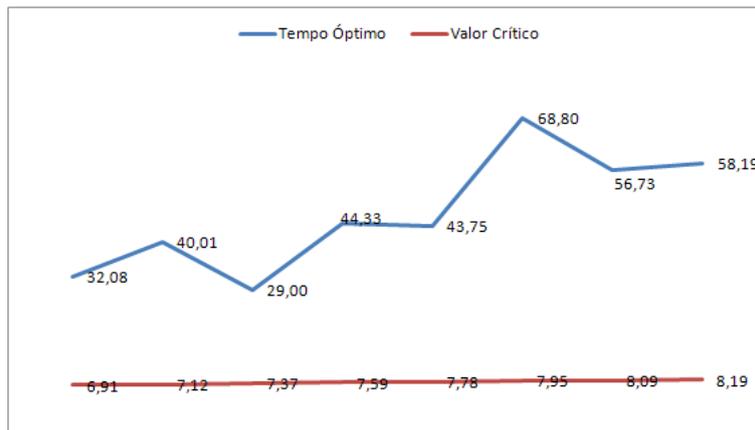


Figura 5.2: Comportamento relativo de x^* e \hat{t}^* em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.4

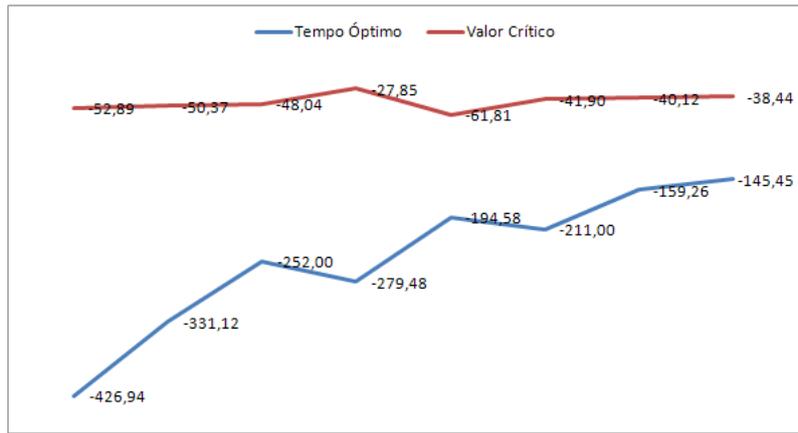


Figura 5.3: Comportamento relativo de x^* e \hat{t}^* em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.6

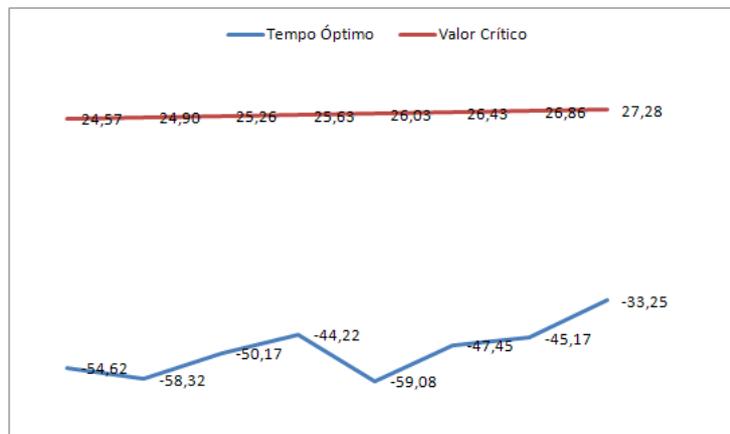


Figura 5.4: Comportamento relativo de x^* e \hat{t}^* em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.7

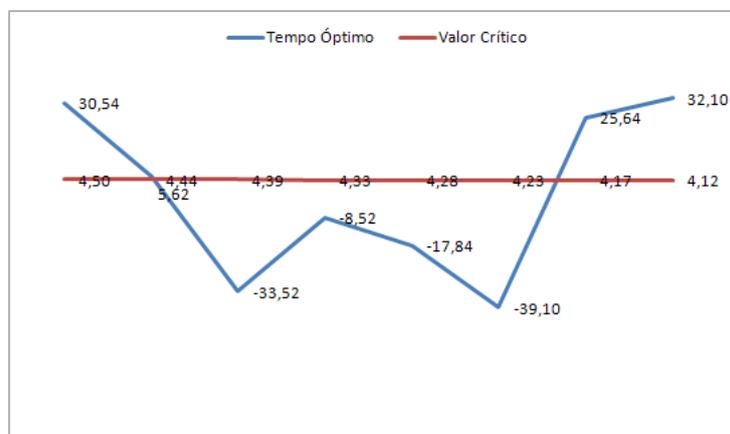


Figura 5.5: Comportamento relativo de x^* e \hat{t}^* em função de λ - de acordo com a Figura 4.8

