



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
Universidade Técnica de Lisboa

## **Elementos finitos triangulares compatíveis na análise estrutural de lajes finas**

**Pedro Miguel de Matos Sanches**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Civil**

### **Júri**

Presidente: Professor Doutor Fernando Manuel Fernandes Simões  
Orientador: Professor Doutor Carlos Manuel Tiago Tavares Fernandes  
Vogal: Professor Doutor António Manuel Figueiredo Pinto da Costa

**Novembro 2011**



# Resumo

As bases da teoria da elasticidade linear foram lançadas há cerca de dois séculos atrás. A sua generalidade permitiu o estabelecimento de várias teorias técnicas, fundamentais em diversos ramos da engenharia. Deste conjunto destacam-se as teorias de vigas, lajes e cascas.

No presente trabalho, a teoria de lajes moderadamente espessas é consistentemente obtida a partir das equações do contínuo tridimensional através da imposição de restrições estáticas e cinemáticas. A teoria de lajes finas – ou teoria de Kirchhoff – é então obtida como um caso particular da primeira.

O Método dos Elementos Finitos tem-se revelado uma ferramenta importante na análise estrutural e, em particular, deste tipo de laje. O seu constante desenvolvimento visa a obtenção de soluções, tanto quanto possível, próximas das soluções exactas. Neste contexto, as análises de convergência são um passo importante na aferição da formulação e respectiva implementação de elementos finitos.

No âmbito deste trabalho foi revista a formulação e foram implementados quatro elementos finitos triangulares compatíveis clássicos, *viz.*, o T21, o T18, o HCT12 e o HCT9. Dado que os dois primeiros elementos também incluem, como graus de liberdade, curvaturas nodais, é discutida a imposição das condições de fronteira cinemáticas por forma a gerar soluções compatíveis.

As matrizes características elementares foram avaliadas simbolicamente e expressas de uma forma sistemática através de produtos matriciais. Para o efeito, foi fundamental o recurso ao conceito de coordenadas de área. Em particular foram derivados os vectores de forças nodais equivalentes devido à acção de cargas efectivas distribuídas e a variações de temperatura linear na espessura do elemento.

Os exemplos numéricos foram escolhidos de forma a fornecerem resultados comparáveis com as soluções exactas presentes na bibliografia. A implementação foi realizada em ambiente MATLAB (2010). Desta foi possível extrair informações importantes que permitiram concluir acerca da qualidade dos vários elementos em estudo.

Nas conclusões foi analisada a convergência de diversas grandezas, os seus erros comparativamente às soluções exactas e os tempos de processamento de cada elemento. Observou-se ainda a forma de diversos diagramas de esforços e de deformadas das estruturas, comparando-os com a solução exacta.

**Palavras-Chave:** Método dos Elementos Finitos, lajes finas, elementos triangulares compatíveis.





# Abstract

The basis of linear elasticity theory were grounded about two centuries ago. Its generality allowed the establishment of several technical theories, fundamental in several branches of engineering. From this set the theories of beams, plates and shells highlights.

In the present work, moderately thick plate theory is consistently obtained from the three-dimensional continuum equations by imposing static and kinematic restrictions. Thin plate theory – or Kirchhoff's Theory – is then obtained as a particular case of the first.

The Finite Element Method has proved to be an important tool in structural analysis and, in particular, in this type of plate. It's constant development aims for solutions, as much as possible, near the exact ones. In this context, convergence analysis is an importante step in the formulation and implementation's assessment of finite elements.

In this dissertation the formulation was revised and four classic compatible triangular finite elements were implemented, *viz.*, the T21, the T18, the HCT12 and the HCT9. Since the first two elements also include nodal curvatures as degrees of freedom, a discussion of boundary kinematic conditions is also presented in order to generate compatible solutions.

The characteristic elementary matrices were symbolically evaluated and systematically expressed by matrix products. To this end, the area coordinates concept was fundamental. In particular, the equivalent nodal force vectors due to distributed effective loads and to linear temperature variations in the thickness of the element were derived.

The numerical examples were chosen so that the results were comparable with the exact solutions given in the bibliography. The implementation was made in MATLAB (2010) environment. From this, important information was extracted allowing relevant conclusions regarding the quality of the several elements in study.

In the conclusions the convergence of several entities, their errors relatively to the exact solutions and the times spent by computational processing with each element were analyzed. Generalized stress diagrams and deformed shapes were also observed and compared with the exact solution.

**Keywords:** Finite Element Method, thin slabs, compatible triangular elements.



# Agradecimentos

Em primeira instância, gostaria de expressar os meus agradecimentos a quem, em geral, me acompanhou durante este trabalho e durante a minha formação académica, já que esta dissertação é o culminar de um longo e esforçado trajecto.

Agradeço à minha família que sempre me apoiou a todos os níveis, nunca desanimando, inclusivamente nos momentos mais complicados. Aos meus pais que sempre acreditaram em mim e que realizaram um esforço hercúleo para que eu alcançasse este objectivo.

À minha namorada, Sofia Florentino, que me conduziu pelo caminho certo e esteve permanente e indubitavelmente presente nos bons e maus momentos. Aos meus amigos engenheiros, Miguel Hipólito, João Ribeiro, Tiago Tremoço, Ana Ramos e José Madeira, que usaram a sua experiência pessoal e académica para me aconselhar da melhor forma, incentivando fortemente a minha evolução.

Ao professor Carlos Tiago Fernandes, deixo o meu profundo agradecimento pelo acompanhamento permanente e pela disponibilidade inigualável. Os seus conhecimentos foram preciosos e indispensáveis à realização desta dissertação em particular e à minha formação académica em geral.

Aos docentes do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico que leccionaram as minhas aulas e que permitiram que a minha realização académica fomentasse o meu crescimento pessoal que servirá de base ao meu futuro profissional e social.

À memória dos meus avôs, Armando de Matos e João Sanches.



# Índice

|                                                                    |             |
|--------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Índice</b>                                                      | <b>ix</b>   |
| <b>Lista de Figuras</b>                                            | <b>xiii</b> |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                            | <b>xvii</b> |
| <b>1 Introdução</b>                                                | <b>1</b>    |
| 1.1 Considerações Gerais . . . . .                                 | 1           |
| 1.2 Descrição do Trabalho . . . . .                                | 2           |
| 1.3 Organização do Documento . . . . .                             | 3           |
| 1.4 Notação . . . . .                                              | 3           |
| <b>2 Descrição do Problema</b>                                     | <b>5</b>    |
| 2.1 A Forma Geral do Problema de Valores na Fronteira . . . . .    | 5           |
| 2.2 Relações Fundamentais da Elasticidade Tridimensional . . . . . | 6           |
| 2.2.1 Equações de Equilíbrio . . . . .                             | 6           |
| 2.2.2 Equações de Compatibilidade . . . . .                        | 7           |
| 2.2.3 Relações Constitutivas . . . . .                             | 8           |
| 2.3 Relações Fundamentais da Elasticidade Bidimensional . . . . .  | 8           |
| 2.3.1 Equações de Equilíbrio . . . . .                             | 8           |
| 2.3.2 Equações de Compatibilidade . . . . .                        | 9           |
| 2.3.3 Relações Constitutivas . . . . .                             | 9           |
| 2.4 Lajes . . . . .                                                | 10          |
| 2.4.1 Lajes Moderadamente Espessas . . . . .                       | 10          |
| 2.4.2 Lajes Finas . . . . .                                        | 18          |
| <b>3 O Método dos Elementos Finitos</b>                            | <b>25</b>   |
| 3.1 Descrição . . . . .                                            | 25          |
| 3.2 Coordenadas de Área . . . . .                                  | 27          |
| 3.2.1 Definição . . . . .                                          | 27          |
| 3.2.2 Avaliação de Derivadas em Coordenadas de Área . . . . .      | 29          |
| 3.2.3 Avaliação de Integrais em Coordenadas de Área . . . . .      | 33          |
| 3.3 Formulação do Elemento Finito T21 . . . . .                    | 33          |
| 3.3.1 Perspectiva Histórica . . . . .                              | 33          |
| 3.3.2 Funções de Aproximação . . . . .                             | 34          |
| 3.3.3 Matriz de Rigidez Elementar . . . . .                        | 36          |
| 3.3.4 Vector de Forças Elementar . . . . .                         | 39          |
| 3.3.5 Transformação de Coordenadas . . . . .                       | 43          |

|          |                                                                                             |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.6    | Avaliação de Esforços no Elemento . . . . .                                                 | 45        |
| 3.3.7    | Compatibilidade do elemento . . . . .                                                       | 45        |
| 3.4      | Formulação do Elemento Finito T18 . . . . .                                                 | 47        |
| 3.4.1    | Perspectiva Histórica . . . . .                                                             | 47        |
| 3.4.2    | Funções de Aproximação . . . . .                                                            | 48        |
| 3.4.3    | Matriz de Rigidez Elementar . . . . .                                                       | 51        |
| 3.4.4    | Vector de Forças Elementar . . . . .                                                        | 51        |
| 3.4.5    | Transformação de Coordenadas . . . . .                                                      | 54        |
| 3.4.6    | Avaliação de Esforços no Elemento . . . . .                                                 | 54        |
| 3.4.7    | Compatibilidade do elemento . . . . .                                                       | 54        |
| 3.5      | Formulação do Elemento Finito HCT12 . . . . .                                               | 55        |
| 3.5.1    | Perspectiva Histórica . . . . .                                                             | 55        |
| 3.5.2    | Funções de Aproximação . . . . .                                                            | 55        |
| 3.5.3    | Matriz de Rigidez Elementar . . . . .                                                       | 59        |
| 3.5.4    | Vector de Forças Elementar . . . . .                                                        | 61        |
| 3.5.5    | Transformação de Coordenadas . . . . .                                                      | 62        |
| 3.5.6    | Avaliação de Esforços no Elemento . . . . .                                                 | 62        |
| 3.5.7    | Compatibilidade do elemento . . . . .                                                       | 62        |
| 3.6      | Formulação do Elemento Finito HCT9 . . . . .                                                | 63        |
| 3.6.1    | Perspectiva Histórica . . . . .                                                             | 63        |
| 3.6.2    | Funções de Aproximação . . . . .                                                            | 63        |
| 3.6.3    | Matriz de Rigidez Elementar . . . . .                                                       | 65        |
| 3.6.4    | Vector de Forças Elementar . . . . .                                                        | 66        |
| 3.6.5    | Transformação de Coordenadas . . . . .                                                      | 66        |
| 3.6.6    | Avaliação de Esforços no Elemento . . . . .                                                 | 66        |
| 3.6.7    | Compatibilidade do elemento . . . . .                                                       | 66        |
| <b>4</b> | <b>Implementação dos Elementos Finitos</b>                                                  | <b>67</b> |
| 4.1      | Ficheiro de <i>Input</i> . . . . .                                                          | 67        |
| 4.2      | Descrição do Programa . . . . .                                                             | 67        |
| 4.3      | Ficheiro de <i>Output</i> . . . . .                                                         | 68        |
| <b>5</b> | <b>Exemplos Numéricos</b>                                                                   | <b>69</b> |
| 5.1      | <i>Patch test</i> . . . . .                                                                 | 69        |
| 5.2      | Teste de Distorção . . . . .                                                                | 71        |
| 5.3      | Laje Rectangular, Simplesmente Apoiada, Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída . . . . . | 73        |
| 5.3.1    | Solução Exacta . . . . .                                                                    | 73        |
| 5.3.2    | Solução Numérica . . . . .                                                                  | 76        |
| 5.3.3    | Imposição Exacta de Condições de Fronteira Estáticas . . . . .                              | 82        |
| 5.3.4    | Esparsidade das Matrizes de Rigidez Globais . . . . .                                       | 85        |
| 5.4      | Laje Rectangular, Simplesmente Apoiada, Sujeita a Variação de Temperatura . . . . .         | 87        |
| 5.4.1    | Solução Exacta . . . . .                                                                    | 89        |
| 5.4.2    | Solução Numérica . . . . .                                                                  | 89        |
| 5.5      | Laje Circular . . . . .                                                                     | 95        |
| 5.5.1    | Solução Exacta . . . . .                                                                    | 95        |
| 5.5.2    | Solução Numérica . . . . .                                                                  | 95        |

---

|          |                                                            |            |
|----------|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6</b> | <b>Considerações Finais</b>                                | <b>103</b> |
| 6.1      | Conclusões . . . . .                                       | 103        |
| 6.2      | Desenvolvimentos Futuros . . . . .                         | 106        |
| <b>A</b> | <b>Integração de Funções Descontínuas</b>                  | <b>107</b> |
| <b>B</b> | <b>Flutuações na Implementação Numérica</b>                | <b>109</b> |
| <b>C</b> | <b>Ficheiros de Dados</b>                                  | <b>111</b> |
| C.1      | Ficheiro de <i>input</i> . . . . .                         | 111        |
| C.2      | Ficheiro de <i>output</i> . . . . .                        | 113        |
| <b>D</b> | <b>Resultados Numéricos</b>                                | <b>115</b> |
| D.1      | <i>Patch Test</i> . . . . .                                | 115        |
| D.2      | Teste de Distorção . . . . .                               | 116        |
| D.3      | Laje Rectangular, Simplesmente Apoiada . . . . .           | 118        |
| D.3.1    | Carregamento Uniforme . . . . .                            | 118        |
| D.3.2    | Variação de Temperatura Constante . . . . .                | 124        |
| D.4      | Laje Circular Encastrada Sujeita a Carga Pontual . . . . . | 126        |
|          | <b>Bibliografia</b>                                        | <b>129</b> |





# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                                                                             |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Esquema da dependência entre as relações constitutivas e as equações de equilíbrio e de compatibilidade. . . . .                                                                                            | 6  |
| 2.2  | Ilustração da teoria de Reissner-Mindlin. . . . .                                                                                                                                                           | 11 |
| 2.3  | Vectores $\theta_1$ e $\theta_2$ . . . . .                                                                                                                                                                  | 11 |
| 3.1  | Coordenadas de área num elemento triangular genérico. . . . .                                                                                                                                               | 28 |
| 3.2  | Elemento triangular genérico. . . . .                                                                                                                                                                       | 31 |
| 3.3  | Elemento T21. . . . .                                                                                                                                                                                       | 34 |
| 3.4  | Exemplo de algumas funções de aproximação do elemento T21. . . . .                                                                                                                                          | 37 |
| 3.5  | Bordo simplesmente apoiado não compatível. . . . .                                                                                                                                                          | 46 |
| 3.6  | Condições de fronteira cinemáticas para bordos simplesmente apoiados, encastrados deslizantes e encastrados. . . . .                                                                                        | 46 |
| 3.7  | Compatibilidade do deslocamento, $w$ , no elemento T21. . . . .                                                                                                                                             | 47 |
| 3.8  | Compatibilidade da derivada normal, $w_{,n}$ , no elemento T21. . . . .                                                                                                                                     | 47 |
| 3.9  | Variação cúbica da derivada normal, $w_{,n}$ , no lado do elemento T18. . . . .                                                                                                                             | 48 |
| 3.10 | Exemplo de funções de aproximação do elemento T18. . . . .                                                                                                                                                  | 52 |
| 3.11 | Elemento HCT12. . . . .                                                                                                                                                                                     | 55 |
| 3.12 | Divisão do elemento HCT12 em subelementos. . . . .                                                                                                                                                          | 56 |
| 3.13 | Graus de liberdade do subelemento $[i]$ do elemento HCT12. . . . .                                                                                                                                          | 58 |
| 3.14 | Exemplo de funções de aproximação do subelemento HCT12. . . . .                                                                                                                                             | 59 |
| 3.15 | Variação quadrática da derivada normal, $w_{,n}$ , no lado interior do elemento HCT12. . . . .                                                                                                              | 63 |
| 3.16 | Variação linear da derivada normal, $w_{,n}$ , no lado <u>3</u> do subelemento HCT9. . . . .                                                                                                                | 64 |
| 3.17 | Exemplo de funções de aproximação do subelemento HCT9. . . . .                                                                                                                                              | 65 |
| 5.1  | Esquema do <i>patch test</i> . . . . .                                                                                                                                                                      | 70 |
| 5.2  | Malha para realização do <i>patch test</i> para os elementos de seis nós. . . . .                                                                                                                           | 71 |
| 5.3  | Esquema do teste de distorção. . . . .                                                                                                                                                                      | 71 |
| 5.4  | Malhas exemplificativas utilizadas no teste de distorção. . . . .                                                                                                                                           | 72 |
| 5.5  | Desempenho dos vários elementos no teste de distorção. . . . .                                                                                                                                              | 72 |
| 5.6  | Laje rectangular de dimensão $(a \times b)$ da solução de Timoshenko. . . . .                                                                                                                               | 73 |
| 5.7  | Exemplos de malhas usadas na análise da laje rectangular simplesmente apoiada, com recurso a uma dupla simplificação de simetria ao longo dos bordos $x_1 = 2,0$ e $x_2 = 1,0$ . . . . .                    | 77 |
| 5.8  | Convergência da energia de deformação, $U$ , dos diversos elementos, no caso da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                            | 78 |
| 5.9  | Convergência da energia de deformação, $U$ , dos diversos elementos, em função do número de graus de liberdade, no caso da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . . | 78 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.10 | Erro da energia de deformação em função da dimensão característica dos elementos, $h$ , para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                                                                                                                                    | 79 |
| 5.11 | Deformada da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para o elemento T21, recorrendo à malha menos refinada. . . . .                                                                                                                                                                              | 80 |
| 5.12 | Convergência do deslocamento máximo, $w_{\text{máx}}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                                                                                                                                                              | 80 |
| 5.13 | Momento flector $m_{11}$ da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes elementos, recorrendo à malha de 4 elementos. . . . .                                                                                                                                                      | 81 |
| 5.14 | Convergência do momento flector, $m_{11}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme para os diferentes elementos. . . . .                                                                                                                                                             | 81 |
| 5.15 | Momento flector $m_{22}$ da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes elementos, recorrendo à malha de 4 elementos. . . . .                                                                                                                                                      | 82 |
| 5.16 | Convergência do momento flector máximo, $m_{22}^{\text{máx}}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme para os diferentes elementos. . . . .                                                                                                                                         | 82 |
| 5.17 | Momento torsor $m_{12}$ da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes elementos, recorrendo à malha menos refinada. . . . .                                                                                                                                                       | 83 |
| 5.18 | Convergência do momento torsor mínimo, $m_{12}^{\text{mín}}$ , no canto da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme para os diferentes elementos. . . . .                                                                                                                                           | 83 |
| 5.19 | Esforço transversal $v_1$ da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes elementos, recorrendo às malhas menos e mais refinadas. . . . .                                                                                                                                           | 84 |
| 5.20 | Convergência dos esforços transversos máximos da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme para os diferentes elementos. . . . .                                                                                                                                                                     | 85 |
| 5.21 | Comparação da convergência da energia de deformação apresentada pelos elementos T21 e T18, na laje rectangular simplesmente apoiada, no caso em que se restringe apenas a curvatura tangencial ou no caso em que se restringem ambas as curvaturas. . . . .                                                                        | 86 |
| 5.22 | Índice de esparsidade das várias malhas dos quatro elementos em estudo para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                                                                                                                                                     | 86 |
| 5.23 | Comparação das entradas nulas e não nulas das matrizes de rigidez, apresentada pelos vários elementos, para a malha com $h = 0,125$ , na laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                                                                                          | 87 |
| 5.24 | Tempo de cálculo dispendido pelo programa, por elemento, na formação das matrizes de rigidez, dos vectores de forças, na rotação destes para o referencial local e seu espalhamento, para as várias malhas dos quatro elementos em estudo, para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . . | 88 |
| 5.25 | Número total de nós da estrutura nos vários elementos para as diferentes dimensões características, $h$ , para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                                                                                                                  | 88 |
| 5.26 | Deformada e diagramas de momentos flectores da laje rectangular simplesmente apoiada para o elemento T21, recorrendo à malha mais refinada, para uma variação de temperatura constante. . . . .                                                                                                                                    | 91 |
| 5.27 | Convergência do deslocamento máximo, $w_{\text{máx}}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada, para uma variação de temperatura constante. . . . .                                                                                                                                                                    | 91 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.28 | Momento flector $m_{11}$ da laje rectangular simplesmente apoiada para os diferentes elementos recorrendo à malha de 4 elementos, para uma variação de temperatura constante. . . . .                                                                        | 92  |
| 5.29 | Convergência do momento flector, $m_{11}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada para os diferentes elementos, para uma variação de temperatura constante. . . . .                                                                             | 92  |
| 5.30 | Momento flector $m_{22}$ da laje rectangular simplesmente apoiada para os diferentes elementos recorrendo à malha de 4 elementos, para uma variação de temperatura constante. . . . .                                                                        | 93  |
| 5.31 | Convergência do momento flector, $m_{22}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada para os diferentes elementos, para uma variação de temperatura constante. . . . .                                                                             | 93  |
| 5.32 | Andamento do momento flector normal $m_{22}$ , sobre o bordo da laje rectangular simplesmente apoiada para $x_2 = 0$ , para uma variação de temperatura constante, na malha mais refinada dos quatro elementos em estudo. . . . .                            | 94  |
| 5.33 | Convergência do momento flector tangencial, $m_{tt}$ , no ponto $(2, 0)$ , da laje rectangular, simplesmente apoiada para os diferentes elementos, para uma variação de temperatura constante. . . . .                                                       | 94  |
| 5.34 | Exemplo da malha da laje circular encastrada para $h = 0, 50$ . . . . .                                                                                                                                                                                      | 96  |
| 5.35 | Convergência da energia de deformação, $U$ , e taxa de convergência dos quatro elementos em estudo, para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual. . . . .                                                                                         | 97  |
| 5.36 | Deformadas da laje circular encastrada sujeita a carga pontual, para o elemento HCT9. . . . .                                                                                                                                                                | 98  |
| 5.37 | Convergência do deslocamento no centro da laje circular encastrada sujeita a carga pontual. . . . .                                                                                                                                                          | 98  |
| 5.38 | Diagramas de momentos flectores, $m_{11}$ , da laje circular encastrada sujeita a carga pontual, para os diferentes níveis de refinamento, dos elementos T21 e HCT9. . . . .                                                                                 | 99  |
| 5.39 | Convergência do momento flector $m_{11}$ , no ponto $(1, 0)$ , da laje circular encastrada sujeita a carga pontual. . . . .                                                                                                                                  | 99  |
| 5.40 | Diagramas de momentos torsores, $m_{12}$ , da laje circular encastrada sujeita a carga pontual, para as malhas mais refinadas, dos elementos T21 e HCT9. . . . .                                                                                             | 100 |
| 5.41 | Andamento do esforço transversal $v_1$ ao longo do bordo $x_2 = 0$ para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual, no elemento T21. . . . .                                                                                                         | 100 |
| 5.42 | Andamento do esforço transversal $v_1$ ao longo do bordo $x_2 = 0$ para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual, no elemento T18. . . . .                                                                                                         | 101 |
| 5.43 | Andamento do esforço transversal $v_1$ ao longo do bordo $x_2 = 0$ para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual, no elemento HCT12. . . . .                                                                                                       | 101 |
| 5.44 | Andamento do esforço transversal $v_1$ ao longo do bordo $x_2 = 0$ para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual, no elemento HCT9. . . . .                                                                                                        | 102 |
| A.1  | Função descontínua ao longo de uma linha fechada. . . . .                                                                                                                                                                                                    | 107 |
| B.1  | Esforço transversal $v_1$ para duas malhas de 128 e 512 elementos T21, respectivamente, no caso de uma laje quadrada de dimensão $(1 \times 1)$ , simplesmente apoiada, sujeita a carga efectiva uniforme, com recurso a uma implementação numérica. . . . . | 109 |



# Lista de Tabelas

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1  | Coordenadas de área dos elementos de seis nós. . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 28  |
| 5.1  | Resultados obtidos para os valores adimensionalizados de $w(\frac{a}{2}, 0)$ , $m_{11}(\frac{a}{2}, 0)$ , $m_{22}(\frac{a}{2}, 0)$ , $m_{12}(0, -\frac{b}{2})$ e $U$ em laje rectangular ( $b = 2a$ ), simplesmente apoiada ( $\nu = 0, 3$ ) sujeita a carga uniforme. . . . . | 75  |
| 5.2  | Resultados obtidos para os valores adimensionalizados de $v_\alpha$ em laje rectangular ( $b = 2a$ ), simplesmente apoiada ( $\nu = 0, 3$ ) sujeita a carga uniforme. . . . .                                                                                                  | 76  |
| 5.3  | Valores teóricos do deslocamento, momentos flectores, momento torsor e energia de deformação para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                                                                           | 76  |
| 5.4  | Valores teóricos dos esforços transversos para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                                                                                                                              | 76  |
| 5.5  | Graus de liberdade restringidos na análise da laje através do elemento T21 e usando a malha indicada na figura 5.7a. . . . .                                                                                                                                                   | 77  |
| 5.6  | Taxa de convergência dos diferentes elementos para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme. . . . .                                                                                                                                          | 79  |
| 5.7  | Resultados obtidos para os valores adimensionalizados de $w$ , $m_{11}$ e $m_{22}$ em laje rectangular ( $b = 2a$ ), simplesmente apoiada, $\nu = 0, 3$ , sujeita a uma variação de temperatura diferencial constante. . . . .                                                 | 90  |
| 5.8  | Valores exactos de $w$ , $m_{11}$ e $m_{22}$ no centro da laje e de $m_{tt}$ sobre os bordos apoiados, em laje rectangular ( $b = 2a$ ), simplesmente apoiada, sujeita a uma variação de temperatura constante. . . . .                                                        | 90  |
| 5.9  | Valores teóricos das grandezas em análise para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual. . . . .                                                                                                                                                                     | 95  |
| 5.10 | Área da laje circular e respectivo erro para as diferentes malhas. . . . .                                                                                                                                                                                                     | 96  |
| 5.11 | Taxa de convergência dos diferentes elementos para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual. . . . .                                                                                                                                                                 | 97  |
| D.1  | Campo de momentos do elemento T18 obtidos no <i>patch test</i> para $\nu = 0$ . . . . .                                                                                                                                                                                        | 115 |
| D.2  | Valores numéricos dos deslocamentos dos vértices da laje rectangular no teste de distorção e respectivos erros para os elementos T21 e T18. . . . .                                                                                                                            | 116 |
| D.3  | Valores numéricos dos deslocamentos dos vértices da laje rectangular no teste de distorção e respectivos erros para os elementos HCT12 e HCT9. . . . .                                                                                                                         | 117 |
| D.4  | Valores da energia de deformação e do deslocamento máximo no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . .                         | 119 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| D.5  | Valores dos momentos flectores $m_{11}$ e $m_{22}^{m\acute{a}x}$ no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . .                                                                    | 120 |
| D.6  | Valores do momento torsor mínimo $m_{12}^{m\acute{i}n}$ e da reacção máxima $R_{m\acute{a}x}$ no canto da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . .                                        | 121 |
| D.7  | Valores do esforço transverso máximo $v_1^{m\acute{a}x}$ da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . .                                                                                      | 122 |
| D.8  | Valores do esforço transverso máximo $v_2^{m\acute{a}x}$ laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . .                                                                                         | 123 |
| D.9  | Valores do deslocamento máximo no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a variação de temperatura constante, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . .                                                                                            | 124 |
| D.10 | Valores dos momentos flectores $m_{11}$ e $m_{22}$ no centro e do momento flector tangencial, $m_{tt}$ , no ponto $(2, 0)$ do bordo da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a variação de temperatura constante, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . . | 125 |
| D.11 | Valores da energia de deformação e do deslocamento máximo no centro da laje circular encastrada sujeita a carga pontual, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . .                                                                                                  | 126 |
| D.12 | Valores do momento flector $m_{11}$ no ponto de coordenadas $(0,1)$ da laje circular encastrada sujeita a carga pontual, para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. . . . .                                                                                                  | 127 |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Gerais

Durante séculos a solução de muitos dos problemas que ocorrem em engenharia passava invariavelmente pelo recurso a métodos experimentais e ao conhecimento empírico. A necessidade de resolver problemas cada vez mais complexos num período de tempo razoável e a procura por entender as leis pelas quais a natureza se rege parecia incompatível com a construção de modelos físicos, medição de resultados e sua extrapolação para diferentes condições.

A procura de caminhos alternativos à solução de problemas nos mais diversos campos da ciência e tecnologia levou à formulação dos mesmos em termos de sistemas de equações diferenciais com condições de fronteira apropriadas. Devido à sua complexidade é, em geral, impossível obter as soluções destes sistemas de equações diferenciais através de métodos clássicos, como seja a separação de variáveis. Apenas em casos muito simples a sua solução exacta pode ser encontrada.

A possibilidade de usar métodos numéricos para obter soluções aproximadas – com uma precisão razoável – de sistemas de equações diferenciais foi o caminho naturalmente escolhido. Dentro desta classe de métodos encontram-se, *e.g.*, Método das Diferenças Finitas (Timoshenko e Goodier, 1970, ver nota de rodapé na página 515 do apêndice “The Application of Finite-Difference Equations in Elasticity”), o Método dos Elementos de Fronteira (Brebbia e Dominguez, 1992), o Método dos Volumes Finitos (Chorin, 1968) e métodos sem malha (Li e Liu, 2004).

Dentro deste contexto, surge também o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este é apresentado no apêndice de uma publicação acerca da aplicação de métodos variacionais na solução de problemas de equilíbrio e vibração, ver Courant (1943, página 2184, Apêndice “Numerical treatment of the plane torsion problem for multiply-connected domains”).

Este método tem como pressuposto a divisão do domínio a analisar em subdomínios. O resultado desta divisão é a malha de elementos finitos e o seu processo de construção é comumente designado por *geração da malha de elementos finitos*. O domínio contínuo é então discretizado num conjunto de elementos, tendo em vista a substituição do sistema de equações diferenciais por um sistema de equações algébricas. Este último, é resolvido a fim de obter uma solução aproximada para o problema.

O MEF é, assim, um processo sistemático de obtenção de soluções dos mais diversos problemas regidos por sistemas de equações diferenciais. Para problemas lineares, a solução é obtida por resolução de um sistema de equações lineares. O refinamento exigido para a malha depende do grau de complexidade do problema e da precisão pretendida para

o resultado. Assim, o recurso ao cálculo automático é essencial. Em geral, quanto mais refinada a malha de elementos finitos, mais próxima da solução exacta é a solução obtida, mas maior é o custo computacional envolvido. É nesta fase que a análise das soluções é importante.

Algumas resenhas históricas do MEF podem ser encontradas nos trabalhos de Clough (1980), Williamson Jr. (1980), Clough (1990), Wilson (1993), Gupta e Meek (1996), Felippa (2001), Clough (2001, 2004) e Samuelsson e Zienkiewicz (2006).

## 1.2 Descrição do Trabalho

Este trabalho incide sobre o estudo de peças laminares planas (LNEC, 1966). Sendo a solicitação introduzida perpendicular ao plano médio da peça, estas são habitualmente designadas por lajes. Em particular, pretende-se analisar o comportamento de lajes cuja deformabilidade devida ao esforço transversal é negligenciável, *i.e.*, lajes finas. No contexto do MEF, serão analisados quatro elementos finitos triangulares compatíveis, *viz.*, o T21, T18, HCT12 e o HCT9.

A aproximação do elemento T21 é formada pela base do polinómio quártico completo definido no espaço bidimensional e, consequentemente, tem dimensão igual a vinte e um. Este é um elemento de lados rectos com seis nós e com vinte e um graus de liberdade. Nos vértices os graus de liberdade são o deslocamento transversal e as suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem em relação aos eixos coordenados. A meio das arestas tem um único grau de liberdade: a derivada normal do deslocamento transversal.

O segundo elemento em estudo – o T18 – deriva do primeiro por supressão dos graus de liberdade correspondentes à derivada normal a meio das arestas. Deste modo, está-se na presença de um elemento finito triangular compatível de três nós situados nos vértices, onde cada um deles apresenta os mesmos graus de liberdade que aqueles do T21, *i.e.*, o deslocamento transversal e as suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem em relação aos eixos coordenados. É assim um elemento com dezoito graus de liberdade no total.

Este elemento apresenta várias semelhanças com o elemento T21, tendo originalmente sido proposto nas mesmas publicações desse elemento.

Tal como será exposto, a base de aproximação do campo de deslocamentos transversal será também um polinómio quártico completo definido no espaço bidimensional, logo com dimensão igual a vinte e um. No entanto, são impostas três restrições: a derivada normal ao longo de cada uma das três arestas tem variação cúbica. A grande vantagem deste procedimento é o facto de permitir eliminar os três graus de liberdade associados às derivadas normais a meio das arestas.

Estudam-se também nesta dissertação os elementos HCT12 e HCT9, sendo HCT acrónimo para Hsieh–Clough–Tocher. O primeiro é formado pela divisão de um macrotriângulo em três subtriângulos. Em cada um destes subtriângulos é definido um campo de deslocamentos cúbico completo. Assim, fica-se com  $3 \times 10 = 30$  incógnitas. As incógnitas finais são  $3 \times 3 + 3 = 12$ , *viz.* o deslocamento transversal e as suas derivadas parciais de primeira ordem nos três vértices e a derivada normal em cada uma das arestas de cada elemento, perfazendo um total de doze graus de liberdade. Deste modo é necessário prescrever  $30 - 12 = 18$  restrições. Impondo três restrições em cada nó de vértice, seis restrições no nó central e três restrições na derivada normal entre triângulos fica-se com um total de  $3 \times 3 + 6 + 3 = 18$  restrições.



Por sua vez, o elemento HCT9 resulta do anterior por supressão dos graus de liberdade a meio das arestas. A aproximação no interior de cada subtriângulo é também formada por dez parâmetros. Além das restrições impostas no caso do HCT12, prescreve-se ainda que a derivada normal ao longo dos lados varie linearmente e não quadraticamente, ficando-se assim com nove graus de liberdade. As incógnitas finais são  $3 \times 3 = 9$ , *viz.* o deslocamento transversal e as suas derivadas parciais de primeira ordem nos três vértices.

A aplicação de elementos triangulares compatíveis na análise de problemas onde é exigida continuidade  $C^1$  tem merecido o interesse da comunidade científica. Apesar de formulados há várias décadas atrás, os quatro elementos (T21, T18, HCT9 e HCT12) foram objecto de um contínuo estudo, que culminou em rigorosas provas de convergência e estabilidade, ver Ciarlet (2002), Braess (2007) e Brenner e Scott (2008).

### 1.3 Organização do Documento

O trabalho apresenta-se segmentado em diferentes capítulos. Neste pretende-se introduzir o tema geral do trabalho, citar alguns estudos realizados por diversos autores, particularizar o que se pretende desenvolver e explicitar a notação a ser utilizada.

No capítulo 2 far-se-á uma descrição concisa do problema a resolver, começando por introduzir a forma geral do problema de valores de fronteira. Seguidamente descrever-se-ão as relações fundamentais da teoria da elasticidade para o caso tridimensional e particulariza-se para o caso bidimensional. Será em seguida descrita a teoria linear de lajes moderadamente espessas, habitualmente designada por teoria de Reissner-Mindlin, no contexto das teorias estruturais de peças laminares. Por fim a teoria linear de lajes finas, a teoria de Kirchhoff, surge como um caso particular da primeira, onde se impõe que a deformabilidade devida ao esforço transversal seja nula.

No capítulo 3 é feita uma introdução ao método dos elementos finitos, reve-se o conceito de coordenadas de área e são formulados os elementos finitos estudados.

No capítulo 4 os elementos descritos no capítulo anterior são implementados, sendo referido o tipo de *input* necessário e qual o *output* fornecido. É ainda feita uma descrição sucinta dos programas elaborados em ambiente MATLAB (2010).

No capítulo 5 são avaliados numericamente dois tipos de lajes. Analisar-se-á uma laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída e uma laje circular encastrada submetida a uma carga central concentrada. Estudar-se-á ainda o caso da laje rectangular sujeita a uma variação de temperatura diferencial (linear na espessura) e constante no plano médio da laje. Neste capítulo pretende-se analisar a convergência de alguns parâmetros tais como a energia de deformação, o tensor dos momentos, o esforço transversal e o deslocamento no centro das lajes.

Finalmente, no capítulo 6, serão efectuadas algumas considerações finais, apresentando conclusões sobre os resultados obtidos.

### 1.4 Notação

Com o intuito de uniformizar e facilitar a compreensão do texto que se segue, serão usados alguns tipos de letras distintos. Assim, as letras latinas ou gregas minúsculas ( $a, b, \dots \alpha, \beta, \dots$ ) denotam quantidades escalares, letras latinas ou gregas minúsculas em negrito ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots$ ) denotam vectores e letras latinas ou gregas maiúsculas ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ ) denotam tensores de segunda ordem no espaço euclidiano tridimensional.

Para efeitos de implementação as entidades definidas anteriormente são transformadas em matrizes. Estas são denotadas por letras latinas a negrito na posição vertical ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ ).

Ao longo do texto é também adoptada a convenção de soma em índices repetidos, com índices gregos em itálico ( $\alpha, \beta, \dots$ ) a variarem de 1 a 2 e índices latinos em itálico ( $i, j, \dots$ ) a variarem de 1 a 3.

Além disso, “ $\cdot$ ” representa o produto interno de vectores e “ $\times$ ” denota o produto vectorial.

O símbolo de Kronecker é denotado por  $\delta_{ij}$  e  $\llbracket f(s) \rrbracket$  indica a descontinuidade de  $f(s)$  em  $s$ , dada por  $\llbracket f(s) \rrbracket = f(s^+) - f(s^-)$ , onde  $f(s^-)$  e  $f(s^+)$  representam, respectivamente, os valores de  $f(s)$  imediatamente antes e após a descontinuidade.

## Capítulo 2

# Descrição do Problema

### 2.1 A Forma Geral do Problema de Valores na Fronteira

Considere-se um corpo que ocupa um domínio genérico, aqui designado por  $\Omega$ , no espaço de dimensão  $d \in \{1, 2, 3\}$ . A sua fronteira,  $\Gamma$ , pode ser parametrizada a partir de um espaço de dimensão  $(d - 1)$  e pode ser decomposta nas parcelas cinemática,  $\Gamma_u$ , e estática,  $\Gamma_t$ , sendo  $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ ,  $\emptyset = \Gamma_t \cap \Gamma_u$ . Por simplicidade, condições do tipo misto – em que se impõe uma combinação linear de grandezas estáticas e cinemáticas – não são aqui tratadas. É habitual designar as condições de fronteira cinemática, estática e mista por Dirichlet, Neumann e Robin, respectivamente.

Qualquer problema de mecânica dos sólidos ou das estruturas pode ser expresso através de um conjunto de equações no domínio,  $\Omega$ , e na fronteira,  $\Gamma$ , que regem o seu comportamento.

No domínio do problema em análise,  $\Omega$ , estas equações, nas hipóteses da linearidade física e geométrica e no caso de aplicação *quasi*-estática da solicitação, podem ser escritas em notação matricial na forma,

$$\partial^* \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.1a)$$

$$\sigma = \mathbf{D} \epsilon + \sigma_0 \quad (2.1b)$$

$$\epsilon = \partial \mathbf{u} \quad (2.1c)$$

onde  $\partial^*$  é o operador diferencial de equilíbrio,  $\sigma$  é um vector que agrupa as tensões generalizadas,  $\mathbf{f}$  é o vector das forças de massa generalizadas,  $\mathbf{D}$  é um operador constitutivo de rigidez generalizado,  $\sigma_0$  é um vector que agrupa as tensões generalizadas iniciais,  $\epsilon$  é o vector que reúne as deformações generalizadas,  $\partial$  é o operador diferencial de compatibilidade e  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos generalizados.

As equações (2.1a), (2.1b) e (2.1c) representam a condição de equilíbrio, a relação constitutiva e a condição de compatibilidade, respectivamente.

As equações a satisfazer na fronteira,  $\Gamma$ , podem, em certos casos, ser escritas na forma<sup>1</sup>,

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.2b)$$

---

<sup>1</sup>Por exemplo, estas equações necessitam de ser generalizadas em determinadas teorias estruturais (vigas e lajes finas) ou na presença de apoios inclinados. No entanto, vai utilizar-se a forma acima indicada por ser simples e suficientemente geral.

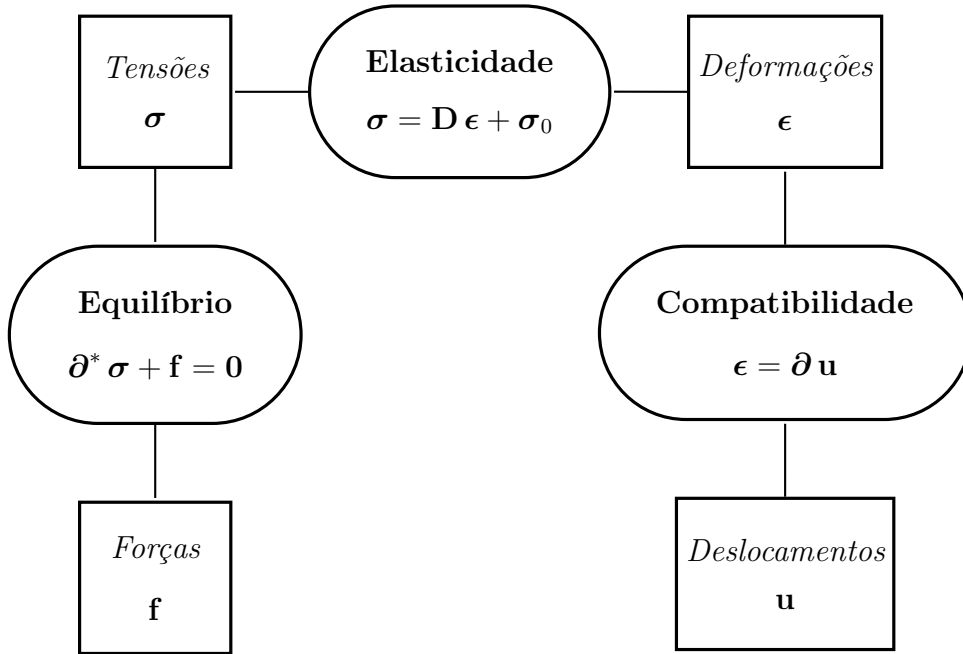


Figura 2.1: Esquema da dependência entre as relações constitutivas e as equações de equilíbrio e de compatibilidade.

em que  $\mathbf{t} = \mathbf{N}^* \sigma$  é um vector que armazena as tracções generalizadas,  $\mathbf{N}^*$  é a projecção na fronteira estática de  $\partial^*$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$  é um vector que armazena as tracções generalizadas prescritas na fronteira estática e  $\bar{\mathbf{u}}$  é um vector que reúne os deslocamentos generalizados prescritos na fronteira cinemática.

## 2.2 Relações Fundamentais da Elasticidade Tridimensional

As equações da teoria da elasticidade aqui apresentadas foram amplamente estudadas por diversos autores. Por esse motivo, neste documento elas são meramente expostas. A sua dedução pode ser consultada, por exemplo, em Timoshenko e Goodier (1970).

No caso da elasticidade tridimensional  $d = 3$  e o domínio genérico é designado por  $V$ . A sua fronteira,  $S$ , pode ser parametrizada a partir de um espaço de dimensão 2 e pode ser decomposta nas parcelas cinemática,  $S_u$ , e estática,  $S_t$ .

### 2.2.1 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio na posição indeformada no domínio,  $V$ , podem ser escritas na forma

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0 \quad (2.3)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor das tensões de Cauchy e  $f_j$  são as componentes das forças de massa.

As equações de equilíbrio na fronteira estática,  $S_t$ , são

$$\sigma_{ij} n_i = \bar{t}_j \quad (2.4)$$

onde  $n_i$  são as componentes da normal unitária exterior e  $\bar{t}_j$  são as componentes das tracções aplicadas na fronteira estática.

Estas expressões podem ser escritas na forma geral definida pelas equações (2.1a) e (2.2a) definindo os seguintes vectores que agrupam as tensões, as forças de massa e as tracções na fronteira

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{t}_3 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

e as matrizes de operadores diferenciais e normais na fronteira estática

$$\boldsymbol{\partial}^* = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & 0 & \partial_3 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & 0 & n_3 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

### 2.2.2 Equações de Compatibilidade

As equações de compatibilidade linearizadas no domínio,  $V$ , são

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.7)$$

onde  $\epsilon_{ij}$  são as componentes do tensor das deformações infinitesimais e  $u_i$  são as componentes do campo de deslocamentos.

As equações de compatibilidade na fronteira cinemática,  $S_u$ , são

$$u_i = \bar{u}_i \quad (2.8)$$

onde  $\bar{u}_i$  são as componentes do campo de deslocamentos prescritas na fronteira cinemática.

Definindo a distorção através de  $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ , para  $i \neq j$ , tem-se

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

### 2.2.3 Relações Constitutivas

No caso de um material elástico linear, homogêneo e isotrópico, a relação constitutiva, considerando os efeitos da temperatura, pode escrever-se no formato de rigidez da seguinte forma

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{E \alpha \Delta T}{1-2\nu} \delta_{ij} \quad (2.11)$$

onde foram introduzidas as constantes elásticas do material, nomeadamente o *módulo de elasticidade*,  $E$ , o *coeficiente de Poisson*,  $\nu$ , o *coeficiente de dilatação térmica linear*,  $\alpha$ , e a *variação de temperatura*,  $\Delta T$ .

Esta expressão pode ser convenientemente escrita em forma matricial. Neste caso, os operadores intervenientes assumem a forma

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.12a)$$

$$\sigma_0 = - \frac{E \alpha \Delta T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.12b)$$

## 2.3 Relações Fundamentais da Elasticidade Bidimensional

A redução do número de dimensões implica apenas, em relação às equações da elasticidade tridimensional, mudanças na relação constitutiva. As restantes equações são idênticas, apenas se usando as relevantes.

Note-se que, caso se recorra a notação indicial, a diferença para o caso tridimensional reside apenas na utilização de índices gregos em lugar de latinos, ver secção 1.4, página 3.

### 2.3.1 Equações de Equilíbrio

Dado que se está agora no espaço bidimensional, a forma indicial das equações de equilíbrio no domínio,  $V$ , será

$$\sigma_{\alpha\beta,\alpha} + f_\beta = 0 \quad (2.13)$$

onde, novamente,  $\sigma_{\alpha\beta}$  são as componentes do tensor das tensões e  $f_\beta$  são as componentes das forças de massa.

As equações de equilíbrio na fronteira estática,  $S_t$ , são agora

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\alpha = \bar{t}_\beta \quad (2.14)$$

onde, mais uma vez,  $n_\alpha$  são as componentes da normal unitária exterior e  $\bar{t}_\beta$  são as componentes das tracções aplicadas na fronteira estática.

Assim, as tensões e deformações generalizadas são

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

e as matrizes de operadores diferenciais e normais na fronteira estática assumem a forma

$$\boldsymbol{\partial}^* = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

### 2.3.2 Equações de Compatibilidade

As equações de compatibilidade no domínio,  $V$ , são

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (2.17)$$

onde  $\epsilon_{\alpha\beta}$  representa as componentes do tensor das deformações e  $u_\alpha$  são as componentes do campo de deslocamentos.

As equações de compatibilidade na fronteira cinemática,  $S_u$ , são

$$u_\alpha = \bar{u}_\alpha \quad (2.18)$$

onde  $\bar{u}_\alpha$  são as componentes do campo de deslocamentos prescritas na fronteira cinemática.

Pode também definir-se a distorção através de  $\gamma_{\alpha\beta} = 2\epsilon_{\alpha\beta}$ , para  $\alpha \neq \beta$ , e tem-se

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

### 2.3.3 Relações Constitutivas

O *estado plano de tensão* é obtido através da imposição de  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$  na relação da elasticidade tridimensional. Resulta então

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= 0 \\ \gamma_{23} &= 0 \\ \epsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha} + \alpha \Delta T \end{aligned}$$

o que conduz a

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.21)$$

Na forma matricial, os operadores intervenientes assumem a forma

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = -\frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22b)$$

## 2.4 Lajes

Nesta secção abordar-se-ão as teorias de Reissner-Mindlin (teoria de lajes moderadamente espessas) e de Kirchhoff (teoria de lajes finas) no contexto das teorias estruturais de peças laminares. A importância da primeira, comparativamente à segunda, reside no facto de aquela permitir contemplar a deformabilidade por esforço transversal. A sua utilização é portanto possível sempre que a espessura da laje ultrapasse os limites que a permitem classificar como laje fina. Segundo Szilard (2004, página 5), considera-se que uma laje é fina quando a relação vão/espessura é superior a dez e moderadamente espessa quando a mesma relação se encontra situada entre cinco e dez. Nesta última situação, a influência do esforço transversal deixa de ser desprezável e as hipóteses de base da teoria de lajes finas deixam de ser válidas.

A teoria de lajes moderadamente espessas é exposta em primeiro lugar. A teoria de lajes finas é aquela que se insere no âmbito deste trabalho e será apresentada como um caso particular da anterior.

A exposição desta secção segue as notas apresentadas em Tiago (2009).

### 2.4.1 Lajes Moderadamente Espessas

Considere-se um corpo  $V$  com a forma particular de uma peça *laminar plana*<sup>2</sup>. Este pode ser descrito através de

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, x_3 \in \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\} \quad (2.23)$$

onde  $h$  é a espessura da laje e  $\Omega$  designa o *plano médio*. A fronteira do plano médio é indicada por  $\Gamma = \partial\Omega$ .

O *campo de deslocamentos* do contínuo tridimensional,  $\mathbf{u}$ , é relacionado com grandezas definidas sobre o plano médio da laje. Estas grandezas constituem o *campo de deslocamentos generalizados* da laje. Devido à necessidade de consideração da deformabilidade por corte no caso da laje moderadamente espessa, este campo é formado pelo deslocamento transversal do plano médio,  $w(x_1, x_2)$ , e pelas rotações,  $\theta_1(x_1, x_2)$  e  $\theta_2(x_1, x_2)$ .

Como referido anteriormente, a teoria de lajes de Reissner-Mindlin permite considerar o efeito da deformabilidade por esforço transversal. Tal como se encontra ilustrado na figura 2.2, considera-se que fibras inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje permanecem rectas após deformação do elemento estrutural, mas não continuam necessariamente a ser ortogonais àquele mesmo plano.

---

<sup>2</sup>De acordo com LNEC (1966), uma estrutura laminar é aquela em que uma das dimensões é muito menor que as restantes.



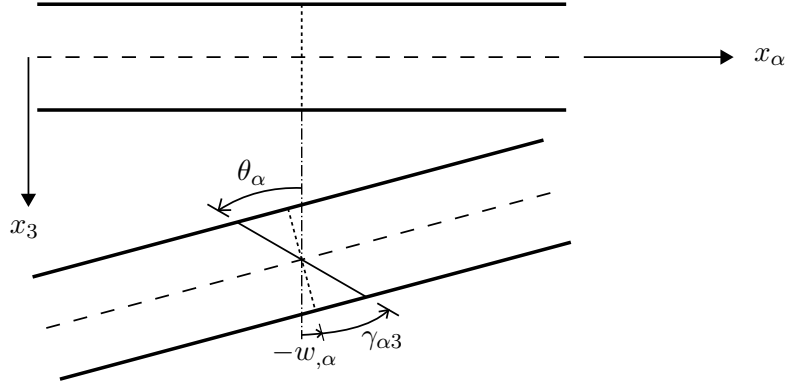
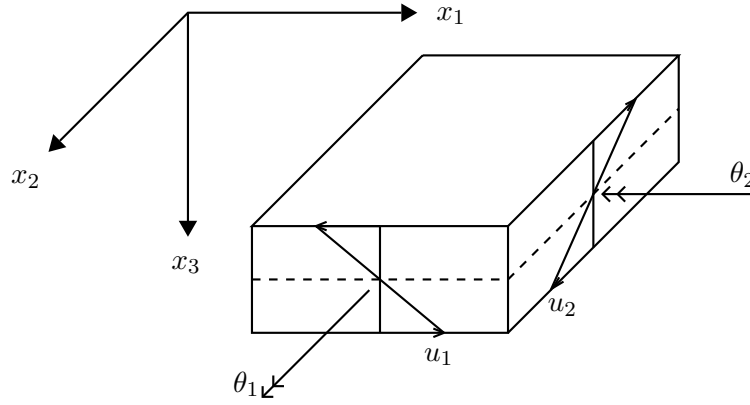


Figura 2.2: Ilustração da teoria de Reissner-Mindlin.

Figura 2.3: Vetores  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

A relação entre os deslocamentos do contínuo tridimensional e os seus análogos generalizados é imposta por

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_3 \theta_\alpha(x_1, x_2) \quad (2.24a)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (2.24b)$$

onde  $\theta_\alpha$  são as componentes do *vector rotação*.

Observando a figura 2.3 e, de acordo com a definição (2.24a), a rotação  $\theta_1(x_1, x_2)$  é um vector segundo  $\mathbf{e}_2$  e rotação  $\theta_2(x_1, x_2)$  é um vector segundo  $(-\mathbf{e}_1)$ . Deste modo garante-se que pontos com coordenadas  $x_3$  positivas apresentem, para rotações positivas  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , deslocamentos positivos segundo  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. Esta notação simplifica consideravelmente os operadores de equilíbrio e compatibilidade, pelo que será a utilizada doravante.

Substituindo o campo de deslocamentos generalizados (2.24) nas condições de compatibilidade do contínuo tridimensional (2.7) obtém-se o tensor de deformações na laje

$$\epsilon_{\alpha\beta} = x_3 \frac{1}{2} (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \quad (2.25a)$$

$$\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (w_{,\alpha} + \theta_\alpha) \quad (2.25b)$$

$$\epsilon_{33} = 0 \quad (2.25c)$$

De referir que na equação (2.24b) se admite implicitamente a hipótese da inextensibilidade das fibras perpendiculares ao plano médio. É esta hipótese que conduz ao anulamento da componente  $\epsilon_{33}$ .

Com vista à completa caracterização do tensor das deformação em qualquer ponto da laje, com base apenas na informação referida ao seu plano médio, introduzem-se agora as medidas de deformação generalizadas, *i.e.*, medidas definidas sobre o plano médio. Este processo permite reduzir a dimensão do problema para duas dimensões.

Na verdade, para as componentes  $\epsilon_{\alpha 3}$  este procedimento é redundante, visto que estas deformações são independentes de  $x_3$ , ver expressão (2.25b). Assim, para estas duas componentes, utilizam-se como deformações generalizadas as próprias deformações do contínuo. Para simplificar a notação utilizar-se-á a distorção, definida por  $\gamma_{\alpha 3} = 2\epsilon_{\alpha 3}$ . Quanto às deformações que dependem (linearmente) da distância ao plano médio, introduz-se a grandeza que caracterizam totalmente o estado de deformação das fibras contidas em planos paralelos ao folheto médio

$$\epsilon_{\alpha\beta} = x_3 \chi_{\alpha\beta} \quad (2.26)$$

Esta grandeza consiste no *tensor das curvaturas*, cujas componentes com índices iguais representam curvaturas de flexão e as componentes com índices diferentes representam curvaturas de torção.

Assim, as equações de compatibilidade no domínio da laje moderadamente espessa podem ser escritas na forma

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \quad (2.27a)$$

$$\gamma_{\alpha 3} = w_{,\alpha} + \theta_{\alpha} \quad (2.27b)$$

As condições de compatibilidade podem também ser escritas na forma matricial de acordo com (2.1c), onde o vector  $\epsilon$  engloba as curvaturas de flexão e torção e as deformações por corte.

Os operadores cinemáticos matriciais no domínio são então

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad \partial = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \\ \partial_1 & 1 & 0 \\ \partial_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

As equações de equilíbrio consistentes com a cinemática admitida podem ser extraídas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais<sup>3</sup>:

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_V f_i u_i dV - \int_S \bar{t}_i u_i dS = 0 \quad (2.29)$$

Tendo em consideração (2.25) tem-se

$$\int_V (\sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}) dV - \int_V f_i u_i dV - \int_S \bar{t}_i u_i dS = 0 \quad (2.30)$$

---

<sup>3</sup>A fim de simplificar a exposição (i) omite-se o símbolo “ $\delta$ ” que precede as grandezas cinemáticas e (ii) não se distinguirão os termos de fronteira estática e cinemática.

Substituindo as definições do campo de deformações (2.26) e de deslocamentos (2.24) obtém-se

$$\int_V (x_3 \sigma_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}) dV - \int_V (x_3 f_\alpha \theta_\alpha + f_3 w) dV - \int_S (x_3 \bar{t}_\alpha \theta_\alpha + \bar{t}_3 w) dS = 0 \quad (2.31)$$

Tendo em consideração que – para a geometria de uma peça laminar plana descrita através de (2.23) – se pode escrever, para uma função genérica  $f(x_1, x_2, x_3)$ ,

$$\int_V f(x_1, x_2, x_3) dV = \int_\Omega \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 d\Omega \quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned} \int_S f(x_1, x_2, x_3) dS &= \int_\Omega f(x_1, x_2, \frac{h}{2}) d\Omega + \int_\Omega f(x_1, x_2, -\frac{h}{2}) d\Omega + \\ &+ \int_\Gamma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 d\Gamma \end{aligned} \quad (2.32b)$$

a equação (2.31) toma a forma

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \chi_{\alpha\beta} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \gamma_{\alpha 3} \right) d\Omega &= \\ &= \int_\Omega \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 f_\alpha dx_3 \theta_\alpha + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_3 dx_3 w \right) d\Omega + \\ &+ \int_\Omega \left( \frac{h}{2} \bar{t}_\alpha \theta_\alpha + \bar{t}_3 w \right) d\Omega + \int_\Omega \left( -\frac{h}{2} \bar{t}_\alpha \theta_\alpha + \bar{t}_3 w \right) d\Omega + \\ &+ \int_\Gamma \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x_3 \bar{t}_\alpha \theta_\alpha + \bar{t}_3 w) dx_3 d\Gamma \end{aligned} \quad (2.33)$$

A partir desta equação torna-se claro quais as tensões e cargas generalizadas que são conjugadas das deformações e deslocamentos generalizados definidos anteriormente. Assim, define-se o *vector dos esforços transversos* e o *tensor de momentos*

$$v_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (2.34a)$$

$$m_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (2.34b)$$

como as tensões generalizadas (esforços) desta teoria de lajes. As cargas generalizadas, definidas sobre o plano médio, são

$$\bar{p} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_3 dx_3 + \bar{t}_3|_{x_3=\frac{h}{2}} + \bar{t}_3|_{x_3=-\frac{h}{2}} \quad (2.35a)$$

$$\bar{m}_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 f_\alpha dx_3 + \left[ \frac{h}{2} \bar{t}_\alpha \right] \Big|_{x_3=\frac{h}{2}} + \left[ -\frac{h}{2} \bar{t}_\alpha \right] \Big|_{x_3=-\frac{h}{2}} \quad (2.35b)$$

onde  $\bar{p}$  é a carga aplicada no domínio e  $\bar{m}_\alpha$  é a componente  $\alpha$  do vector dos momentos aplicados no domínio. Esta componente actua segundo a direcção  $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\alpha = \varepsilon_{3\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta$ .

As cargas generalizadas que actuam nas superfícies laterais da laje, reduzidas à fronteira  $\Gamma = \partial\Omega$ , são

$$\bar{p}^\Gamma = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{t}_3 \, dx_3 \quad (2.36a)$$

$$\bar{m}_\alpha^\Gamma = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \bar{t}_\alpha \, dx_3 \quad (2.36b)$$

onde  $\bar{p}^\Gamma$  é a carga aplicada na fronteira e  $\bar{m}_\alpha^\Gamma$  é a componente  $\alpha$  do vector dos momentos aplicados na fronteira. Esta componente actua segundo a mesma direcção de  $\bar{m}_\alpha$ .

Assim, a equação (2.31) é reescrita na forma

$$\int_{\Omega} (m_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + v_\alpha \gamma_{\alpha 3}) \, d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{m}_\alpha \theta_\alpha + \bar{p} w) \, d\Omega - \int_{\Gamma} (\bar{m}_\alpha^\Gamma \theta_\alpha + \bar{p}^\Gamma w) \, d\Gamma = 0 \quad (2.37)$$

Esta expressão representa o Princípio dos Trabalhos Virtuais para lajes moderadamente espessas.

Substituindo as definições das deformações generalizadas (2.27) tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + v_\alpha (w_{,\alpha} + \theta_\alpha) \right) \, d\Omega - \\ - \int_{\Omega} (\bar{m}_\alpha \theta_\alpha + \bar{p} w) \, d\Omega - \int_{\Gamma} (\bar{m}_\alpha^\Gamma \theta_\alpha + \bar{p}^\Gamma w) \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

O primeiro termo desta expressão pode ser desenvolvido por recurso ao teorema da divergência e à simetria do tensor dos momentos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m_{\alpha\beta} (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \, d\Omega &= \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta} \theta_{\alpha,\beta} + m_{\alpha\beta} \theta_{\beta,\alpha}) \, d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta} \theta_\alpha n_\beta + m_{\alpha\beta} \theta_\beta n_\alpha) \, d\Gamma - \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta,\beta} \theta_\alpha + m_{\alpha\beta,\alpha} \theta_\beta) \, d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta} \theta_\alpha n_\beta + m_{\beta\alpha} \theta_\beta n_\alpha) \, d\Gamma - \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta,\beta} \theta_\alpha + m_{\beta\alpha,\alpha} \theta_\beta) \, d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta} \theta_\alpha n_\beta + m_{\alpha\beta} \theta_\alpha n_\beta) \, d\Gamma - \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta,\beta} \theta_\alpha + m_{\alpha\beta,\beta} \theta_\alpha) \, d\Omega = \\ &= 2 \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} n_\beta \theta_\alpha \, d\Gamma - 2 \int_{\Omega} m_{\alpha\beta,\beta} \theta_\alpha \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.39)$$

e

$$\int_{\Omega} v_\alpha w_{,\alpha} \, d\Omega = \int_{\Gamma} v_\alpha n_\alpha w \, d\Gamma - \int_{\Omega} v_{\alpha,\alpha} w \, d\Omega \quad (2.40)$$

onde  $n_\alpha$  são as componentes do vector da normal exterior ao domínio,  $\Omega$ .

Assim, a equação (2.38) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta,\beta} \theta_\alpha + v_{\alpha,\alpha} w - v_\alpha \theta_\alpha) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta} n_\beta \theta_\alpha + v_\alpha n_\alpha w) \, d\Gamma - \\ - \int_{\Omega} (\bar{m}_\alpha \theta_\alpha + \bar{p} w) \, d\Omega - \int_{\Gamma} (\bar{m}_\alpha^\Gamma \theta_\alpha + \bar{p}^\Gamma w) \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

ou seja

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} ((m_{\alpha\beta,\beta} - v_{\alpha} + \bar{m}_{\alpha}) \theta_{\alpha} + (v_{\alpha,\alpha} + \bar{p}) w) d\Omega + \\
 + \int_{\Gamma} ((m_{\alpha\beta} n_{\beta} - \bar{m}_{\alpha}^{\Gamma}) \theta_{\alpha} + (v_{\alpha} n_{\alpha} - \bar{p}^{\Gamma}) w) d\Gamma = 0 \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Daqui podem retirar-se as equações de equilíbrio no domínio,  $\Omega$ ,

$$v_{\alpha,\alpha} + \bar{p} = 0 \quad (2.43a)$$

$$m_{\alpha\beta,\beta} - v_{\alpha} + \bar{m}_{\alpha} = 0 \quad (2.43b)$$

e na fronteira estática,  $\Gamma_t$ ,

$$v_{\alpha} n_{\alpha} - \bar{p}^{\Gamma} = 0 \quad (2.44a)$$

$$m_{\alpha\beta} n_{\beta} - \bar{m}_{\alpha}^{\Gamma} = 0 \quad (2.44b)$$

Na forma matricial (2.1a), o vector  $\boldsymbol{\sigma}$  engloba o tensor dos momentos e o vector dos esforços transversos e o vector  $\mathbf{f}$  a carga e momentos aplicados no domínio.

Os operadores matriciais estáticos são então

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \\ v_{13} \\ v_{23} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\partial}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_1 & 0 & \partial_2 & -1 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & n_1 & n_2 \\ n_1 & 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.45) \\
 \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \bar{p} \\ \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} \bar{p}^{\Gamma} \\ \bar{m}_1^{\Gamma} \\ \bar{m}_2^{\Gamma} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

As três equações de compatibilidade na fronteira cinemática,  $\Gamma_u$ , são complementares das condições de fronteira estáticas e retiram-se também da equação (2.42),

$$w - \bar{w} = 0 \quad (2.46a)$$

$$\theta_{\alpha} - \bar{\theta}_{\alpha} = 0 \quad (2.46b)$$

Os operadores matriciais associados aos deslocamentos generalizados e aos deslocamentos generalizados prescrito na fronteira cinemática são

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

respectivamente.

Em lugar de definir as condições de fronteira (2.44) no referencial global é usual fazê-lo num referencial local definido em cada ponto da fronteira através do vector normal exterior,  $\mathbf{n} = n_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$ , e do vector tangencial<sup>4</sup>,  $\mathbf{t} = t_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$ . Este último é gerado tendo em consideração

<sup>4</sup>A mesma designação é utilizada para as componentes do vector de tracções na fronteira,  $t_i$ , e para as componentes do vector tangencial,  $t_{\alpha}$ . O significado correcto pode ser inferido do contexto.

que  $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = \mathbf{e}_3$ , ou seja,  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}$ . Assim,  $t_1 = -n_2$  e  $t_2 = n_1$ . Deste modo, ao invés das componentes do vector momento no referencial global, dadas por  $m_\alpha = m_{\alpha\beta} n_\beta$ , podem ser usadas as componentes *normal*,  $m_{nn}$ , e *tangencial*,  $m_{nt}$ , do vector momento, projectando-o segundo as direcções  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{t}$ , ou seja,

$$m_{nn} = m_\alpha n_\alpha = m_{\alpha\beta} n_\beta n_\alpha \quad (2.48a)$$

$$m_{nt} = m_\alpha t_\alpha = m_{\alpha\beta} n_\beta t_\alpha \quad (2.48b)$$

Em função das componentes do vector normal exterior,  $\mathbf{n}$ , tem-se

$$m_{nn} = m_{11} n_1^2 + m_{22} n_2^2 + 2 m_{12} n_1 n_2 \quad (2.49a)$$

$$m_{nt} = (m_{22} - m_{11}) n_1 n_2 + m_{12} (n_1^2 - n_2^2) \quad (2.49b)$$

A mesma decomposição é utilizada para o vector dos momentos aplicados na fronteira, escrevendo-se

$$\overline{m}_{nn}^\Gamma = \overline{m}_\alpha^\Gamma n_\alpha \quad (2.50a)$$

$$\overline{m}_{nt}^\Gamma = \overline{m}_\alpha^\Gamma t_\alpha \quad (2.50b)$$

Quanto ao esforço transversal, é habitual definir a quantidade  $v_n = v_\alpha n_\alpha$  como o *esforço transversal normal*.

Assim, as equações de equilíbrio na fronteira estática (2.44) escritas no referencial local assumem a seguinte forma:

$$v_n - \overline{p}^\Gamma = 0 \quad (2.51a)$$

$$m_{nn} - \overline{m}_{nn}^\Gamma = 0 \quad (2.51b)$$

$$m_{nt} - \overline{m}_{nt}^\Gamma = 0 \quad (2.51c)$$

Recorra-se agora à relação constitutiva do espaço tridimensional (2.11) e imponha-se um estado plano de tensão na direcção perpendicular ao plano médio. Neste caso, obtém-se a relação constitutiva (2.21) para as tensões no plano médio da laje,  $\sigma_{\alpha\beta}$ . No entanto, é utilizada a relação constitutiva para o contínuo tridimensional (2.11) para as tensões tangenciais  $\sigma_{\alpha 3}$ . Esta pode ser reescrita na forma

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{E}{1 + \nu} \epsilon_{\alpha 3} = G \gamma_{\alpha 3} \quad (2.52)$$

tendo em conta que o módulo de distorção,  $G$ , é relacionável com o módulo de elasticidade,  $E$ , e com o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , através de

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.53)$$

Note-se que as tensões tangenciais são independentes da hipótese do estado plano de tensão.

Até este ponto não foi efectuada nenhuma hipótese sobre a forma como varia a temperatura na laje. Obviamente que só faz sentido considerar variações de temperatura antissimétricas em relação ao plano médio. No que se segue, assume-se que a temperatura varia linearmente na espessura da laje e que a diferença entre o valor da fibra inferior e o valor na fibra superior é  $\Delta T_L$ , *i.e.*,

$$\Delta T(x_3) = x_3 \frac{\Delta T_L}{h} \quad (2.54)$$

Substituindo as relações de compatibilidade (2.26) e a variação de temperatura em função da espessura (2.54) na relação constitutiva (2.21) tem-se

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left( x_3 \chi_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3 \chi_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \frac{E \alpha x_3 \frac{\Delta T_L}{h}}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.55)$$

Substituindo este resultado na definição do tensor dos momentos (2.34b) e sabendo que

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^2 dx_3 = \frac{h^3}{12} \quad (2.56)$$

obtem-se

$$m_{\alpha\beta} = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \left( \chi_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \chi_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \frac{E h^2 \alpha \Delta T_L}{12(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.57)$$

Definindo a *rigidez de flexão da laje*,  $D_f$ , através de

$$D_f = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.58)$$

tem-se então

$$m_{\alpha\beta} = D_f ((1-\nu) \chi_{\alpha\beta} + \nu \chi_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}) - \frac{E h^2 \alpha \Delta T_L}{12(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.59)$$

Substituindo agora a relação constitutiva (2.52) no vector dos esforços transversos (2.34a) obtém-se

$$v_\alpha = G h \gamma_{\alpha 3} \quad (2.60)$$

No entanto, para tomar em conta o facto de a distribuição das tensões tangenciais não ser uniforme na espessura da laje é comum introduzir o factor de corte,  $\kappa$ , na relação constitutiva obtida, ficando

$$v_\alpha = \kappa G h \gamma_{\alpha 3} \quad (2.61)$$

É usual considerar  $\kappa = 5/6$ , ver Szilard (2004, página 48).

Finalmente, definindo a *rigidez de corte da laje*,  $D_c$ , como

$$D_c = \kappa G h \quad (2.62)$$

obtem-se

$$v_\alpha = D_c \gamma_{\alpha 3} \quad (2.63)$$

No formato matricial, os operadores constitutivos generalizados são

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_f & \nu D_f & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_f & D_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_c \end{bmatrix} \quad (2.64a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = -D_f \frac{(1+\nu) \alpha \Delta T_L}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.64b)$$

### 2.4.2 Lajes Finas

A teoria de lajes finas, também designada por teoria de Kirchhoff, pode ser obtida através da teoria de lajes moderadamente espessas impondo que a deformabilidade por esforço transversal seja nula. Isto corresponde a afirmar que, ao contrário da teoria de lajes moderadamente espessas, se assume que fibras rectas inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje, permanecem deste modo após a deformação da peça.

Esta restrição é conseguida impondo  $\gamma_{\alpha 3} = 0$ . Substituindo esta hipótese na equação (2.27b), a rotação vem expressa em função do campo de deslocamentos transversal

$$\gamma_{\alpha 3} = 0 \Leftrightarrow w_{,\alpha} + \theta_{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \theta_{\alpha} = -w_{,\alpha} \quad (2.65)$$

Conclui-se, portanto, que o campo de rotações,  $\theta_{\alpha}$  não é independente do campo de deslocamentos transversais,  $w$ . Assim sendo, será necessário determinar apenas este campo para se poder caracterizar completamente o campo de deslocamentos de uma laje fina.

Tendo em consideração a expressão (2.65), podem agora escrever-se as equações de compatibilidade no domínio, resultando

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \Leftrightarrow \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(-w_{,\alpha\beta} - w_{,\beta\alpha}) \Leftrightarrow \chi_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (2.66)$$

onde  $\chi_{\alpha\beta}$  é o *tensor de curvaturas*.

Os operadores intervenientes na expressão (2.1c) são assim definidos através de

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\partial} = \begin{Bmatrix} -\partial_1^2 \\ -\partial_2^2 \\ -\partial_{12}^2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u} = \{w\} \quad (2.67)$$

Considerando a hipótese (2.65) e – consequentemente – (2.66), a equação (2.37) pode ser desenvolvida. Sendo as componentes do vector distorção nulas, ter-se-á para o primeiro membro

$$\int_{\Omega} (m_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + v_{\alpha} \gamma_{\alpha 3}) \, d\Omega = \int_{\Omega} m_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} \, d\Omega \quad (2.68)$$

As derivadas parciais do campo de deslocamentos ao longo da fronteira podem ser convenientemente expressas no referencial local. Neste caso

$$w_{,\alpha} = w_{,n} n_{\alpha} + w_{,t} t_{\alpha} \quad (2.69)$$

Os segundo e terceiro termos da equação (2.37) podem ser desenvolvidos, recorrendo às equações (2.48) e (2.69), obtendo-se sucessivamente

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\bar{m}_{\alpha} \theta_{\alpha} + \bar{p} w) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\bar{m}_{\alpha}^{\Gamma} \theta_{\alpha} + \bar{p}^{\Gamma} w) \, d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} (-\bar{m}_{\alpha} w_{,\alpha} + \bar{p} w) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (-\bar{m}_{\alpha}^{\Gamma} w_{,\alpha} + \bar{p}^{\Gamma} w) \, d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} (-\bar{m}_{\alpha} w_{,\alpha} + \bar{p} w) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (-\bar{m}_{\alpha}^{\Gamma} (w_{,n} n_{\alpha} + w_{,t} t_{\alpha}) + \bar{p}^{\Gamma} w) \, d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} (-\bar{m}_{\alpha} w_{,\alpha} + \bar{p} w) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (-\bar{m}_{nn}^{\Gamma} w_{,n} - \bar{m}_{nt}^{\Gamma} w_{,t} + \bar{p}^{\Gamma} w) \, d\Gamma \quad (2.70) \end{aligned}$$



Recorrendo ao teorema da divergência e à expressão (2.48a) obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{m}_{\alpha} w_{,\alpha} d\Omega &= - \int_{\Omega} \bar{m}_{\alpha,\alpha} w d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{m}_{\alpha} n_{\alpha} w d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega} \bar{m}_{\alpha,\alpha} w d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{m}_{nn} w d\Gamma \end{aligned} \quad (2.71)$$

Tirando partido do processo de derivação do produto de duas funções, da expressão (2.48b) e tendo em conta o exposto no apêndice A, página 107, acerca da integração de funções descontínuas ao longo de uma linha fechada, ter-se-á

$$\int_{\Gamma} \bar{m}_{nt}^{\Gamma} w_{,t} d\Gamma = \int_{\Gamma} (\bar{m}_{nt}^{\Gamma} w)_{,t} d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{m}_{nt,t}^{\Gamma} w d\Gamma = - \sum_{i=1}^n [\bar{m}_{nt}^{\Gamma} w]_i - \int_{\Gamma} \bar{m}_{nt,t}^{\Gamma} w d\Gamma \quad (2.72)$$

onde  $n$  é o número de pontos angulosos na fronteira exterior da laje. A expressão (2.70) resulta em

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\bar{m}_{\alpha} w_{,\alpha} + \bar{p} w) d\Omega + \int_{\Gamma} (-\bar{m}_{nn}^{\Gamma} w_{,n} - \bar{m}_{nt}^{\Gamma} w_{,t} + \bar{p}^{\Gamma} w) d\Gamma &= \int_{\Omega} (\bar{m}_{\alpha,\alpha} w + \bar{p} w) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma} (-\bar{m}_{nn} w - \bar{m}_{nn}^{\Gamma} w_{,n} + \bar{m}_{nt,t}^{\Gamma} w + \bar{p}^{\Gamma} w) d\Gamma + \sum_{i=1}^n [\bar{m}_{nt}^{\Gamma} w]_i \end{aligned} \quad (2.73)$$

Finalmente, substituindo (2.68) e (2.73) em (2.37), vem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{p} + \bar{m}_{\alpha,\alpha}) w d\Omega - \\ - \int_{\Gamma} (-\bar{m}_{nn} + \bar{p}^{\Gamma} + \bar{m}_{nt,t}^{\Gamma}) w d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{m}_{nn}^{\Gamma} (-w_{,n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^n [\bar{m}_{nt}^{\Gamma} w]_i = 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Esta expressão representa o Princípio dos Trabalhos Virtuais no caso particular das lajes finas.

As equações de equilíbrio no domínio e fronteira estática e as equações de compatibilidade na fronteira cinemática podem ser obtidas, mais uma vez, por recurso à expressão do PTV. Para tal, é necessário desenvolver a expressão (2.68). Assim, recorrendo novamente ao teorema da divergência,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}) d\Omega &= \int_{\Omega} (-m_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta}) d\Omega = \int_{\Omega} m_{\alpha\beta,\alpha} w_{,\beta} d\Omega - \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} n_{\alpha} w_{,\beta} d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega} m_{\alpha\beta,\alpha\beta} w d\Omega + \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta} w d\Gamma - \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta} n_{\alpha} w_{,\beta} d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega} m_{\alpha\beta,\alpha\beta} w d\Omega + \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta} w d\Gamma - \int_{\Gamma} m_{\beta} w_{,\beta} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.75)$$

Atendendo às expressões (2.69) e (2.48), o último termo da equação (2.75) pode ser expandido, tirando partido do processo de derivação do produto de duas funções, obtendo-

-se então

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} m_{\beta} w_{,\beta} d\Gamma &= \int_{\Gamma} m_{\beta} (w_{,n} n_{\beta} + w_{,t} t_{\beta}) d\Gamma = \int_{\Gamma} (m_{\beta} n_{\beta} w_{,n} + m_{\beta} t_{\beta} w_{,t}) d\Gamma = \\
 &= \int_{\Gamma} (m_{nn} w_{,n} + m_{nt} w_{,t}) d\Gamma = \int_{\Gamma} (m_{nn} w_{,n} + (m_{nt} w)_{,t} - m_{nt,t} w) d\Gamma = \\
 &= \int_{\Gamma} (m_{nn} w_{,n} - m_{nt,t} w) d\Gamma - \sum_{i=1}^n \llbracket m_{nt} w \rrbracket_i \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

onde novamente se aplicou o teorema da divergência na presença de singularidades, ver apêndice A.

Assim, a expressão (2.75) resulta em

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}) d\Omega &= - \int_{\Omega} m_{\alpha\beta,\alpha\beta} w d\Omega + \int_{\Gamma} v_n w d\Gamma - \\
 &- \int_{\Gamma} (m_{nn} w_{,n} - m_{nt,t} w) d\Gamma - \sum_{i=1}^n \llbracket m_{nt} w \rrbracket_i \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

Sendo que todos os termos da equação (2.37) se encontram desenvolvidos, resulta finalmente

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} m_{\alpha\beta,\alpha\beta} w d\Omega &- \int_{\Omega} (\bar{m}_{\alpha,\alpha} w + \bar{p} w) d\Omega - \\
 - \int_{\Gamma} (-\bar{m}_{nn} w - \bar{m}_{nn}^{\Gamma} w_{,n} + \bar{m}_{nt,t}^{\Gamma} w + \bar{p}^{\Gamma} w) d\Gamma &- \int_{\Gamma} (m_{nn} w_{,n} - m_{nt,t} w) d\Gamma + \\
 + \int_{\Gamma} m_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta} w d\Gamma + \sum_{i=1}^n \llbracket m_{nt} w \rrbracket_i - \sum_{i=1}^n \llbracket \bar{m}_{nt}^{\Gamma} w \rrbracket_i &= 0 \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Reorganizando todos os termos envolvidos

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{p} + \bar{m}_{\alpha,\alpha}) w d\Omega &+ \int_{\Gamma} (m_{\alpha\beta,\alpha} n_{\beta} + m_{nt,t} - (\bar{m}_{nt,t}^{\Gamma} + \bar{p}^{\Gamma} - \bar{m}_{nn})) w d\Gamma + \\
 + \int_{\Gamma} (m_{nn} - \bar{m}_{nn}^{\Gamma}) (-w_{,n}) d\Gamma &+ \sum_{i=1}^n \llbracket (m_{nt} - \bar{m}_{nt}^{\Gamma}) w \rrbracket_i = 0 \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

O termo  $(-w_{,n})$  surge propositadamente com o sinal negativo para evidenciar a grandeza cinemática conjugada de  $m_{nn}$ . Note-se que  $m_{nn}$  e  $w_{,n}$  têm a mesma direcção mas sentidos opostos.

A solicitação aplicada sobre o domínio da laje pode ser representada pela *carga efectiva*

$$\bar{p}_{ef} = \bar{p} + \bar{m}_{\alpha,\alpha} \quad (2.80)$$

Definam-se as descontinuidade no momento normal tangencial e no momento normal tangencial aplicado, no ponto angular  $i$ , através de

$$\llbracket m_{nt} \rrbracket_i = P_i \quad (2.81)$$

$$\llbracket \bar{m}_{nt}^{\Gamma} \rrbracket_i = \bar{P}_i^{\Gamma} \quad (2.82)$$

Note-se que estas descontinuidades, quer se refiram aos esforços ou às cargas aplicadas, representam forças concentradas nos pontos angulosos.

Introduzam-se o *esforço transverso efectivo normal*,  $r_n$ , e a *carga efectiva normal*,  $\bar{r}_n^\Gamma$ ,

$$r_n = m_{\alpha\beta,\alpha} n_\beta + m_{nt,t} \quad (2.83a)$$

$$\bar{r}_n^\Gamma = \bar{p}^\Gamma + \bar{m}_{nt,t}^\Gamma - \bar{m}_{nn} \quad (2.83b)$$

A interpretação física da expressão (2.83a) é fornecida por (Kelvin e Tait, 1912, artigo 646, página 190). Os dois primeiros termos do segundo membro de (2.83b) têm idêntica interpretação, mas em lugar de esforços internos, trata-se agora de resultantes de tensões e de momentos de tensões aplicadas na face lateral da laje. Quanto ao último termo,  $-\bar{m}_{nn}$ , trata-se do efeito dos momentos aplicados no domínio da laje sobre a fronteira.

A expressão (2.74) pode agora escrever-se na forma

$$\int_{\Omega} m_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{p}_{ef} w d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{r}_n^\Gamma w d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{m}_{nn}^\Gamma (-w_{,n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^n \bar{P}_i^\Gamma w_i = 0 \quad (2.84)$$

Esta expressão será útil na formulação de elementos finitos de laje fina.

A expressão (2.79) do Princípio do Trabalho Virtuais pode finalmente escrever-se na forma

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (m_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{p}_{ef}) w d\Omega + \int_{\Gamma} (r_n - \bar{r}_n^\Gamma) w d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma} (m_{nn} - \bar{m}_{nn}^\Gamma) (-w_{,n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^n (P_i - \bar{P}_i^\Gamma) w_i = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

A única equação de equilíbrio no domínio,  $\Omega$ , é

$$m_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{p}_{ef} = 0 \quad (2.86)$$

As três equações de equilíbrio na fronteira estática,  $\Gamma_t$ , são então

$$r_n - \bar{r}_n^\Gamma = 0 \quad (2.87a)$$

$$m_{nn} - \bar{m}_{nn}^\Gamma = 0 \quad (2.87b)$$

$$P_i - \bar{P}_i^\Gamma = 0 \quad (2.87c)$$

Os operadores intervenientes na expressão (2.1a) são assim definidos através de

$$\boldsymbol{\partial}^* = \begin{Bmatrix} \partial_1^2 & \partial_2^2 & \partial_{12}^2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_{ef} \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

Ao contrário da teoria de lajes moderadamente espessas, a teoria de lajes finas não pode ser colocada na forma geral expressa através de (2.1) e (2.2). Este facto deve-se:

- (i) as condições de fronteira não são definidas apenas ao longo da linha que define a fronteira do plano médio, mas também nos pontos angulosos;
- (ii) as condições de fronteira cinemáticas não são expressas apenas em termos do deslocamento generalizado, mas também da sua derivada (neste caso, a normal);

- (iii) as condições de fronteira estáticas não são expressas apenas em termos das componentes do vector normal e das tensões generalizadas, mas também das suas derivadas. As três equações de compatibilidade na fronteira cinemática,  $\Gamma_u$ , são assim

$$w - \bar{w} = 0 \quad (2.89a)$$

$$w_{,n} - \bar{w}_{,n} = 0 \quad (2.89b)$$

$$w_i - \bar{w}_i = 0 \quad (2.89c)$$

Note-se a total complementaridade entre os dois conjuntos de equações (2.87) e (2.89).

As principais diferenças entre estas condições de fronteira e as presentes no caso da laje moderadamente espessa são:

- (i) ao contrário das três condições de fronteira a satisfazer ao longo de cada bordo na teoria de lajes moderadamente espessas, surgem apenas duas condições de fronteira ao longo de cada bordo e uma condição a satisfazer em cada ponto angular;
- (ii) nas lajes moderadamente espessas as condições de fronteira associadas a momentos podiam ser escritas no referencial global ou num referencial associado ao lado. Nas lajes finas essa opção deixa de existir, tendo o momento que ser decomposto nas suas componentes normal e tangencial;
- (iii) a componente tangencial do momento no bordo não é associada a qualquer valor prescrito, sendo antes a sua variação ao longo do bordo associada às forças aplicadas ao longo do bordo, perpendicularmente ao plano da laje.

Substituindo sucessivamente as equações de compatibilidade (2.66) nas relações constitutivas (2.59) e nas equações de equilíbrio (2.86) obtém-se a equação de Lagrange

$$\begin{aligned}
 m_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{p}_{ef} = 0 &\Leftrightarrow \left( D_f ((1-\nu)\chi_{\alpha\beta} + \nu\chi_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}) - \frac{Eh^2\alpha\Delta T_L}{12(1-\nu)}\delta_{\alpha\beta} \right)_{,\alpha\beta} + \bar{p}_{ef} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left( D_f ((1-\nu)(-w_{,\alpha\beta}) + \nu(-w_{,\gamma\gamma})\delta_{\alpha\beta}) - \frac{Eh^2\alpha\Delta T_L}{12(1-\nu)}\delta_{\alpha\beta} \right)_{,\alpha\beta} + \bar{p}_{ef} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -D_f ((1-\nu)w_{,\alpha\beta\alpha\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma\alpha\beta})\delta_{\alpha\beta} - \left( \frac{Eh^2\alpha\Delta T_L}{12(1-\nu)}\delta_{\alpha\beta} \right)_{,\alpha\beta} + \bar{p}_{ef} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -D_f ((1-\nu)w_{,\alpha\alpha\beta\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma\alpha\alpha}) - \left( \frac{Eh^2\alpha\Delta T_L}{12(1-\nu)}\delta_{\alpha\beta} \right)_{,\alpha\beta} + \bar{p}_{ef} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -D_f w_{,\alpha\alpha\beta\beta} - \left( \frac{Eh^2\alpha\Delta T_L}{12(1-\nu)} \right)_{,\alpha\alpha} + \bar{p}_{ef} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow w_{,\alpha\alpha\beta\beta} = \frac{1}{D_f} \left( \bar{p}_{ef} - \left( \frac{Eh^2\alpha\Delta T_L}{12(1-\nu)} \right)_{,\alpha\alpha} \right) \quad (2.90)
 \end{aligned}$$

A relação constitutiva desta teoria é exactamente a mesma que aquela obtida para a teoria de lajes moderadamente espessas, *viz.* (2.59), excluindo – por razões óbvias – a parcela afecta à deformação por corte.

Em resumo, as equações obtidas para as lajes finas são:

- Equilíbrio no domínio:

$$\begin{aligned}
 m_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \bar{p}_{ef} = 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 m_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 m_{22}}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 m_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \bar{p} + \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial x_2} = 0
 \end{aligned}$$

- Equilíbrio na fronteira estática:

$$(i) \quad r_n - \bar{r}_n^\Gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_n = \bar{p}^\Gamma + \bar{m}_{nt,t}^\Gamma - \bar{m}_{nn} \Leftrightarrow r_n = \bar{p}^\Gamma + \bar{m}_{nt,t}^\Gamma - \bar{m}_\alpha n_\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_n = \bar{p}^\Gamma + \bar{m}_{nt,t}^\Gamma - \bar{m}_1 n_1 - \bar{m}_2 n_2$$

onde o esforço transversal efectivo é

$$r_n = m_{\alpha\beta,\alpha} n_\beta + m_{nt,t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_n = m_{\alpha\beta,\alpha} n_\beta + \frac{\partial m_{nt}}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$(ii) \quad m_{nn} - \bar{m}_{nn}^\Gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_{nn} = \bar{m}_{nn}^\Gamma$$

onde o momento normal é

$$m_{nn} = m_{11} n_1^2 + m_{22} n_2^2 + m_{12} n_1 n_2$$

$$(iii) \quad P_i - \bar{P}_i^\Gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \llbracket m_{nt} - \bar{m}_{nt}^\Gamma \rrbracket_i = 0$$

com o momento tangencial

$$m_{nt} = (m_{22} - m_{11}) n_1 n_2 + m_{12} (n_1^2 - n_2^2)$$

- Compatibilidade no domínio:

$$\chi_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases}$$

- Compatibilidade na fronteira cinemática:

$$(i) \quad w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \bar{w}$$

$$(ii) \quad w_{,n} - \bar{w}_{,n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$$

$$(iii) \quad w_i - \bar{w}_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w - \bar{w})_i = 0$$

- Relação constitutiva:

$$m_{\alpha\beta} = D_f \left( (1 - \nu) \chi_{\alpha\beta} + \nu \chi_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \frac{E h^2 \alpha \Delta T_L}{12(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_{11} = D_f \left( \left( \chi_{11} - \frac{\alpha \Delta T_L}{h} \right) + \nu \left( \chi_{22} - \frac{\alpha \Delta T_L}{h} \right) \right) \\ m_{22} = D_f \left( \nu \left( \chi_{11} - \frac{\alpha \Delta T_L}{h} \right) + \left( \chi_{22} - \frac{\alpha \Delta T_L}{h} \right) \right) \\ m_{12} = G \frac{h^3}{12} (2 \chi_{12}) \end{cases}$$



## Capítulo 3

# O Método dos Elementos Finitos

No presente capítulo começar-se-á por fazer uma abordagem ao Método dos Elementos Finitos (MEF), obtendo a sua equação geral. Posteriormente é demonstrada a forma de resolver o problema através da formulação dos elementos finitos utilizados.

O MEF é, em geral, aplicado seguindo uma metodologia que engloba alguns passos fundamentais. Após a correcta e conveniente discretização da estrutura, definem-se as funções de aproximação relevantes, formula-se o elemento finito a utilizar, faz-se a assemblagem do sistema de equações elementares, impõe-se as condições de fronteira cinemáticas, resolve-se o sistema geral de equações e, finalmente, é necessário fazer uma análise crítica dos resultados obtidos.

### 3.1 Descrição

No caso das lajes finas admitindo que o campo virtual de deslocamentos satisfaz as condições  $\delta w|_{\Gamma_u} = 0$  e  $(-\delta w, n)|_{\Gamma_u} = 0$ , a expressão (2.84) que traduz a forma fraca do equilíbrio pode ser escrita na forma

$$\int_{\Omega} \delta \chi_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} d\Omega - \int_{\Omega} \delta w \bar{p}_{ef} d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta w \bar{r}_n^{\Gamma} + (-\delta w, n) \bar{m}_{nn}^{\Gamma}) d\Gamma_t - \sum_{i=1}^n (\delta w \bar{P}^{\Gamma})_i = 0 \quad (3.1)$$

onde o campo compatível virtual é identificado pelo prefixo “ $\delta$ ”.