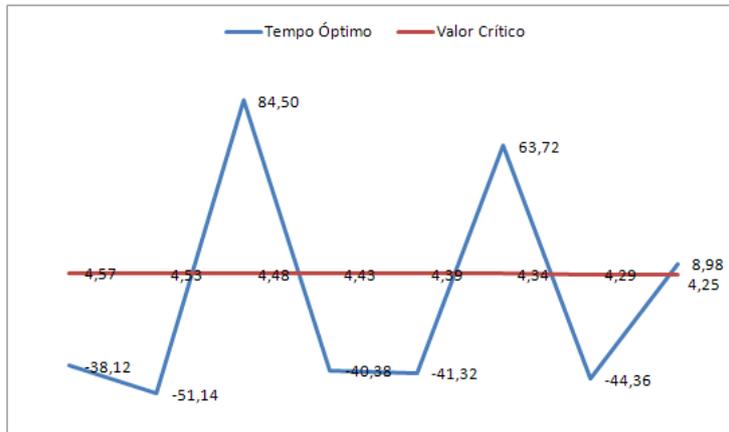


Figura 5.6: Comportamento de x^* e \hat{t}^* em função de u - de acordo com a Figura 4.9

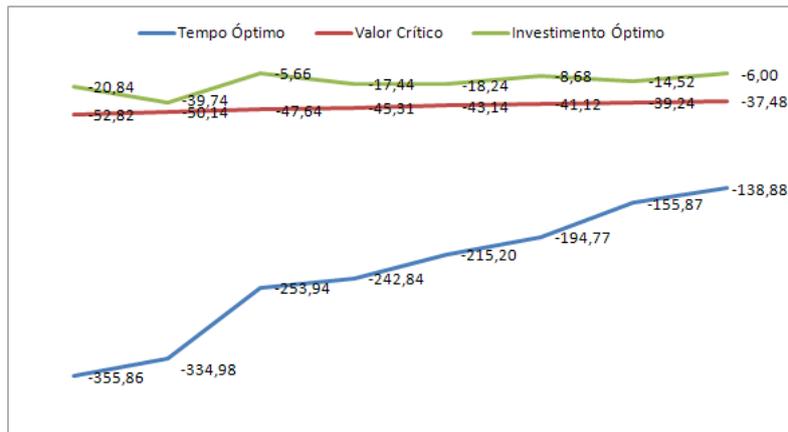


Figura 5.7: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.11

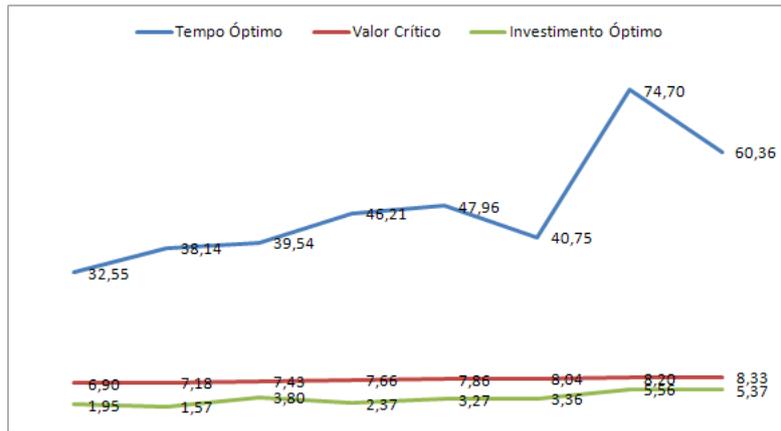


Figura 5.8: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.12



Figura 5.9: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - de acordo com a Figura 4.13

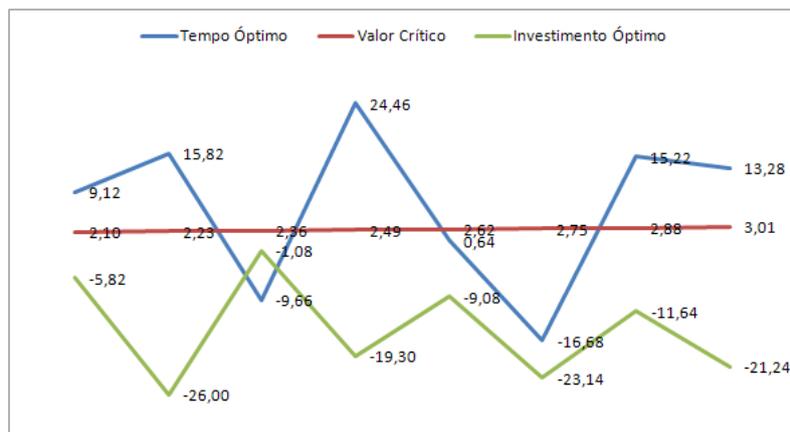


Figura 5.10: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - de acordo com a Figura 4.14

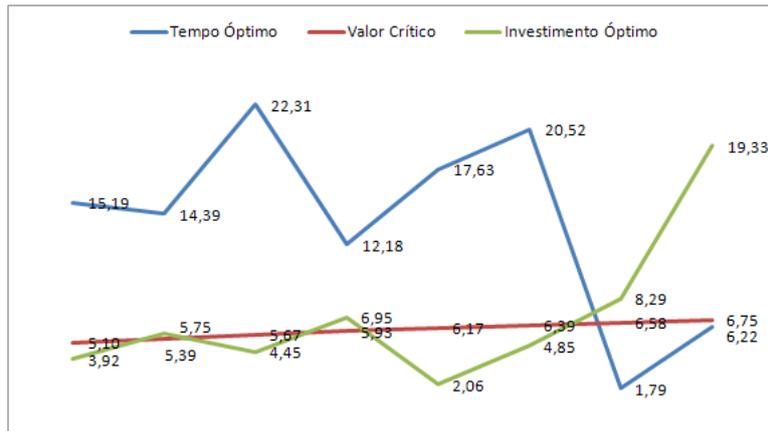


Figura 5.11: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.15

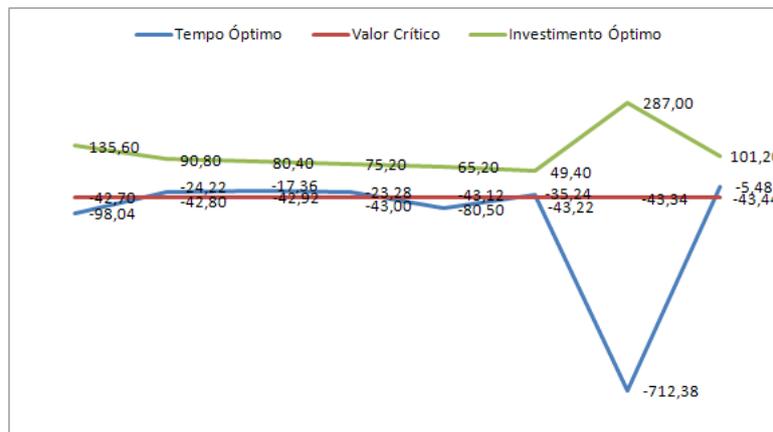


Figura 5.12: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - de acordo com a Figura 4.16

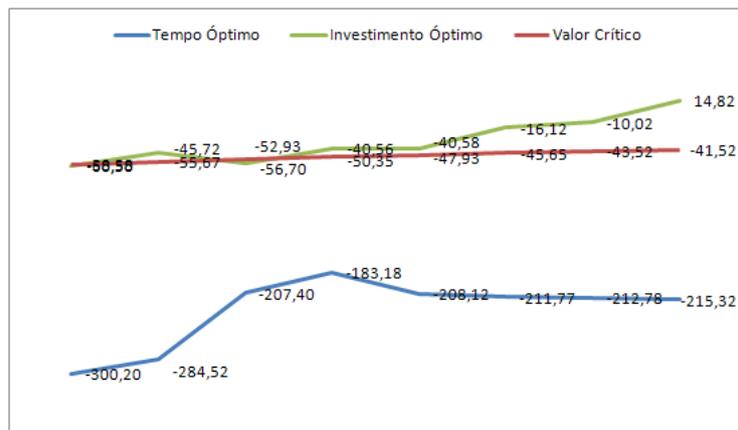


Figura 5.13: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.17

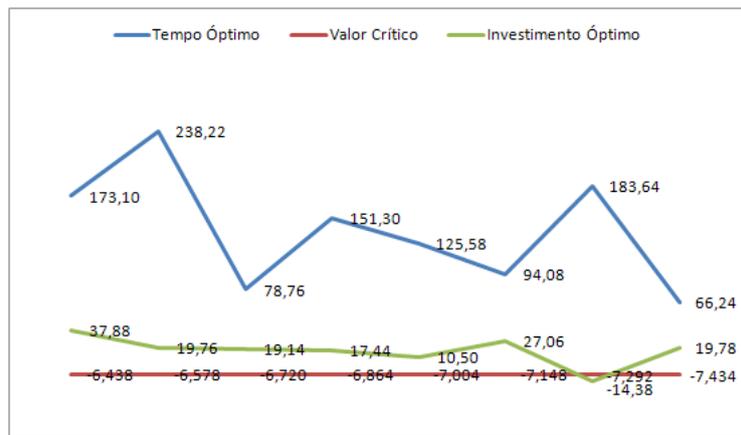


Figura 5.14: Comportamento de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - de acordo com a Figura 4.18