Omitindo a referência para as coordenadas bidimensionais do problema agora em análise, a aproximação para o elemento genérico, (e), pode ser descrita na forma matricial através de

$$w^{(e)} = \mathbf{\Psi}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{\Psi}^{(e)}$  é uma *matriz que armazena as funções de aproximação elementares* e  $\mathbf{d}^{(e)}$  são os respectivos *deslocamentos nodais elementares*.

A equação de compatibilidade (2.66) permite relacionar o vector de curvaturas elementar,  $\chi^{(e)}$ , com os deslocamentos nodais elementares e é dada por

$$\chi^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} \quad (3.3)$$

onde a matriz elementar  $\mathbf{B}^{(e)}$  condensa a informação relativa às derivadas das funções de aproximação e é dada através de

$$\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{\partial} \mathbf{\Psi}^{(e)} \quad (3.4)$$

sendo  $\boldsymbol{\partial}$  a matriz dos operadores diferenciais definida em (2.67).

A relação constitutiva permite agora obter o *vector elementar dos momentos*  $\mathbf{m}^{(e)}$ , tirando partido de (3.3)

$$\mathbf{m}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \left( \boldsymbol{\chi}^{(e)} - \boldsymbol{\chi}_{\Delta T}^{(e)} \right) = \mathbf{D}^{(e)} \left( \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} - \boldsymbol{\chi}_{\Delta T}^{(e)} \right) \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{D}^{(e)}$  representa a *matriz constitutiva de rigidez elementar* e  $\boldsymbol{\chi}_{\Delta T}^{(e)}$  é o *vector elementar das curvaturas iniciais devido a variações de temperatura diferenciais lineares na espessura da laje*. Este último pode, noutras situações, ser devido a, *e.g.*, pré-esforço, retracção do material ou erro geométrico de fabrico, sendo determinado caso a caso.

Substituindo (3.3) e (3.5) nas respectivas componentes de (3.1) obtém-se a equação elementar do método dos elementos finitos na forma

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} \quad (3.6)$$

onde

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\Psi}^{(e)T} \bar{p}_{ef} d\Omega^{(e)} + \int_{\Gamma_t^{(e)}} \left( \boldsymbol{\Psi}^{(e)T} \bar{r}_n^\Gamma - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^{(e)T}}{\partial n} \bar{m}_{nn}^\Gamma \right) d\Gamma_t^{(e)} + \\ + \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\chi}_{\Delta T}^{(e)} d\Omega^{(e)} \end{aligned} \quad (3.7b)$$

onde  $\bar{p}_{ef}$  é a carga efectiva aplicada no domínio,  $\bar{r}_n^\Gamma$  é a carga efectiva normal e  $\bar{m}_{nn}^\Gamma$  é o momento normal aplicado.

Após a assemblagem de todas as matrizes elementares, ver Zienkiewicz *et al.* (2005, página 5), obtém-se o sistema global

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.8)$$

Este sistema de equações define as condições de equilíbrio das forças nodais equivalentes. Estas condições são impostas no domínio, na fronteira estática e nas fronteiras entre elementos.

As condições de fronteira cinemáticas são impostas em seguida. Para tal, cada grau de liberdade é classificado como livre (*“free”*) ou restringido (*“restrained”*). Neste caso, o sistema de equações (3.8) pode ser simbolicamente reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fr} \\ \mathbf{K}_{rf} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_f \\ \mathbf{d}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o *vector de reacções generalizado* correspondente aos graus de liberdade restringidos.

A resolução do sistema de equações (3.9) em ordem ao vector que reúne os graus de liberdade livres,  $\mathbf{d}_f$ , e ao vector que armazena as reacções generalizadas,  $\mathbf{r}$ , conduz a

$$\mathbf{d}_f = \mathbf{K}_{ff}^{-1} (\mathbf{f}_f - \mathbf{K}_{fr} \mathbf{d}_r), \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_r - (\mathbf{K}_{rf} \mathbf{d}_f + \mathbf{K}_{rr} \mathbf{d}_r). \quad (3.10b)$$

Esta resolução visa apenas ilustrar simbolicamente os passos seguidos, mas evidentemente que não é avaliada a inversa da matriz de rigidez global,  $\mathbf{K}_{ff}$ .



## 3.2 Coordenadas de Área

As funções de aproximação podem ser avaliadas numericamente ou simbolicamente. Em ambos os casos a sua determinação envolve – em geral – a inversão de uma matriz cuja dimensão é igual ao número de graus de liberdade.

No primeiro caso, os valores das funções de aproximação podem ser afectados por erros numéricos substanciais, visto que a matriz a inverter pode ter uma elevada dimensão. Por exemplo, no caso do elemento T21, esta matriz tem dimensão  $(21 \times 21)$ . As integrações presentes na definição das matrizes elementares têm de ser avaliadas através de regras de quadratura apropriadas. Estas permitem aproximar o valor do integral de uma função através do somatório dos valores da função em pontos específicos do domínio de integração, afectados pelos respectivos pesos. Conjugado com os erros presentes no valor das próprias funções de aproximação, facilmente se depreende o mau condicionamento do processo e o elevado tempo de computação.

A formulação simbólica, na qual as funções de aproximação e as matrizes elementares são avaliadas explicitamente, tem a vantagem de ser mais precisa quando se trabalha com um número limitado de algarismos significativos, tendo a experiência demonstrado que a implementação numérica poderá em certas situações causar flutuações nos resultados, tal como é exemplificado no apêndice B. Além disso a formulação simbólica revelou-se mais eficiente.

Assim, de modo a implementar a formulação simbólica, é conveniente recorrer a coordenadas de área que facilitam a avaliação das matrizes elementares.

### 3.2.1 Definição

A formulação dos elementos objecto do presente trabalho assume uma forma particularmente simples quando efectuada em coordenadas de área. Nestas é definido o conjunto de coordenadas  $L_1, L_2$  e  $L_3$ , ao invés das usuais coordenadas cartesianas,  $x_1$  e  $x_2$ . A coordenada  $L_i$  é medida na perpendicular do lado oposto ao nó  $i$ , no seu sentido, tal como se pode observar na figura 3.1.

No presente trabalho serão utilizados elementos de três e seis nós. Para o caso dos elementos de seis nós, as coordenadas de área respectivas encontram-se na tabela 3.1. As coordenadas de área dos elementos de três nós correspondem aos nós um a três da mesma tabela. Por exemplo, a coordenada  $L_2$  de um ponto genérico  $P$  é dada pela relação de áreas apresentadas na figura 3.1 e é dada por,

$$L_2 = \frac{\text{Área } P13}{\text{Área } 123} \quad (3.11)$$

A relação entre os dois sistemas de coordenadas pode ser expresso através da seguinte relação:

$$x_1 = L_1 x_1^{(1)} + L_2 x_1^{(2)} + L_3 x_1^{(3)} \quad (3.12a)$$

$$x_2 = L_1 x_2^{(1)} + L_2 x_2^{(2)} + L_3 x_2^{(3)} \quad (3.12b)$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 \quad (3.12c)$$

onde  $x_\alpha^{(i)}$  designa a coordenada generalizada  $\alpha$  do nó  $i$ . Como se observa, as coordenadas  $L_1, L_2$  e  $L_3$  são linearmente dependentes entre si.

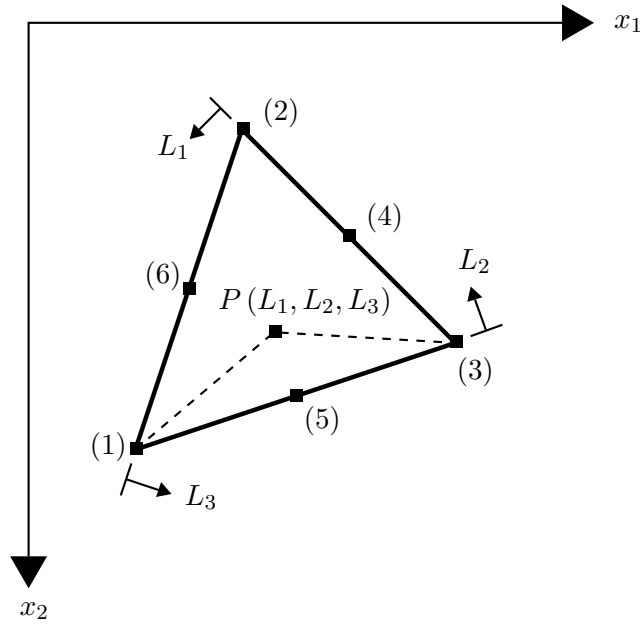


Figura 3.1: Coordenadas de área num elemento triangular genérico.

| Nó | Coordenadas de área |               |               |
|----|---------------------|---------------|---------------|
|    | $L_1$               | $L_2$         | $L_3$         |
| 1  | 1                   | 0             | 0             |
| 2  | 0                   | 1             | 0             |
| 3  | 0                   | 0             | 1             |
| 4  | 0                   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 5  | $\frac{1}{2}$       | 0             | $\frac{1}{2}$ |
| 6  | $\frac{1}{2}$       | $\frac{1}{2}$ | 0             |

Tabela 3.1: Coordenadas de área dos elementos de seis nós.

É possível obter a equação genérica das coordenadas de área através da resolução do sistema formado pelas equações (3.12). Deste modo,

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x_1 + c_i x_2) \quad (3.13)$$

em que

$$a_i = x_1^{(j)} x_2^{(k)} - x_1^{(k)} x_2^{(j)} \quad (3.14a)$$

$$b_i = x_2^{(j)} - x_2^{(k)} \quad (3.14b)$$

$$c_i = x_1^{(k)} - x_1^{(j)} \quad (3.14c)$$

$$2A = c_3 b_2 - c_2 b_3 \quad (3.14d)$$

$$l_i^2 = b_i^2 + c_i^2 \quad (3.14e)$$

onde  $A$  é a área do elemento e  $l_i$  é o comprimento do lado oposto ao nó  $i$ . Os índices  $i, j$  e  $k$  seguem uma permutação cíclica.

### 3.2.2 Avaliação de Derivadas em Coordenadas de Área

No que se segue será necessário avaliar diversas derivadas de funções definidas em coordenadas de área em relação às coordenadas cartesianas. Estas derivadas surgem na avaliação da derivada normal a meio das arestas do elemento finito (derivadas de primeira ordem), das curvaturas (derivadas de segunda ordem) e do esforço transversal (que envolve derivadas de terceira ordem). Estas regras de derivação são obtidas na presente subsecção.

A derivada de uma função genérica,  $f(L_1, L_2, L_3)$ , expressa em coordenadas de área, em função das coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2)$ , requer a utilização da derivada da função composta. Assim

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x_1} = \frac{b_1}{2A} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{b_2}{2A} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{b_3}{2A} \frac{\partial}{\partial L_3} \quad (3.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x_2} = \frac{c_1}{2A} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{c_2}{2A} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{c_3}{2A} \frac{\partial}{\partial L_3} \quad (3.15b)$$

Matricialmente pode escrever-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \\ \frac{\partial}{\partial L_3} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

onde

$$\partial_{(r,s,t)} = \frac{\partial^{r+s+t}}{\partial L_1^r \partial L_2^s \partial L_3^t} \quad (3.17)$$

Repetindo o mesmo procedimento podem obter-se as derivadas de segunda e de terceira ordem, que constam nas expressões (3.20) e (3.21), respectivamente.

Avalie-se agora a derivada normal a meio das arestas do elemento finito. Considere-se a figura 3.2 onde

$$\mathbf{n}_i = \begin{Bmatrix} n_{1i} \\ n_{2i} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

No lado genérico,  $i$ , do elemento, tem-se

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{\text{lado } i} = \nabla \cdot \mathbf{n}_i = \frac{\partial}{\partial x_1} n_{1i} + \frac{\partial}{\partial x_2} n_{2i} \quad (3.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{array} \right\} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & 2b_1b_2 & 2b_2b_3 & 2b_3b_1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 2c_1c_2 & 2c_2c_3 & 2c_3c_1 \\ b_1c_1 & b_2c_2 & b_3c_3 & (b_1c_2 + b_2c_1) & (b_2c_3 + b_3c_2) & (b_3c_1 + b_1c_3) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \partial_{(2,0,0)}^2 \\ \partial_{(0,2,0)}^2 \\ \partial_{(0,0,2)}^2 \\ \partial_{(1,1,0)}^2 \\ \partial_{(0,1,1)}^2 \\ \partial_{(1,0,1)}^2 \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \\ \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\ \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\ \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \end{array} \right\} = \frac{1}{8A^3} \begin{bmatrix} b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & 3b_1^2b_2 & 3b_1^2b_3 & 3b_1b_2^2 & 3b_2^2b_3 & 3b_1b_3^2 & 3b_2b_3^2 & 6b_1b_2b_3 \\ b_1^2c_1 & b_2^2c_2 & b_3^2c_3 & 2b_1b_2c_1 + b_1^2c_2 & 2b_1b_3c_1 + b_1^2c_3 & 2b_1b_2c_2 + b_2^2c_1 & 2b_2b_3c_2 + b_2^2c_3 & 2b_1b_3c_3 + b_3^2c_1 & 2b_2b_3c_3 + b_3^2c_2 & 2b_2b_3c_1 + 2b_1b_3c_2 + 2b_1c_2c_3 \\ b_1c_1^2 & b_2c_2^2 & b_3c_3^2 & 2b_1c_1c_2 + b_2c_1^2 & 2b_1c_1c_3 + b_3c_1^2 & 2b_2c_1c_2 + b_1c_2^2 & 2b_2c_2c_3 + b_3c_2^2 & 2b_3c_1c_3 + b_1c_3^2 & 2b_3c_2c_3 + b_2c_3^2 & 2b_3c_1c_2 + 2b_2c_1c_3 + 2b_1c_2c_3 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & 3c_1^2c_2 & 3c_1^2c_3 & 3c_1c_2^2 & 3c_2^2c_3 & 3c_1c_3^2 & 3c_2c_3^2 & 6c_1c_2c_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \partial_{(3,0,0)}^3 \\ \partial_{(0,3,0)}^3 \\ \partial_{(0,0,3)}^3 \\ \partial_{(2,1,0)}^3 \\ \partial_{(2,0,1)}^3 \\ \partial_{(1,2,0)}^3 \\ \partial_{(0,2,1)}^3 \\ \partial_{(1,0,2)}^3 \\ \partial_{(0,1,2)}^3 \\ \partial_{(1,1,1)}^3 \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

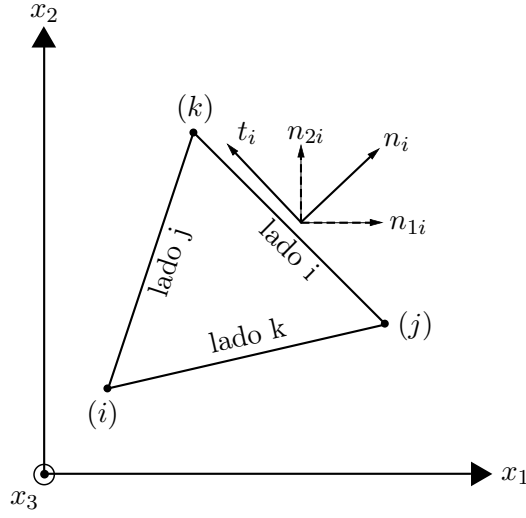


Figura 3.2: Elemento triangular genérico.

De acordo com a figura 3.2 e recorrendo às equações (3.14b), (3.14c) e (3.14e) define-se o vector unitário tangencial ao lado  $i$ , como

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i &= \left\{ \begin{matrix} x_1^{(k)} - x_1^{(j)} \\ x_2^{(k)} - x_2^{(j)} \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{(x_1^{(k)} - x_1^{(j)})^2 + (x_2^{(k)} - x_2^{(j)})^2}} = \\ &= \left\{ \begin{matrix} c_i \\ -b_i \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{c_i^2 + (-b_i)^2}} = \left\{ \begin{matrix} c_i \\ -b_i \end{matrix} \right\} \frac{1}{l_i} \quad (3.22) \end{aligned}$$

No espaço tridimensional, o vector normal exterior no plano do elemento, é dado por

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{t}_i \times \mathbf{e}_3 = \frac{1}{l_i} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ c_i & -b_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{l_i} \begin{Bmatrix} -b_i \\ -c_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

A eliminação da terceira componente fornece as componentes do mesmo vector no plano do elemento, *viz.*,

$$\mathbf{n}_i = \frac{1}{l_i} \begin{Bmatrix} -b_i \\ -c_i \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

De acordo com esta equação (3.24) e considerando as equações (3.15), pode desenvolver-se a equação (3.19) ficando

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{\text{lado } i} &= \frac{1}{2Al_i} ((b_1\partial_1 + b_2\partial_2 + b_3\partial_3)(-b_i) + (c_1\partial_1 + c_2\partial_2 + c_3\partial_3)(-c_i)) = \\ &= \frac{l_i}{4A} \left( (b_1\partial_1 + b_2\partial_2 + b_3\partial_3) \left( \frac{-2b_i}{l_i^2} \right) + (c_1\partial_1 + c_2\partial_2 + c_3\partial_3) \left( \frac{-2c_i}{l_i^2} \right) \right) = \\ &= \frac{l_i}{4A} \left( \left( \frac{-2b_ib_1 - 2c_ic_1}{l_i^2} \right) \partial_1 + \left( \frac{-2b_ib_2 - 2c_ic_2}{l_i^2} \right) \partial_2 + \left( \frac{-2b_ib_3 - 2c_ic_3}{l_i^2} \right) \partial_3 \right) \quad (3.25) \end{aligned}$$

Na expressão anterior, os termos em numerador que multiplicam por  $\partial_i$  podem ser desenvolvidos notando que

$$b_i + b_j + b_k = 0 \Leftrightarrow b_i = -b_j - b_k \quad (3.26a)$$

$$c_i + c_j + c_k = 0 \Leftrightarrow c_i = -c_j - c_k \quad (3.26b)$$

Assim, de acordo com (3.14e) e (3.26), para  $m = 1, 2$  ou  $3$ , vem

$$\begin{aligned} -2b_i b_m - 2c_i c_m &= -2b_m(-b_j - b_k) - 2c_m(-c_j - c_k) = \\ &= 2b_m b_j + 2b_m b_k + 2c_m c_j + 2c_m c_k - l_i^2 + l_i^2 = \\ &= 2b_m b_j + 2b_m b_k + 2c_m c_j + 2c_m c_k - ((-b_j - b_k)^2 + (-c_j - c_k)^2) + l_i^2 = \\ &= 2b_m b_j + 2b_m b_k + 2c_m c_j + 2c_m c_k - b_j^2 - 2b_j b_k - b_k^2 - c_j^2 - 2c_j c_k - c_k^2 + l_i^2 = \\ &= 2b_j(b_m - b_k) + 2c_j(c_m - c_k) + 2b_m b_k + 2c_m c_k - l_j^2 - l_k^2 - l_i^2 \quad (3.27) \end{aligned}$$

A título de exemplo, e por simplicidade, faça-se o cálculo para o lado 1, impondo  $i = 1$ . Então

$$\frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\text{lado 1}} = \frac{l_1}{4A} \left( \frac{-2b_1^2 - 2c_1^2}{l_1^2} \partial_1 + \frac{-2b_1 b_2 - 2c_1 c_2}{l_1^2} \partial_2 + \frac{-2b_1 b_3 - 2c_1 c_3}{l_1^2} \partial_3 \right) \quad (3.28)$$

De acordo com (3.14e) tem-se

$$-2b_1^2 - 2c_1^2 = -2(b_1^2 + c_1^2) = -2l_1^2 \quad (3.29)$$

Assumindo  $m = 2$  em (3.27), vem

$$-2b_1 b_2 - 2c_1 c_2 = 2b_2(b_2 - b_3) + 2c_2(c_2 - c_3) + 2b_2 b_3 + 2c_2 c_3 - l_2^2 - l_3^2 + l_1^2 = l_2^2 - l_3^2 + l_1^2 \quad (3.30)$$

e ainda  $m = 3$  também em (3.27), tem-se

$$-2b_1 b_3 - 2c_1 c_3 = 2b_2(b_3 - b_3) + 2c_2(c_3 - c_3) + 2b_3 b_3 + 2c_3 c_3 - l_2^2 - l_3^2 + l_1^2 = -l_2^2 + l_3^2 + l_1^2 \quad (3.31)$$

Então, substituindo (3.29) (3.30) e (3.31) em (3.28), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\text{lado 1}} &= \frac{l_1}{4A} \left( \frac{-2l_1^2}{l_1^2} \partial_1 + \frac{l_2^2 - l_3^2 + l_1^2}{l_1^2} \partial_2 + \frac{-l_2^2 + l_3^2 + l_1^2}{l_1^2} \partial_3 \right) = \\ &= \frac{l_1}{4A} \left( -2\partial_1 + \partial_2 + \frac{l_2^2 - l_3^2}{l_1^2} \partial_2 + \partial_3 + \frac{l_3^2 - l_2^2}{l_1^2} \partial_3 \right) = \\ &= \frac{l_1}{4A} \left( -2\partial_1 + \left( 1 - \frac{l_3^2 - l_2^2}{l_1^2} \right) \partial_2 + \partial_3 + \left( 1 + \frac{l_3^2 - l_2^2}{l_1^2} \right) \partial_3 \right) \quad (3.32) \end{aligned}$$

Definindo

$$\mu_1 = \frac{l_3^2 - l_2^2}{l_1^2} \quad (3.33)$$

tem-se, então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\text{lado 1}} &= \frac{l_1}{4A} (-2\partial_1 + (1 - \mu_1) \partial_2 + \partial_3 + (1 + \mu_1) \partial_3) = \\ &= -\frac{l_1}{2A} \left( \partial_1 + \frac{\mu_1 - 1}{2} \partial_2 + \frac{-\mu_1 - 1}{2} \partial_3 \right) \quad (3.34) \end{aligned}$$

com

$$p_1 = \frac{\mu_1 - 1}{2} = \frac{-l_1^2 - l_2^2 + l_3^2}{2l_1^2} = \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{l_1^2} \quad (3.35)$$

e

$$q_1 = \frac{-\mu_1 - 1}{2} = \frac{-l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_1^2} = \frac{b_1 b_3 + c_1 c_3}{l_1^2} \quad (3.36)$$

De onde resulta então para o lado 1

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{\text{lado 1}} = -\frac{l_1}{2A} (\partial_1 + p_1 \partial_2 + q_1 \partial_3) \quad (3.37)$$

Extrapolando para o caso geral do lado  $i$ , tem-se

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \right|_{\text{lado } i} = -\frac{l_i}{2A} (\partial_i + p_i \partial_j + q_i \partial_k) \quad (3.38)$$

com

$$p_i = \frac{\mu_i - 1}{2} = \frac{-l_i^2 - l_j^2 + l_k^2}{2l_i^2} = \frac{b_i b_j + c_i c_k}{l_i^2} \quad (3.39)$$

e

$$q_i = \frac{-\mu_i - 1}{2} = \frac{-l_i^2 + l_j^2 - l_k^2}{2l_i^2} = \frac{b_i b_k + c_i c_j}{l_i^2} \quad (3.40)$$

onde

$$\mu_i = \frac{l_k^2 - l_j^2}{l_i^2} \quad (3.41)$$

### 3.2.3 Avaliação de Integrais em Coordenadas de Área

A avaliação de integrais no domínio do elemento finito de funções definidas em coordenadas de área pode ser efectuada explicitamente através de (Zienkiewicz *et al.*, 2005, subsecção 4.7.2, página 119)

$$\int_A L_1^m L_2^n L_3^p dA = 2A \frac{m! n! p!}{(m + n + p + 2)!} \quad (3.42)$$

## 3.3 Formulação do Elemento Finito T21

### 3.3.1 Perspectiva Histórica

Este elemento foi formulado independentemente por vários autores. Em Argyris *et al.* (1968) e Argyris e Buck (1968) é apresentada a família dos elementos TUBA. Dos elementos desta família com nós intermédios, *i.e.*, nós situados nas arestas, contam-se o TUBA 6, o TUBA 13 e o TUBA 15. O TUBA 6 coincide com o T21 estudado no presente trabalho. Alguns resultados deste elemento são apresentados em Argyris *et al.* (1969), Argyris (1969) e Argyris e Scharpf (1972).

Na mesma altura Bell (1969) apresenta o mesmo elemento, apesar da derivação então efectuada ser consideravelmente diferente da exposta por Argyris *et al.* (1968). As matrizes elementares são avaliadas em coordenadas generalizadas e depois convertidas em deslocamentos nodais generalizados através de uma matriz de transformação apropriada.

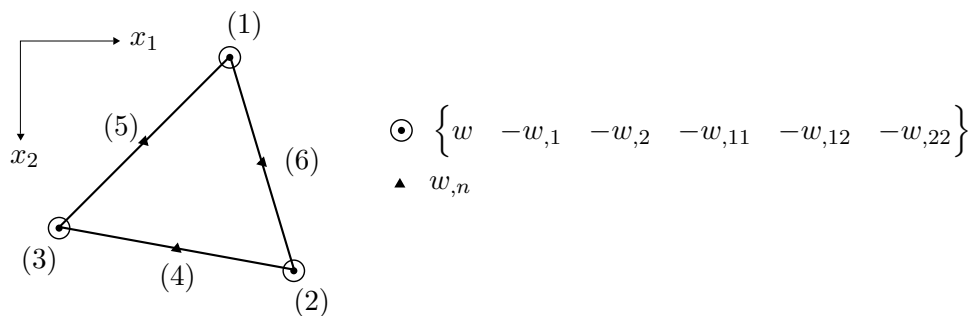


Figura 3.3: Elemento T21.

A integração é efectuada através de um conjunto de fórmulas explícitas derivadas especialmente para efectuar esta operação. São apresentadas algumas aplicações à análise estática de lajes finas.

Fórmulas explícitas para as funções de aproximação deste elemento foram apresentadas por Okabe (1993). Um algoritmo eficiente para as avaliar – bem como as respectivas derivadas – foi proposto por Domínguez e Sayas (2008).

A utilização de segundas derivadas do campo de deslocamentos –  $w_{,11}$ ,  $w_{,12}$  e  $w_{,22}$  – como graus de liberdade foi alvo de críticas devido à “excessiva continuidade” imposta ao campo de deformações generalizado, *i.e.*, às curvaturas. Por exemplo, (Irons, 1969, página 29)

*Thus the situation is under control, but every known solution presents untidy features. Consider a corner node  $P$ , and an oblique local coordinate system  $P_{xy}$  with  $P_x$  along one side of the element,  $P_y$  along the other. The second derivative we are concerned with is  $w_{,xy}$ . Unfortunately in (b) the sides of elements in a typical mesh meet at a node in more than two different directions, and more recent solutions of this type use as corner node variables all three second derivatives,  $w_{,xx}$ ,  $w_{,xy}$  and  $w_{,yy}$ , in global coordinates. But consider now a plate with a discontinuity of thickness,  $t = t_1$  for positive  $y$ ,  $t = t_2$  for negative  $y$ . The finite element solution will impose continuity of  $w_{,xx}$ ,  $w_{,xy}$  and  $w_{,yy}$  across  $y = 0$ . In the exact solution  $w_{,xx}$  and  $w_{,xy}$  are indeed continuous but in general  $w_{,yy}$  is not, because it is the corresponding bending moment  $m_{,yy}$  that should be continuous.*

No entanto, tal como apontado por Cowper *et al.* (1970), estas objecções são totalmente infundadas. A correcta modelação da laje deve permitir que  $w_{,22}$  possa ser descontínua ao longo da interface  $y = 0$ . Tal pode ser conseguido através da independência dos graus de liberdade relevantes ao longo da interface.

### 3.3.2 Funções de Aproximação

No capítulo 5 apresentar-se-ão alguns exemplos numéricos de aplicação. Para o fazer, é primeiro necessário formular os elementos finitos utilizados.

Inicia-se este processo com o elemento finito triangular compatível com vinte e um graus de liberdade. Cada um dos três nós dos vértices apresenta seis graus de liberdade e os nós a meio de cada uma das três arestas apresentam, cada um, um grau de liberdade, tal como se observa na figura 3.3.



A aproximação para o campo de deslocamentos elementar pode ser obtida por intermédio de

$$w^{(e)} = \mathbf{P}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.43)$$

onde  $\mathbf{P}^{(e)}$  é a matriz elementar que reúne os modos de aproximação englobando os vinte e um termos do polinómio quártico completo e  $\boldsymbol{\alpha}^{(e)}$  é um vector elementar que engloba os vinte e um pesos da aproximação. Sendo a matriz  $\mathbf{P}^{(e)}$  igual para todos os elementos, doravante omitir-se-á o índice (e).

De forma a facilitar a dedução das funções de aproximação do elemento, serão utilizadas as coordenadas de área definidas na secção 3.2. Assim, a matriz  $\mathbf{P}$  será dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} L_1^5 & L_2^5 & L_3^5 & L_1^4 L_2 & L_1^4 L_3 & L_2^4 L_1 & L_2^4 L_3 & L_3^4 L_1 & L_3^4 L_2 \\ L_1^3 L_2^2 & L_1^3 L_3^2 & L_2^3 L_1^2 & L_2^3 L_3^2 & L_3^3 L_1^2 & L_3^3 L_2^2 & L_1^3 L_2 L_3 & L_2^3 L_1 L_3 \\ L_3^3 L_1 L_2 & L_1 L_2^2 L_3^2 & L_2 L_1^2 L_3^2 & L_3 L_1^2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e o vector  $\boldsymbol{\alpha}^{(e)}$  vem

$$\boldsymbol{\alpha}^{(e)T} = \left\{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{21} \right\} \quad (3.45)$$

Tendo em conta a equação (3.43), a relação entre os pesos da aproximação,  $\boldsymbol{\alpha}^{(e)}$ , e os deslocamentos elementares e suas derivadas nodais,  $\mathbf{d}^{(e)}$ , pode ser obtida impondo nos nós  $i=\{1, 2, 3\}$

$$d_{(6(i-1)+1)}^{(e)} = \mathbf{P} \left( L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)} \right) \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.46a)$$

$$d_{(6(i-1)+2)}^{(e)} = - \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_1} \right|_{(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)})} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.46b)$$

$$d_{(6(i-1)+3)}^{(e)} = - \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2} \right|_{(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)})} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.46c)$$

$$d_{(6(i-1)+4)}^{(e)} = - \left. \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x_1^2} \right|_{(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)})} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.46d)$$

$$d_{(6(i-1)+5)}^{(e)} = - \left. \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)})} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.46e)$$

$$d_{(6(i-1)+6)}^{(e)} = - \left. \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x_2^2} \right|_{(L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, L_3^{(i)})} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.46f)$$

e nos nós  $(i+3)$ , *i.e.*, nos nós  $\{4, 5, 6\}$  ou associados ao nó situado a meio do lado  $i$ ,

$$d_{(18+i)}^{(e)} = - \frac{l_i}{2A} \left( \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_i} \right|_{(L_1^{(i+3)}, L_2^{(i+3)}, L_3^{(i+3)})} + \right. \\ \left. + p_i \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_j} \right|_{(L_1^{(i+3)}, L_2^{(i+3)}, L_3^{(i+3)})} + q_i \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_k} \right|_{(L_1^{(i+3)}, L_2^{(i+3)}, L_3^{(i+3)})} \right) \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.47)$$

Perfaz-se assim um total de vinte e uma condições que podem ser agrupadas na forma matricial

$$\mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)-1} \mathbf{d}^{(e)} \quad (3.48)$$

onde  $\mathbf{A}^{(e)}$  é um operador linear que mapeia os pesos dos monómios da base da aproximação,  $\boldsymbol{\alpha}^{(e)}$ , nos graus de liberdade do elemento,  $\mathbf{d}^{(e)}$ . Estes últimos podem ser agrupados na forma

$$\mathbf{d}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(e)} \\ \mathbf{d}_2^{(e)} \\ \mathbf{d}_3^{(e)} \\ \mathbf{d}_4^{(e)} \\ \mathbf{d}_5^{(e)} \\ \mathbf{d}_6^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

onde

$$\mathbf{d}_i^{(e)} = \left\{ w_i \quad -w_{,1i} \quad -w_{,2i} \quad -w_{,11i} \quad -w_{,12i} \quad -w_{,22i} \right\}^T \quad (3.50)$$

para  $i = \{1, 2, 3\}$  e

$$\mathbf{d}_i^{(e)} = \left\{ w_{,n} \right\} \quad (3.51)$$

para  $i = \{4, 5, 6\}$ .

Substituindo (3.48) em (3.43) vem

$$w^{(e)} = \mathbf{P} \mathbf{A}^{(e)-1} \mathbf{d}^{(e)} \Leftrightarrow w^{(e)} = \boldsymbol{\Psi}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} \quad (3.52)$$

onde

$$\boldsymbol{\Psi}^{(e)} = \mathbf{P} \mathbf{A}^{(e)-1} \quad (3.53)$$

Note-se que a matriz  $\mathbf{A}^{(e)}$  pode ser determinada explicitamente, sendo apenas função das propriedades geométricas do elemento expressas por  $b_i$  e  $c_i$ <sup>1</sup>. Para a obtenção da matriz de funções de aproximação,  $\boldsymbol{\Psi}^{(e)}$ , foi fundamental a utilização do *software* Mathematica (Wolfram Research, 2010). As expressões assim obtidas são demasiado extensas para serem aqui reproduzidas na sua totalidade. As únicas expressões simples são as associadas aos nós situados a meio dos lados. Para este caso, a função de aproximação associada ao grau de liberdade  $w_{,n}$  para o lado  $i$  assume a forma

$$\psi_{18+i}^{(e)} = -\frac{32 A^{(e)}}{l_i} L_i L_j^2 L_k^2. \quad (3.54)$$

A representação de sete das funções de aproximação encontra-se na figura 3.4.

### 3.3.3 Matriz de Rigidez Elementar

O vector elementar das curvaturas,  $\boldsymbol{\chi}^{(e)}$ , é dado pela equação (3.3) onde  $\mathbf{B}^{(e)}$  é definido através da equação (3.4).

A avaliação da matriz de rigidez será efectuada nos moldes apresentados por Joseph e Rao (1979), onde as curvaturas são lineares, ao invés do presente trabalho, onde estas são representadas por polinómios do terceiro grau.

Sendo  $\boldsymbol{\Psi}^{(e)}$  expresso por uma combinação linear da base  $\mathbf{P}$  cuja dimensão é vinte e um, então  $\mathbf{B}^{(e)}$  pode ser expresso através de uma base dos polinómios completos de terceiro

---

<sup>1</sup>Por simplicidade foram introduzidas outras grandezas, deriváveis a partir de  $b_i$  e  $c_i$ , nomeadamente  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $l_i$  e  $A$ .

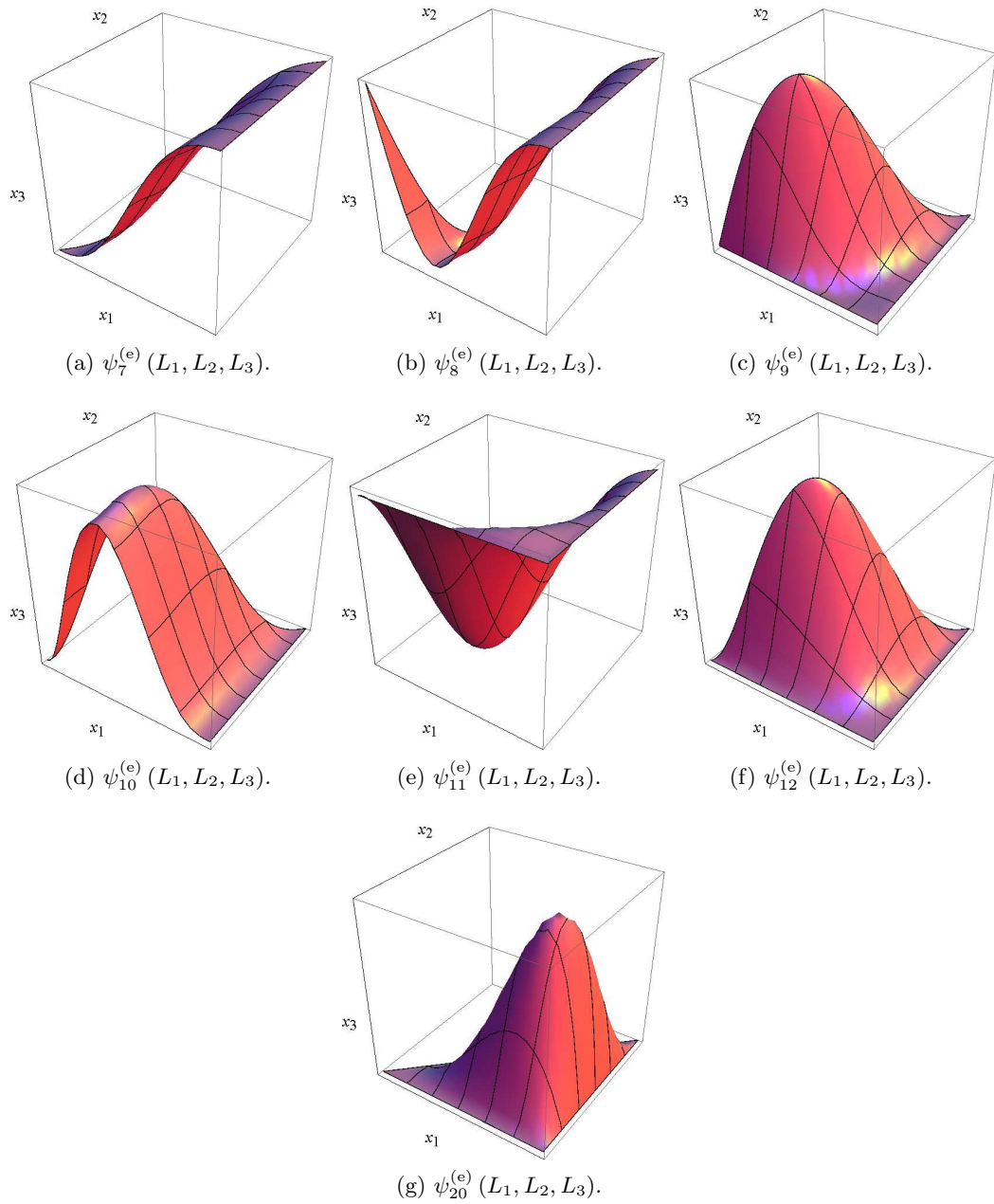


Figura 3.4: Funções de aproximação  $\psi_7^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\psi_8^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\psi_9^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\dots$ ,  $\psi_{12}^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$  e  $\psi_{20}^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$  de um elemento T21 cujas coordenadas dos vértices são  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

grau, segundas derivadas dos polinómios de quinto grau. Tal base tem dimensão dez e será, por exemplo,

$$\mathbf{L}^{(e)} = \begin{bmatrix} L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 & L_1^2 L_2 & L_1^2 L_3 & L_1 L_2^2 & L_2^2 L_3 & L_1 L_3^2 & L_2 L_3^2 & L_1 L_2 L_3 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Sendo a matriz  $\mathbf{L}^{(e)}$  igual para todos os elementos, doravante omitir-se-á o índice (e). Assim,  $\mathbf{B}^{(e)}$ , pode ser expresso da seguinte forma<sup>2</sup>

$$\mathbf{B}^{(e)} = \frac{1}{4A^{(e)2}} \mathbf{F} \mathbf{Q}^{(e)} = \frac{1}{4A^{(e)2}} \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{(e)} \\ \mathbf{Q}_{22}^{(e)} \\ \mathbf{Q}_{12}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

onde  $\mathbf{F}$  armazena a base de aproximação de cada uma das curvaturas e  $\mathbf{Q}_{11}^{(e)}$ ,  $\mathbf{Q}_{22}^{(e)}$  e  $\mathbf{Q}_{12}^{(e)}$  são matrizes de dimensão  $(10 \times 21)$  que armazenam os coeficientes das funções de aproximação das curvaturas. Estes coeficientes foram determinados recorrendo ao *software* Mathematica (Wolfram Research, 2010).

Assim, a matriz de rigidez elementar pode ser obtida por intermédio de

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left( \frac{1}{4A^{(e)2}} \mathbf{F} \mathbf{Q}^{(e)} \right)^T \mathbf{D}^{(e)} \left( \frac{1}{4A^{(e)2}} \mathbf{F} \mathbf{Q}^{(e)} \right) d\Omega^{(e)} = \\ &= \frac{1}{8A^{(e)3}} \mathbf{Q}^{(e)T} \left( \frac{1}{2A^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{F}^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{F} d\Omega^{(e)} \right) \mathbf{Q}^{(e)} = \frac{1}{8A^{(e)3}} \mathbf{Q}^{(e)T} \mathbf{S}^{(e)} \mathbf{Q}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.57)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(e)} &= \frac{1}{2A^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{F}^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{F} d\Omega^{(e)} = \\ &= \frac{1}{2A^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{21}^{(e)} & D_{22}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix} d\Omega^{(e)} = \\ &= \frac{1}{2A^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} \mathbf{L} & D_{12}^{(e)} \mathbf{L} & 0 \\ D_{21}^{(e)} \mathbf{L} & D_{22}^{(e)} \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \mathbf{L} \end{bmatrix} d\Omega^{(e)} = \\ &= \frac{1}{2A^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} \mathbf{L}^T \mathbf{L} & D_{12}^{(e)} \mathbf{L}^T \mathbf{L} & 0 \\ D_{21}^{(e)} \mathbf{L}^T \mathbf{L} & D_{22}^{(e)} \mathbf{L}^T \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \end{bmatrix} d\Omega^{(e)} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Definindo a matriz  $\mathbf{R}$  como

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2A^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{L}^T \mathbf{L} d\Omega^{(e)} \quad (3.59)$$

vem

$$\mathbf{S}^{(e)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} \mathbf{R} & D_{12}^{(e)} \mathbf{R} & 0 \\ D_{21}^{(e)} \mathbf{R} & D_{22}^{(e)} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

<sup>2</sup>O factor  $\frac{1}{4A^2}$  decorre da utilização da expressão das segundas derivadas (3.20).

Usando a expressão (3.42), a matriz  $\mathbf{R}$  pode ser avaliada explicitamente, conduzindo a

$$\mathbf{R} = \frac{1}{10080} \begin{bmatrix} 180 & 9 & 9 & 30 & 30 & 12 & 3 & 12 & 3 & 6 \\ 9 & 180 & 9 & 12 & 3 & 30 & 30 & 3 & 12 & 6 \\ 9 & 9 & 180 & 3 & 12 & 3 & 12 & 30 & 30 & 6 \\ 30 & 12 & 3 & 12 & 6 & 9 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 30 & 3 & 12 & 6 & 12 & 3 & 2 & 9 & 3 & 3 \\ 12 & 30 & 3 & 9 & 3 & 12 & 6 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 30 & 12 & 3 & 2 & 6 & 12 & 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 30 & 3 & 9 & 2 & 3 & 12 & 6 & 3 \\ 3 & 12 & 30 & 2 & 3 & 3 & 9 & 6 & 12 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Note-se que esta matriz é independente das propriedades do elemento, pelo que se omitiu na sua definição o índice (e).

Assim, desenvolvendo a equação (3.57) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \frac{1}{8A^{(e)3}} \mathbf{Q}^{(e)T} \mathbf{S}^{(e)} \mathbf{Q}^{(e)} = \\ &= \frac{1}{8A^{(e)3}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{(e)} \\ \mathbf{Q}_{22}^{(e)} \\ \mathbf{Q}_{12}^{(e)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} \mathbf{R} & D_{12}^{(e)} \mathbf{R} & 0 \\ D_{21}^{(e)} \mathbf{R} & D_{22}^{(e)} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{(e)} \\ \mathbf{Q}_{22}^{(e)} \\ \mathbf{Q}_{12}^{(e)} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{8A^{(e)3}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{(e)T} & \mathbf{Q}_{22}^{(e)T} & \mathbf{Q}_{12}^{(e)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{11}^{(e)} + D_{12}^{(e)} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{22}^{(e)} \\ D_{21}^{(e)} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{11}^{(e)} + D_{22}^{(e)} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{22}^{(e)} \\ D_{33}^{(e)} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{12}^{(e)} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{8A^{(e)3}} \left( D_{11}^{(e)} \mathbf{Q}_{11}^{(e)T} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{11}^{(e)} + D_{12}^{(e)} \mathbf{Q}_{11}^{(e)T} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{22}^{(e)} + D_{21}^{(e)} \mathbf{Q}_{22}^{(e)T} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{11}^{(e)} + \right. \\ &\quad \left. + D_{22}^{(e)} \mathbf{Q}_{22}^{(e)T} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{22}^{(e)} + D_{33}^{(e)} \mathbf{Q}_{12}^{(e)T} \mathbf{R} \mathbf{Q}_{12}^{(e)} \right) \quad (3.62) \end{aligned}$$

### 3.3.4 Vector de Forças Elementar

Uma vez que cada elemento T21 é constituído por seis nós, o vector de forças nodais equivalente foi implementado de modo a permitir a aplicação de cargas distribuídas,  $\bar{p}_{ef}$ , e variações diferenciais de temperatura,  $\Delta T_L$ , quadráticas no seu domínio – seis pontos permitem definir um polinómio de segundo grau no espaço bidimensional. Como já fora referido, apenas faz sentido considerar variações diferenciais de temperatura lineares na espessura da laje. Como tal, no que se segue, omitir-se-á o índice  $L$  na variação diferencial de temperatura, tendo-se então apenas  $\Delta T$ .

O vector das forças nodais equivalente elementar,  $\mathbf{f}^{(e)}$ , à semelhança da matriz de rigidez elementar, pode também ser avaliado explicitamente em coordenadas de área e será composto pelas parcelas correspondentes à carga efectiva e à variação de temperatura diferencial

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_{\bar{p}_{ef}}^{(e)} + \mathbf{f}_{\Delta T}^{(e)} \quad (3.63)$$

A generalização do vector,  $\mathbf{f}_{\bar{p}_{ef}}^{(e)}$ , para cargas quadráticas no domínio do elemento representa o primeiro termo do segundo membro da equação (3.7b)

$$\mathbf{f}_{\bar{p}_{ef}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\Psi}^{(e)T} \bar{p}_{ef}^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (3.64)$$

A carga quadrática,  $\bar{p}_{ef}^{(e)}$ , pode ser expressa em coordenadas de área através de

$$\bar{p}_{ef}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^6 \psi_i^Q(L_1, L_2, L_3) \bar{p}_{ef_i}^{(e)} \quad (3.65)$$

onde  $\psi_i^Q$  é a função de forma quadrática associada ao nó  $i$ , desenvolvida em coordenadas de área, e  $\bar{p}_{ef_i}^{(e)}$  representa o valor da carga no nó  $i$ .

Estas funções quadráticas podem ser escritas na forma (Zienkiewicz *et al.*, 2005, página 119)

$$\psi_i^Q = (L_i - L_j - L_k) L_i \quad (3.66a)$$

$$\psi_{i+3}^Q = 4L_j L_k \quad (3.66b)$$

com  $1 < i < 3$  e os índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  a permutarem ciclicamente.

Agrupando estas funções quadráticas numa única matriz,  $\boldsymbol{\Psi}^Q$ , e os valores  $\bar{p}_{ef_i}^{(e)}$  no vector  $\bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)}$  tem-se

$$\bar{p}_{ef}^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = \boldsymbol{\Psi}^Q \bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)} \quad (3.67)$$

O vector  $\boldsymbol{\Psi}^Q$  pode ser escrito na forma

$$\boldsymbol{\Psi}^Q = \mathbf{P}^Q \mathbf{Y}^Q \quad (3.68)$$

onde  $\mathbf{P}^Q$  representa uma base do polinómio quadrático, independente do elemento, e dada por

$$\mathbf{P}^Q = \begin{bmatrix} L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 & L_2 L_3 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

e a avaliação da matriz  $\mathbf{Y}^Q$  conduz a

$$\mathbf{Y}^Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Substituindo (3.68) e (3.53) em (3.64) vem

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\bar{p}_{ef}}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\Psi}^{(e)T} \boldsymbol{\Psi}^Q d\Omega^{(e)} \bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left( \mathbf{P} \mathbf{A}^{(e)-1} \right)^T (\mathbf{P}^Q \mathbf{Y}^Q) d\Omega^{(e)} \bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)} = \\ &= \mathbf{A}^{(e)-T} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{P}^Q d\Omega^{(e)} \mathbf{Y}^Q \bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Defina-se a matriz  $\mathbf{Z}$  através de

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{P}^Q d\Omega^{(e)} \quad (3.72)$$

A avaliação desta conduz a

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{15120} \begin{bmatrix} 420 & 20 & 20 & 60 & 60 & 10 \\ 20 & 420 & 20 & 60 & 10 & 60 \\ 20 & 20 & 420 & 10 & 60 & 60 \\ 60 & 12 & 4 & 20 & 10 & 4 \\ 60 & 4 & 12 & 10 & 20 & 4 \\ 12 & 60 & 4 & 20 & 4 & 10 \\ 4 & 60 & 12 & 10 & 4 & 20 \\ 12 & 4 & 60 & 4 & 20 & 10 \\ 4 & 12 & 60 & 4 & 10 & 20 \\ 20 & 12 & 2 & 12 & 4 & 3 \\ 20 & 2 & 12 & 4 & 12 & 3 \\ 12 & 20 & 2 & 12 & 3 & 4 \\ 2 & 20 & 12 & 4 & 3 & 12 \\ 12 & 2 & 20 & 3 & 12 & 4 \\ 2 & 12 & 20 & 3 & 4 & 12 \\ 10 & 3 & 3 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 10 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Assim, a equação (3.71) resulta finalmente em

$$\mathbf{f}_{\bar{p}_{ef}}^{(e)} = A^{(e)} \mathbf{A}^{(e)-T} \mathbf{Z} \mathbf{Y}^Q \bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)} \quad (3.74)$$

As expressões que advêm da avaliação simbólica de (3.74) são – mais uma vez – demasiado extensas para serem aqui reproduzidas. Por simplicidade, apresentam-se as únicas expressões cuja representação é simples: as associadas aos graus de liberdade a meio do lado  $i$  no caso particular em que a carga é constante e igual a  $\bar{p}_{ef}$ , *i.e.*,

$$f_{(18+i)}^{(e)} = -\frac{16 A^{(e)2} \bar{p}_{ef}}{315 l_i} \quad (3.75)$$

Do mesmo modo, a generalização do vector,  $\mathbf{f}_{\Delta T}^{(e)}$ , para variações diferenciais de temperatura lineares na espessura da laje e quadráticas no domínio do elemento representa o último termo do segundo membro da equação (3.7b) dado por

$$\mathbf{f}_{\Delta T}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \chi_{\Delta T}^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (3.76)$$

Esta variação de temperatura diferencial pode ser dada por intermédio de

$$\Delta T^{(e)}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^6 \psi_i^Q(L_1, L_2, L_3) \Delta T_i^{(e)} \quad (3.77)$$

Este tipo de solicitação provoca apenas curvaturas de flexão. Assim, defina-se o vector  $\mathbf{v}$  através de

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Agrupando os valores de  $\Delta T_i^{(e)}$  num único vector,  $\Delta \mathbf{T}^{(e)}$ , o vector das curvaturas provocadas pela variação diferencial de temperatura quadrática é dado por

$$\chi_{\Delta T}^{(e)} = \mathbf{v} \frac{\alpha}{h} \Delta T^{(e)} = \mathbf{v} \frac{\alpha}{h} \boldsymbol{\Psi}^Q \Delta \mathbf{T}^{(e)} = \frac{\alpha}{h} \mathbf{v} \mathbf{P}^Q \mathbf{Y}^Q \Delta \mathbf{T}^{(e)} \quad (3.78)$$

Substituindo (3.56) e (3.78) em (3.76) vem

$$\mathbf{f}_{\Delta T}^{(e)} = \frac{1}{4A^{(e)2}} \frac{\alpha}{h} \mathbf{Q}^{(e)T} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{F}^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{v} \mathbf{P}^Q d\Omega^{(e)} \mathbf{Y}^Q \Delta \mathbf{T}^{(e)} \quad (3.79)$$

Defina-se a matriz  $\mathbf{H}^{(e)}$  como

$$\mathbf{H}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{F}^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{v} \mathbf{P}^Q d\Omega^{(e)} \quad (3.80)$$

Esta pode ser desenvolvida resultando

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{21}^{(e)} & D_{22}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \mathbf{v} \mathbf{P}^Q d\Omega^{(e)} = \\ &= \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{11}^{(e)} + D_{12}^{(e)} \\ D_{21}^{(e)} + D_{22}^{(e)} \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{P}^Q d\Omega^{(e)} = \\ &= \int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T \mathbf{P}^Q \left( D_{11}^{(e)} + D_{12}^{(e)} \right) \\ \mathbf{L}^T \mathbf{P}^Q \left( D_{21}^{(e)} + D_{22}^{(e)} \right) \\ 0 \end{bmatrix} d\Omega^{(e)} \quad (3.81) \end{aligned}$$

Definindo a matriz  $\mathbf{M}$  como

$$\mathbf{M} = \frac{1}{A^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{L}^T \mathbf{P}^Q d\Omega^{(e)} \quad (3.82)$$



esta pode ser avaliada simbolicamente resultando

$$\mathbf{M} = \frac{1}{1260} \begin{bmatrix} 60 & 6 & 6 & 12 & 12 & 3 \\ 6 & 60 & 6 & 12 & 3 & 12 \\ 6 & 6 & 60 & 3 & 12 & 12 \\ 12 & 6 & 2 & 6 & 3 & 2 \\ 12 & 2 & 6 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 12 & 2 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 6 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 12 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 12 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

a matriz  $\mathbf{H}^{(e)}$  resulta em

$$\mathbf{H}^{(e)} = A^{(e)} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} D_{11}^{(e)} + D_{12}^{(e)} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} D_{21}^{(e)} + D_{22}^{(e)} \end{pmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

e o vector das forças nodais equivalente para variações diferenciais de temperatura quadráticas no domínio do elemento, apresentado em (3.79), resulta, finalmente, em

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\Delta T}^{(e)} &= \frac{1}{4A^{(e)2}} \frac{\alpha}{h} \mathbf{Q}^{(e)T} A^{(e)} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} D_{11}^{(e)} + D_{12}^{(e)} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} D_{21}^{(e)} + D_{22}^{(e)} \end{pmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}^Q \Delta \mathbf{T}^{(e)} = \\ &= \frac{1}{4A^{(e)}} \frac{\alpha}{h} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{(e)T} & \mathbf{Q}_{22}^{(e)T} & \mathbf{Q}_{12}^{(e)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} D_{11}^{(e)} + D_{12}^{(e)} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M} \begin{pmatrix} D_{21}^{(e)} + D_{22}^{(e)} \end{pmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}^Q \Delta \mathbf{T}^{(e)} = \\ &= \frac{1}{4A^{(e)}} \frac{\alpha}{h} \left( \mathbf{Q}_{11}^{(e)T} \mathbf{M} \begin{pmatrix} D_{11}^{(e)} + D_{12}^{(e)} \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_{22}^{(e)T} \mathbf{M} \begin{pmatrix} D_{21}^{(e)} + D_{22}^{(e)} \end{pmatrix} \right) \mathbf{Y}^Q \Delta \mathbf{T}^{(e)} \quad (3.85) \end{aligned}$$

Note-se que as matrizes  $\mathbf{Y}^Q$ ,  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{M}$  são independentes das propriedades e solicitações do elemento, pelo que se omitiu na sua definição o índice (e).

### 3.3.5 Transformação de Coordenadas

No caso dos graus de liberdade locais não coincidirem com os graus de liberdade globais, deve efectuar-se uma transformação de coordenadas. Seja  $\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)}$  a equação de equilíbrio no referencial global e  $\mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{d}_l^{(e)} = \mathbf{f}_l^{(e)}$  a mesma equação nos eixos locais pretendidos para cada nó do elemento. A relação entre estes dois conjuntos de graus de liberdade pode ser escrita na forma

$$\mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{d}_l^{(e)} \quad (3.86)$$

A relação entre os dois sistemas de equações elementares pode ser obtida através de

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} \Leftrightarrow \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{d}_l^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} \Leftrightarrow \mathbf{K}_l^{(e)} \mathbf{d}_l^{(e)} = \mathbf{f}_l^{(e)} \quad (3.87)$$

onde foram definidas as matrizes elementares

$$\mathbf{K}_l^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_l^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} \quad (3.88)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{T}^{(e)}$  é da forma

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_3^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_4^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_5^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_6^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

e  $\mathbf{T}_i^{(e)}$  tem dimensão  $(6 \times 6)$  se  $i = \{1, 2, 3\}$  ou dimensão  $(1 \times 1)$  se  $i = \{4, 5, 6\}$ .

Para os nós a meio das arestas,  $i = \{4, 5, 6\}$ , não faz sentido definir um sistema de eixos local, pois tem-se apenas um grau de liberdade, a derivada normal,  $w_{,n}$ .

No entanto, tal já é necessário ser definido para os nós dos vértices do elemento,  $i = \{1, 2, 3\}$ . Assim, definindo os vector normal e tangencial como

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{Bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,n} \\ w_{,t} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w_{,nn} \\ w_{,nt} \\ w_{,tt} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_1^2 & 2n_1n_2 & n_2^2 \\ -n_1n_2 & (n_1^2 - n_2^2) & n_1n_2 \\ n_2^2 & -2n_1n_2 & n_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,11} \\ w_{,12} \\ w_{,22} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} w_{,11} \\ w_{,12} \\ w_{,22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & -2n_1n_2 & n_2^2 \\ n_1n_2 & (n_1^2 - n_2^2) & -n_1n_2 \\ n_2^2 & 2n_1n_2 & n_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,nn} \\ w_{,nt} \\ w_{,tt} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.91)$$

No caso de existir mais do que um elemento na malha é necessário adoptar um critério para o sentido positivo da derivada normal,  $w_{,n}$ , a meio dos lados.

Na presente implementação convencionou-se que o grau de liberdade é  $w_{,n}$  se  $j > i$  e  $(-w_{,n})$  se  $j < i$ , onde  $i$  e  $j$  são os números dos nós de extremidade do lado em análise.

Em resumo, para  $i = \{1, 2, 3\}$  tem-se

$$\mathbf{T}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_1^2 & -2n_1n_2 & n_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & n_1n_2 & (n_1^2 - n_2^2) & -n_1n_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_2^2 & 2n_1n_2 & n_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

e para  $i = \{4, 5, 6\}$

$$\mathbf{T}_i^{(e)} = \begin{cases} +1 & \text{se nó final} > \text{nó inicial} \\ -1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.93)$$

### 3.3.6 Avaliação de Esforços no Elemento

O vector dos momentos elementar,  $\mathbf{m}^{(e)}$ , é então avaliado através da expressão (3.5), tirando partido da primeira igualdade de (3.78).

Na avaliação do esforços transversos existe agora uma parcela devida à variação de temperatura. Assim

$$\begin{aligned} v_\alpha = m_{\alpha\beta,\beta} &= (D_f ((1 - \nu) \chi_{\alpha\beta} + \nu \chi_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}))_{,\beta} - \left( \frac{E h^2 \alpha \Delta T_L}{12(1 - \nu)} \delta_{\alpha\beta} \right)_{,\beta} = \\ &= - (D_f ((1 - \nu) w_{,\alpha\beta\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma\beta} \delta_{\alpha\beta})) - \frac{E h^2 \alpha \delta_{\alpha\beta}}{12(1 - \nu)} \Delta T_{L,\beta} = \\ &= - (D_f ((1 - \nu) w_{,\alpha\beta\beta} + \nu w_{,\gamma\gamma\alpha})) - \frac{E h^2 \alpha}{12(1 - \nu)} \Delta T_{L,\alpha} \quad (3.94) \end{aligned}$$

As derivadas da variação diferencial de temperatura,  $\Delta T_L$ , podem ser avaliadas, por exemplo, através de coordenadas de área, resultando então

$$\frac{\partial \Delta T_L}{\partial x_1} = \frac{1}{2A} \left( b_1 \frac{\partial \Delta T_L}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial \Delta T_L}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial \Delta T_L}{\partial L_3} \right) \quad (3.95a)$$

$$\frac{\partial \Delta T_L}{\partial x_2} = \frac{1}{2A} \left( c_1 \frac{\partial \Delta T_L}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial \Delta T_L}{\partial L_2} + c_3 \frac{\partial \Delta T_L}{\partial L_3} \right) \quad (3.95b)$$

onde

$$\frac{\partial \Delta T_L}{\partial L_i} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \psi_j^Q}{\partial L_i} \Delta T_{L_j} \quad (3.96)$$

### 3.3.7 Compatibilidade do elemento

Para gerar um espaço de soluções compatíveis é necessário satisfazer as condições de compatibilidade no domínio – gerando uma aproximação da classe  $C^1$  – e na fronteira cinemática.

No domínio do elemento, a aproximação é gerada por um polinómio, logo este e qualquer sua derivada serão contínuas. Assim, no seu domínio, o elemento é  $C^\infty$ .

Para satisfazer as condições de compatibilidade na fronteira cinemática há que impor mais condições do que as habituais, quando apenas existem graus de liberdade associados a deslocamento e respectivas derivadas de primeira ordem, *i.e.*,  $w$  e  $(-w, \alpha)$ .

No caso geral, as condições a impor envolvem valores de grandezas prescritas – por exemplo,  $w = \bar{w}$ . Para simplificar a exposição seguinte recorrer-se-ão apenas a condições de fronteira cinemáticas homogêneas.

Analise-se então as condições de fronteira cinemáticas em três tipos de bordo: um bordo simplesmente apoiado, um bordo com encastramento deslizante e um bordo encastrado. Considere-se a laje representada na figura 3.5. No caso do bordo simplesmente apoiado paralelo ao eixo  $x_1$ , se nos nós elementares de vértice que o constituem se impuser apenas  $w = 0$  e  $(-w, 1) = 0$ , poderá ocorrer entre os nós a deformada que se observa. Note-se

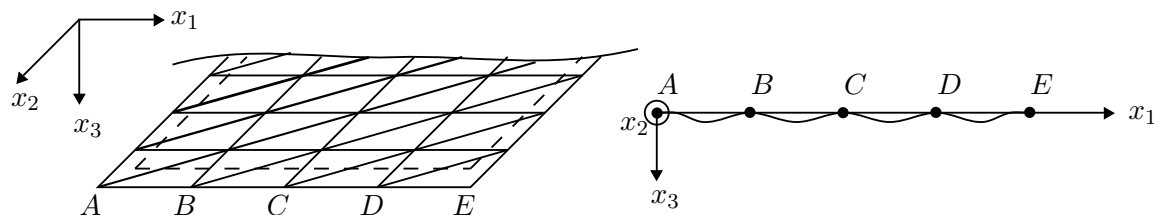


Figura 3.5: Bordo simplesmente apoiado não compatível.

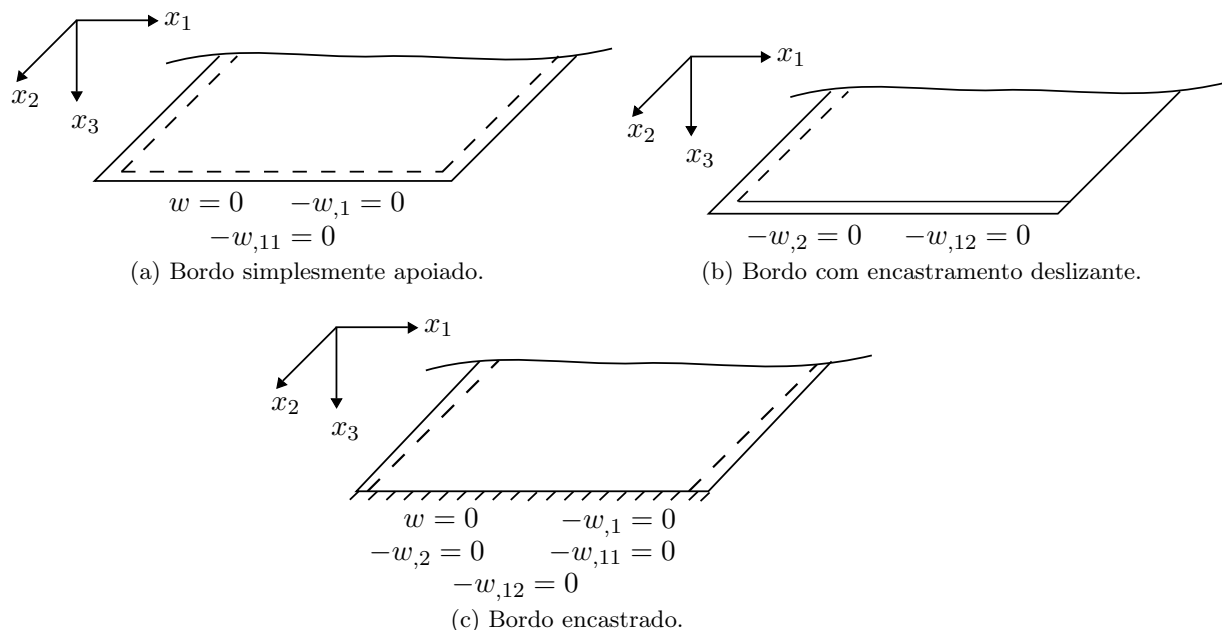


Figura 3.6: Condições de fronteira cinemáticas para bordos simplesmente apoiados, encastrados deslizantes e encastrados.

que  $w$  é um polinómio do quinto grau e apenas se dispõe de quatro condições. Assim, de modo a se impor exactamente as condições de fronteira, dever-se-á prescrever também  $(-w_{,11}) = 0$  em cada nó, ficando-se assim com as seis condições requeridas. Em geral, num bordo simplesmente apoiado ter-se-á  $w = 0$ ,  $(-w_{,t}) = 0$  e  $(-w_{,tt}) = 0$ .

Raciocínios análogos podem ser feitos para os restantes tipos de condições de apoio. Resulta então que num bordo com encastramento deslizante dever-se-á impor  $(-w_{,n}) = 0$  e  $(-w_{,nt}) = 0$  enquanto que num bordo encastrado ter-se-á  $w = 0$ ,  $(-w_{,n}) = 0$ ,  $(-w_{,t}) = 0$ ,  $(-w_{,nt}) = 0$  e  $(-w_{,tt}) = 0$ . Em suma, as condições de fronteira cinemáticas a impor nestes três tipo de apoio apresentam-se esquematizadas na figura 3.6.

Resta, finalmente, provar a compatibilidade na fronteira entre elementos. Para tal é necessário garantir a continuidade da função de aproximação de  $w$  e das suas derivadas  $w_{,n}$  e  $w_{,t}$ .

Como  $w$  é de quinto grau, são necessários seis parâmetros para definir a aproximação ao longo de uma recta. Em cada um dos nós que constituem os vértices de um elemento, ligados por uma aresta, prescreve-se o deslocamento,  $w$ , a derivada,  $w_{,t}$ , e a curvatura,  $\chi_{tt}$ . Têm-se assim seis parâmetros para definir a aproximação e prova-se que esta é contínua na fronteira entre elementos. Estes parâmetros podem ser verificados por observação da

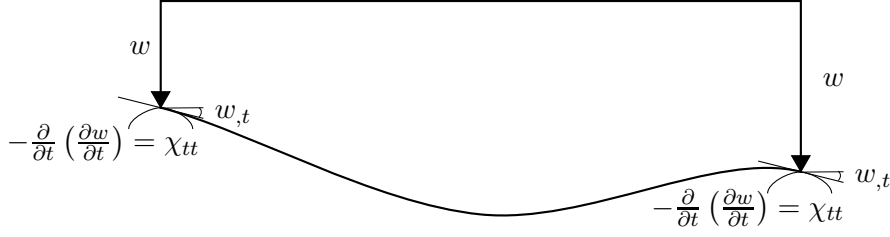
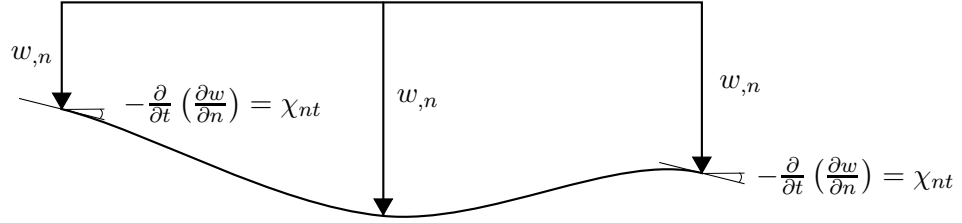
Figura 3.7: Compatibilidade do deslocamento,  $w$ , no elemento T21.Figura 3.8: Compatibilidade da derivada normal,  $w_n$ , no elemento T21.

figura 3.7.

Sendo a aproximação, ao longo de uma recta, de quinto grau, a derivada  $w_n$  será de quarto grau, logo serão necessários cinco parâmetros para garantir a sua compatibilidade. Em cada um dos nós de vértice do elemento prescrevem-se a derivada  $w_n$  e a curvatura  $\chi_{nt}$ , faltando um parâmetro. Este será formado pela derivada  $w_n$  no nó central da aresta que une os dois vértices. Os parâmetros que definem  $w_n$  encontram-se representados na figura 3.8.

Na fronteira entre elementos, o deslocamento,  $w$ , é o mesmo para ambos os elementos. Deste modo, garante-se que a derivada  $w_t$  é também a mesma, logo será também compatível.

### 3.4 Formulação do Elemento Finito T18

#### 3.4.1 Perspectiva Histórica

A família dos elementos TUBA – ver (Argyris *et al.*, 1968, Argyris e Buck, 1968) – também inclui elementos sem nós intermédios, *i.e.*, sem nós situados nas arestas. Entre estes contam-se o TUBA 3, TUBA 10 e TUBA 12. O elemento TUBA 3<sup>3</sup> coincide exactamente com o elemento T18 aqui analisado.

Cowper *et al.* (1969) desenvolveram independentemente o elemento T18. A sua derivação é baseada num referencial local de coordenadas, em que um dos eixos coincide com uma das arestas do triângulo e o eixo que lhe é perpendicular passa no vértice restante. A matriz de rigidez e o vector de forças nodais equivalentes são avaliados explicitamente. No referido trabalho são efectuadas aplicações à análise estática e são fornecidas estimativas teóricas e experimentais da taxa de convergência.

<sup>3</sup>A publicação original onde consta o elemento TUBA 3 (Argyris *et al.*, 1968) contém alguns erros na transformação associada à derivada normal de um dos lados. Esses erros foram identificados e corrigidos por Pavlova e Karamanski (1979).

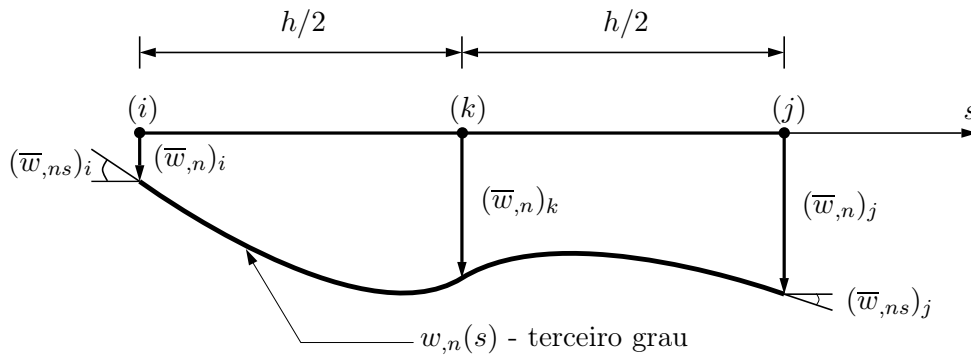


Figura 3.9: Variação cúbica da derivada normal,  $w_n$ , no lado do elemento T18.

Este elemento também foi formulado por Bell (1969). Aqui as restrições devidas à variação cúbica da derivada normal a meio das arestas são impostas na matriz de rigidez do elemento T21.

Uma outra formulação independente do T18 foi a proposta por Butlin e Ford (1970), onde as funções de aproximação são derivadas a partir de polinómios unidimensionais de Hermite de segunda e terceira ordem, ou seja, do terceiro e quinto grau, respectivamente.

A generalização do T18 à análise de problemas com lados curvos foi apresentada por Chernuka *et al.* (1972). A sua aplicação à análise de lajes circulares é demonstrativa do elevado aumento atingido na precisão do elemento, relativamente à formulação com lados rectos.

As matrizes elementares do T18 foram derivadas explicitamente por Dasgupta e Sen-gupta (1990), onde é também fornecido código fonte para a implementação do mesmo.

Fórmulas explícitas para as funções de aproximação deste elemento foram apresentadas por Okabe (1994). São também apresentadas as fórmulas explícitas para um elemento de transição entre o elemento T21 e T18.

### 3.4.2 Funções de Aproximação

A presença de nós a meio dos lados do elemento tem a desvantagem de aumentar consideravelmente a dimensão da matriz de rigidez elementar, tornando todo o processo de cálculo mais moroso. Com vista à redução deste problema considere-se agora o elemento triangular definido anteriormente apenas com os nós de vértice. Este apresenta dezoito graus de liberdade – seis por cada nó – e será por isso designado de T18.

De modo a manter a compatibilidade dos deslocamentos e das suas derivadas parciais de primeira ordem é imposta uma limitação à variação na derivada normal,  $w_n$ , ao longo dos lados do elemento: em lugar de ser definida por um polinómio de quarto grau, esta variação passa a ser expressa por um polinómio do terceiro grau. Este polinómio é definido unicamente em função dos parâmetros dos nós de extremidade – ver figura 3.9.

Assim ter-se-á

$$w_n^{(e)}(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 = \mathbf{S} \mathbf{a}^{(e)} \quad (3.97)$$

com

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

e

$$\mathbf{a}^{(e)T} = \{a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3\} \quad (3.99)$$

Impondo as quatro condições provenientes dos nós inicial e final vem

$$(w, n)_i = (\bar{w}, n)_i \Leftrightarrow a_0 = (\bar{w}, n)_i \quad (3.100a)$$

$$(w, ns)_i = (\bar{w}, ns)_i \Leftrightarrow a_1 = (\bar{w}, ns)_i \quad (3.100b)$$

$$(w, n)_j = (\bar{w}, n)_j \Leftrightarrow a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 = (\bar{w}, n)_j \quad (3.100c)$$

$$(w, ns)_j = (\bar{w}, ns)_j \Leftrightarrow a_1 + 2a_2 h + 3a_3 h^2 = (\bar{w}, ns)_j \quad (3.100d)$$

o que em modo matricial se traduz em

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\bar{w}, n)_i \\ (\bar{w}, ns)_i \\ (\bar{w}, n)_j \\ (\bar{w}, ns)_j \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{C} \mathbf{a} = \bar{\mathbf{d}} \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{d}} \mathbf{w} \quad (3.101)$$

Substituindo agora (3.101) em (3.97) vem

$$\begin{aligned} w, n(s) &= \mathbf{S} \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{d}} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{h^2} & -\frac{2}{h} & \frac{3}{h^2} & -\frac{1}{h} \\ \frac{2}{h^3} & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^3} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\bar{w}, n)_i \\ (\bar{w}, ns)_i \\ (\bar{w}, n)_j \\ (\bar{w}, ns)_j \end{Bmatrix} = \\ &= \left(1 - \frac{3s^2}{h^2} + \frac{2s^3}{h^3}\right) (\bar{w}, n)_i + \left(s - \frac{2s^2}{h} + \frac{s^3}{h^2}\right) (\bar{w}, ns)_i + \\ &\quad + \left(\frac{3s^2}{h^2} - \frac{2s^3}{h^3}\right) (\bar{w}, n)_j + \left(-\frac{s^2}{h} + \frac{s^3}{h^2}\right) (\bar{w}, ns)_j \quad (3.102) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{C}^{-1}$  foi calculada simbolicamente, novamente por recurso ao *software* Mathematica (Wolfram Research, 2010)<sup>4</sup>.

Assim, a derivada normal  $w, n$  do nó central do lado  $k = \{1, 2, 3\}$  pode ser expressa por intermédio de

$$(w, n)_k = w, n(h/2) = \frac{1}{2} \left( (\bar{w}, n)_i + (\bar{w}, n)_j \right) + \frac{h}{8} \left( (\bar{w}, ns)_i - (\bar{w}, ns)_j \right) \quad (3.103)$$

As derivadas normais,  $\bar{w}, n$ , e as curvaturas  $\bar{w}, ns$ , prescritos nos nós  $i$  e  $j$  podem ser avaliados em função dos deslocamentos nodais, recorrendo, para o efeito, à primeira igualdade do primeiro membro do sistema de equações de (3.90) e à segunda igualdade do primeiro membro do sistema de equações de (3.91), respectivamente,

$$(\bar{w}, n)_i = - \left( n_1 (-w, 1)_i + n_2 (-w, 2)_i \right) = - (n_1 d_{2i} + n_2 d_{3i}) \quad (3.104a)$$

$$(\bar{w}, n)_j = - \left( n_1 (-w, 1)_j + n_2 (-w, 2)_j \right) = - (n_1 d_{2j} + n_2 d_{3j}) \quad (3.104b)$$

---

<sup>4</sup>Note-se que as funções presentes no último membro da expressão (3.102) representam os polinómios de Hermite, frequentemente associados às funções de aproximação do elemento de viga de dois nós baseado na teoria de Euler-Bernoulli.

$$\begin{aligned}
(\overline{w}_{,ns})_i &= - \left( -n_1 n_2 (-w_{,11})_i + (n_1^2 - n_2^2) (-w_{,12})_i + n_1 n_2 (-w_{,22})_i \right) = \\
&= - \left( -n_1 n_2 d_{4i} + (n_1^2 - n_2^2) d_{5i} + n_1 n_2 d_{6i} \right) \quad (3.104c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overline{w}_{,ns})_j &= - \left( -n_1 n_2 (-w_{,11})_j + (n_1^2 - n_2^2) (-w_{,12})_j + n_1 n_2 (-w_{,22})_j \right) = \\
&= - \left( -n_1 n_2 d_{4j} + (n_1^2 - n_2^2) d_{5j} + n_1 n_2 d_{6j} \right) \quad (3.104d)
\end{aligned}$$

Definindo, para um lado  $k$  do elemento, as constantes

$$C_{1k} = \frac{1}{2} n_{1k} \quad (3.105a)$$

$$C_{2k} = \frac{1}{2} n_{2k} \quad (3.105b)$$

$$C_{3k} = \frac{h_k}{8} n_{1k} n_{2k} \quad (3.105c)$$

$$C_{4k} = \frac{h_k}{8} (n_{1k}^2 - n_{2k}^2) \quad (3.105d)$$

vem, substituindo (3.104) em (3.103),

$$\begin{aligned}
(w_{,n})_k &= w_{,n} (h/2) = - (C_{1k} (d_{2i} + d_{2j}) + C_{2k} (d_{3i} + d_{3j}) + \\
&\quad + C_{3k} (-d_{4i} + d_{4j} + d_{6i} - d_{6j}) + C_{4k} (d_{5i} + d_{5j})) \quad (3.106)
\end{aligned}$$

Deste modo, a relação entre os deslocamentos nodais dos nós a meio dos lados, *i.e.*, as derivadas normais do campo de deslocamentos,  $\mathbf{d}_s^{(e)}$ , e os deslocamentos nodais dos nós dos vértices,  $\mathbf{d}_f^{(e)}$ , pode ser escrita na forma

$$\mathbf{d}_s^{(e)} = \mathbf{G} \mathbf{d}_f^{(e)} \quad (3.107)$$

com

$$\mathbf{d}_s^{(e)} = \begin{Bmatrix} (w_{,n})_1 \\ (w_{,n})_2 \\ (w_{,n})_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} \\ \mathbf{G}_{21} & 0 & \mathbf{G}_{23} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_f^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1^{(e)} \\ \mathbf{d}_2^{(e)} \\ \mathbf{d}_3^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.108)$$

onde  $\mathbf{d}_i^{(e)}$  é exactamente igual ao vector dos graus de liberdade nodais do elemento T21 se  $i = 1, 2, 3$  e é dado através de (3.50). As submatrizes  $\mathbf{G}_{ij}$  agrupam as constantes definidas em (3.105) da seguinte forma

$$\mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & C_{11} & C_{21} & -C_{31} & C_{41} & C_{31} \end{bmatrix} \quad (3.109a)$$

$$\mathbf{G}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & C_{11} & C_{21} & C_{31} & -C_{41} & -C_{31} \end{bmatrix} \quad (3.109b)$$

$$\mathbf{G}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{22} & C_{32} & -C_{42} & -C_{32} \end{bmatrix} \quad (3.109c)$$

$$\mathbf{G}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{22} & -C_{32} & C_{42} & C_{32} \end{bmatrix} \quad (3.109d)$$

$$\mathbf{G}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & C_{13} & C_{23} & -C_{33} & C_{43} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (3.109e)$$

$$\mathbf{G}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & C_{13} & C_{23} & C_{33} & -C_{43} & -C_{33} \end{bmatrix} \quad (3.109f)$$



De forma a tornar clara a dedução, as funções de aproximação e o vector que agrupa os deslocamentos nodais e respectivas derivadas deste elemento de três nós, serão apelidadas doravante de  $\Psi_{T18}^{(e)}$  e  $\mathbf{d}_{T18}^{(e)}$ , respectivamente. Como estes são obtidos a partir dos homónimos do elemento T21, para este opta-se por manter as nomenclaturas definidas anteriormente:  $\Psi^{(e)}$  e  $\mathbf{d}^{(e)}$ , respectivamente.

As funções de aproximação podem ser determinadas, com recurso à relação de restrição (3.107), por intermédio de

$$\begin{aligned} w^{(e)} = \Psi^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \Psi_f^{(e)} & \Psi_s^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_f^{(e)} \\ \mathbf{d}_s^{(e)} \end{Bmatrix} = \Psi_f^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \Psi_s^{(e)} \mathbf{d}_s^{(e)} = \Psi_f^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \Psi_s^{(e)} \mathbf{G} \mathbf{d}_f^{(e)} = \\ &= \left[ \Psi_f^{(e)} + \Psi_s^{(e)} \mathbf{G} \right] \mathbf{d}_f^{(e)} = \Psi_{T18}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} \quad (3.110) \end{aligned}$$

Daqui retira-se então que a matriz elementar que agrupa as funções de aproximação do elemento T18 será

$$\Psi_{T18}^{(e)} = \Psi_f^{(e)} + \Psi_s^{(e)} \mathbf{G} \quad (3.111)$$

e a relação entre o vector que agrupa os deslocamentos nodais e respectivas derivadas do elemento T21,  $\mathbf{d}^{(e)}$ , com o homónimo do elemento T18,  $\mathbf{d}_{T18}^{(e)} = \mathbf{d}_f^{(e)}$ , pode ser escrita na forma

$$\mathbf{d}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_f^{(e)} \\ \mathbf{d}_s^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{18} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{d}_f^{(e)} = \mathbf{G} \mathbf{d}_{T18}^{(e)} \quad (3.112)$$

onde  $\mathbf{I}_{18}$  representa a matriz identidade com dimensão  $(18 \times 18)$ .

A representação gráfica de seis das funções de aproximação apresenta-se na figura 3.10.

### 3.4.3 Matriz de Rigidez Elementar

A dedução da matriz de rigidez elementar do elemento finito T18 é em tudo análoga àquela efectuada anteriormente para o elemento T21. A grande diferença reside na dimensão da matriz  $\mathbf{Q}^{(e)}$ , definida em (3.56), cuja dimensão é agora  $(30 \times 18)$ . Assim, a formulação matricial deduzida para a matriz de rigidez elementar do elemento T21 em (3.62) é exactamente a mesma, sendo apenas necessário considerar uma nova matriz  $\mathbf{Q}^{(e)}$ .

Note-se que a matriz  $\mathbf{L}$  que agrupa os polinómios da base cúbica definida em (3.55) é a mesma, pelo que a matriz  $\mathbf{R}$ , definida em (3.59) permanece válida.

### 3.4.4 Vector de Forças Elementar

A formulação do vector de forças elementar deste elemento segue, mais uma vez, as mesmas linhas do elemento T21. No entanto, na ausência dos nós a meio dos lados têm-se apenas dois nós por lado, num total de três nós por elemento, o que permite apenas definir cargas lineares – três pontos permitem definir um polinómio linear no espaço bidimensional.

A formulação do vector elementar de forças nodais equivalente,  $\mathbf{f}^{(e)}$ , é igualmente definido pela equação (3.63). A diferença reside nas parcelas devidas à carga efectiva e à variação diferencial de temperatura, que desta feita serão, no máximo, lineares.

Assim, a carga efectiva,  $\bar{p}_{ef}^{(e)}$ , em lugar de ser definida através de (3.67), é agora expressa recorrendo a funções de forma lineares,  $\psi_i^L$ , que podem ser agrupadas num único vector  $\Psi^L$ , através de

$$\Psi^L = \mathbf{P}^L \mathbf{Y}^L = \mathbf{P}^L \mathbf{I}_3 = \mathbf{P}^L \quad (3.113)$$

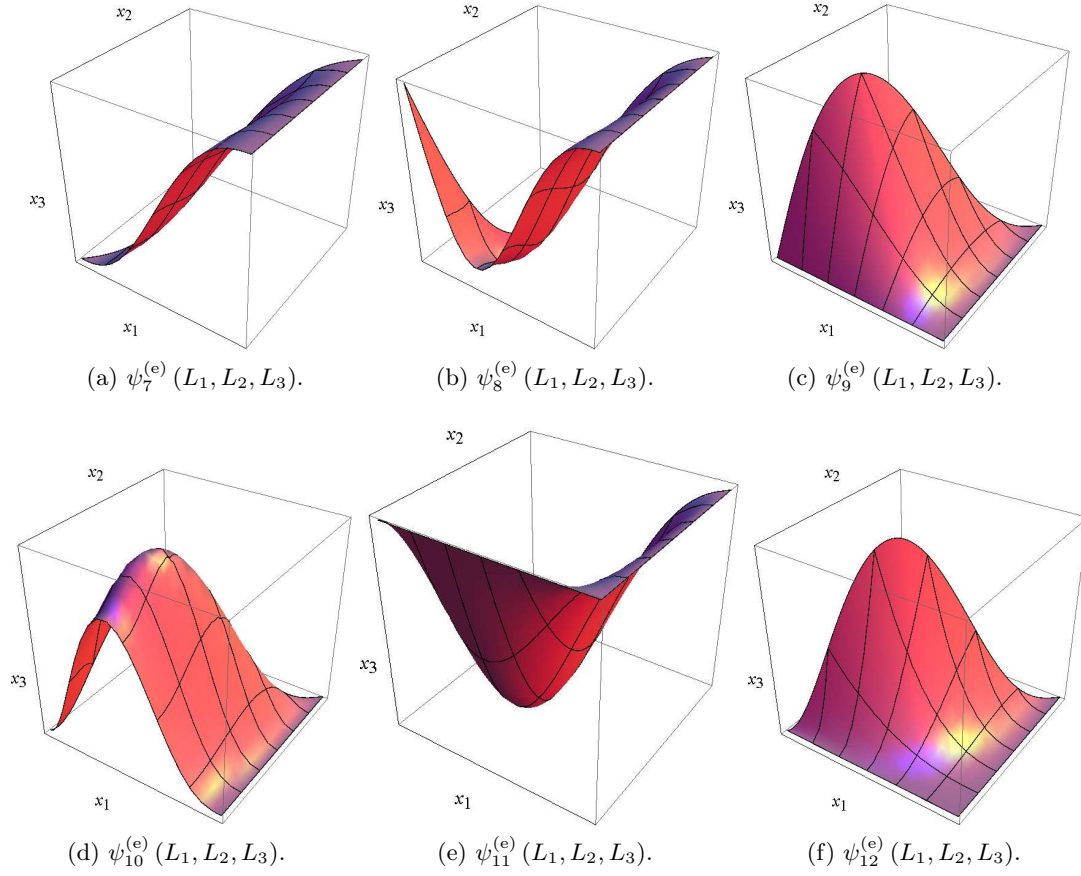


Figura 3.10: Funções de aproximação  $\psi_7^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\psi_8^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\psi_9^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\dots$ ,  $\psi_{12}^{(e)}(L_1, L_2, L_3)$  de um elemento T18 cujas coordenadas dos vértices são  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

onde  $\mathbf{P}^L$  representa uma base do polinómio linear, independente do elemento, e dada por

$$\mathbf{P}^L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

e a matriz  $\mathbf{Y}^L$  é desta feita igual à matriz identidade de dimensão  $(3 \times 3)$ , *i.e.*,  $\mathbf{I}_3$ .

Considere-se que as funções de aproximação do elemento T18,  $\Psi_{T18}^{(e)}$ , expressas através de (3.111), são escritas em função da base do elemento T21 (3.44) na forma

$$\Psi_{T18}^{(e)} = \mathbf{P}\mathbf{W} \quad (3.115)$$

onde a matriz  $\mathbf{W}^{(e)}$  tem dimensão  $(21 \times 18)$ .

Então, seguindo um procedimento semelhante ao efectuado em (3.71) ter-se-á

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{p}}_{ef}}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \Psi_{T18}^{(e)T} \mathbf{P}^L d\Omega^{(e)} \bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left( \mathbf{P}\mathbf{W}^{(e)} \right)^T (\mathbf{P}^L \mathbf{Y}^L) d\Omega^{(e)} \bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)} = \\ &= \mathbf{W}^{(e)T} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{P}^L d\Omega^{(e)} \mathbf{I}_3 \bar{\mathbf{p}}_{ef}^{(e)} \quad (3.116) \end{aligned}$$

A matriz  $\mathbf{Z}$  é definida de modo semelhante ao efectuado em (3.72), mas em lugar de  $\Psi^Q$  surge agora  $\Psi^L$ . A sua avaliação simbólica resulta em

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{5040} \begin{bmatrix} 180 & 30 & 30 \\ 30 & 180 & 30 \\ 30 & 30 & 180 \\ 30 & 12 & 6 \\ 30 & 6 & 12 \\ 12 & 30 & 6 \\ 6 & 30 & 12 \\ 12 & 6 & 30 \\ 6 & 12 & 30 \\ 12 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 9 \\ 9 & 12 & 3 \\ 3 & 12 & 9 \\ 9 & 3 & 12 \\ 3 & 9 & 12 \\ 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

As expressões que advêm da avaliação simbólica do vector elementar de forças nodais equivalentes do T18 devido à carga efectiva são – mais uma vez – demasiado extensas para serem aqui reproduzidas.

O processo de obtenção do vector elementar de forças nodais equivalentes devido à variação diferencial de temperatura do T18 é em tudo semelhante ao caso do T21, sendo a expressão obtida idêntica a (3.85) com – novamente – a óbvia supressão da matriz  $\mathbf{Y}^L$ . A definição da matriz  $\mathbf{M}$  é idêntica à apresentada em (3.82), sendo  $\mathbf{P}^Q$  substituído por  $\mathbf{P}^L$ . A sua avaliação simbólica conduz a

$$\mathbf{M} = \frac{1}{180} \begin{bmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Note-se que as matrizes  $\mathbf{Y}^L$ ,  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{M}$  são independentes das propriedades e solicitações do elemento, pelo que se omitiu na sua definição o índice (e).