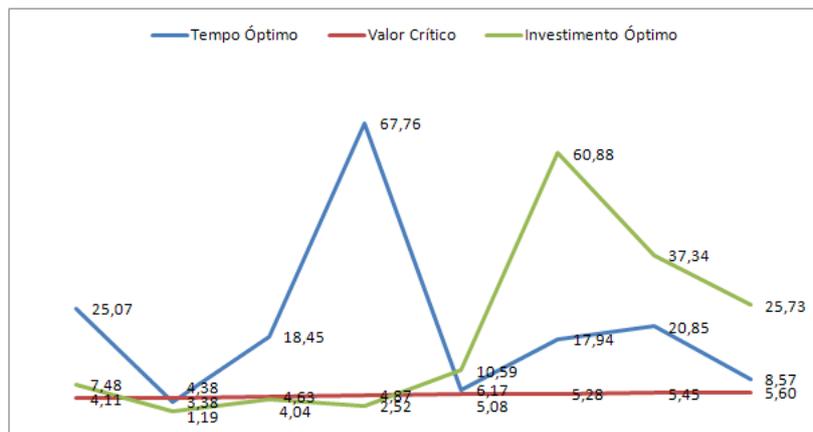


Figura 5.15: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_x - de acordo com a Figura 4.19

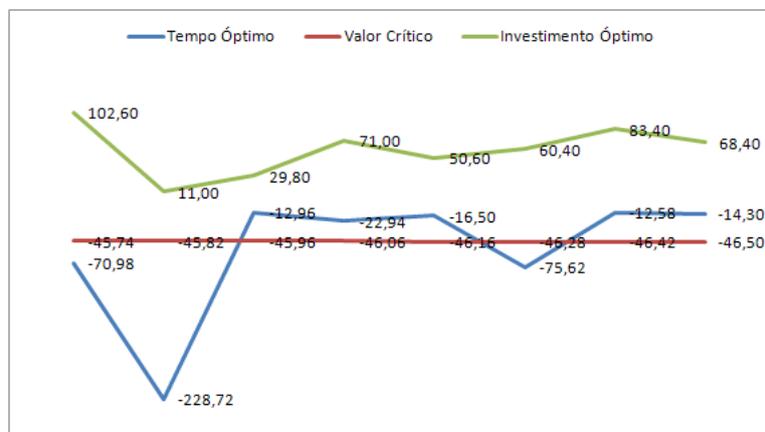


Figura 5.16: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_γ - de acordo com a Figura 4.20

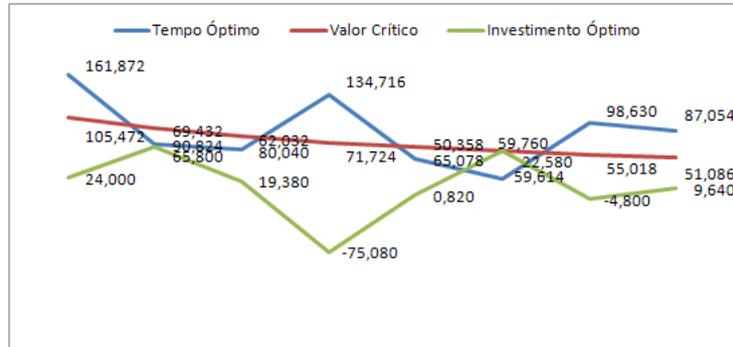


Figura 5.17: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de μ_x - de acordo com a Figura 4.21

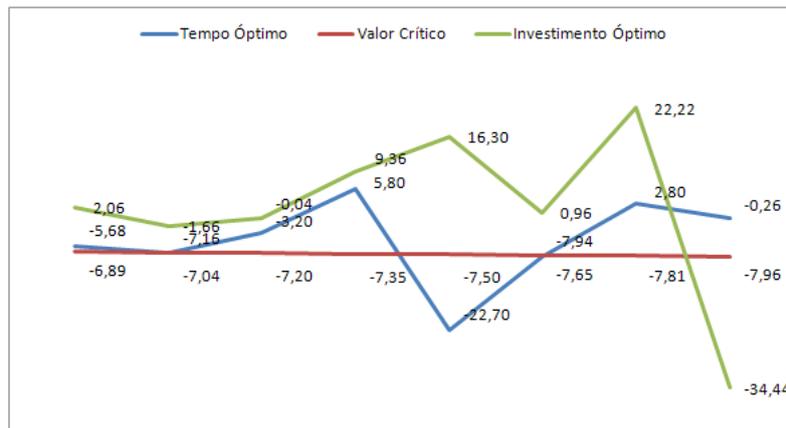


Figura 5.18: Comportamento relativo de x^* , \hat{t}^* e $\hat{\gamma}^*$ em função de σ_γ - de acordo com a Figura 4.22