### 3.4.5 Transformação de Coordenadas

A transformação de coordenadas do elemento T18 é semelhante à que foi exposta na subsecção 3.3.5, relativamente ao elemento T21. A alteração dá-se agora na matriz de transformação  $\mathbf{T}^{(e)}$  que é reduzida da anterior devido à supressão dos nós a meio dos lados do elemento. Assim, a matriz de transformação deste elemento,  $\mathbf{T}_{T18}^{(e)}$ , deriva daquela exposta em (3.89), com eliminação das submatrizes  $\mathbf{T}_i^{(e)}$  onde  $i = \{4, 5, 6\}$ , correspondentes aos nós a meio dos lados. Assim,

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

Então, as submatrizes  $\mathbf{T}_i^{(e)}$ , com  $i = \{1, 2, 3\}$ , que constituem a matriz de transformação do elemento T18, são aquelas apresentadas em (3.92).

### 3.4.6 Avaliação de Esforços no Elemento

A avaliação do campo de momentos e do campo de esforços transversos do elemento T18 segue também as linhas gerais já expostas na subsecção 3.3.6 para o elemento T21. No caso deste elemento, como se suprimiram os nós a meio dos lados, as funções de aproximação serão diferentes e em menor número, *viz.* dezoito. O vector dos deslocamentos nodais será também diferente. Estes factos traduzem-se num vector de curvaturas devido à carga efectiva, diferente daquele apresentado para o T21.

Além disso, a variação diferencial de temperatura será – como já fora visto – no máximo, linear e definida apenas em três nós. A consequência reflecte-se no vector das curvaturas devido a esta acção com os somatórios presentes em (3.77) e (3.96) a variarem apenas entre 1 e 3, o que altera o campo de esforços transversos cuja expressão é análoga à apresentada em (3.94).

### 3.4.7 Compatibilidade do elemento

Relativamente às condições a impor para se garantir a compatibilidade no domínio dos elementos, nada há de diferente comparativamente ao que fora exposto na subsecção 3.3.7 para o elemento T21.

No caso da fronteira entre elementos e da fronteira cinemática o deslocamento é, do mesmo modo, aproximado por um polinómio quíntico e os seis parâmetros necessários para garantir a sua compatibilidade são os mesmos que no T21. O raciocínio para garantir a compatibilidade da derivada tangencial ao bordo do elemento T21 aplica-se também a este elemento. A grande diferença reside na compatibilidade da derivada normal ao longo do bordo. Neste caso, tal como exposto na subsecção 3.4.2, a derivada normal do campo de deslocamentos será cúbica e os quatro parâmetros a prescrever são as derivadas normais,  $w_{,n}$ , e as curvaturas de torção,  $w_{,ns}$ , dos nós de extremidade. A figura 3.9 ilustra os graus de liberdade para um lado genérico.

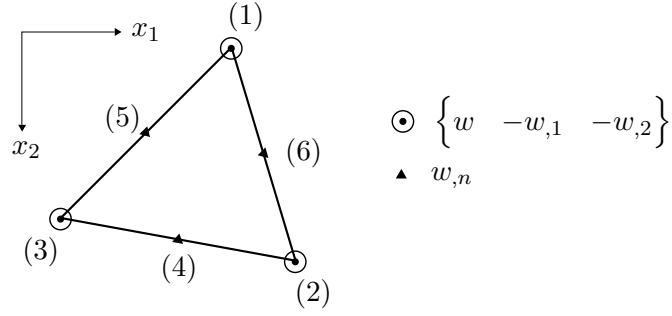


Figura 3.11: Elemento HCT12.

### 3.5 Formulação do Elemento Finito HCT12

#### 3.5.1 Perspectiva Histórica

Clough e Tocher (1966) descrevem o elemento HCT9, apresentando resultados numéricos da sua implementação. No mesmo artigo, na página 538, é feita uma breve referência a outra versão do mesmo elemento que consiste no HCT12 aqui estudado, ver também Strang and Fix (1973, página 84). Em ambas as versões cada elemento é dividido em três subelementos onde são utilizados campos de deslocamentos cúbicos completos, ou seja, com 10 termos. Assim, o número de incógnitas total é igual a  $3 \times 10 = 30$ .

Num trabalho posterior, Clough e Felippa (1969) apresenta uma exposição detalhada do elemento HCT12, então designado por LCCT-12 (Linear Curvature Compatible Triangle). Aqui é também apresentada a formulação de um elemento quadrilátero baseado na composição de dois elementos HCT12.

As propriedades de convergência destes elementos são brevemente analisadas em Ciarlet (2002, páginas 340 a 347).

Esta versão deste elemento é também descrita brevemente em Batoz e Dhatt (1990, páginas 367 a 369) e as funções de forma associadas aos subtriângulos são apresentadas explicitamente em Bernadou e Hassan (1981).

#### 3.5.2 Funções de Aproximação

Analisar-se-á agora o elemento finito triangular compatível com doze graus de liberdade, sendo que cada um dos três nós dos vértices apresenta três graus de liberdade e os nós a meio de cada uma das três arestas apresentam, cada um, um grau de liberdade, tal como se observa na figura 3.11. Note-se que a diferença deste para o elemento T21 reside na ausência dos graus de liberdade associados a curvaturas nos nós de vértice.

Poder-se-á definir o vector elementar dos graus de liberdade,  $\mathbf{d}^{(e)}$ , através da mesma expressão utilizada para o elemento T21 – ver definição (3.49) – onde, para  $i = \{1, 2, 3\}$ ,

$$\mathbf{d}_{(i)}^{(e)} = \begin{Bmatrix} w \\ -w_{,1} \\ -w_{,2} \end{Bmatrix}_{(i)} = \begin{Bmatrix} d_{3(i-1)+1}^{(e)} \\ d_{3(i-1)+2}^{(e)} \\ d_{3(i-1)+3}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.120)$$

e para  $i = \{4, 5, 6\}$ ,

$$\mathbf{d}_{(i)} = w_{,n}^{(i)} = d_{i+6}^{(e)} \quad (3.121)$$

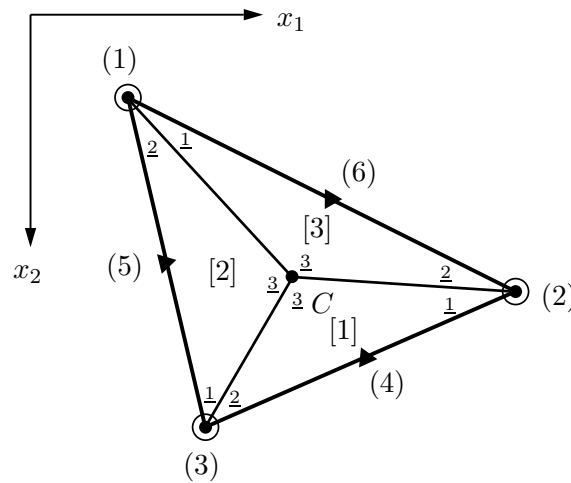


Figura 3.12: Divisão do elemento HCT12 em subelementos.

A aproximação para o campo de deslocamentos no interior de cada elemento é efectuada através da partição do domínio em três “troços”. Cada elemento triangular é dividido em três subelementos e em cada um deles assume-se que o deslocamento,  $w(x_1, x_2)$ , é representado por um polinómio cúbico completo cuja base, no espaço bidimensional, possui dez termos que, em coordenadas cartesianas, podem ser aferidos do triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & x_1 & x_2 & \\
 & & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & & \\
 x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & & & 
 \end{array}$$

Define-se ainda o ponto  $C$  no centro geométrico do elemento. Este é comum aos três subelementos e as suas coordenadas  $(x_1^C, x_2^C)$  são função das coordenadas  $x_\alpha^{(i)}$  dos nós de vértice do elemento triangular, onde  $i = \{1, 2, 3\}$ , que são dadas por

$$x_\alpha^C = \frac{x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + x_\alpha^{(3)}}{3} \quad (3.122)$$

A figura 3.12 pretende demonstrar a posição deste ponto  $C$ , assim como a numeração utilizada para os subelementos,  $[i]$ . Note-se que nenhum dos seus vértices,  $\underline{i}$ , coincide com o nó  $(i)$  do elemento triangular. Na mesma figura é possível atestar que todos os nós locais  $\underline{3}$  foram colocados de modo a coincidirem com o centro,  $C$ , do elemento triangular.

Então, para definir completamente a aproximação de  $w(x_1, x_2)$  no elemento são necessários  $3 \times 10 = 30$  parâmetros. Como o elemento possui apenas doze graus de liberdade é necessário impor  $30 - 12 = 18$  restrições às aproximações dos três subelementos. Estas visam assegurar a continuidade  $C^1$  da aproximação de  $w(x_1, x_2)$  dentro do elemento.

Assim, no centro  $C$  impor-se-ão seis restrições<sup>5</sup>, nomeadamente,

$$w^{[1]} = w^{[2]} \quad (3.123a)$$

$$w^{[2]} = w^{[3]} \quad (3.123b)$$

$$-w_{,1}^{[1]} = -w_{,1}^{[2]} \quad (3.123c)$$

$$-w_{,1}^{[2]} = -w_{,1}^{[3]} \quad (3.123d)$$

$$-w_{,2}^{[1]} = -w_{,2}^{[2]} \quad (3.123e)$$

$$-w_{,2}^{[2]} = -w_{,2}^{[3]} \quad (3.123f)$$

Do mesmo modo, no nó  $(i)$  de vértice do elemento, impor-se-ão três restrições – num total de nove – nomeadamente,

$$w^{[j]} = w^{[k]} \quad (3.124a)$$

$$-w_{,1}^{[j]} = -w_{,1}^{[k]} \quad (3.124b)$$

$$-w_{,2}^{[j]} = -w_{,2}^{[k]} \quad (3.124c)$$

$$(3.124d)$$

onde os índices  $i, j$  e  $k$ , mais uma vez, permutam ciclicamente.

Finalmente, a meio da aresta que une o centro,  $C$ , ao nó do vértice,  $(i)$ , do elemento impor-se-á mais uma condição – num total de três – *i.e.*,

$$w_{,n}^{[j]} = -w_{,n}^{[k]} \quad (3.125)$$

com os índices  $i, j$  e  $k$  também a permutam ciclicamente.

Obtém-se assim um total de  $6 + 3 \times 3 + 3 \times 1 = 18$  restrições.

A construção da aproximação nos subelementos é efectuada, mais uma vez, recorrendo a coordenadas de área. Como já fora exposto, a aproximação será cúbica e uma base completa poderá ser

$$\mathbf{P} = [L_1^3 \quad L_2^3 \quad L_3^3 \quad L_1^2 L_2 \quad L_1^2 L_3 \quad L_2^2 L_3 \quad L_1 L_2^2 \quad L_1 L_3^2 \quad L_2 L_3^2 \quad L_1 L_2 L_3] \quad (3.126)$$

Com a divisão feita em subelementos, além dos graus de liberdade do vector  $\mathbf{d}^{(e)}$ , surgem mais três no nó central que serão posteriormente eliminados, nomeadamente,

$$\begin{Bmatrix} d_{13}^{(e)} \\ d_{14}^{(e)} \\ d_{15}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ -w_{,1} \\ -w_{,2} \end{Bmatrix}_C \quad (3.127)$$

Considere-se a figura 3.13 onde são apresentados os graus de liberdade associados a cada nó local do subelemento  $[i]$ . Para cada um deles ter-se-á, então, a aproximação para o campo de deslocamento, em coordenadas de área, função da base cúbica completa definida em (3.126), dada por

$$w^{[i]}(L_1, L_2, L_3) = \mathbf{P}(L_1, L_2, L_3) \boldsymbol{\alpha}^{[i]} \quad (3.128)$$

---

<sup>5</sup>Note-se que as condições  $w^{[3]} = w^{[1]}$ ,  $-w_{,1}^{[3]} = -w_{,1}^{[1]}$  e  $-w_{,2}^{[3]} = -w_{,2}^{[1]}$  são redundantes e dependentes das indicadas, logo não poderão ser utilizadas.

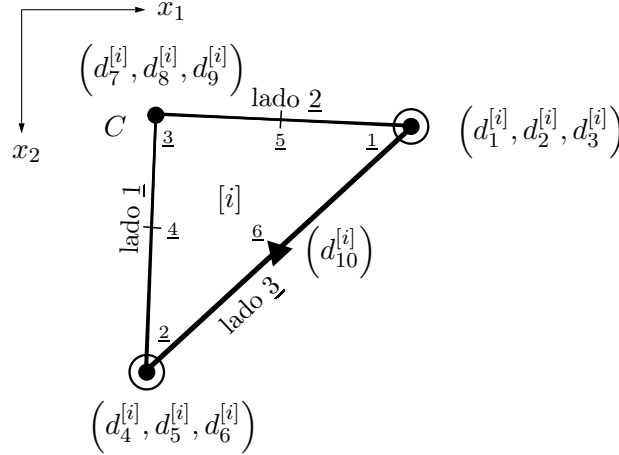


Figura 3.13: Graus de liberdade do subelemento  $[i]$  do elemento HCT12.

com o vector que agrupa pesos da aproximação em cada subelemento,  $\alpha^{[i]}$ , dado por

$$\alpha^{[i]T} = \left\{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{10} \right\} \quad (3.129)$$

Assim, a relação entre  $\alpha^{[m]}$  e o vector que agrupa os graus de liberdade,  $\mathbf{d}^{[m]}$ , do subelemento  $[m]$ , com  $1 \leq m \leq 3$ , pode ser obtida impondo nos nós  $\underline{i} = \{1, 2, 3\}$  deste

$$d_{3(\underline{i}-1)+1}^{[m]} = \mathbf{P} \left( L_1^{\underline{i}}, L_2^{\underline{i}}, L_3^{\underline{i}} \right) \alpha^{[m]} \quad (3.130a)$$

$$d_{3(\underline{i}-1)+2}^{[m]} = - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_1} \bigg|_{(L_1^{\underline{i}}, L_2^{\underline{i}}, L_3^{\underline{i}})} \alpha^{[m]} \quad (3.130b)$$

$$d_{3(\underline{i}-1)+3}^{[m]} = - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2} \bigg|_{(L_1^{\underline{i}}, L_2^{\underline{i}}, L_3^{\underline{i}})} \alpha^{[m]} \quad (3.130c)$$

e no nó  $\underline{6}$ , *i.e.*, no nó a meio do lado  $\underline{3}$

$$d_{10}^{[m]} = - \frac{l_{\underline{3}}}{2 A^{[m]}} \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_1} + p_{\underline{3}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_2} + q_{\underline{3}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_3} \right) \bigg|_{(L_1^{\underline{6}}, L_2^{\underline{6}}, L_3^{\underline{6}})} \alpha^{[m]} \quad (3.131)$$

Assim, à semelhança do que foi exposto em (3.48) e (3.52), estas dez condições podem ser agrupadas em formato matricial. Para cada subelemento ter-se-á então

$$\mathbf{d}^{[i]} = \mathbf{A}^{[i]} \alpha^{[i]} \Leftrightarrow \alpha^{[i]} = \mathbf{A}^{[i]-1} \mathbf{d}^{[i]} \quad (3.132)$$

o que resulta para o campo de deslocamentos em

$$w^{[i]} = \mathbf{P} \mathbf{A}^{[i]-1} \mathbf{d}^{[i]} \Leftrightarrow w^{[i]} = \mathbf{\Psi}^{[i]} \mathbf{d}^{[i]} \quad (3.133)$$

A matriz  $\mathbf{\Psi}^{[i]}$  foi avaliada explicitamente em função dos parâmetros  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $A^{[i]}$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  com recurso ao *software* Mathematica (Wolfram Research, 2010).

A representação gráfica de quatro das funções de aproximação de cada subelemento – três delas associadas aos graus de liberdade de um nó de vértice e a quarta associada ao nó a meio do lado – é apresentada na figura 3.14.



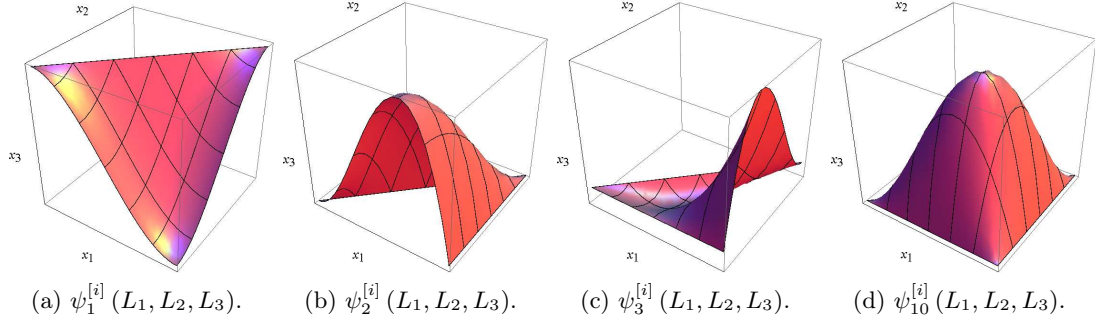


Figura 3.14: Funções de aproximação  $\psi_1^{[i]}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\psi_2^{[i]}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\psi_3^{[i]}(L_1, L_2, L_3)$  e  $\psi_{10}^{[i]}(L_1, L_2, L_3)$  de um subelemento HCT12 cujas coordenadas dos vértices são  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

Ainda relativamente a cada subelemento, é também necessário avaliar a derivada normal nos nós  $\underline{4}$  e  $\underline{5}$ , *i.e.*, a meio dos lados  $\underline{1}$  e  $\underline{2}$ , de modo a impor a continuidade da derivada normal. Assim ter-se-á para a aproximação do campo de deslocamento dada em (3.133),

$$w_{,n}^{\frac{\alpha+3}{2}} = -\frac{l_{\underline{\alpha}}}{2A^{[i]}} \left( \frac{\partial w}{\partial L_1} + p_{\underline{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial L_2} + q_{\underline{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial L_3} \right) \Big|_{(L_1^{\underline{\alpha}}, L_2^{\underline{\alpha}}, L_3^{\underline{\alpha}})} \quad (3.134)$$

Estas derivadas podem ser avaliadas explicitamente em função de  $b_i$ ,  $c_i$  e  $A^{[i]}$ .

As expressões (3.125) podem agora ser expostas matricialmente considerando separadamente os graus de liberdade livres,  $\mathbf{d}_f^{(e)}$ , e restringidos,  $\mathbf{d}_c^{(e)}$ ,

$$\mathbf{G}^{(e)} \mathbf{d}_c^{(e)} + \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d}_c^{(e)} = -\mathbf{G}^{(e)-1} \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} \Leftrightarrow \mathbf{d}_c^{(e)} = \mathbf{U}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} \quad (3.135)$$

onde

$$\mathbf{d}_f^{(e)T} = \left\{ d_1^{(e)} \quad d_2^{(e)} \quad d_3^{(e)} \quad \dots \quad d_{12}^{(e)} \right\} \quad (3.136a)$$

$$\mathbf{d}_c^{(e)T} = \left\{ d_{13}^{(e)} \quad d_{14}^{(e)} \quad d_{15}^{(e)} \right\} \quad (3.136b)$$

e  $\mathbf{U}^{(e)}$  representa a matriz de restrições dada por

$$\mathbf{U}^{(e)} = -\mathbf{G}^{(e)-1} \mathbf{H}^{(e)} \quad (3.137)$$

Mais uma vez recorreu-se ao *software* Mathematica (Wolfram Research, 2010) para avaliar explicitamente a inversa da matriz  $\mathbf{G}^{(e)}$  de dimensão  $(3 \times 3)$ .

Então, dado o vector elementar dos deslocamentos,  $\mathbf{d}_f^{(e)} = \mathbf{d}^{(e)}$ , devem avaliar-se os deslocamentos no centro do elemento,  $\mathbf{d}_c^{(e)}$ , através da equação (3.135) e em seguida é possível a avaliação do campo de deslocamentos no interior de cada subelemento  $[i]$  através de (3.133).

### 3.5.3 Matriz de Rigidez Elementar

Como visto na subsecção 3.5.2, a aproximação deste elemento é formada por funções cúbicas definidas em três subelementos. Deste modo, as curvaturas serão lineares e uma

base, em coordenadas de área, poderá ser

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

A obtenção da matriz de rigidez elementar segue os mesmo moldes do procedimento efectuado para o elemento T21 através do conjunto de equações (3.56) a (3.62). A diferença reside, obviamente, na dimensão das matrizes envolvidas.

A nível de cada subelemento, a matriz  $\mathbf{F}^{[i]}$ , que agrupa a base das curvaturas, terá dimensão  $(3 \times 9)$ , a matriz  $\mathbf{Q}^{[i]}$  terá dimensão  $(9 \times 10)$  o que faz com que a matriz  $\mathbf{B}^{[i]}$ , composta pelas anteriores, tenha dimensão  $(3 \times 10)$ . Por seu lado, a matriz  $\mathbf{S}^{[i]}$  terá dimensão  $(9 \times 9)$  e esta composta com as matrizes  $\mathbf{Q}^{[i]}$  origina a matriz de rigidez do subelemento,  $\mathbf{K}^{[i]}$ , de dimensão  $(10 \times 10)$ . No processo é ainda gerada simbolicamente a matriz  $\mathbf{R}$  que pode ser avaliada explicitamente<sup>6</sup> através de

$$\mathbf{R} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

Note-se que esta matriz é independente das propriedades do elemento, pelo que se omitiu na sua definição o índice (e).

As três matrizes de rigidez dos subelementos são então espalhadas na matriz de rigidez elementar,  $\mathbf{K}^{(e)}$ , na forma usual. Esta será uma matriz de dimensão  $(15 \times 15)$ , uma vez que engloba ainda os graus de liberdade do nó  $C$ .

Esta matriz corresponde a um elemento não compatível uma vez que a derivada normal a um lado interno de um subelemento é quadrática e apenas são impostas as derivadas normais nos vértices desse mesmo lado. Para tornar o elemento compatível ter-se-á que impor a restrição presente em (3.135).

O sistema de equações do MEF pode ser escrito na forma

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} + \mathbf{r}^{(e)} \quad (3.140)$$

onde  $\mathbf{r}^{(e)}$  é um vector agrupa dois vectores de forças devidos à imposição da restrição,  $\mathbf{r}_c^{(e)}$  e  $\mathbf{r}_f^{(e)}$ , que surgem nos graus de liberdade restringidos e livres, respectivamente. A resultante destes vectores tem de ser nula, tendo-se então, considerando (3.135),

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(e)T} \delta \mathbf{d}^{(e)} &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_f^{(e)T} \delta \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{r}_c^{(e)T} \delta \mathbf{d}_c^{(e)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{r}_f^{(e)T} \delta \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{r}_c^{(e)T} \mathbf{U}^{(e)} \delta \mathbf{d}_f^{(e)} = 0 \Leftrightarrow \left( \mathbf{r}_f^{(e)T} + \mathbf{r}_c^{(e)T} \mathbf{U}^{(e)} \right) \delta \mathbf{d}_f^{(e)} = 0 \end{aligned} \quad (3.141)$$

Para qualquer valor de  $\delta \mathbf{d}_f^{(e)}$  ter-se-á então:

$$\mathbf{r}_f^{(e)T} + \mathbf{r}_c^{(e)T} \mathbf{U}^{(e)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_f^{(e)} = -\mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{r}_c^{(e)} \quad (3.142)$$

Assim, a equação (3.140) pode ser escrita simbolicamente na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff}^{(e)} & \mathbf{K}_{fc}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{cf}^{(e)} & \mathbf{K}_{cc}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_f^{(e)} \\ \mathbf{d}_c^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_f^{(e)} \\ \mathbf{f}_c^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_f^{(e)} \\ \mathbf{r}_c^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.143)$$

<sup>6</sup>Esta matriz coincide com aquela obtida em Joseph e Rao (1979) no contexto da formulação simbólica do elemento Discrete Kirchhoff Triangle (DKT).

Recorrendo à expressão (3.135), a segunda equação de (3.143) virá

$$\mathbf{K}_{cf}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{K}_{cc}^{(e)} \mathbf{d}_c^{(e)} = \mathbf{f}_c^{(e)} + \mathbf{r}_c^{(e)} \Leftrightarrow \mathbf{r}_c^{(e)} = \mathbf{K}_{cf}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{K}_{cc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} - \mathbf{f}_c^{(e)} \quad (3.144)$$

Substituindo (3.144) na primeira equação de (3.143) e considerando ainda (3.141) e (3.135) obtém-se a equação de equilíbrio elementar do elemento finito HCT12

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ff}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{K}_{fc}^{(e)} \mathbf{d}_c^{(e)} &= \mathbf{f}_f^{(e)} + \mathbf{r}_f^{(e)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{K}_{ff}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{K}_{fc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} &= \mathbf{f}_f^{(e)} - \mathbf{U}^{(e)T} \left( \mathbf{K}_{cf}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{K}_{cc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} - \mathbf{f}_c^{(e)} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{K}_{ff}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{K}_{fc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} &= \mathbf{f}_f^{(e)} - \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{K}_{cf}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} - \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{K}_{cc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \mathbf{d}_f^{(e)} + \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{f}_c^{(e)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \mathbf{K}_{ff}^{(e)} + \mathbf{K}_{fc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} + \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{K}_{cf}^{(e)} + \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{K}_{cc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \right) \mathbf{d}_f^{(e)} &= \mathbf{f}_f^{(e)} + \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{f}_c^{(e)} \end{aligned} \quad (3.145)$$

de onde se retiram a matriz de rigidez elementar final, de dimensão  $(12 \times 12)$ , e o vector das forças nodais equivalentes elementar

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_{ff}^{(e)} + \mathbf{K}_{fc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} + \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{K}_{cf}^{(e)} + \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{K}_{cc}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (3.146a)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{f}_f^{(e)} + \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{f}_c^{(e)} \quad (3.146b)$$

### 3.5.4 Vector de Forças Elementar

A avaliação do vector de forças elementar segue um procedimento bastante próximo daquele utilizado nos elementos anteriores. Neste caso, e à semelhança da matriz de rigidez elementar, a construção dos vectores de forças é feita para os três subelementos e posteriormente espalhada para o elemento.

Tal como o elemento T21, este elemento possui seis nós, o que permite definir cargas efectivas e variações de temperatura quadráticas no espaço bidimensional. Deste modo, a base quadrática,  $\mathbf{P}^Q$ , definida em (3.69) e a matriz  $\mathbf{Y}^Q$  definida em (3.70) mantêm-se inalteradas. A base da aproximação  $\mathbf{P}$  será agora aquela definida em (3.126) e a matriz  $\mathbf{A}^{[i]}$  que mapeia os graus de liberdade nos pesos da aproximação será aquela utilizada em (3.132).

Das bases quadrática e cúbica resulta agora a matriz  $\mathbf{Z}$  exposta em (3.72), cuja avaliação conduz a

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{1260} \begin{bmatrix} 60 & 6 & 6 & 12 & 12 & 3 \\ 6 & 60 & 6 & 12 & 3 & 12 \\ 6 & 6 & 60 & 3 & 12 & 12 \\ 12 & 6 & 2 & 6 & 3 & 2 \\ 12 & 2 & 6 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 12 & 2 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 6 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 12 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 12 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

Assim, a nível de cada subelemento, o vector de forças que agrupa a carga efectiva quadrática,  $\mathbf{f}_{p_{ef}}^{[i]}$ , é análogo àquele fornecido em (3.74)

$$\mathbf{f}_{p_{ef}}^{[i]} = \mathbf{A}^{[i]} \mathbf{A}^{[i]T} \mathbf{Z} \mathbf{Y}^Q \mathbf{p}_{ef}^{[i]} \quad (3.148)$$

Também para cada subelemento, o vector de forças devido à variação de temperatura quadrática,  $\mathbf{f}_{\Delta T}^{[i]}$ , pode ser obtido de modo semelhante a (3.85) – note-se que este vector é agora ao nível do subelemento – sendo a matriz  $\mathbf{M}$ , definida por (3.82) avaliada simbolicamente e valendo neste caso

$$\mathbf{M} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

Note-se que as matrizes  $\mathbf{Y}^Q$ ,  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{M}$  são independentes das propriedades e solicitações do elemento, pelo que se omitiu na sua definição o índice (e).

### 3.5.5 Transformação de Coordenadas

A transformação de coordenadas do elemento HCT12 não apresenta novidades comparativamente ao que já foi exposto. É possível fazer uma analogia imediata com o demonstrado na subsecção 3.3.5 aquando do elemento T21. A diferença reside apenas nas submatrizes  $\mathbf{T}_i^{(e)}$  com  $i = \{1, 2, 3\}$  que são reduzidas daquelas por agora se estar na presença de um elemento triangular onde os nós de vértice apresentam apenas os três primeiros graus de liberdade do T21. Assim, para  $i = \{1, 2, 3\}$  tem-se

$$\mathbf{T}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

e para  $i = \{4, 5, 6\}$ , correspondente aos nós a meio dos lados do elemento, mantém-se os valores dados em (3.93).

### 3.5.6 Avaliação de Esforços no Elemento

Tanto o campo de momentos como o campo de esforços transversos elementares seguem as premissas da subsecção 3.3.6. O vector elementar do campo de momentos,  $\mathbf{m}^{(e)}$ , continua a ser avaliado por recurso à equação (3.5) enquanto o vector elementar dos esforços transversos é determinado através de (3.94). Tendo em consideração a aproximação efectuada para o campo de deslocamentos, facilmente se conclui que os campos de momentos e esforços transversos são lineares e constantes, respectivamente, no interior de cada subelemento, *i.e.*, são funções no espaço bidimensional definidas por troços.

### 3.5.7 Compatibilidade do elemento

No domínio do subelemento a aproximação do campo de deslocamentos é gerada por um polinómio, logo este e todas as suas derivadas serão contínuas. Então, a aproximação é  $C^\infty$  no domínio de cada subelemento.

Para satisfazer as condições de compatibilidade na fronteira cinemática, registam-se agora algumas alterações importantes relativamente aos elementos previamente estudados. É importante recordar que os graus de liberdade envolvidos neste elemento não contemplam as curvaturas – apenas o deslocamento e as suas derivadas parciais. Assim, para os três tipos de bordo analisados na subsecção 3.3.7, deixam de existir as prescrições associadas a qualquer curvatura – normal, tangencial e de torção.

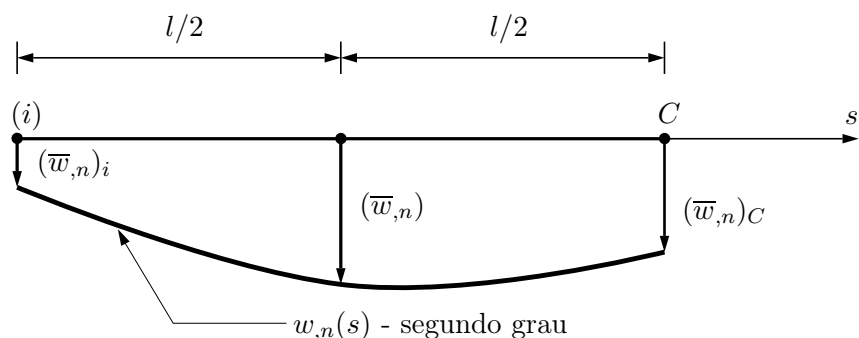


Figura 3.15: Variação quadrática da derivada normal,  $w_n$ , no lado interior do elemento HCT12.

Assim, em geral, num bordo simplesmente apoiado ter-se-á  $w = 0$  e  $(-w_t) = 0$ . Num bordo encastrado deslizante deverá apenas impor-se  $(-w_n) = 0$ , enquanto que num bordo encastrado ter-se-á  $w = 0$  e  $(-w_n) = 0$ .

Sendo a aproximação ao campo de deslocamentos cúbica, a derivada normal nos lados entre subelementos será quadrática. São, portanto, necessários três parâmetros para a definir ao longo dos três lados interiores ao elemento. Nos nós central,  $C$ , e de vértice,  $(i)$ , impõe-se a derivada normal, ficando a faltar uma condição que será também a derivada normal a meio do respectivo lado – ver figura 3.15. Dado que os graus de liberdade envolvidos nos lados interiores que unem cada subelemento são os mesmos que aqueles envolvidos nos lados entre elementos, esta demonstração serve não só para provar a compatibilidade na fronteira entre subelementos como também na fronteira entre elementos.

## 3.6 Formulação do Elemento Finito HCT9

### 3.6.1 Perspectiva Histórica

Este elemento foi apresentado por Clough e Tocher (1966). Num trabalho posterior de Clough e Felippa (1969) são divulgados resultados numéricos de um elemento quadrilátero baseado na composição de dois elementos HCT9. Neste, o presente elemento é designado por LCCT-9.

### 3.6.2 Funções de Aproximação

De modo análogo ao elemento T18, o elemento HCT9 deriva também de um elemento mais elaborado, neste caso, do HCT12, por exclusão de alguns graus de liberdade.

No elemento em estudo, e à semelhança do T18, suprimem-se os nós a meio dos lados. Está-se assim na presença de um elemento triangular com três graus de liberdade em cada nó, nomeadamente,  $w$ ,  $(-w_1)$  e  $(-w_2)$ . A formulação do elemento resulta do mesmo processo daquele utilizado para o HCT12, com a sua divisão em três subelementos.

Agora, a aproximação no interior do elemento é formada apenas por nove parâmetros ao invés dos dez anteriormente utilizados. Esta será, do mesmo modo, cúbica e a base completa, em coordenadas de área, será aquela utilizada em (3.126). Ao nível de cada subelemento,  $[i]$ , ter-se-á a aproximação definida em (3.128).

Assim, os graus de liberdade envolvidos em cada subelemento são os mesmos dez apresentados na figura 3.13, sendo necessário eliminar o décimo parâmetro em excesso. Para

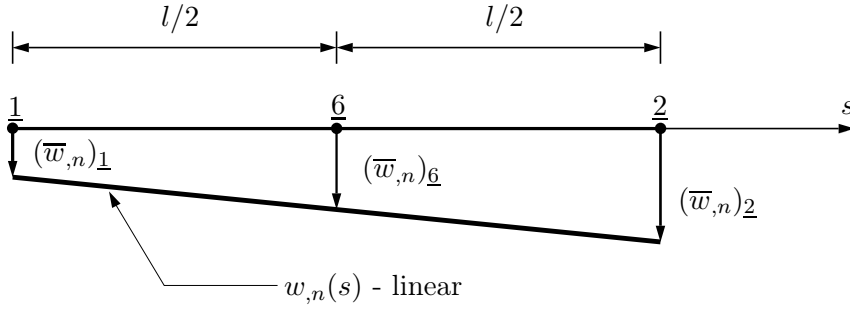


Figura 3.16: Variação linear da derivada normal,  $w,n$ , no lado  $\underline{3}$  do subelemento HCT9.

tal, é imposto que a derivada normal ao longo dos lados varie linearmente e não quadraticamente – ver figura 3.16, ou seja,

$$w_{,n}^{[i]}(s) = a_0 + a_1 s = \mathbf{S} \mathbf{a}^{[i]} \quad (3.151)$$

com

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

e

$$\mathbf{a}^{(e)T} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

Ao contrário do que foi visto para o elemento T18, subsecção 3.4.2, página 48, a avaliação de  $(\overline{w},n)_{\underline{6}}$  é agora imediata:

$$(\overline{w},n)_{\underline{6}} = \frac{1}{2} ((\overline{w},n)_{\underline{1}} + (\overline{w},n)_{\underline{2}}) \quad (3.154)$$

Assim, o grau de liberdade dependente,  $d_{10}^{[i]} = (\overline{w},n)_{\underline{6}}$ , pode ser definido em função dos graus de liberdade livres,  $\mathbf{d}_f^{[i]}$ , do seguinte modo

$$d_{10}^{[i]} = \mathbf{G} \mathbf{d}_f^{[i]} \quad (3.155)$$

onde  $\mathbf{G}$  é uma matriz de restrições.

Nos nós  $\underline{\alpha} = \{1, 2\}$  constituintes dos lados  $\underline{3}$  de cada subelemento ter-se-á

$$\begin{aligned} (w,n)_{\underline{3}} &= (n_1)_{\underline{3}} (w,1)_{\underline{3}} + (n_2)_{\underline{3}} (w,2)_{\underline{3}} = - \left( (n_1)_{\underline{3}} (-w,1)_{\underline{3}} + (n_2)_{\underline{3}} (-w,2)_{\underline{3}} \right) = \\ &= - \left( (n_1)_{\underline{3}} d_{3(\underline{\alpha}-1)+2}^{[i]} + (n_2)_{\underline{3}} d_{3(\underline{\alpha}-1)+3}^{[i]} \right) \end{aligned} \quad (3.156)$$

Deste modo, a relação (3.154) pode ser rescrita na forma

$$\begin{aligned} (\overline{w},n)_{\underline{6}} = d_{10}^{[i]} &= -\frac{1}{2} \left( (n_1)_{\underline{3}} d_2^{[i]} + (n_2)_{\underline{3}} d_3^{[i]} + (n_1)_{\underline{3}} d_5^{[i]} + (n_2)_{\underline{3}} d_6^{[i]} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (n_1)_{\underline{3}} & (n_2)_{\underline{3}} & 0 & (n_1)_{\underline{3}} & (n_2)_{\underline{3}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}^{[i]} \end{aligned} \quad (3.157)$$

Assim, a matriz  $\mathbf{G}$  assume a forma

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (n_1)_{\underline{3}} & (n_2)_{\underline{3}} & 0 & (n_1)_{\underline{3}} & (n_2)_{\underline{3}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

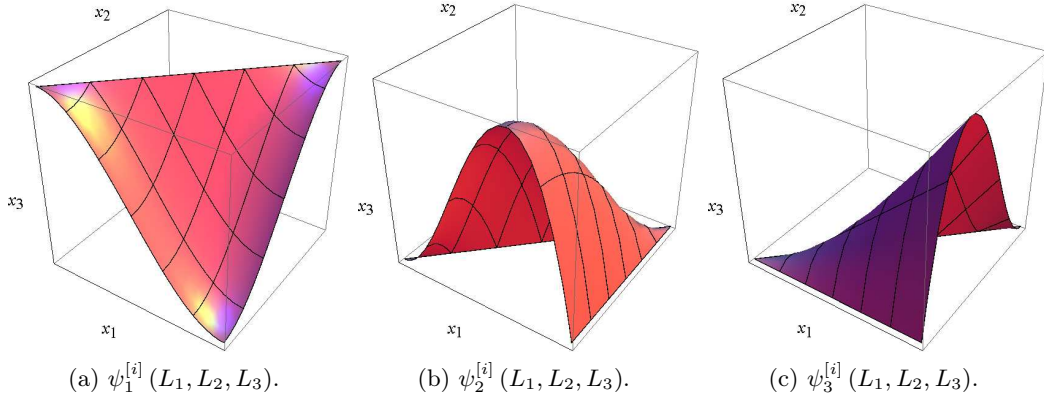


Figura 3.17: Funções de aproximação  $\psi_1^{[i]}(L_1, L_2, L_3)$ ,  $\psi_2^{[i]}(L_1, L_2, L_3)$  e  $\psi_3^{[i]}(L_1, L_2, L_3)$  de um subelemento HCT9 cujas coordenadas dos vértices são  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

As funções de aproximação podem ser determinadas, com recurso à relação de restrição (3.155). Assumindo que  $\Psi^{[i]}$  e  $\mathbf{d}^{[i]}$  representam a matriz das funções de aproximação e o vector que agrupa os graus de liberdade do elemento HCT12, respectivamente, vem

$$\begin{aligned} w^{[i]} = \Psi^{[i]} \mathbf{d}^{[i]} &= \begin{bmatrix} \Psi_f^{[i]} & \psi_{10}^{[i]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_f^{[i]} \\ d_{10}^{[i]} \end{Bmatrix} = \Psi_f^{[i]} \mathbf{d}_f^{[i]} + \psi_{10}^{[i]} d_{10}^{[i]} = \Psi_f^{[i]} \mathbf{d}_f^{[i]} + \psi_{10}^{[i]} \mathbf{G} \mathbf{d}_f^{[i]} = \\ &= \left[ \Psi_f^{[i]} + \psi_{10}^{[i]} \mathbf{G} \right] \mathbf{d}_f^{[i]} = \Psi_{\text{HCT9}}^{[i]} \mathbf{d}_f^{[i]} \quad (3.159) \end{aligned}$$

Daqui retira-se então que a matriz subelementar que agrupa as funções de aproximação do elemento HCT9 será

$$\Psi_{\text{HCT9}}^{[i]} = \Psi_f^{[i]} + \psi_{10}^{[i]} \mathbf{G} \quad (3.160)$$

e a relação entre o vector que agrupa os deslocamentos nodais e respectivas derivadas dos subelementos do HCT12,  $\mathbf{d}^{[i]}$ , com o homónimo do elemento HCT9,  $\mathbf{d}_{\text{HCT9}}^{[i]}$ , pode ser escrita na forma

$$\mathbf{d}^{[i]} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_f^{[i]} \\ d_{10}^{[i]} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_9 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{d}_f^{[i]} = \mathbf{G}_I \mathbf{d}_{\text{HCT9}}^{[i]} \quad (3.161)$$

onde  $\mathbf{I}_9$  representa a matriz identidade com dimensão  $(9 \times 9)$ .

Note-se que este processo a nível subelementar para o elemento HCT9 é em tudo semelhante ao processo a nível elementar do elemento T18.

A representação gráfica de três das funções de aproximação de cada subelemento é fornecida na figura 3.17.

### 3.6.3 Matriz de Rigidez Elementar

A forma de avaliar a matriz de rigidez elementar do HCT9 segue o mesmo processo que aquele utilizado para o elemento HCT12, resultando na expressão (3.146a). Obviamente, as dimensões matriciais são alteradas sendo a submatriz de rigidez dos graus de liberdade livres de dimensão  $(9 \times 9)$  e a dos graus de liberdade restringidos de dimensão  $(3 \times 3)$ . A matriz de restrições será agora aquela apresentada em (3.158) de dimensão  $(1 \times 9)$ .

A matriz  $\mathbf{R}$  permanece aquela dada em (3.139), pois a base de aproximação das curvaturas continua a ser linear – ver (3.138).

### 3.6.4 Vector de Forças Elementar

A avaliação do vector de forças elementar não apresenta, mais uma vez, qualquer novidade, sendo apenas relevante apresentar as matrizes  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{M}$  que foram avaliadas simbolicamente e permitem obter as parcelas devido à carga efectiva e à variação de temperatura, respectivamente. Estas são dadas por

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{180} \begin{bmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Note-se que, à semelhança do elemento T18, o HCT9 é um elemento de três nós, pelo que apenas é possível definir carregamentos lineares no espaço bidimensional.

### 3.6.5 Transformação de Coordenadas

Este tópico é, mais uma vez, semelhante ao já apresentado. Como neste elemento são suprimidos os nós a meio dos lados, a matriz de transformação elementar,  $\mathbf{T}^{(e)}$ , terá dimensão  $(9 \times 9)$  e será semelhante à apresentada para o elemento T18 – ver (3.119) – onde as submatrizes são obtidas a partir da transformação do elemento HCT12, ver (3.150) para  $i = \{1, 2, 3\}$ .

### 3.6.6 Avaliação de Esforços no Elemento

A redução do número de nós deste elemento, à semelhança do que foi efectuado na passagem do elemento T21 para o elemento T18, permite afirmar que a avaliação de esforços deste elemento segue os mesmos princípios que aqueles apresentados na subsecção 3.4.6.

### 3.6.7 Compatibilidade do elemento

A análise a efectuar à compatibilidade do elemento HCT9 é muito semelhante ao que foi exposto para o elemento HCT12. A diferença reside apenas no facto de se impor que a derivada normal varie linearmente ao longo dos lados do elemento. Os dois parâmetros necessários são dados pela derivada normal definida nos dois vértices que formam as extremidades do lado.



## Capítulo 4

# Implementação dos Elementos Finitos

Para implementar os elementos finitos formulados anteriormente recorreu-se a programas escritos em ambiente MATLAB (2010). Neste capítulo começar-se-á por fazer uma descrição do ficheiro de *input* de dados. De seguida far-se-á uma descrição sucinta do funcionamento do programa e, no final, apresentar-se-á uma descrição do ficheiro de *output*.

### 4.1 Ficheiro de *Input*

O ficheiro de *input* de dados armazena a informação relativa ao problema a resolver. Nele constam informações relativas à discretização da malha previamente gerada, neste caso, com recurso ao *software* ADINA (2005). Assim, numa primeira fase, é necessário fornecer o número de nós e de elementos, o número de materiais utilizados, o número de secções e o número de cargas concentradas.

Posteriormente, é necessário descrever, para cada nó da malha, as suas coordenadas geométricas, a orientação dos eixos locais, o código para referir se o grau de liberdade é livre (0) ou restringido (−1) e, para cada grau de liberdade, o seu valor prescrito. Caso o grau de liberdade se encontre restringido, é lido o deslocamento prescrito generalizado e caso o grau de liberdade se encontre livre é lida a força generalizada aplicada. Para os elementos T21 e HCT12 tem também de ser fornecido o número de graus de liberdade no nó.

É ainda necessário definir o número do elemento, os nós que o constituem, o número da secção, do material e o valor da carga uniformemente distribuída e da variação de temperatura diferencial linear em todos os nós dos elementos.

Finalmente, é fornecido o módulo de elasticidade, o coeficiente de *Poisson* e o coeficiente de dilatação térmica linear dos materiais, assim como a espessura da laje em estudo.

Um exemplo de um ficheiro de *input* é dado no apêndice C.1.

### 4.2 Descrição do Programa

Como já foi referido, o programa foi desenvolvido em ambiente MATLAB (2010), especialmente adequado ao cálculo matricial. Ao ser executado, é solicitado ao utilizador o ficheiro de *input* descrito anteriormente e, após finalizada a fase de processamento, é gerado um ficheiro de *output* na mesma localização.

O programa está dividido em algumas rotinas de base que se descrevem sucintamente:

- A primeira rotina, denominada *readata* tem como função ler o ficheiro de *input* e armazenar a informação que nele consta em estruturas, declaradas como variáveis globais;
- Em seguida, com a informação dos nós e dos elementos também presente no ficheiro de *input*, a rotina *undeformed* desenha o problema em estudo na sua forma indeformada e numera cada um dos nós e dos elementos;
- Depois, são tratados os graus de liberdade de todos os nós, na rotina *dof\_numbering*. Estes são contados sendo os seus valores armazenados na estrutura dos nós. Os nós são também numerados e são distinguidos os graus de liberdade que se encontram livres dos que estão restringidos. É também verificada a existência de deslocamentos generalizados prescritos nos graus de liberdade restringidos e de forças generalizadas nos graus de liberdade livres;
- O próximo passo é o cálculo das matrizes globais do sistema a partir das matrizes elementares. Este processo é efectuado através da rotina *build\_mesh\_matrices* que começa por definir as propriedades geométricas do elemento. Depois é obtida a matriz dos operadores constitutivos. Em seguida procede-se à montagem das matrizes de rigidez e das forças nodais equivalentes elementares devidas a solicitações no domínio dos elementos. Estas foram calculadas simbolicamente por recurso ao *software* Mathematica Wolfram Research (2010). É definida a matriz de transformação e finalmente é obtida a matriz de rigidez e o vector de forças nodais equivalentes, ambos no referencial global. Apenas os termos não-nulos presentes nestas duas entidades são armazenadas por forma a tirar partido da esparsidade do sistema de equações;
- A rotina *concentrated\_loads* trata o caso em que existem cargas concentradas aplicadas nos nós, determinando a sua contribuição para o vector elementar de forças nodais equivalentes no sistema global;
- A rotina seguinte, *solve\_system*, resolve o sistema de equações global do MEF determinando o vector dos deslocamentos nos graus de liberdade livres, calculando também o vector das reacções generalizadas. Com base nesta informação é construído o vector completo dos deslocamentos;
- Recorre-se à rotina *deformed* para desenharmos a deformada do problema em análise;
- De seguida, a rotina *draw\_generalized\_stresses* desenha os esforços generalizados, fornecendo os diagramas de momentos e esforços transversos em escala de cores;
- Finalmente, os resultados numéricos são exportados para um ficheiro de *output* através da rotina *write\_results*.

### 4.3 Ficheiro de *Output*

No ficheiro de resultados são apresentados os deslocamentos generalizados em cada nó e as reacções generalizadas nos nós restringidos. São ainda fornecidos os valores dos momentos flectores,  $m_{\alpha\beta}$ , e dos esforços transversos,  $v_\alpha$ , em cada um dos vértices de cada elemento. Finalmente, é também possível consultar o valor da energia de deformação, usada mais à frente neste trabalho, como um dos parâmetros de avaliação das soluções. Esta é avaliada através da expressão

$$U = \frac{1}{2} \sum_{(e)} \mathbf{d}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} \quad (4.1)$$

Um exemplo de um ficheiro de output é fornecido no apêndice C.2.

## Capítulo 5

# Exemplos Numéricos

Após a formulação e implementação do elemento finito, é agora possível a aplicação a alguns exemplos numéricos. Antes disso, no entanto, realizar-se-ão dois ensaios para atestar a qualidade dos elementos finitos em estudo, que incluem o denominado *patch test* e um teste de distorção.

Em termos de aplicação prática dos elementos, estudar-se-ão uma laje rectangular e uma laje circular. Em ambos os casos, começar-se-á por gerar as malhas de elementos finitos no *software* ADINA (2005), que serão progressivamente refinadas com vista à obtenção de soluções mais precisas.

De modo a analisar a qualidade das soluções, avaliar-se-á a convergência da energia de deformação. Sabe-se que, caso os elementos finitos sejam compatíveis, esta convergirá, geralmente, para o valor teórico por valores inferiores. Avaliar-se-á também a convergência dos momentos flectores máximos, do deslocamento a meio vão das lajes e dos momentos torsores, com vista à determinação das reacções de canto no caso da laje rectangular. O esforço transversal é também avaliado, sendo que na laje rectangular é analisada a sua convergência e na laje circular comprovar-se-á o seu andamento ao longo de um bordo, por razões atempadamente explicadas.

Com vista à eliminação de algumas questões levantadas inicialmente em relação às condições de fronteira a impor num dado problema, apresentar-se-á uma secção onde se comparam os resultados relativos entre as condições de fronteira discutidas nas subsecções referentes à compatibilidade de cada elemento e a imposição simultânea de condições de fronteira estáticas.

Mostrar-se-á também, à medida que se vão procedendo aos refinamentos das malhas, a evolução do índice de esparsidade,  $\eta$ , das matrizes de rigidez globais, definido como o quociente entre o número de termos nulos da matriz e número de termos totais (Castro, 1996). Avaliar-se-ão ainda os tempos dos processos de montagem das matrizes de rigidez e dos vectores de forças elementares, a respectiva rotação do referencial local associado a cada um dos nós para o referencial global e o espalhamento na matriz global.

### 5.1 *Patch test*

Este é um teste utilizado para atestar a validade dos elementos finitos e da sua implementação no programa de cálculo automático. A ideia fundamental passa por aferir a capacidade dos elementos para reproduzir campos de momentos constantes, o que permite verificar a convergência dos elementos para a solução exacta, uma vez que à medida que se

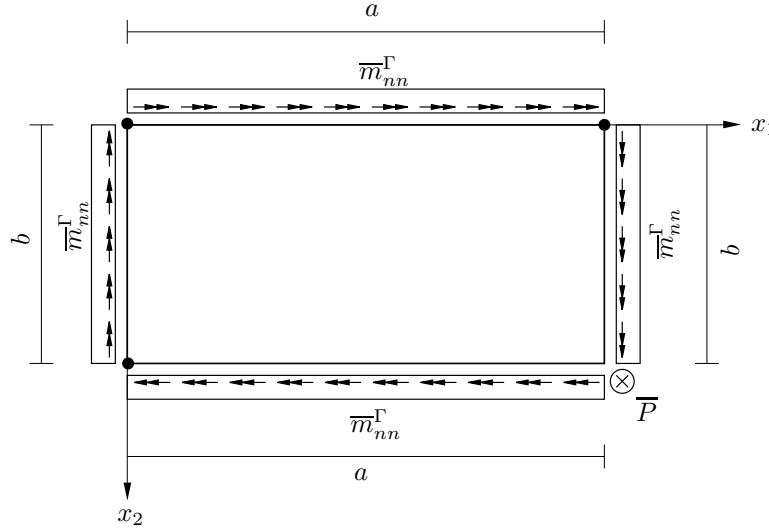


Figura 5.1: Esquema do *patch test*.

vão refinando progressivamente as malhas, as variações desses campos dentro dos elementos tenderão para valores constantes.

Existem algumas referências a este teste, *e.g.*, Robinson (1978) e à sua utilização, como em Batoz e Tahar (1982). Por forma a realizar as devidas verificações, recorreram-se aos dados geométricos e constantes físicas fornecidos nesta última referência. Para além disso, deduziu-se ainda a solução exacta para o campo de deslocamentos transversal, com o objectivo de compará-lo com os valores numéricos obtidos.

Considera-se uma laje rectangular de dimensão  $(a \times b)$ , apoiada pontualmente em três dos seus vértices e com o quarto vértice livre. Neste último aplica-se uma carga transversal,  $\bar{P}$ . Aplica-se ainda um momento normal distribuído ao longo dos bordos da laje,  $\bar{m}_{nn}^\Gamma$ . O problema a resolver é assim apresentado na figura 5.1 e a solução exacta é dada por

$$w(x_1, x_2) = -\frac{\bar{P} x_1 x_2}{2 D_f (1 - \nu)} - \frac{\bar{m}_{nn}^\Gamma (x_1^2 + x_2^2 - a x_1 - b x_2)}{2 D_f (1 + \nu)} \quad (5.1)$$

Além de comprovar o campo de momentos constantes, o problema passa também por determinar o deslocamento transversal do vértice livre, para  $a = 40$ ,  $b = 20$ ,  $\bar{P} = 2$ ,  $\bar{m}_{nn}^\Gamma = 1$ ,  $E = 1000$ ,  $h = 1$ , com duas situações distintas de  $\nu = 0,3$  e  $\nu = 0$ , e compará-lo com os valores fornecidos em Batoz e Tahar (1982) que valem  $w|_{\nu=0,3} = 12,48$  e  $w|_{\nu=0} = 9,60$ .

A malha utilizada para realizar o *patch test* no caso dos elementos triangulares de seis nós é apresentada na figura 5.2. Para os elementos triangulares de três nós, a malha resulta desta com a óbvia supressão dos nós a meio dos lados dos elementos.

Em todos os elementos se registaram deslocamentos do vértice livre coincidentes com os valores fornecidos pela expressão (5.1), para ambos os casos do coeficiente de Poisson. A título de exemplo, no apêndice D.1 são apresentados os resultados para os campos de momentos obtidos no *patch test* devidos à actuação de  $\bar{P} = 2$  e  $\bar{m}_{nn}^\Gamma = 0$  para o elemento T18 com  $\nu = 0$ . Neste pode observar-se a constância unitária do momento torsor e a ordem de grandeza diminuta dos momentos flectores (praticamente nulos).

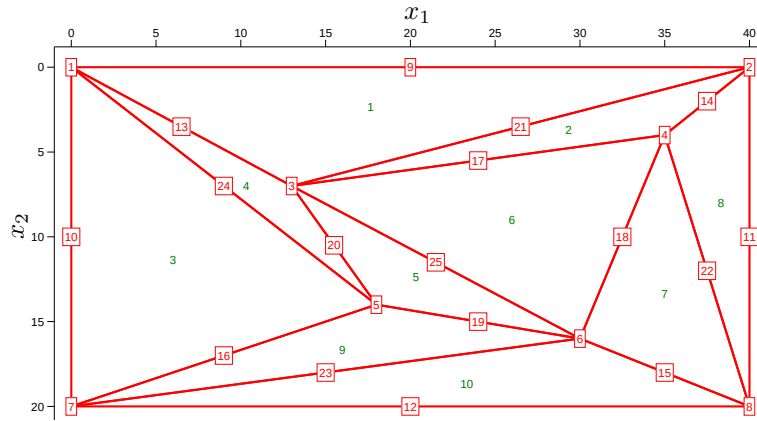


Figura 5.2: Malha para realização do *patch test* para os elementos de seis nós.

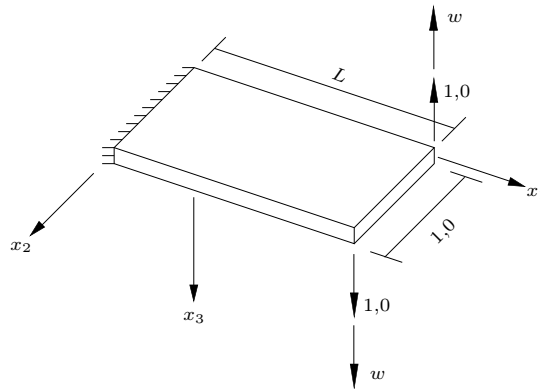


Figura 5.3: Esquema do teste de distorção.

## 5.2 Teste de Distorção

O teste de distorção tem por objectivo avaliar o comportamento dos elementos quando sujeitos a distorção. Para esse efeito recorre-se a uma laje rectangular de dimensão  $(1,0 \times L)$ , encastrada num dos bordos de menor dimensão. A malha é constituída apenas por dois elementos, no caso de elementos finitos triangulares como os avaliados na presente dissertação. O teste é efectuado aplicando um par de cargas unitárias, com a direcção do eixo  $x_3$ , de sentido contrário nos vértices da laje opostos ao bordo encastrado e registando o valor dos deslocamentos verticais,  $w$ , nesses vértices – ver figura 5.3. Inicia-se o processo com uma laje para  $L = 1,0$  e fazem-se incrementos unitários no seu comprimento até  $L = 12,0$ . Este teste é referenciado, por exemplo, em Batoz e Tahar (1982, página 1665), onde é efectuada uma análise a diversos elementos para as seguintes características da laje:  $E = 10^7$ ,  $\nu = 0,25$  e  $h = 0,05$ . A solução de referência, para os diferentes valores de  $L$ , foi obtida gerando doze malhas com elementos T21 cuja dimensão característica<sup>1</sup> é  $h = 0,25$ . Estas são simétricas em relação à recta  $x_2 = 0,5$ , centrada na laje e paralela ao eixo  $x_1$  – ver figura 5.4b.

<sup>1</sup>Doravante, a dimensão característica dos elementos será expressa pela letra  $h$ . Apesar da notação ser a mesma que a adoptada para a espessura da laje, o seu significado é facilmente aferido a partir do contexto em que se insere.

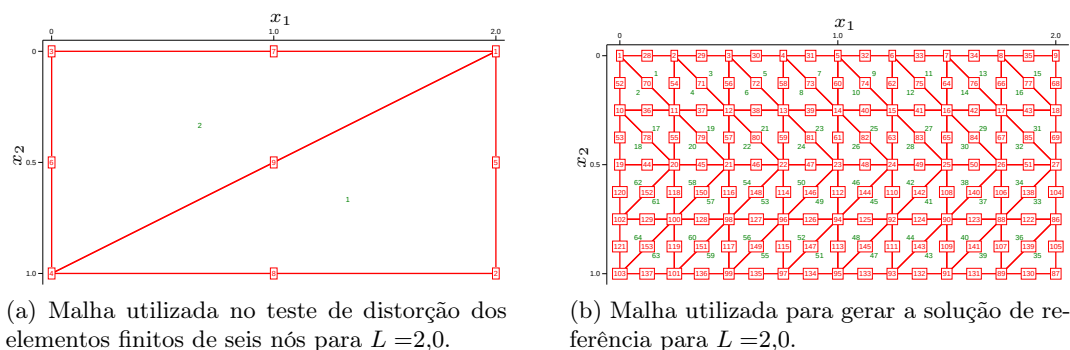


Figura 5.4: Malhas exemplificativas utilizadas no teste de distorção.

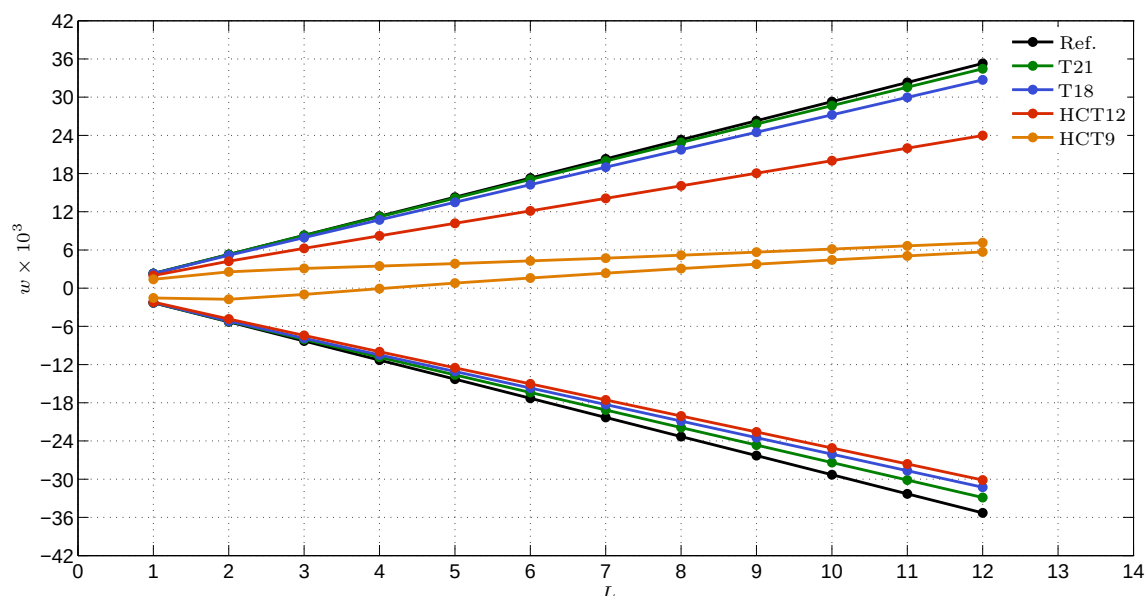


Figura 5.5: Desempenho dos vários elementos no teste de distorção.

Para os elementos finitos em estudo, os valores numéricos do deslocamento,  $w$ , em ambos os vértices livres de extremidade da laje e respectivos erros relativamente à solução de referência são apresentados no apêndice D.2. O mesmo deslocamento,  $w$ , registado em função do comprimento  $L$  é apresentado na figura 5.5, onde é possível observar, para os elementos T21 e T18, um andamento linear bastante próximo da solução de referência, o que se traduz na elevada qualidade destes elementos. Os erros máximos registados para estes elementos verificam-se para  $L = 12,0$  e assumem os valores 6,8% e 11,4% para os elementos T21 e T18, respectivamente. Já os elementos HCT12 e HCT9 apresentam um comportamento inferior aos anteriores. Por exemplo, para  $L = 2,0$  o elemento HCT12 apresenta um erro máximo no deslocamento, relativamente à solução de referência, igual a 20,1% enquanto que, na mesma situação, o correspondente valor fornecido pelo elemento HCT9 é igual a 67,2%.

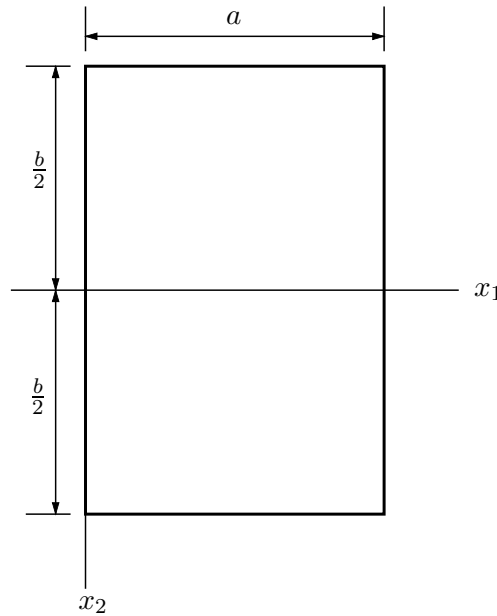


Figura 5.6: Laje rectangular de dimensão  $(a \times b)$  da solução de Timoshenko.

### 5.3 Laje Rectangular, Simplesmente Apoiada, Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída

Analisar-se-á nesta secção uma laje rectangular com dimensão  $(4 \times 2)$ , simplesmente apoiada no seu contorno. Por forma a reduzir o custo computacional e o tempo de processamento dos dados, recorrer-se-á a uma dupla simplificação de simetria, ficando-se assim com uma laje rectangular com dimensão  $(2 \times 1)$ , com encastramentos deslizantes sobre os eixos de simetria.

#### 5.3.1 Solução Exacta

Considere-se uma laje rectangular de dimensões  $(a \times b)$ , rigidez de flexão,  $D_f$ , coeficiente de Poisson,  $\nu$ , simplesmente apoiada em todo o seu contorno e sujeita a uma carga uniforme efectiva,  $\bar{p}_{ef}$ , tal como na figura 5.6.

A solução deste problema encontra-se descrita em numerosas referências, *e.g.*, Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959, capítulo 5, página 105). A (dupla) série de Navier ou a série (simples) de Lévy constituem resultados clássicos do problema apresentado. Ambos são baseados na expansão da solução em série de Fourier. No entanto, não estão disponíveis na bibliografia valores numéricos (i) para todas as grandezas pretendidas e/ou (ii) com o grau de precisão requerido para fazer as necessárias comparações com os resultados obtidos através da presente metodologia. Assim, a solução de Lévy foi implementada usando o *software* Mathematica (Wolfram Research, 2010). Esta solução é expressa através

de

$$w(x_1, x_2) = \frac{4\bar{p}_{ef} a^4}{\pi^5 D_f} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m x_2}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2x_2}{b} \sinh \frac{2\alpha_m x_2}{b} \right) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \quad (5.2)$$

onde

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (5.3)$$

Todas as restantes grandezas, como sejam,  $(-w_{,\alpha})$ ,  $\chi_{\alpha\beta}$ ,  $m_{\alpha\beta}$  e  $v_\alpha$ , podem ser determinadas directamente a partir desta expressão para o campo de deslocamento transversal,  $w(x_1, x_2)$ . A energia de deformação da laje pode ser obtida através de

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} D_f \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ (w_{,11} + w_{,22})^2 - 2(1-\nu)(w_{,11} w_{,22} - w_{,12}^2) \right] dx_2 dx_1 \quad (5.4) \end{aligned}$$

A avaliação numérica desta expressão através de regras de quadratura é ineficiente. Uma alternativa eficaz é tirar partido da relação entre a energia de deformação,  $U$ , e o potencial das forças exteriores,  $V$ . Assim,

$$U = \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w(x_1, x_2) \bar{p}_{ef} d\Omega \quad (5.5)$$

Foi esta a forma como se avaliou a energia. Constatou-se ainda que é possível avaliar as integrações presentes em (5.5) de forma explícita. O resultado obtido foi

$$U = \frac{a^5 b \bar{p}_{ef}^2}{\pi^6 D_f} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^6 \alpha_m} (-1 + \cos(m\pi)) (3 \tanh(\alpha_m) + (-3 + \tanh^2(\alpha_m)) \alpha_m) \quad (5.6)$$

Note-se que a série presente em (5.6) converge muito rapidamente devido à presença do termo  $m^6$  em denominador.

Os resultados são apresentados em formato adimensional, sendo válidos para  $\nu = 0,3$  e exclusivamente para a relação entre vãos  $\frac{b}{a} = 2$ , correspondente à laje rectangular. O valor máximo de  $m$  considerado na obtenção da solução – ver expressão (5.2) – é designado no que se segue por  $m_{\text{máx}}$ .

O deslocamento,  $w$ , e o momentos  $m_{11}$  máximos ocorrem no centro da laje. O valor máximo de  $m_{22}$  ocorre em dois pontos situados sobre a recta  $x_1 = \frac{a}{2}$  e dispostos simetricamente em relação à recta  $x_2 = 0$ . O valor mínimo do momento torsor,  $m_{12}$ , ocorre nos quatro cantos da laje. Os resultados adimensionalizados obtidos para estas grandezas, bem como para a energia de deformação,  $U$ , encontra-se na tabela 5.1.

O valor absoluto máximo do esforço transversal  $v_1$  ocorre nos pontos  $(0,0)$  e  $(a,0)$ , enquanto que o valor absoluto máximo do esforço transversal  $v_2$  ocorre nos pontos  $(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  e  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ . Os seus valores adimensionalizados encontra-se na tabela 5.2.

Os valores teóricos totais para as grandezas em estudo podem agora ser obtidos a partir dos valores adimensionalizados, bastando para isso definir a geometria da laje, as



| $w(\frac{a}{2}, 0) = \alpha \frac{\bar{p}_{ef} a^4}{D_f}$ |                     | $m_{11}(\frac{a}{2}, 0) = \beta \bar{p}_{ef} a^2$ |                    | $m_{22}(\frac{a}{2}, 0) = \gamma \bar{p}_{ef} a^2$ |                     | $m_{12}(0, -\frac{b}{2}) = \delta \bar{p}_{ef} a^2$ |                     | $U = \varpi \frac{\bar{p}_{ef}^2 a^6}{D_f}$ |                     |
|-----------------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------------------------|---------------------|-----------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------|---------------------|
| $m_{\text{máx}}$                                          | $\alpha \cdot 10^2$ | $m_{\text{máx}}$                                  | $\beta \cdot 10^1$ | $m_{\text{máx}}$                                   | $\gamma \cdot 10^2$ | $m_{\text{máx}}$                                    | $\delta \cdot 10^2$ | $m_{\text{máx}}$                            | $\varpi \cdot 10^3$ |
| 1                                                         | 1,017883471194      | 1                                                 | 1,05685910         | 1                                                  | 4,75544487          | 1                                                   | -4,39282            | 1                                           | 4,39394244758       |
| 5                                                         | 1,012927668351      | 10                                                | 1,01744119         | 10                                                 | 4,63686066          | 10                                                  | -4,61553            | 12                                          | 4,40410734618       |
| 10                                                        | 1,012872032806      | 50                                                | 1,01683600         | 50                                                 | 4,63504510          | 100                                                 | -4,62659            | 20                                          | 4,40411022161       |
| 20                                                        | 1,012866108534      | 100                                               | 1,01683021         | 100                                                | 4,63502772          | 500                                                 | -4,62670            | 32                                          | 4,40411044900       |
| 50                                                        | 1,012866307600      | 200                                               | 1,01683077         | 400                                                | 4,63502962          | 1000                                                | -4,62670            | 44                                          | 4,40411046838       |
| 100                                                       | 1,012866305455      | 400                                               | 1,01683084         | 600                                                | 4,63502964          | 5000                                                | -4,62671            | 52                                          | 4,40411047120       |
| 350                                                       | 1,012866305521      | 500                                               | 1,01683085         | 700                                                | 4,63502965          | 15000                                               | -4,62671            | 140                                         | 4,40411047336       |
| 430                                                       | 1,012866305521      | 3000                                              | 1,01683085         | 2000                                               | 4,63502965          | 120000                                              | -4,62671            | 160                                         | 4,40411047336       |

Tabela 5.1: Resultados obtidos para os valores adimensionalizados de  $w(\frac{a}{2}, 0)$ ,  $m_{11}(\frac{a}{2}, 0)$ ,  $m_{22}(\frac{a}{2}, 0)$ ,  $m_{12}(0, -\frac{b}{2})$  e  $U$  em laje rectangular ( $b = 2a$ ), simplesmente apoiada ( $\nu = 0,3$ ) sujeita a carga uniforme.

| $v_1(0,0) = \rho \bar{p}_{ef} a$ |                   | $v_2\left(-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right) = \varrho \bar{p}_{ef} a$ |                      |
|----------------------------------|-------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $m_{\text{máx}}$                 | $\rho \cdot 10^1$ | $m_{\text{máx}}$                                                     | $\varrho \cdot 10^1$ |
| 1                                | 3,7032214         | 1                                                                    | 4,0377386            |
| 10                               | 4,4483253         | 10                                                                   | 3,7168601            |
| 100                              | 4,6300378         | 100                                                                  | 3,6969574            |
| 1000                             | 4,6482749         | 1000                                                                 | 3,6971580            |
| 10000                            | 4,6500987         | 2500                                                                 | 3,6971597            |
| 4500000                          | 4,6503009         | 5000                                                                 | 3,6971599            |
| 140000000                        | 4,6503013         | 10000                                                                | 3,6971600            |
| 142300000                        | 4,6503013         | 20000                                                                | 3,6971600            |

Tabela 5.2: Resultados obtidos para os valores adimensionalizados de  $v_\alpha$  em laje rectangular ( $b = 2a$ ), simplesmente apoiada ( $\nu = 0,3$ ) sujeita a carga uniforme.

| $w_{\text{máx}} (\times 10^{-6})$ | $m_{11}^{\text{máx}} (\times 10^{-1})$ | $m_{22} (\times 10^{-1})$ | $m_{12}^{\text{mín}} (\times 10^{-1})$ | $U (\times 10^{-6})$ |
|-----------------------------------|----------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------|----------------------|
| 1,106050005629                    | 4,06732341                             | 1,85401186                | -1,85068                               | 1,92371545477        |

Tabela 5.3: Valores teóricos do deslocamento, momentos flectores, momento torsor e energia de deformação para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

| $v_1^{\text{máx}} (\times 10^{-1})$ | $v_2^{\text{máx}} (\times 10^{-1})$ |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 9,3006027                           | 7,3943201                           |

Tabela 5.4: Valores teóricos dos esforços transversos para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

constantes físicas e o valor do carregamento. Assim, considera-se a espessura da laje,  $h = 0,20$  e o módulo de elasticidade,  $E = 2 \times 10^8$ . O coeficiente de Poisson é o mesmo que fora usado na obtenção dos valores adimensionalizados,  $\nu = 0,3$ . Considera-se ainda um carregamento efectivo uniformemente distribuído no plano médio da laje,  $\bar{p}_{ef} = 1,0$ .

Para a laje rectangular ( $2 \times 4$ ) com estas características, orientada segundo o sistema de eixos definido na figura 5.6, os valores teóricos apresentam-se nas tabelas 5.3 e 5.4.

### 5.3.2 Solução Numérica

Por forma a avaliar a solução aproximada para esta estrutura é necessário comparar os valores numéricos obtidos a partir dos elementos em estudo – que se apresentam no apêndice D.3.1 – com os valores exactos. Para o efeito testaram-se algumas malhas de elementos finitos, tendo-se chegado à conclusão que as grandezas em análise, para os ele-

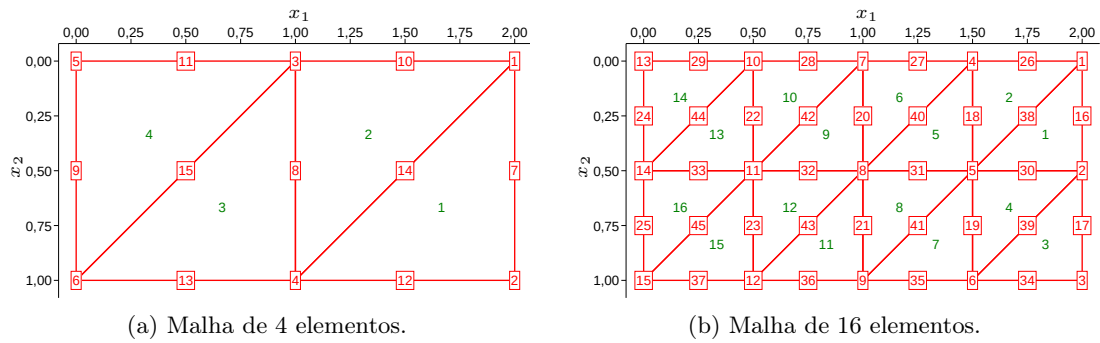


Figura 5.7: Exemplos de malhas usadas na análise da laje rectangular simplesmente apoiada, com recurso a uma dupla simplificação de simetria ao longo dos bordos  $x_1 = 2,0$  e  $x_2 = 1,0$ .

| Nó | $w$ | $-w_{,1}$ | $-w_{,2}$ | $-w_{,11}$ | $-w_{,12}$ | $-w_{,22}$ |
|----|-----|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| 1  | ✓   | ✓         |           | ✓          | ✓          |            |
| 2  |     | ✓         | ✓         |            | ✓          |            |
| 3  | ✓   | ✓         |           | ✓          |            |            |
| 4  |     |           | ✓         |            | ✓          |            |
| 5  | ✓   | ✓         | ✓         | ✓          |            | ✓          |
| 6  | ✓   |           | ✓         |            | ✓          | ✓          |

(a) Nós com seis graus de liberdade.

| Nó                   | $w_{,n}$ |
|----------------------|----------|
| 7, 12, 13            | ✓        |
| 8, 9, 10, 11, 14, 15 |          |

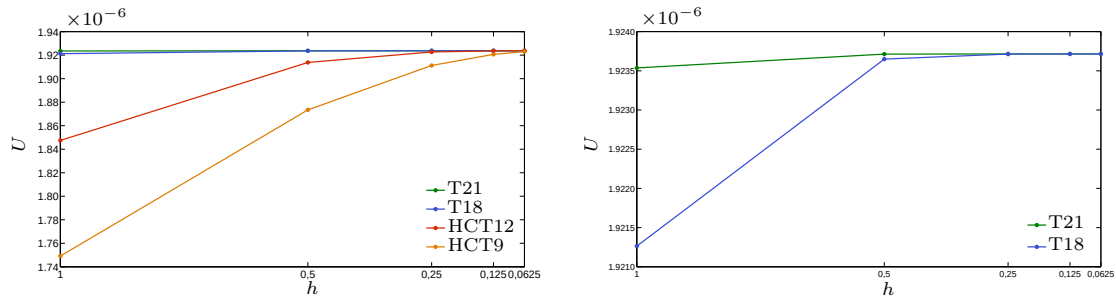
(b) Nós com um grau de liberdade.

Tabela 5.5: Graus de liberdade restringidos na análise da laje através do elemento T21 e usando a malha indicada na figura 5.7a.

mentos de melhor qualidade, apresentavam já um erro bastante reduzido com uma malha de 1024 elementos, resultante de quatro refinamentos a partir de uma malha inicial de 4 elementos. Foi possível aferir também a partir dos valores da energia de deformação, que não era viável efectuar mais refinamentos uma vez que os respectivos erros dos elementos T21 e T18, associados à malha mais refinada, eram já bastante próximos da ordem de grandeza da precisão da máquina, originando erros numéricos que produziam flutuações indesejáveis nos resultados. A título exemplificativo, apresentam-se duas das malhas testadas para os elementos de seis nós na figura 5.7, onde, por simplicidade de representação, não se apresentam as malhas mais refinadas, cuja obtenção pode ser facilmente extrapolada por análise daquelas. As malhas para os elementos sem nós a meio das arestas são em tudo análogos, havendo apenas a sua óbvia supressão.

A imposição das condições de fronteira cinemáticas conduz à eliminação de determinados graus de liberdade. A título de exemplo, para o elemento T21, e para a malha indicada na figura 5.7a, os graus de liberdade restringidos são discriminados na tabela 5.5. Para os restantes elementos, basta eliminar os graus de liberdade que não fazem parte da sua formulação.

A convergência da energia de deformação apresentada pelos quatro elementos em função da dimensão característica dos elementos,  $h$ , é apresentada na figura 5.8a. Usando a mesma escala para todos os elementos, visualmente não é possível compreender o modo como



(a) Convergência em todos os elementos analisados. (b) Convergência nos elementos T21 e T18 apenas.

Figura 5.8: Convergência da energia de deformação,  $U$ , dos diversos elementos, no caso da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

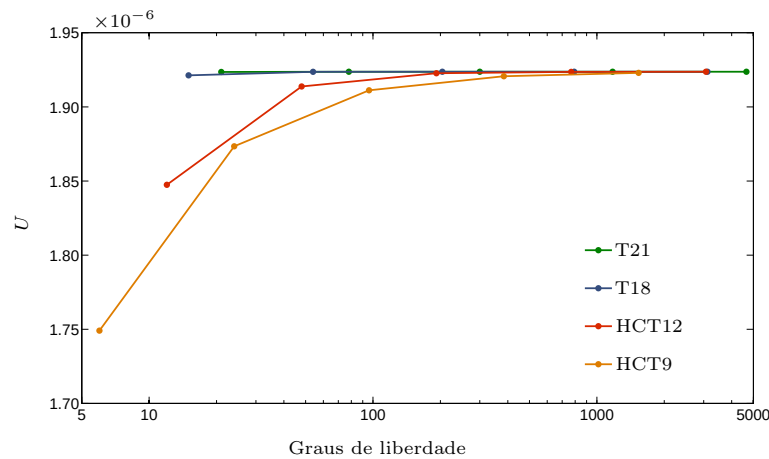


Figura 5.9: Convergência da energia de deformação,  $U$ , dos diversos elementos, em função do número de graus de liberdade, no caso da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

convergem os elementos T21 e T18, pelo que os seus resultados surgem separadamente na figura 5.8b.

Tendo em consideração que o número de graus de liberdade por nó é variável entre os vários elementos, é importante aferir a convergência da energia de deformação apresentada pelos quatro elementos em função do número de graus de liberdade (livres) do modelo. Este gráfico é apresentado na figura 5.9.

O erro associado à energia de deformação em função da dimensão característica do elemento,  $h$ , pode ser observada na figura 5.10. Observa-se que estes formam aproximadamente uma recta, cujo respectivo declive corresponde à taxa de convergência da energia de deformação dos elementos. É possível notar claramente que os resultados obtidos com a malha mais refinada dos elementos T21 e T18 começam a desviar-se da tendência recta, pelos motivos supracitados no início desta subsecção. Deste modo, opta-se por os excluir do cálculo da taxa de convergência uma vez que já apresentam erros numéricos.

Teoricamente, a taxa de convergência do elemento T21 na ausência de singularidades, pode ser obtida por recurso à expressão dada por (Bathe, 1996, página 248),

$$2(p + 1 - m) = 2(5 + 1 - 2) = 8 \quad (5.7)$$

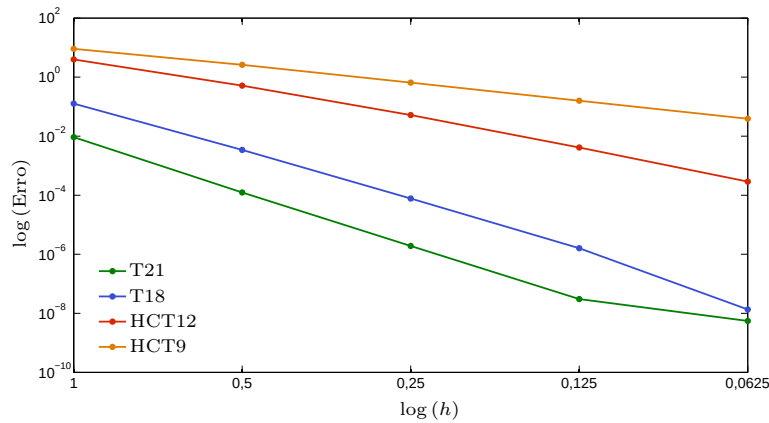


Figura 5.10: Erro da energia de deformação em função da dimensão característica dos elementos,  $h$ , para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

| T21 | T18 | HCT12 | HCT9 |
|-----|-----|-------|------|
| 6,1 | 5,4 | 3,4   | 2,0  |

Tabela 5.6: Taxa de convergência dos diferentes elementos para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

onde  $p$  representa o máximo grau do polinómio completo da aproximação e  $m$  o grau do operador diferencial generalizado.

Para o caso do elemento T18, pode mostrar-se (Cowper *et al.*, 1969, página 1960) que a taxa de convergência pode ser obtida por recurso à mesma expressão, mas devido às três restrições impostas o grau de polinómio a considerar será  $p = 4$ , o que implica uma taxa de convergência proporcional  $h^6$ .

Na tabela 5.6 apresenta-se a taxa de convergência da energia de deformação obtida para cada elemento. Da sua análise conclui-se que o T21 é aquele que melhor comportamento apresenta, apesar de ser inferior à prevista teoricamente.

Apresenta-se na figura 5.11 a deformada da estrutura para o elemento T21 no caso da malha menos refinada. Opta-se por omitir a deformada dos restantes elementos uma vez que a sua observação permite constatar que não existem diferenças visíveis, concluindo-se que mesmo as malhas de apenas 4 elementos produzem uma boa aproximação desta grandeza sem ser necessário recorrer a refinamentos elevados.

Na figura 5.12 pode observar-se a convergência do deslocamento no centro da laje. Opta-se por representar dois gráficos uma vez que a figura 5.12a não permite ter uma completa noção da convergência dos elementos T21 e T18 dado que os deslocamentos registados dos elementos HCT, nas malhas menos refinadas, são francamente inferiores aos registados naqueles elementos.

Relativamente ao momento flector,  $m_{11}$ , constata-se que à medida que se vai refinando progressivamente a malha para um mesmo elemento, as diferenças vão sendo atenuadas, observando-se algumas discontinuidades entre elementos, nas malhas menos refinadas. No caso dos elementos HCT, estas diferenças são substancialmente mais acentuadas e esta

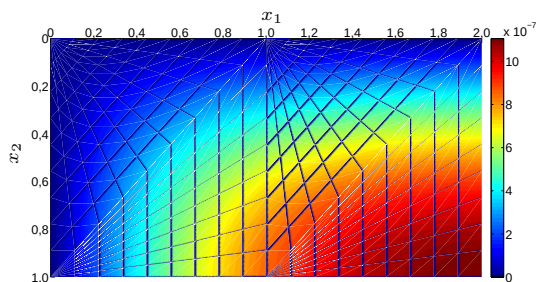
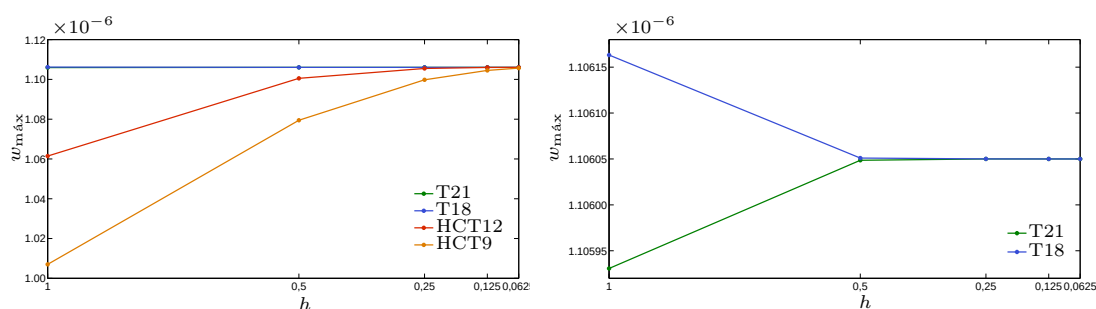


Figura 5.11: Deformada da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para o elemento T21, recorrendo à malha menos refinada.



(a) Convergência em todos os elementos analisados. (b) Convergência nos elementos T21 e T18 apenas.

Figura 5.12: Convergência do deslocamento máximo,  $w_{\max}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

observação pode ser ainda extendida ao nível subelementar. A título exemplificativo, apresentam-se na figura 5.13 estes diagramas para a malha de 4 elementos dos quatro casos em estudo onde se observa a reduzida qualidade dos elementos HCT comparativamente aos restantes, o que faz antever que necessitarão de mais refinamento para convergirem para a solução exacta. A figura 5.13a apresenta já alguma qualidade permitindo prever com facilidade a forma final do diagrama. Será de referir também que este esforço não apresenta o seu valor máximo no centro da laje devido ao efeito bidimensional da estrutura. Tal apenas se verificaria se a geometria da laje fosse quadrada. Este resultado pode ser retirado visualmente por intermédio de uma observação mais atenta da figura 5.13a onde será espectável que o valor máximo se registre para valores de  $x_1$  ligeiramente inferiores a 2,0 e  $x_2 = 1,0$ .

A convergência do momento flector  $m_{11}$  pode ser observada na figura 5.14. Mais uma vez, os valores apresentados pelos elementos HCT para as malhas menos refinadas são bastante díspares daqueles apresentados pelos elementos T21 e T18, o que torna a percepção de convergência destes pouco clara. Assim, na figura 5.14b é possível observar a convergência destes dois elementos em separado. Note-se que, apesar do valor máximo do esforço não se registar no ponto central da laje, optou-se por apresentar a convergência neste ponto para que a comparação dos diversos elementos se referisse a um mesmo local e não a esforços em pontos diferentes consoante o refinamento das malhas.

Os resultados referentes ao momento flector  $m_{22}$  são semelhantes aos anteriores. Os diagramas respeitantes à malha menos refinada, para os diferentes elementos, estão representados na figura 5.15. Nesta é possível observar, mais uma vez, a qualidade superior

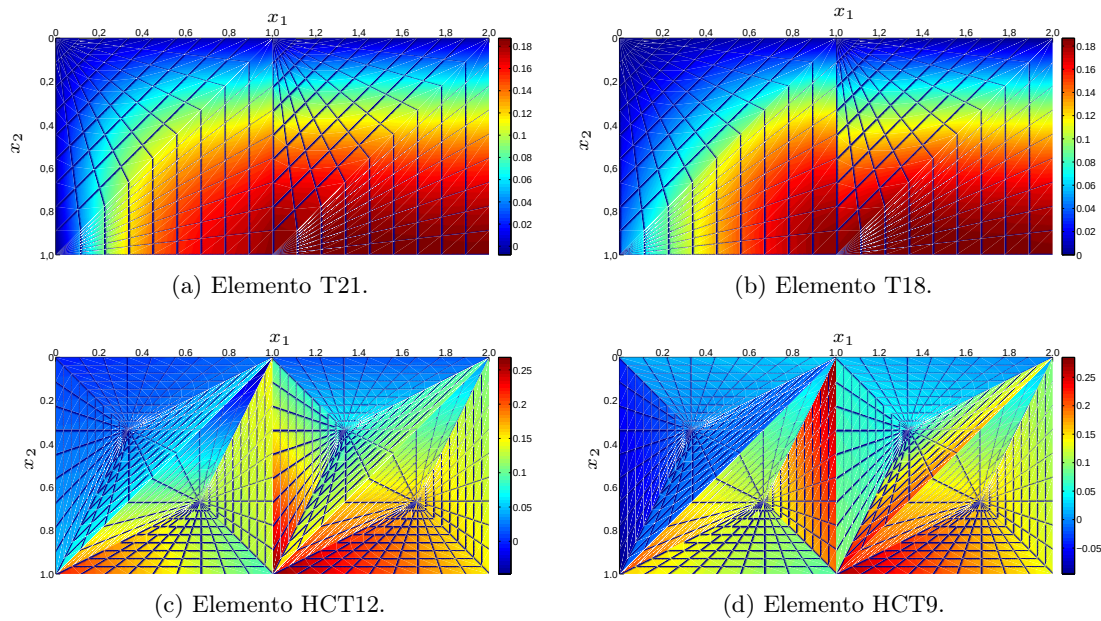


Figura 5.13: Momento flector  $m_{11}$  da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes elementos, recorrendo à malha de 4 elementos.

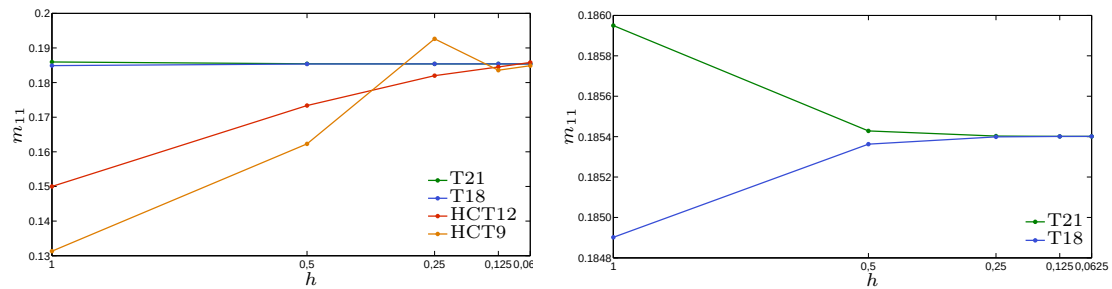


Figura 5.14: Convergência do momento flector,  $m_{11}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme para os diferentes elementos.

dos elementos T21 e T18, de onde é possível extrapolar a forma final do diagrama. A convergência do valor máximo deste esforço no centro da laje apresenta-se na figura 5.16.

Relativamente aos momentos torsores, a análise a efectuar é idêntica à dos momentos flectores. A sua representação é fornecida na figura 5.17 e a convergência dos valores mínimos para os diferentes elementos pode ser retirada da figura 5.18.

No caso dos diagramas de esforço transversal observam-se já diferenças relevantes das malhas menos refinadas para as malhas mais refinadas. Pode verificar-se que as malhas de 4 elementos apresentam algumas discontinuidades, mesmo nos elementos que se têm revelado de melhor qualidade. Nas malhas mais refinadas, estes elementos apresentam já variações subtis, de difícil visualização, enquanto que nos elementos HCT é perceptível a constância destes esforços a nível de cada subelemento. Devido ao elevado número de diagramas de esforço transversal, é incomportável a sua representação na totalidade pelo que se mostram, a título exemplificativo, os diagramas para as malhas menos e mais refinadas,



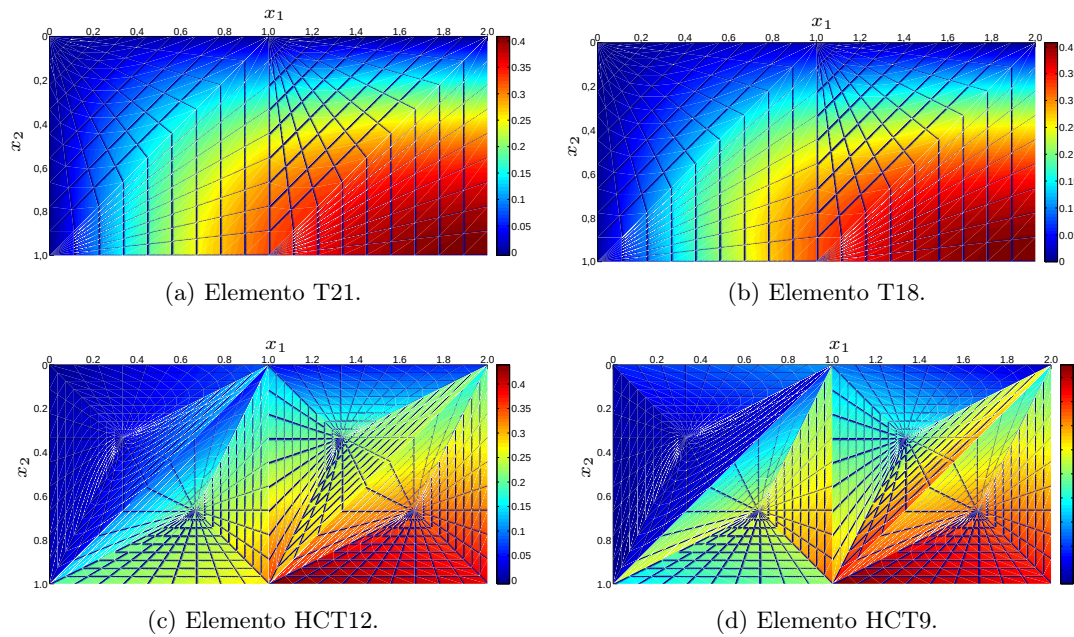
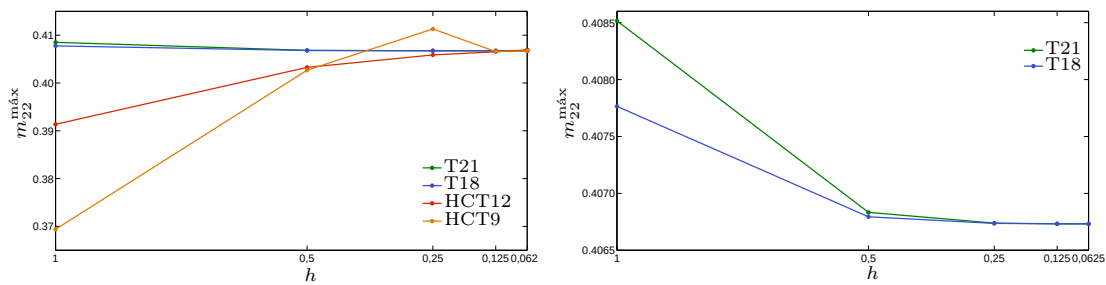


Figura 5.15: Momento flector  $m_{22}$  da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes elementos, recorrendo à malha de 4 elementos.



(a) Convergência em todos os elementos analisados. (b) Convergência nos elementos T21 e T18 apenas.

Figura 5.16: Convergência do momento flector máximo,  $m_{22}^{\max}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme para os diferentes elementos.

para os diferentes elementos em análise. Para o esforço transversal  $v_1$  os diagramas estão presentes na figura 5.19. Para o esforço transversal  $v_2$  a análise é semelhante pelo que se omite a sua representação.

Pode também aferir-se a convergência dos esforços transversos por observação da figura 5.20, onde novamente se constata a melhor qualidade dos elementos T21 e T18 que convergem mais rapidamente para a solução exacta. No sentido oposto estão os elementos HCT, com especial ênfase na convergência do esforço transversal  $v_2$  apresentada pelo elemento HCT9.

### 5.3.3 Imposição Exacta de Condições de Fronteira Estáticas

Na fase inicial do desenvolvimento deste projecto surgiram algumas dúvidas relativas às condições de fronteira a impor nos bordos da laje. Para lhes dar resposta testaram-se



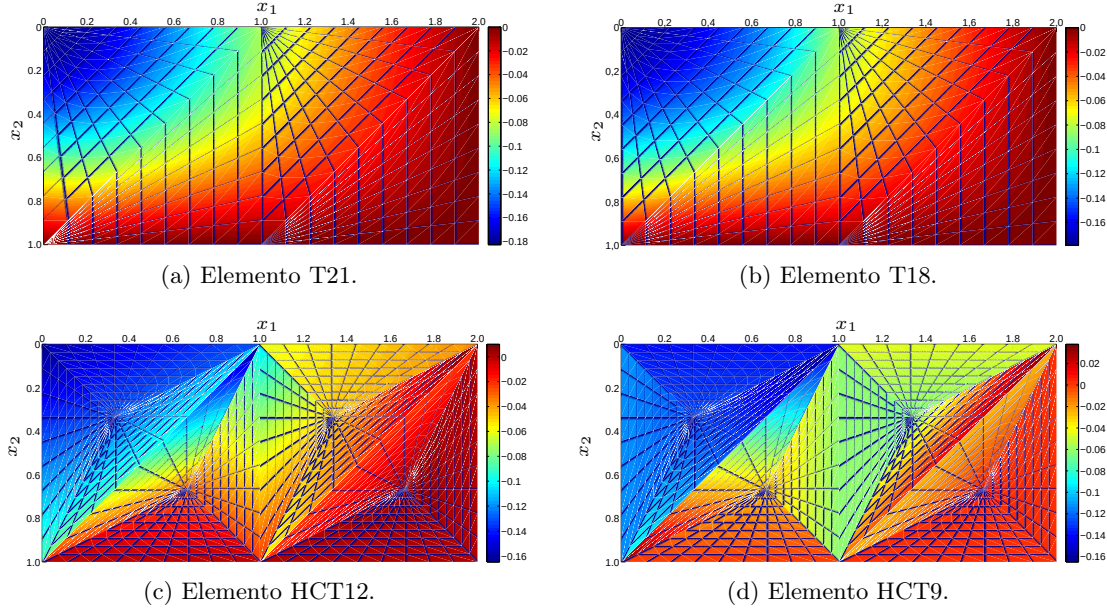


Figura 5.17: Momento torsor  $m_{12}$  da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes elementos, recorrendo à malha menos refinada.

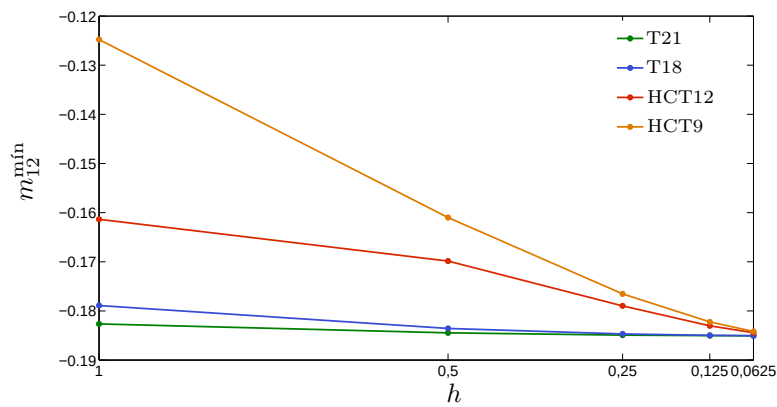
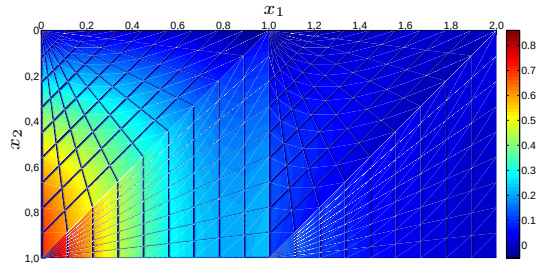
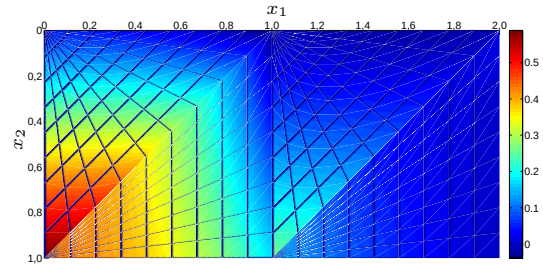


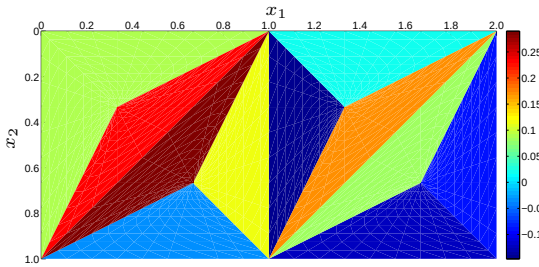
Figura 5.18: Convergência do momento torsor mínimo,  $m_{12}^{\min}$ , no canto da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme para os diferentes elementos.



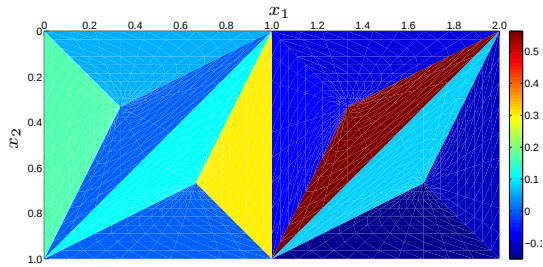
(a) Malha de 4 elementos do T21.



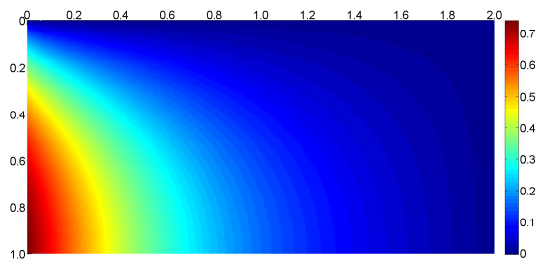
(b) Malha de 4 elementos do T18.



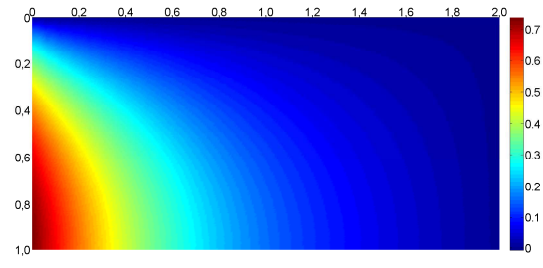
(c) Malha de 4 elementos do HCT12.



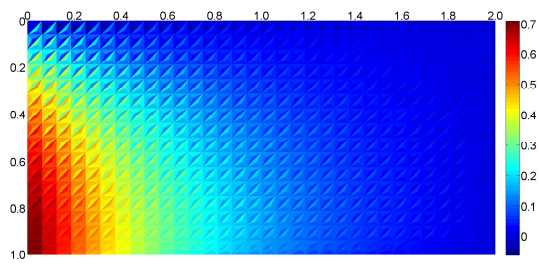
(d) Malha de 4 elementos do HCT9.



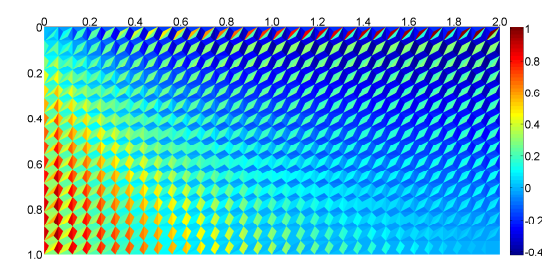
(e) Malha de 1024 elementos do T21.



(f) Malha de 1024 elementos do T18.



(g) Malha de 1024 elementos do HCT12.



(h) Malha de 1024 elementos do HCT9.

Figura 5.19: Esforço transversal  $v_1$  da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme, para os diferentes elementos, recorrendo às malhas menos e mais refinadas.

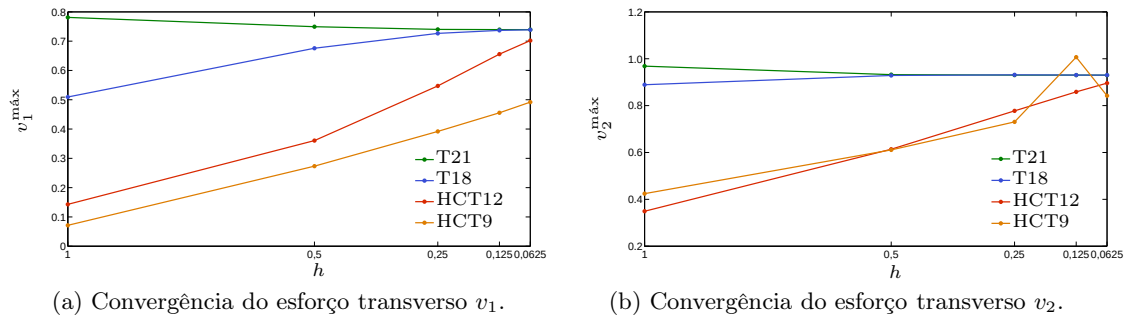


Figura 5.20: Convergência dos esforços transversos máximos da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme para os diferentes elementos.

dois exemplos distintos de condições de fronteira, nomeadamente, aquele usado até aqui e um outro que se descreve sucintamente de seguida.

Considere-se um bordo recto simplesmente apoiado, com condições de fronteira homogêneas e segundo uma determinada direcção. Sabe-se que a componente da curvatura  $\chi_{tt}$  terá de ser nula – sendo esta uma imposição necessária para satisfazer a condição de fronteira cinemática  $w = 0$  – e, adicionalmente, que o momento flector  $m_{nn}$  também – condição de fronteira estática. Não considerando o efeito da variação diferencial de temperatura, a relação constitutiva expressa por (2.59), página 17, conduz a

$$m_{nn} = 0 \Leftrightarrow D_f (\nu \chi_{tt} + \chi_{nn}) = 0 \Leftrightarrow \chi_{nn} = 0 \quad (5.8)$$

Ou seja, num bordo simplesmente apoiado, se se impuserem as duas curvaturas,  $\chi_{tt}$  e  $\chi_{nn}$ , nulas, está-se a garantir que o momento  $m_{nn}$  é também nulo, como seria expectável.

Assim, poder-se-ia pensar que estas condições de fronteira deveriam ser as usadas em detrimento do exposto até aqui, por se impor não só condições de fronteira cinemáticas, mas também condições de fronteira estáticas. A experiência revelou, no entanto, que a energia de deformação obtida neste caso converge para a solução exacta por valores inferiores àqueles obtidos com as condições de fronteira usadas anteriormente.

Para o provar, testou-se a laje rectangular simplesmente apoiada desta secção tendo-se obtido as convergências da energia de deformação para os elementos T21 e T18 – os únicos onde é possível restringir curvaturas – que se apresentam na figura 5.21.

Note-se que ao impor também as condições de fronteira estáticas se está – implicitamente – a restringir o espaço das soluções, pelo que a qualidade da solução obtida nesse caso é globalmente inferior à qualidade da solução onde tais limitações não são consideradas.

#### 5.3.4 Esparsidade das Matrizes de Rigidez Globais

A esparsidade de uma matriz fornece uma indicação do número de entradas nulas, comparativamente ao número total. Assim, numa matriz muito esparsa, o número de entradas não nulas tende, no limite, para zero. Este aspecto pode ser explorado na resolução do sistema global, construindo algoritmos que garantam um bom desempenho do processo de cálculo (Castro, 1996). Para este efeito, dever-se-á (i) armazenar apenas os termos não nulos das matrizes; (ii) efectuar operações abrangendo apenas estes termos não nulos, evitando cálculos redundantes envolvendo os termos nulos; (iii) tentar preservar a esparsidade das matrizes ao longo do processo de cálculo.

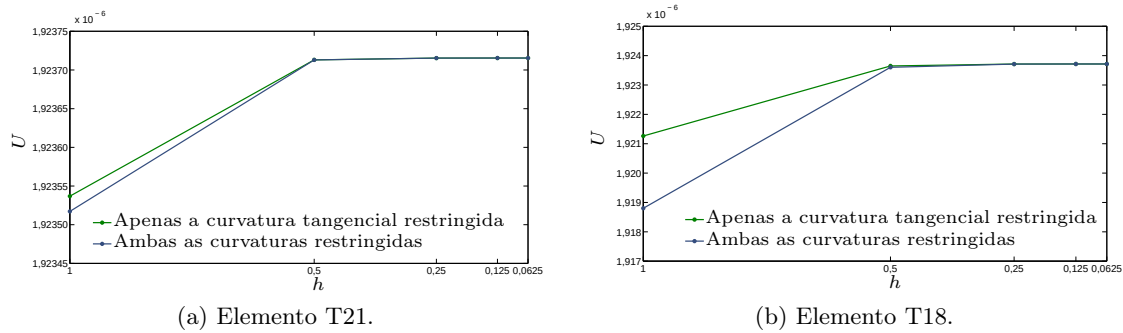


Figura 5.21: Comparação da convergência da energia de deformação apresentada pelos elementos T21 e T18, na laje rectangular simplesmente apoiada, no caso em que se restringe apenas a curvatura tangencial ou no caso em que se restringem ambas as curvaturas.

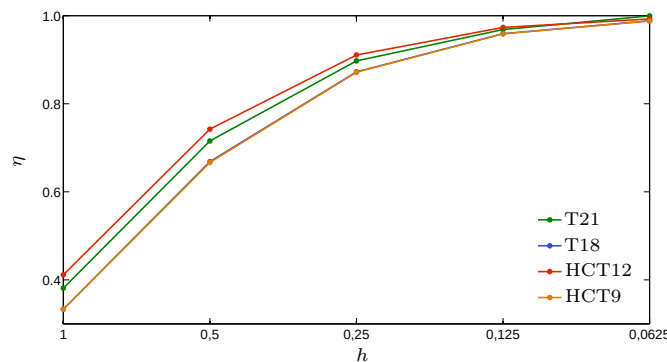


Figura 5.22: Índice de esparsidade das várias malhas dos quatro elementos em estudo para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

Na figura 5.22 é fornecido o andamento do índice de esparsidade,  $\eta$ , em função da dimensão característica dos elementos,  $h$ , para os vários elementos em estudo. É possível atestar que à medida que se vai refinando a malha, o número de termos nulos das matrizes de rigidez tende para o número total de entradas desta matriz. Note-se que as curvas dos elementos de três nós são muito semelhantes entre si, praticamente se sobrepondo.

A título exemplificativo, na figura 5.23, é possível uma visualização mais imediata das entradas não nulas – pontos – e nulas – espaço em branco, para as matrizes de rigidez da laje rectangular, no caso da malha com  $h = 0,125$ . Pode constatar-se, por exemplo, que os elementos T18 e HCT9 possuem entradas não nulas apenas na diagonal principal e na sua proximidade. É de salientar também que as matrizes de rigidez dos elementos de seis nós apresentam sensivelmente a mesma forma.

A grande vantagem a retirar da esparsidade das matrizes passa pela redução do custo computacional, através de um adequado armazenamento. Na figura 5.24 apresentam-se os tempos, por elemento, dispendidos pelo programa de cálculo a formar a matriz de rigidez, o vector de forças, a efectuar a rotação dos eixos para o referencial local e a efectuar o seu espalhamento. Apresentam-se os resultados para todas as malhas desde os 4 aos 1024 elementos.

Reunindo toda a informação relativa à convergência dos diversos elementos poder-se-á concluir que, obviamente, para se obterem soluções mais precisas ter-se-á que recorrer a

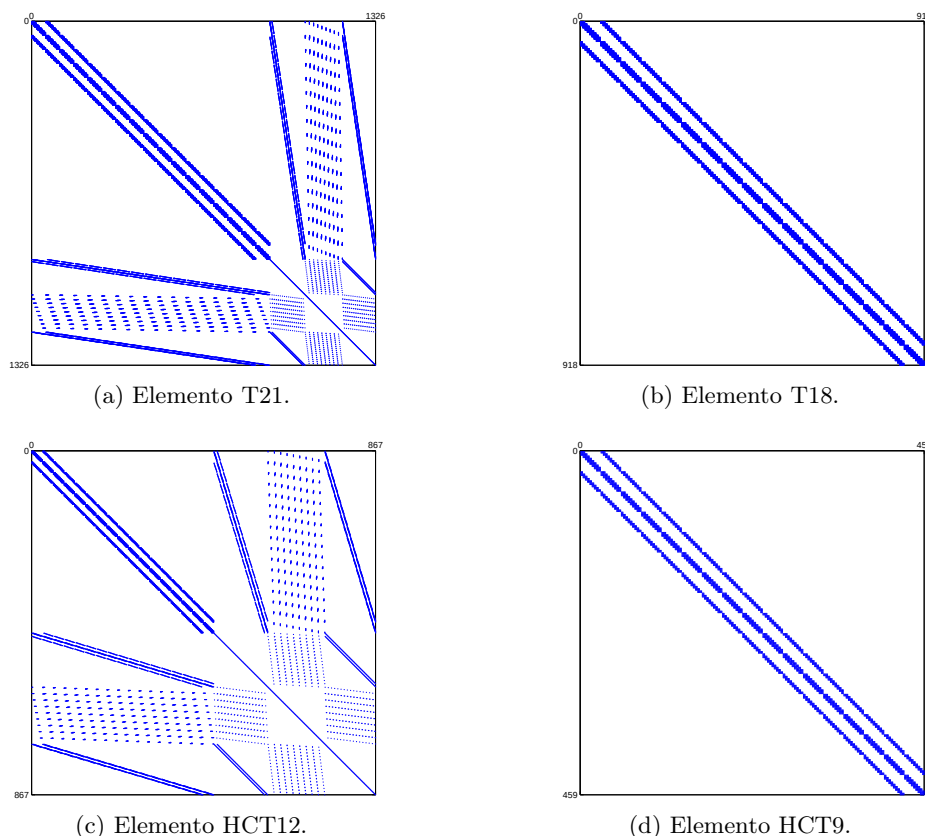


Figura 5.23: Comparação das entradas nulas e não nulas das matrizes de rigidez, apresentada pelos vários elementos, para a malha com  $h = 0,125$ , na laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

malhas já com algum grau de refinamento. Se se juntar a informação relativa aos tempos de processamento conclui-se que o elemento T18 será, porventura, aquele que melhor relação qualidade/custo computacional apresenta. O elemento T21 converge mais rapidamente para a solução exacta, mas o elevado número de graus de liberdade – devido aos nós a meio dos lados – faz com que o processo de cálculo se torne algo moroso, com especial ênfase na malha mais refinada – ver na figura 5.25 o significativo aumento do número total de nós da estrutura dos elementos com graus de liberdade a meio dos lados. No sentido inverso, os elementos HCT, apesar de tornarem o processo de cálculo mais rápido, têm a pesada desvantagem de produzirem resultados mais afastados da solução exacta, mesmo em malhas que apresentam já algum grau de refinamento. Verificou-se ainda que estes elementos originam, para modelos com o mesmo número de graus de liberdade (livres), soluções de inferior qualidade comparativamente aos elementos T21 e T18.

## 5.4 Laje Rectangular, Simplesmente Apoiada, Sujeita a Variação de Temperatura

Com o intuito de aprofundar um pouco mais a aplicação destes elementos a esta estrutura e de melhor verificar a sua implementação, analisar-se-á a mesma laje rectangular, com as mesmas condições de fronteira, mas sujeita a um carregamento envolvendo apenas

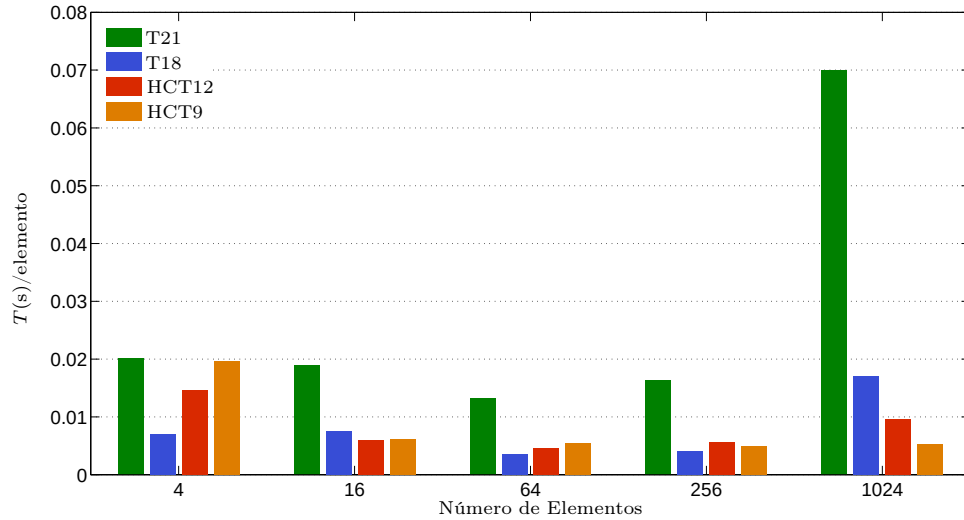


Figura 5.24: Tempo de cálculo dispendido pelo programa, por elemento, na formação das matrizes de rigidez, dos vectores de forças, na rotação destes para o referencial local e seu espalhamento, para as várias malhas dos quatro elementos em estudo, para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

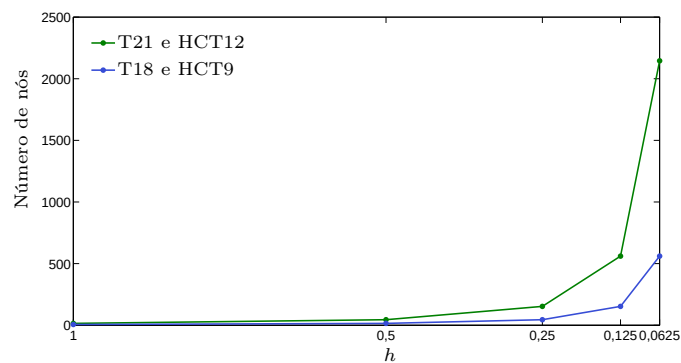


Figura 5.25: Número total de nós da estrutura nos vários elementos para as diferentes dimensões características,  $h$ , para a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga efectiva uniforme.

uma variação de temperatura linear na espessura da laje.

Como já fora visto, o número de nós que constitui cada elemento permite definir o grau máximo da solicitação no espaço bidimensional. Os elementos de seis nós permitem solicitações, no máximo, quadráticas, enquanto que os elementos de três nós permitem solicitações, no máximo, lineares. Por forma a se compararem os quatro elementos em estudo e a facilitar a obtenção de resultados, a solicitação considerada será uma variação de temperatura constante no plano médio da laje.

#### 5.4.1 Solução Exacta

Far-se-ão neste exemplo comparações relativas apenas ao deslocamento no centro da laje e aos momentos flectores. Relativamente a estes últimos, analisar-se-ão os seus valores no centro da laje e num ponto sobre os bordos apoiados. A solução exacta deste problema pode ser obtida, por exemplo, em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959, página 162), onde são fornecidas as soluções em série de Lévy.

É também possível deduzir facilmente uma expressão analítica a fim de obter o valor constante dos momentos flectores tangenciais ao longo dos bordos simplesmente apoiados. Ao respeitar a condição de fronteira relativa à curvatura tangencial nula,  $\chi_{tt} = 0$  e sabendo que o momento flector normal será também nulo, ter-se-á

$$m_{nn} = 0 \Leftrightarrow D_f (\nu \chi_{tt} + \chi_{nn}) - \frac{E \alpha h^2 \Delta T}{12(1-\nu)} = 0 \Leftrightarrow \chi_{nn} = \frac{\alpha \Delta T}{h} (1 + \nu) \quad (5.9)$$

Logo

$$m_{tt} = D_f (\chi_{tt} + \nu \chi_{nn}) - \frac{E \alpha h^2 \Delta T}{12(1-\nu)} = -\frac{E \alpha \Delta T h^2}{12} \quad (5.10)$$

Os valores exactos para as grandezas avaliadas no centro da laje, em formato adimensional, apresentam-se na tabela 5.7. Mais uma vez, a série em questão converge rapidamente para os valores pretendidos.

A partir destes, obtêm-se os valores exactos das grandezas avaliadas no centro da laje e o valor constante do momento flector tangencial sobre os bordos, dado pela expressão (5.10), que se apresentam na tabela 5.8. Para tal foi necessário definir a geometria da laje, as constantes físicas e a solicitação. Estes parâmetros não sofreram qualquer alteração relativamente ao exemplo numérico anterior, com a excepção da solicitação. Assim, para a laje rectangular ( $4 \times 2$ ) orientada segundo o sistema de eixos definido na figura 5.6, considera-se a espessura da laje,  $h = 0,20$ , o módulo de elasticidade,  $E = 2 \times 10^8$ , e o coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,3$ . Considera-se também a variação de temperatura,  $\Delta T = 20$ .

#### 5.4.2 Solução Numérica

Mais uma vez, comparar-se-ão os resultados numéricos obtidos com os resultados exactos. Os valores são remetidos para o apêndice D.3.2.

Na figura 5.26 apresentam-se a deformada da estrutura e os diagramas de momentos flectores para o elemento T21 no caso da malha mais refinada. É possível constatar que estes são de elevada qualidade, comprovando a correcta formulação e implementação deste elemento. Para o elemento T18 os resultados são semelhantes e as diferenças mais significativas registam-se nos elementos HCT como se constatará de seguida.

Na figura 5.27 pode observar-se a convergência do deslocamento no centro da laje. Os resultados seguem a mesma tendência observada para a mesma estrutura na situação de



| $w\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \alpha \frac{a^2 \alpha \Delta T}{h}$ |                     | $m_{11}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \beta \frac{D_f \alpha \Delta T}{h}$ |                    | $m_{22}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \gamma \frac{D_f \alpha \Delta T}{h}$ |                   |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $m_{\text{máx}}$                                                      | $\alpha \cdot 10^1$ | $m_{\text{máx}}$                                                          | $\beta \cdot 10^2$ | $m_{\text{máx}}$                                                           | $\gamma \cdot 10$ |
| 3                                                                     | 1,470299545906      | 1                                                                         | 9,99216500354799   | 1                                                                          | 8,10078349964520  |
| 500                                                                   | 1,480333810946      | 5                                                                         | 9,98905175134429   | 5                                                                          | 8,10109482486557  |
| 600                                                                   | 1,480333813773      | 10                                                                        | 9,98905174669285   | 10                                                                         | 8,10109482533071  |
| 1000                                                                  | 1,480333816816      | 50                                                                        | 9,98905174669284   | 50                                                                         | 8,10109482533072  |
| 5000                                                                  | 1,480333817648      | 100                                                                       | 9,98905174669284   | 100                                                                        | 8,10109482533072  |
| 10000                                                                 | 1,480333817654      | -                                                                         | -                  | -                                                                          | -                 |
| 15000                                                                 | 1,480333817654      | -                                                                         | -                  | -                                                                          | -                 |
| 20000                                                                 | 1,480333817654      | -                                                                         | -                  | -                                                                          | -                 |

Tabela 5.7: Resultados obtidos para os valores adimensionalizados de  $w$ ,  $m_{11}$  e  $m_{22}$  em laje rectangular ( $b = 2a$ ), simplesmente apoiada,  $\nu = 0,3$ , sujeita a uma variação de temperatura diferencial constante.

| $w\left(\frac{a}{2}, 0\right) (\times 10^{-4})$ | $m_{11}\left(\frac{a}{2}, 0\right) (\times 10^2)$ | $m_{22}\left(\frac{a}{2}, 0\right) (\times 10^2)$ | $m_{tt}(\text{bordo}) (\times 10^2)$ |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 5,921335270618                                  | -1,186973601                                      | -1,463597326                                      | -1,3333333333                        |

Tabela 5.8: Valores exactos de  $w$ ,  $m_{11}$  e  $m_{22}$  no centro da laje e de  $m_{tt}$  sobre os bordos apoiados, em laje rectangular ( $b = 2a$ ), simplesmente apoiada, sujeita a uma variação de temperatura constante.

um carregamento efectivo uniforme. Os deslocamentos registados pelos elementos HCT, nas malhas menos refinadas, são francamente inferiores aos registados pelos elementos T21 e T18, pelo que se opta por representar, do mesmo modo, dois gráficos.

Relativamente ao momento flector  $m_{11}$  podem retirar-se as mesmas conclusões que foram expostas no caso da mesma laje com carregamento uniforme, isto é, as descontinuidades observadas nas malhas para  $h = 1,0$  vão sendo atenuadas com o refinamento, sendo que os resultados são de qualidade inferior nos elementos HCT. A título exemplificativo, apresentam-se na figura 5.28 estes diagramas para a malha de 4 elementos dos quatro casos em estudo, onde se observa este facto. A figura 5.28a permite já prever a forma final do diagrama. Note-se também que para  $x_2 = 0$ , não é totalmente perceptível o valor constante deste esforço apresentado na tabela 5.8, especialmente para os elementos HCT. A convergência do momento flector  $m_{11}$  no centro da laje pode ser observada na figura 5.29. Mais uma vez, os valores apresentados pelos elementos HCT para as malhas menos refinadas são bastante díspares daqueles apresentados pelos elementos T21 e T18, o que torna a percepção de convergência destes pouco clara. Assim, na figura 5.29b é possível observar a convergência destes dois elementos em separado. Será relevante notar que o elemento HCT12, apesar de apresentar um diagrama com uma forma mais próxima dos elementos T21 e T18, regista valores do esforço no centro da laje mais afastados do que aqueles registados para o elemento HCT9. Este facto pode ser constatado pelo gráfico



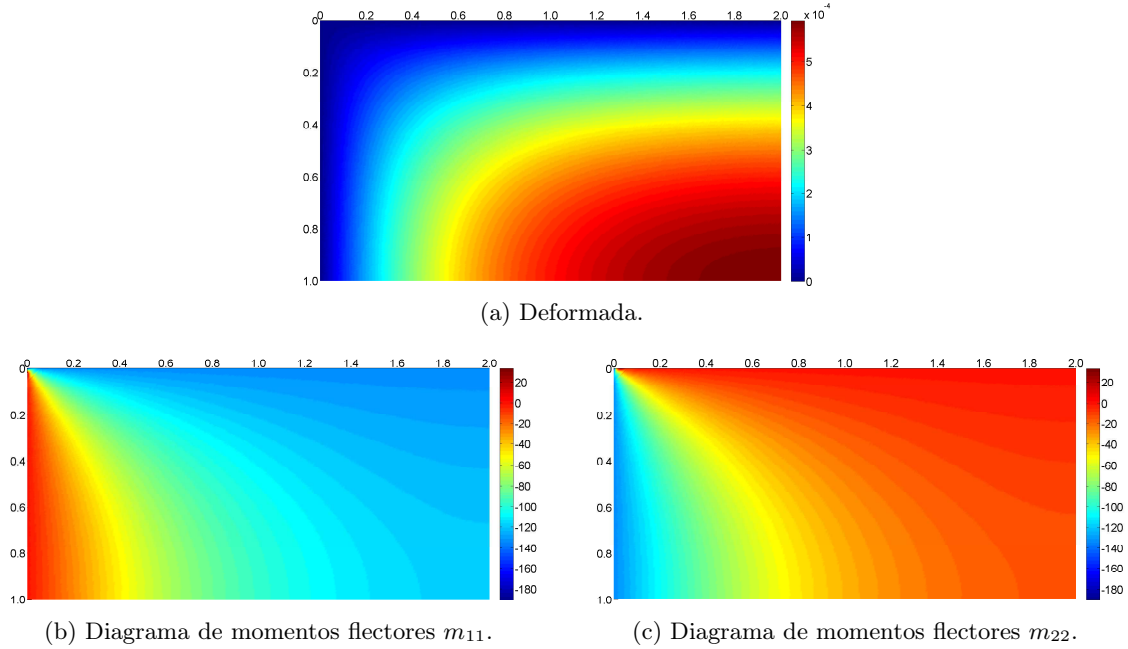


Figura 5.26: Deformada e diagramas de momentos flectores da laje rectangular simplesmente apoiada para o elemento T21, recorrendo à malha mais refinada, para uma variação de temperatura constante.

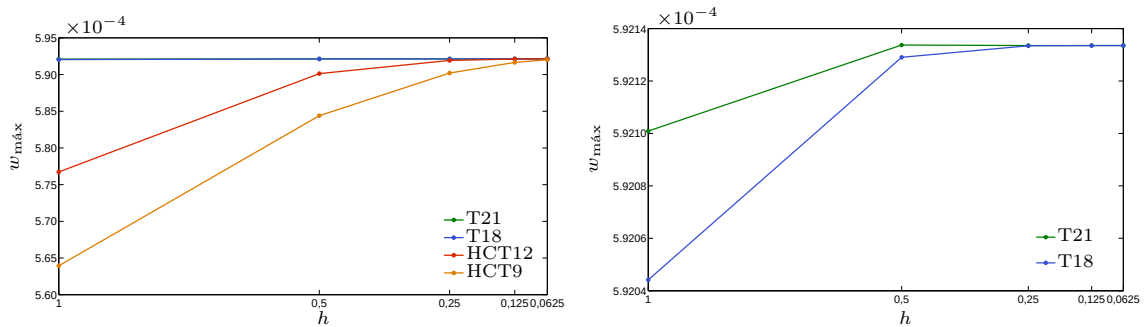


Figura 5.27: Convergência do deslocamento máximo,  $w_{\text{máx}}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada, para uma variação de temperatura constante.

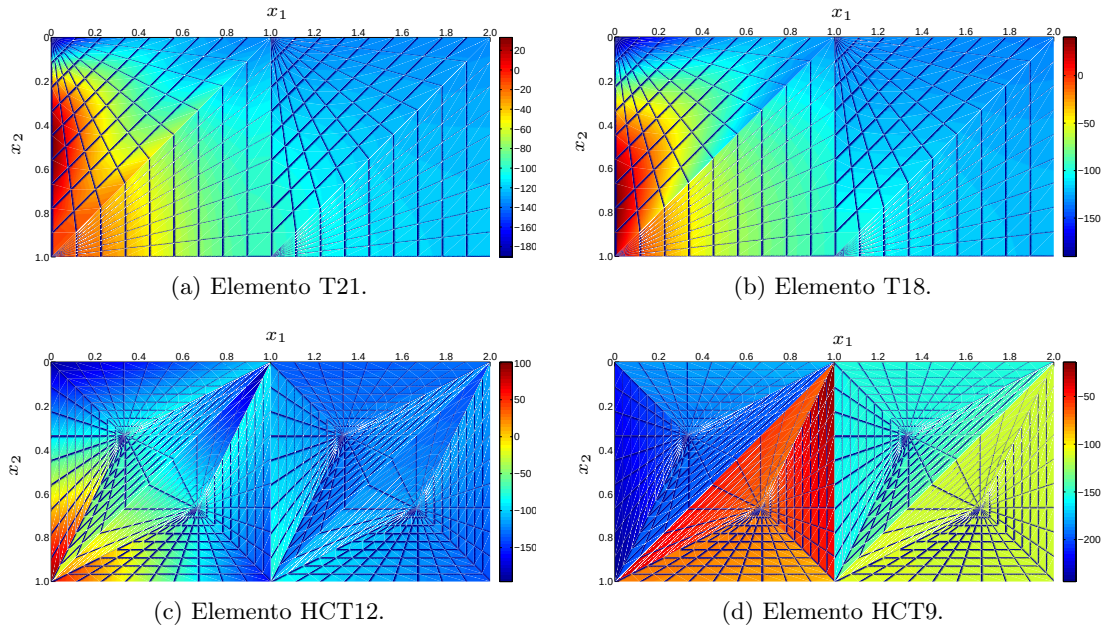


Figura 5.28: Momento flector  $m_{11}$  da laje rectangular simplesmente apoiada para os diferentes elementos recorrendo à malha de 4 elementos, para uma variação de temperatura constante.

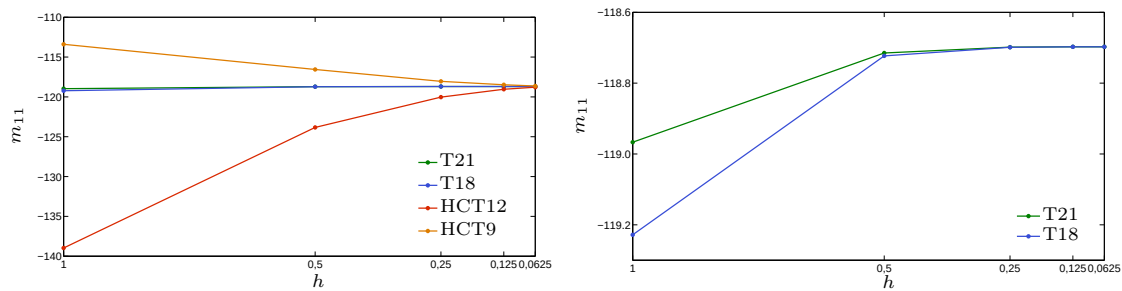


Figura 5.29: Convergência do momento flector,  $m_{11}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada para os diferentes elementos, para uma variação de temperatura constante.

de convergência onde este último converge mais rapidamente para a solução exacta.

Os resultados referentes ao momento flector  $m_{22}$  são semelhantes aos anteriores. Os diagramas respeitantes à malha menos refinada, para os diferentes elementos, estão representados na figura 5.30. Nesta é possível observar, mais uma vez, a qualidade superior dos elementos T21 e T18, de onde é possível extrapolar a forma final do diagrama. A convergência do valor deste esforço no centro da laje apresenta-se na figura 5.31. De modo análogo, a forma do diagrama do elemento HCT12 aproxima-se mais dos elementos T21 e T18, sendo que, no entanto, o valor do esforço no centro da laje para o elemento HCT9 converge mais rapidamente para a solução exacta.

Para melhor se aferir o valor nulo dos momentos flectores normais sobre os bordos apoiados da laje, apresenta-se na figura 5.32, a título de exemplo, o seu andamento ao longo do bordo  $x_2 = 0$ , para as malhas mais refinadas dos quatro elementos em estudo.

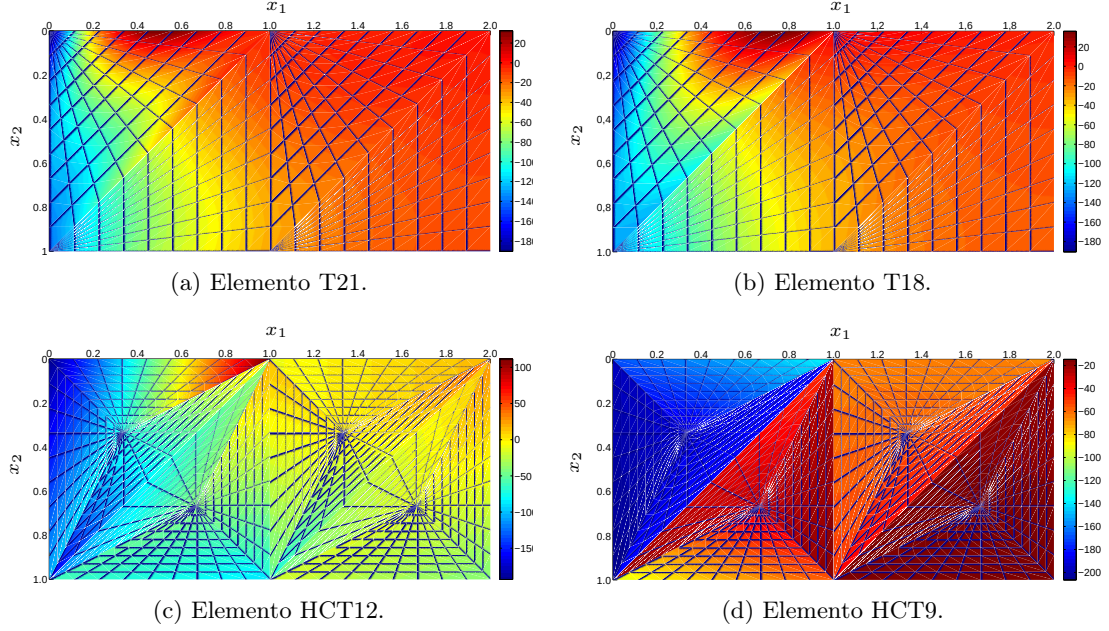


Figura 5.30: Momento flector  $m_{22}$  da laje rectangular simplesmente apoiada para os diferentes elementos recorrendo à malha de 4 elementos, para uma variação de temperatura constante.

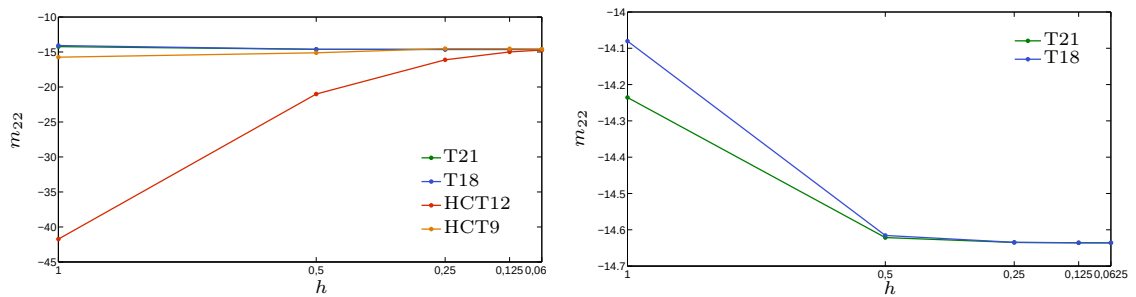
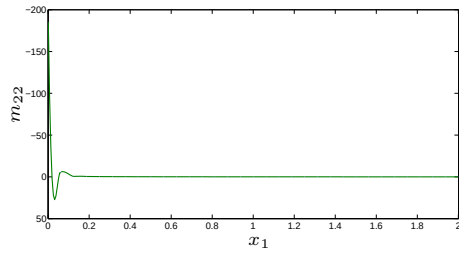
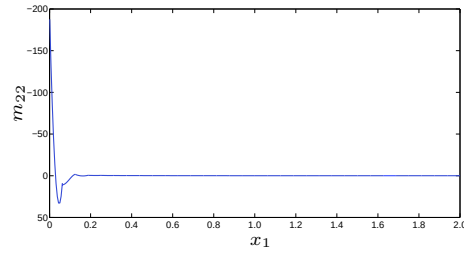


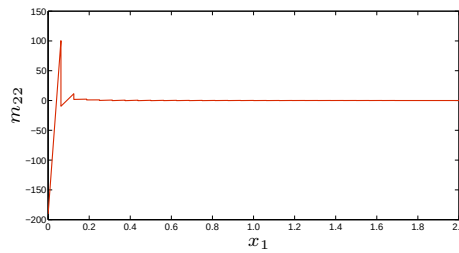
Figura 5.31: Convergência do momento flector,  $m_{22}$ , no centro da laje rectangular simplesmente apoiada para os diferentes elementos, para uma variação de temperatura constante.



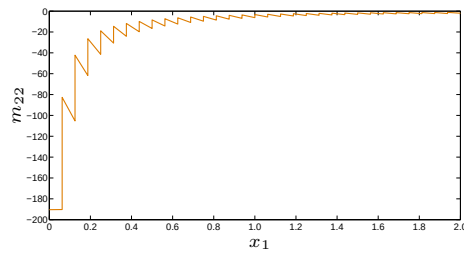
(a) Elemento T21.



(b) Elemento T18.

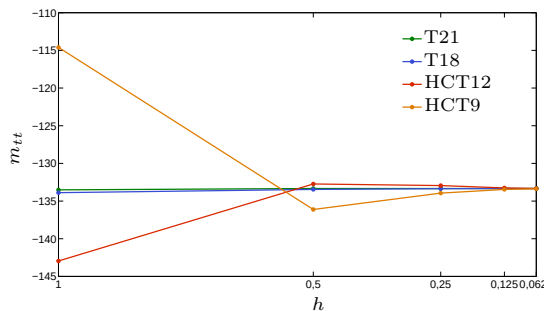


(c) Elemento HCT12.

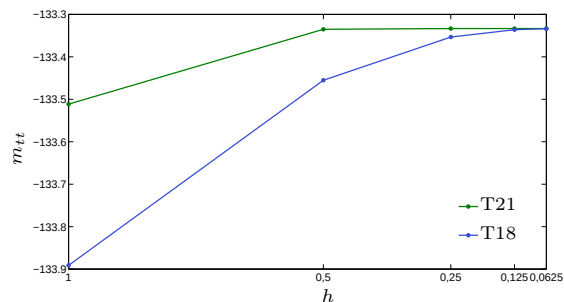


(d) Elemento HCT9.

Figura 5.32: Andamento do momento flector normal  $m_{22}$ , sobre o bordo da laje rectangular simplesmente apoiada para  $x_2 = 0$ , para uma variação de temperatura constante, na malha mais refinada dos quatro elementos em estudo.



(a) Convergência em todos os elementos analisados.



(b) Convergência nos elementos T21 e T18 apenas.

Figura 5.33: Convergência do momento flector tangencial,  $m_{tt}$ , no ponto  $(2,0)$ , da laje rectangular, simplesmente apoiada para os diferentes elementos, para uma variação de temperatura constante.

Note-se a forte perturbação presente junto aos cantos da laje, para  $x_1 = 0$ . Esta deve-se ao facto de um momento flector tangencial num dos bordos – que é diferente de zero – se tornar num momento flector normal no bordo perpendicular – que é necessariamente nulo.

Na figura 5.33 apresenta-se o andamento do momento tangencial no ponto de coordenadas  $(2,0)$  para os vários níveis de refinamento dos diferentes elementos. Pretende-se comprovar que o seu valor tende, de facto, para o valor exacto. Mais uma vez, os elementos T21 e T18 convergem mais rapidamente que os elementos HCT observando-se que, mesmo nas malhas menos refinadas, os valores obtidos são já bastante próximos do exacto.

| $U (\times 10^{-8})$ | $w(r=0) (\times 10^{-7})$ | $m(r=1,0) (\times 10^{-2})$ | $v(r=1,0) (\times 10^{-1})$ |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 6,78895              | 1,35779                   | -7,95775                    | -1,59155                    |

Tabela 5.9: Valores teóricos das grandezas em análise para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual.

## 5.5 Laje Circular

### 5.5.1 Solução Exacta

Considere-se uma laje circular de raio  $R$ , encastrada em todo o seu contorno, rigidez de flexão  $D_f$ , coeficiente de Poisson  $\nu$ , e sujeita a uma carga concentrada no ponto  $r=0$ ,  $\bar{P}$ .

A solução deste problema encontra-se descrita em numerosas referências, *e.g.*, Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959, página 67). Assim, o deslocamento máximo no ponto central da laje é dado através de

$$w|_{r=0} = \frac{\bar{P} R^2}{16 \pi D_f} \quad (5.11)$$

O momento flector normal sobre o bordo encastrado é

$$m_{nn}|_{r=1,0} = -\frac{\bar{P}}{4 \pi} \quad (5.12)$$

O esforço transversal, por unidade de comprimento, que actua numa secção cilíndrica de raio  $r$  é dado por

$$v(r) = -\frac{\bar{P}}{2 \pi r} \quad (5.13)$$

A energia de deformação é dada por

$$U = \frac{\bar{P} w(0)}{2} \quad (5.14)$$

Para uma laje com espessura  $h = 0,20$ , módulo de elasticidade  $E = 2 \times 10^8$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , raio unitário e carga concentrada  $\bar{P} = 1,0$ , os valores teóricos das grandezas em análise – dados pelas expressões (5.11) a (5.14) – apresentam-se na tabela 5.9. Em todas estas grandezas existe, mais uma vez, liberdade dimensional desde que se seja coerente.

### 5.5.2 Solução Numérica

Novamente, de modo a reduzir o custo computacional e o tempo de processamento dos dados, recorrer-se-á a uma dupla simplificação de simetria<sup>2</sup>, ficando-se assim com um quarto de laje, com encastramentos deslizantes sobre os eixos de simetria, paralelos aos eixos cartesianos.

<sup>2</sup>Note-se que, dada a simetria radial desta estrutura, poder-se-á analisar uma “fatia” de qualquer dimensão, ficando-se, nesse caso, com uma laje com dois bordos em viés em relação aos eixos cartesianos. Neste caso os versores normal e tangencial aos lados não coincidem com os versores dos eixos globais. Note-se que o problema poderá ser analisado a uma dimensão.

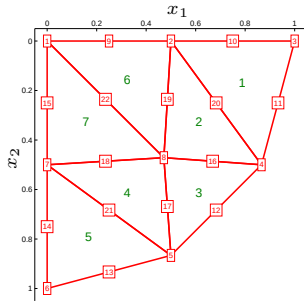


Figura 5.34: Exemplo da malha da laje circular,  $h = 0,50$ .

| N.º de elementos | $h$    | Área    | Erro (%)              |
|------------------|--------|---------|-----------------------|
| 7                | 0,5000 | 0,75000 | $4,51 \cdot 10^{+00}$ |
| 30               | 0,2500 | 0,77646 | $1,14 \cdot 10^{+00}$ |
| 147              | 0,1250 | 0,78349 | $2,43 \cdot 10^{-01}$ |
| 535              | 0,0625 | 0,78488 | $6,58 \cdot 10^{-02}$ |

Tabela 5.10: Área da laje circular e respectivo erro para as diferentes malhas.

À semelhança da laje rectangular, para testar os elementos finitos estudados é necessário gerar algumas malhas. Mais uma vez recorreu-se ao *software* ADINA (2005) para esse efeito. O critério de discretização passou por dividir de igual modo, os bordos rectos do quarto de laje em análise. À dimensão destas subdivisões sobre os bordos encastrados deslizantes atribuiu-se a dimensão característica do elemento,  $h$ . Assim, dividindo, por exemplo, os bordos em dois, obtém-se  $h = 0,50$  – uma vez que a dimensão do bordo encastrado deslizante é 1,0. Esta malha foi sendo progressivamente refinada tendo-se obtido as restantes malhas com  $h = 0,25$ ,  $h = 0,125$  e  $h = 0,0625$ . A título de exemplo apresenta-se na figura 5.34 a malha para  $h = 0,50$  que possui 7 elementos. Optou-se por não representar as restantes malhas dado que o número de nós e de elementos as tornam imperceptíveis.

Note-se nesta representação a perda de rigor comparativamente à situação real que se pretende analisar: o bordo circular é constituído por troços rectos correspondentes às arestas dos elementos, o que conduz a uma área inferior do plano médio da laje. À medida que a malha inicial vai sendo refinada, a solução em análise aproxima-se da solução real, reduzindo a perda de rigor. A área real da estrutura em estudo pode ser simplesmente obtida por

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \cong 0,78540 \quad (5.15)$$

Os valores da área aproximada pelos elementos e respectivos erros apresentam-se na tabela 5.10.

Relativamente às condições de fronteira cinemáticas, há a destacar a presença do bordo circular encastrado. Para cada ponto situado sobre este bordo foi avaliada a normal exterior<sup>3</sup> e impôs-se, quando aplicável, as condições  $w = 0$ ,  $(-w_{,n}) = 0$ ,  $(-w_{,t}) = 0$ ,  $(-w_{,nt}) = 0$  e  $(-w_{,tt}) = 0$ .

Para as grandezas que se analisarão de seguida, os valores numéricos e respectivos erros comparativamente aos valores exactos são apresentados no apêndice D.4.

Assim sendo, a convergência da energia deixa de ser – necessariamente – por valores inferiores. Para os quatro elementos em estudo, esta apresenta-se na figura 5.35a. Na figura 5.35b é exposta a tendência linear – em escala duplamente logarítmica – do erro da energia de deformação em função da dimensão característica dos elementos. Os declives destas rectas, que se apresentam na tabela 5.11, representam, como já fora visto, os valores

<sup>3</sup>Esta normal é calculada relativamente ao arco circular e não ao modelo considerado, onde esta é ambígua.

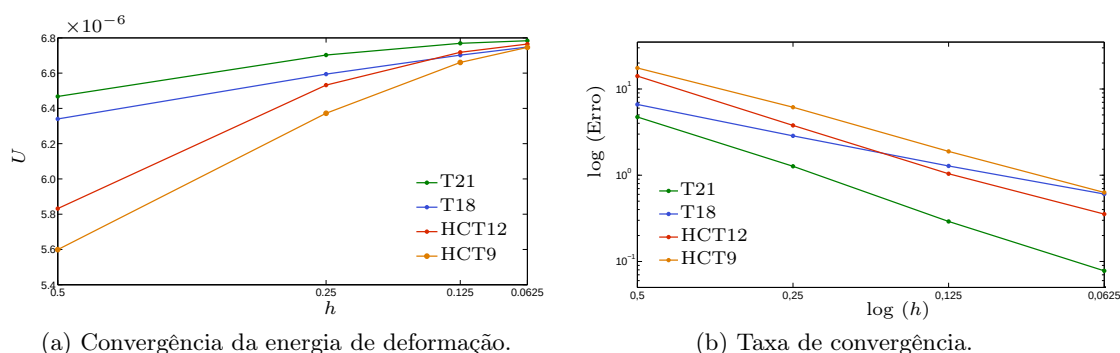


Figura 5.35: Convergência da energia de deformação,  $U$ , e taxa de convergência dos quatro elementos em estudo, para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual.

| T21 | T18 | HCT12 | HCT9 |
|-----|-----|-------|------|
| 2,0 | 1,2 | 1,8   | 1,6  |

Tabela 5.11: Taxa de convergência dos diferentes elementos para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual.

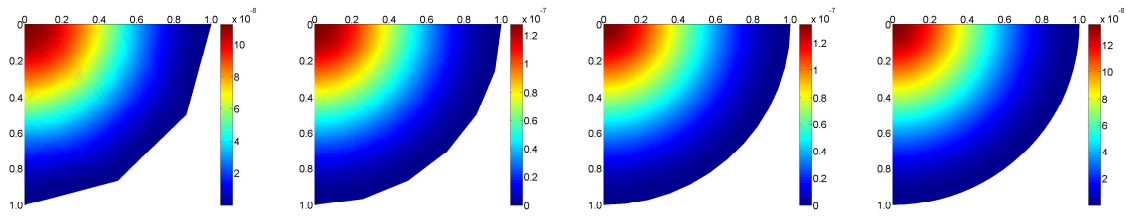
das taxas de convergência de cada elemento. É possível atestar a redução dos valores comparativamente àqueles obtidos para a laje rectangular, simplesmente apoiada, sujeita a um carregamento efectivo uniforme. Este facto deve-se, sobretudo, à presença da singularidade devida à carga pontual sendo que o erro geométrico poderá também apresentar alguma contribuição.

Note-se em primeira instância a redução da taxa de convergência dos elementos em comparação com a laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a uma carga efectiva uniforme. Para este facto contribuem (i) a singularidade da solução devida à carga pontual e (ii) o erro que se comete na modelação do domínio, presente na tabela 5.10, que pode ser avaliado, por exemplo, pela área da estrutura. É possível ainda atestar a acentuada quebra na taxa de convergência do elemento T18 que se revela, inclusivamente, inferior àquela demonstrada pelos elementos HCT.

Relativamente à deformada da laje circular, constata-se que a sua forma é bastante semelhante nas diversas malhas para os vários elementos, uma vez que, obviamente, será esta a grandeza que melhor poderá ser reproduzida. Deste modo, na figura 5.36, opta-se por apresentar uma representação gráfica apenas do elemento HCT9. A informação relevante que dela se pode retirar é o facto do bordo circular começar por ser facetado na malha menos refinada e ir adquirindo a forma circular à medida que se refina progressivamente a malha. A forma dos diagramas, à medida que se progride para o centro da laje, não apresenta variações visíveis.

A convergência do deslocamento no centro da laje para os diversos elementos pode ser aferida da figura 5.37. Desta pode constatar-se que para as malhas menos refinadas os elementos T21 e T18 aproximam-se melhor da solução exacta. No entanto, para as malhas mais refinadas, observa-se que o elemento HCT12 apresenta melhor comportamento que o elemento T18. Realce-se também, por análise da expressão (5.14), a proporcionali-





(a) Malha para  $h=0,50$ . (b) Malha para  $h=0,25$ . (c) Malha para  $h=0,125$ . (d) Malha para  $h=0,0625$ .

Figura 5.36: Deformadas da laje circular encastrada sujeita a carga pontual, para o elemento HCT9.

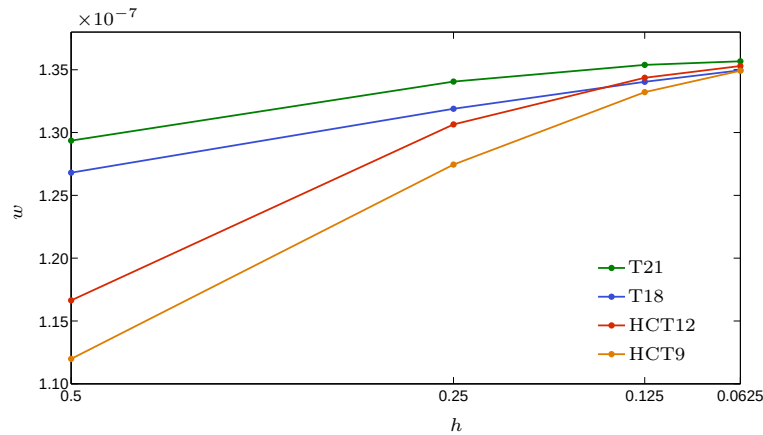


Figura 5.37: Convergência do deslocamento no centro da laje circular encastrada sujeita a carga pontual.

dade entre a energia de deformação e o deslocamento no centro da laje, comprovada pela semelhança entre os diagramas de convergência destas duas grandezas.

Caso as malhas desta estrutura fossem perfeitamente simétricas em relação a uma recta radial que divida o quarto de laje em duas partes iguais, seria espectável que os diagramas de momentos flectores  $m_{11}$  e  $m_{22}$  e respectivos valores numéricos fossem também perfeitamente simétricos. Deste modo, os valores numéricos de  $m_{11}$  no ponto  $(1,0)$  e de  $m_{22}$  no ponto  $(0,1)$  seriam iguais e tenderiam a aproximar-se do valor exacto fornecido anteriormente, à medida que as malhas fossem sendo progressivamente refinadas. No entanto, devido à assimetria das malhas, registam-se diferenças nestes valores, sendo que o momento flector  $m_{11}$  é aquele que mais próximo se mantém da solução exacta. Registado este facto, opta-se por representar graficamente apenas os diagramas deste esforço. Observa-se ainda que os elementos que contemplam curvaturas como graus de liberdade apresentam diagramas visualmente idênticos, com transições suaves entre elementos, praticamente indistinguíveis, à excepção da malha menos refinada. Ao invés, nos elementos HCT – apesar de apresentarem também diagramas visualmente idênticos – são já visíveis transições entre elementos e, mais pormenorizadamente, entre subelementos. Deste modo, na figura 5.38, apresentam-se a título exemplificativo os diagramas de momentos flectores  $m_{11}$  para os elementos T21 e HCT9, para os diferentes níveis de refinamento.

A convergência do momento flector  $m_{11}$  no ponto  $(1,0)$  pode ser aferida da figura 5.39. Nesta situação opta-se por mostrar também o valor exacto do esforço de modo a facilitar a



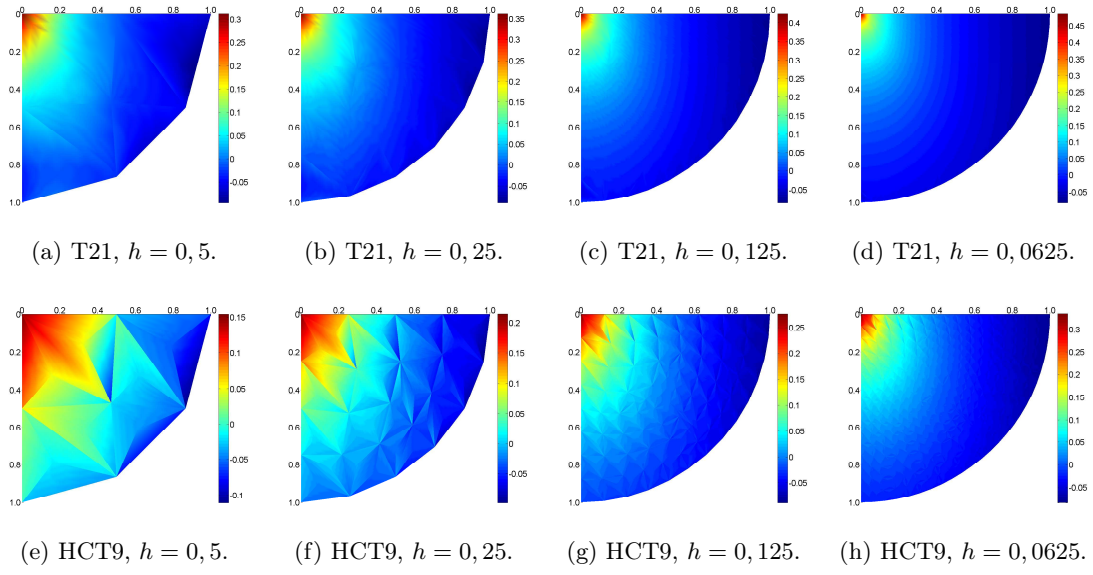


Figura 5.38: Diagramas de momentos flectores,  $m_{11}$ , da laje circular encastada sujeita a carga pontual, para os diferentes níveis de refinamento, dos elementos T21 e HCT9.

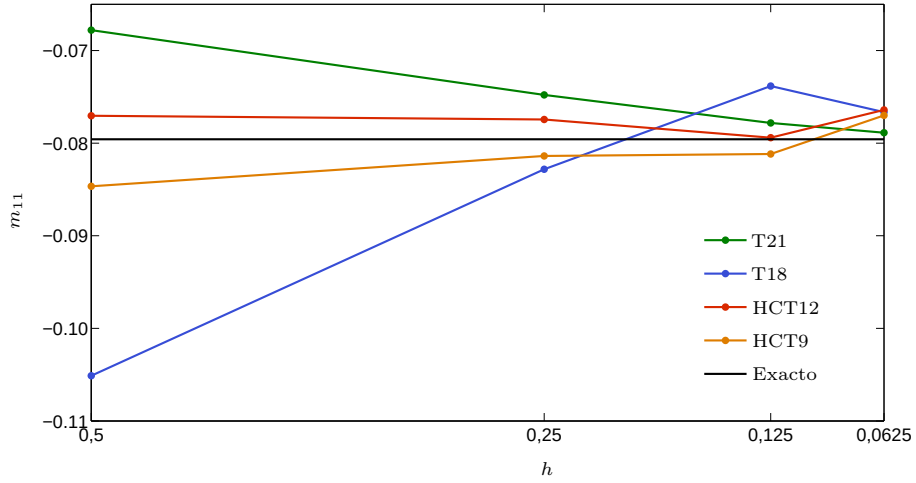


Figura 5.39: Convergência do momento flector  $m_{11}$ , no ponto  $(1, 0)$ , da laje circular encastada sujeita a carga pontual.

obtenção de conclusões mais imediatas. Podem observar-se desvios na tendência até aqui observada. O elemento T21 que se tem revelado de melhor qualidade, aparenta convergir de um modo gradual para a solução exacta, sendo aquele que mais se aproxima desta na malha mais refinada. Os restantes elementos apresentam alguma oscilação em torno do valor exacto, sendo que o elemento T18 apresenta um resultado de qualidade francamente reduzida para a malha menos refinada. Ao contrário do que seria espectável, os elementos HCT mantêm uma tendência bastante próxima da solução exacta, mesmo para as malhas de menor refinamento. Crê-se que os elementos HCT e T18 necessitariam ainda de algum refinamento para a sua convergência se tornar mais clara.

É importante também reter que o momento torsor  $m_{12}$  será nulo sobre os eixos de

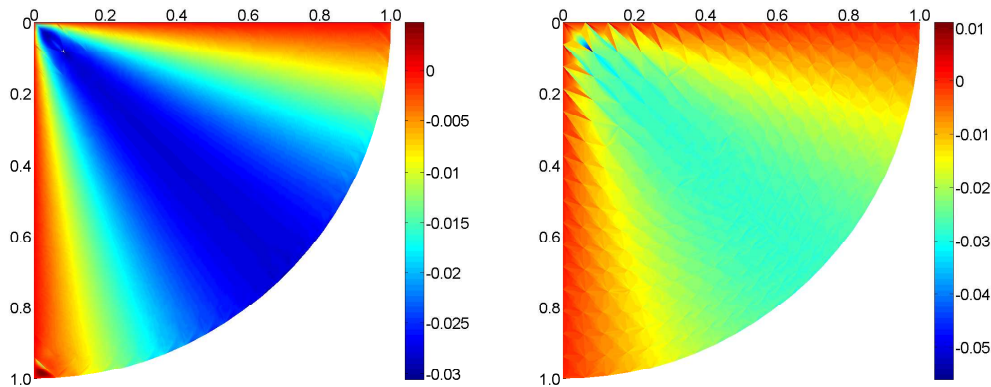
(a) Malha para  $h = 0,0625$  do T21.(b) Malha para  $h = 0,0625$  do HCT9.

Figura 5.40: Diagramas de momentos torsores,  $m_{12}$ , da laje circular encastrada sujeita a carga pontual, para as malhas mais refinadas, dos elementos T21 e HCT9.

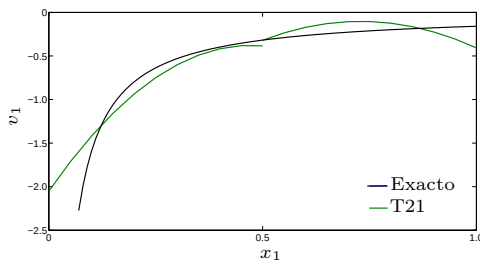
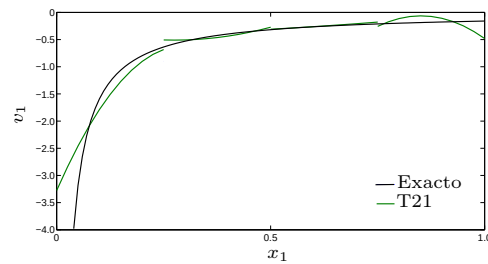
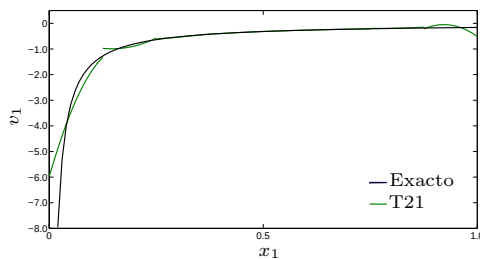
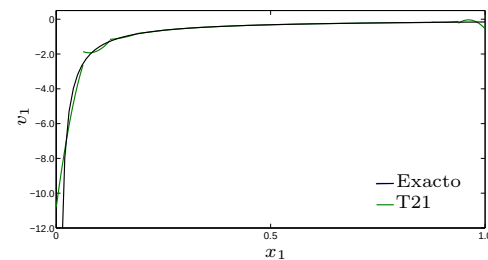
(a) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,5$ .(b) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,25$ .(c) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,125$ .(d) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,0625$ .

Figura 5.41: Andamento do esforço transversal  $v_1$  ao longo do bordo  $x_2 = 0$  para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual, no elemento T21.

simetria. Na figura 5.40, onde se apresentam os diagramas para as malhas mais refinadas dos elementos T21 e HCT9, pode observar-se esse facto.

O andamento do esforço transversal radial será fornecido pela expressão (5.13). Por forma a comparar o seu comportamento real com os exemplos numéricos, traçaram-se os diagramas de esforço transversal  $v_1$  ao longo do eixo de simetria  $x_2 = 0$ . Estes apresentam-se nas figuras 5.41 a 5.44 para os quatro elementos e respectivos níveis de refinamento.

Como seria expectável, os elementos T21 e T18 são os que melhor se aproximam da

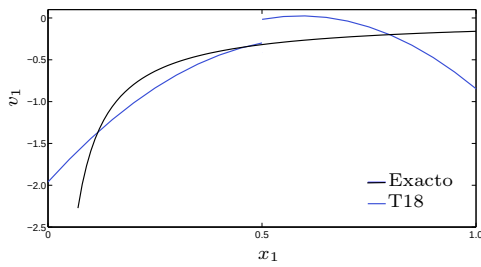
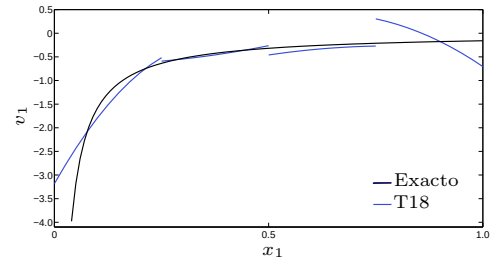
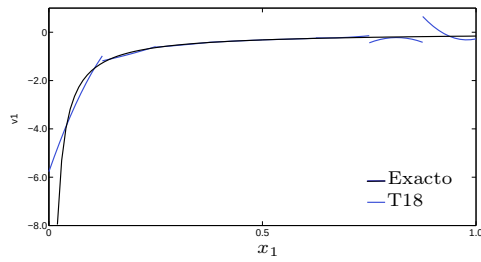
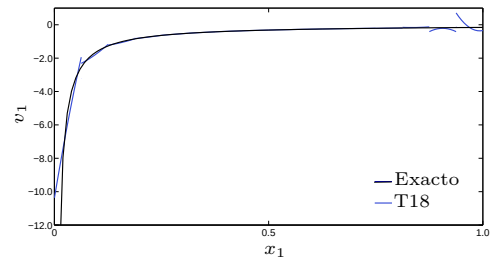
(a) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,5$ .(b) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,25$ .(c) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,125$ .(d) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,0625$ .

Figura 5.42: Andamento do esforço transversal  $v_1$  ao longo do bordo  $x_2 = 0$  para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual, no elemento T18.

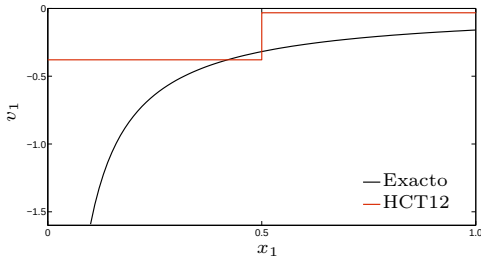
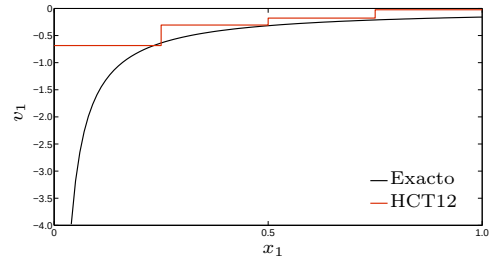
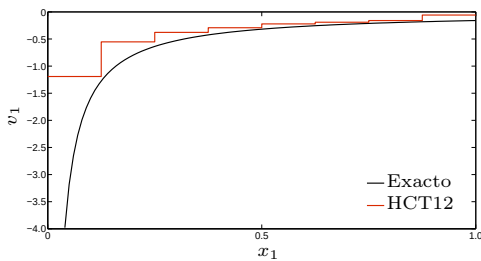
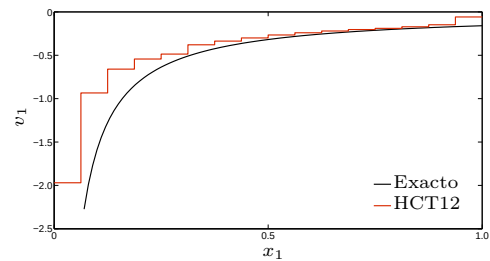
(a) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,5$ .(b) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,25$ .(c) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,125$ .(d) Esforço transversal  $v_1$  para  $h=0,0625$ .

Figura 5.43: Andamento do esforço transversal  $v_1$  ao longo do bordo  $x_2 = 0$  para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual, no elemento HCT12.

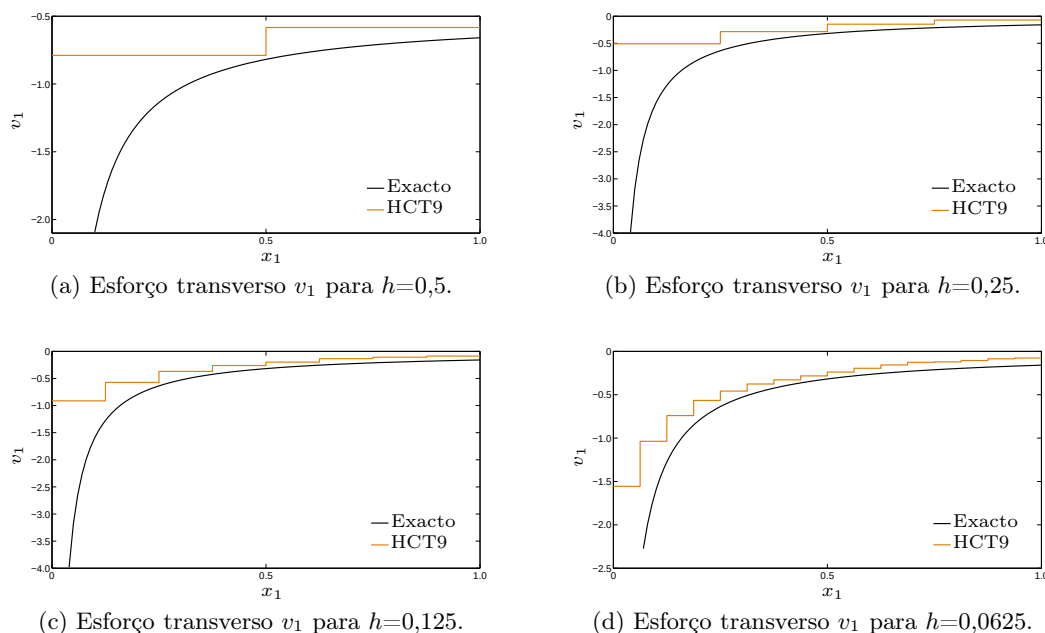


Figura 5.44: Andamento do esforço transverso  $v_1$  ao longo do bordo  $x_2 = 0$  para a laje circular encastrada sujeita a carga pontual, no elemento HCT9.

solução exacta. Nestes observa-se que à medida que se vão refinando progressivamente as malhas, os resultados numéricos apresentam oscilações apenas junto ao bordo encastrado e ao ponto central de aplicação da carga. Mesmo nas malhas menos refinadas, o comportamento destes elementos apresenta uma clara tendência para a solução exacta. As oscilações presentes nas proximidades do bordo circular devem-se sobretudo ao facto de se estar a resolver um problema diferente do real.

Por sua vez, nos elementos HCT, o campo de esforços transversos é constante o que torna o andamento destes esforços mais afastado da solução exacta, em especial nas malhas menos refinadas. No entanto, para as malhas com mais refinamento, o seu comportamento é bastante aceitável, notando-se a sua convergência.

Note-se também a verificação da condição de fronteira estática (2.87a), ver página 21, no bordo  $x_2 = 0$ . Da simplificação de simetria da laje resulta um bordo encastrado deslizante onde o esforço transverso efectivo deverá ser nulo, *i.e.*,  $r_2 = 0$ . Por outro lado, a variação segundo o eixo  $x_1$  da derivada normal do campo de deslocamentos transversal tem de ser nula, *i.e.*,  $(-w_{,2})_{,1} = 0$ . Consequentemente, ter-se-á  $m_{12} = 0$  e, então,  $m_{12,1} = 0$ . Resulta finalmente que  $r_2 = v_2 = 0$ .

## Capítulo 6

# Considerações Finais

### 6.1 Conclusões

Este trabalho inicia-se com a formulação da teoria de lajes finas com base nas equações da elasticidade linear tridimensional, através da imposição de restrições cinemáticas – secções planas e perpendiculares ao plano médio, permanecem do mesmo modo após a deformação – e estáticas – ao impor-se um estado plano de tensão em lâminas paralelas ao plano médio. Esta transposição tem como ponto de ligação a teoria de lajes moderadamente espessas, onde a teoria de lajes finas resulta de um caso particular daquela ao impor-se nula a deformabilidade por esforço transversal.

O problema de valores de fronteira colocado pela teoria de lajes finas foi abordado através do Método dos Elementos Finitos, onde foram estudados quatro elementos finitos triangulares compatíveis:

- (i) O elemento T21 possui seis nós num total de vinte e um graus de liberdade. Em cada nó dos vértices do elemento prescrevem-se seis graus de liberdade – o deslocamento,  $w$ , as suas derivadas parciais de primeira ordem,  $(-w_{,1})$  e  $(-w_{,2})$ , e as curvaturas,  $(-w_{,11})$ ,  $(-w_{,22})$  e  $(-w_{,12})$  enquanto que nos nós a meio de cada aresta do elemento se prescreve a derivada normal,  $w_{,n}$ . É necessário prestar especial atenção a estas restrições nos graus de liberdade. Por forma a gerar soluções compatíveis, não basta impor apenas restrições ao deslocamento e às suas derivadas parciais de primeira ordem, como é comum neste tipo de elementos, mas também às curvaturas.
- (ii) O elemento T18 deriva do anterior por supressão dos nós a meio de cada uma das três arestas. Este terá assim três nós onde se prescrevem um total de dezoito graus de liberdade – o deslocamento,  $w$ , as suas derivadas parciais de primeira ordem,  $(-w_{,1})$  e  $(-w_{,2})$ , e as curvaturas,  $(-w_{,11})$ ,  $(-w_{,22})$  e  $(-w_{,12})$ . Para assegurar a compatibilidade do elemento impõe-se uma variação cúbica da derivada normal,  $w_{,n}$ , ao longo dos lados do elemento.
- (iii) A formulação do elemento HCT12 consistiu na divisão de um elemento triangular em três subelementos. Este elemento possui os mesmo nós que o elemento T21 mas apenas doze graus de liberdade. Nos nós de vértice do elemento prescrevem-se três graus de liberdade – o deslocamento,  $w$  e as suas derivadas parciais de primeira ordem,  $(-w_{,1})$  e  $(-w_{,2})$  – e nos nós a meio de cada aresta prescreve-se, do mesmo modo, a derivada normal,  $w_{,n}$ . Ao contrário dos elementos T21 e T18, este elemento não possui curvaturas como graus de liberdade, logo a sua compatibilidade terá de ser garantida de outro modo. Neste caso, este processo baseia-se na imposição quadrática das derivadas normais aos lados entre subelementos e entre elementos.

- (iv) Finalmente, o elemento HCT9 é semelhante ao anterior, de onde se suprimem os nós a meio das arestas. Assim, este elemento contempla nove graus de liberdade, sendo que em cada vértice se prescrevem o deslocamento,  $w$  e as suas derivadas parciais de primeira ordem,  $(-w_{,1})$  e  $(-w_{,2})$ . Desta feita, para garantir a compatibilidade deste elemento, impôs-se uma variação linear das derivadas normais aos lados entre subelementos e entre elementos.

De referir também que os elementos são formulados simbolicamente com recurso a coordenadas de área. Este método – em detrimento de uma implementação em que as funções de aproximação são determinadas numericamente em cada ponto de interesse – tem a vantagem de ser preciso e de anular eventuais flutuações que surjam nos resultados por limitações de precisão da máquina, como aliás se pôde comprovar numa primeira implementação.

Os quatro elementos foram formulados de uma forma unificada, permitindo que as expressões das contribuições elementares assumam formas semelhantes. Este facto facilitou a implementação em programa de cálculo automático.

Dado que se está a aproximar o campo de deslocamentos, os resultados para este serão os mais precisos e os que mais rapidamente convergem para a solução exacta. Os campos de momentos são obtidos através daqueles e serão menos precisos, mas ainda assim melhores que as aproximações para os esforços transversos, obtidas através destes.

Para comprovar esta implementação começou-se pela realização do denominado *patch test* e de um teste de distorção. No primeiro, todos os elementos reproduziram exactamente<sup>1</sup> a solução analítica. No teste de distorção, os elementos T21 e T18 aproximaram-se da solução de referência criada, notando-se alguma diminuição da qualidade dos elementos HCT, em especial do elemento HCT9 que revelou um comportamento de inferior qualidade.

Efectuaram-se também testes numéricos em dois tipos de lajes e compararam-se os resultados obtidos com os resultados teóricos. Primeiro efectuaram-se testes numa laje rectangular para duas situações: uma carga uniformemente distribuída e uma variação de temperatura linear na espessura, constante no plano médio da laje. De seguida testou-se uma laje circular encastrada sujeita a uma carga pontual no centro da laje.

Para a laje rectangular com carregamento uniformemente distribuído verificou-se que as taxas de convergência eram superiores àquelas registadas para a laje circular. Isto deve-se sobretudo ao facto de a solução ser singular – devido à carga pontual – e ao erro geométrico cometido na aproximação da área da estrutura. Em ambos os casos, o elemento T21 revelou-se o mais eficiente neste aspecto. Por sua vez, o elemento T18 que apresentara um comportamento bastante aceitável na laje rectangular, acabou por apresentar uma quebra acentuada no teste da laje circular, revelando-se o elemento com taxa de convergência mais baixa. Em ambos os casos, os elementos HCT apresentaram um comportamento espectável, sendo que o HCT12 apresenta uma taxa de convergência melhor que o elemento HCT9 em ambas as situações. Verifica-se ainda que a taxa de convergência da energia de deformação dos elementos T21 e T18 é substancialmente melhor que a dos elementos HCT.

Outro dos parâmetros utilizados para testar os elementos foi o deslocamento no centro das estruturas. Mais uma vez, verifica-se um melhor comportamento no caso da laje rectangular, sendo que os elementos T21 e T18 convergem novamente mais rapidamente que os elementos HCT, apresentando erros duas e três vezes inferiores no caso da laje

---

<sup>1</sup>Para a precisão numérica disponível.

rectangular com carregamento uniforme e com variação de temperatura, respectivamente. Na laje circular esta diferença é de uma ordem de grandeza.

No caso dos momentos flectores no centro das lajes, apesar de em linhas gerais se observar o mesmo comportamento, é importante salientar algumas diferenças. Para o caso da laje rectangular sujeita a um carregamento uniforme, os elementos HCT revelam alguma perda de qualidade, em especial nas malhas mais grosseiras. Esta quebra de comportamento é francamente acentuada no caso do momento  $m_{11}$  onde, por exemplo, o elemento HCT9 apresenta um erro da ordem dos 29%, enquanto que no caso do momento  $m_{22}$  este erro é de cerca de 9% (no caso do elemento T21 este erro não atinge, em valor absoluto, os 0,5%, na malha menos refinada). Curiosamente, para a laje rectangular sujeita a variação de temperatura, apesar dos elementos T21 e T18 continuarem a apresentar um comportamento consideravelmente melhor, o elemento HCT12 é aquele que regista a maior quebra em termos de convergência dos momentos flectores no centro da laje, sendo inclusivamente inferior ao elemento HCT9. Note-se novamente o caso da malha mais grosseira onde o erro do elemento HCT12, em valor absoluto, ascende aos 185% enquanto que no elemento HCT9 este valor é inferior a 8% e nos elementos T21 e T18 é de cerca de 3% e 4%, respectivamente. Para este exemplo comprovaram-se ainda os valores nulos dos momentos flectores normais aos bordos apresentado pelos vários elementos, observando-se apenas algumas flutuações junto aos cantos da laje. Este facto foi explicado através da presença de singularidades que surgem nos cantos da laje, cuja origem foi explicada analiticamente. Já no caso laje circular, avaliou-se apenas o momento flector  $m_{11}$  no ponto de coordenadas (1,0) – ver figura 5.39 – tendo-se concluído que o elemento T18 apresentava, inclusivamente, um comportamento inferior ao dos elementos HCT.

Relativamente aos momentos torsores,  $m_{12}$ , estes foram sobretudo avaliados no caso da laje rectangular sujeita a carga uniforme não se tendo observado nenhum comportamento inesperado. Os elementos T21 e T18 revelaram-se de melhor qualidade que os elementos HCT. No caso da laje circular procurou-se apenas observar os valores nulos sobre os bordos encastrados deslizantes. Todos os elementos preencheram este requisito notando-se que o elemento HCT9 é o que converge mais lentamente.

A convergência dos esforços transversos  $v_\alpha$  na laje rectangular sujeita a carga uniforme não revelou novamente comportamentos inesperados. Os elementos T21 e T18 superam, mais uma vez, os elementos HCT. Para a laje circular compararam-se os andamentos do esforço transversal  $v_1$  ao longo do bordo de coordenadas  $x_2 = 0$  (ver figuras 5.41 a 5.44) com a solução exacta. Mais uma vez, os elementos T21 e T18, com esforços transversos quadráticos, aproximam-se com muito boa qualidade da solução exacta. Os elementos HCT, com esforços transversos constantes, como seria expectável apresentam um comportamento inferior, apesar de o seu andamento “em escada” ser bastante próximo do exacto. As flutuações mais acentuadas registam-se no centro da laje, coincidente com o ponto de aplicação da carga concentrada, onde o esforço transversal teórico tenderia, no limite, para infinito. São observadas também algumas discrepâncias junto do bordo encastrado da laje que se devem, sobretudo, ao erro cometido na modelação do bordo circular.

Após a análise da implementação dos elementos, conclui-se que estes apresentam melhor qualidade na laje rectangular, podendo mesmo comprovar-se a sua qualidade superior por avaliação da sua taxa de convergência. Os erros supra mencionados cometidos na modelação da laje circular, bem como a singularidade no campo de momentos induzida pela aplicação da carga concentrada, representam o motivo primordial da quebra de qualidade dos elementos, não se devendo, no entanto, afirmar que estes são ineficazes nesta estrutura. É notável, contudo, a superior melhoria de resultados dos elementos T21 e T18. No entanto,

os elementos HCT revelam também um comportamento assinalável, não sendo necessário gerar malhas excessivamente refinadas para que se obtenham resultados de boa qualidade, que podem ser utilizados na prática profissional de engenharia para o dimensionamento de lajes. Em suma, os resultados serão melhores e mais precisos para lajes com lados rectos e quanto menor for o erro que se comete na modelação estrutural, com especial atenção no erro geométrico cometido na modelação de lados não-rectos.

Testou-se ainda, para os elementos que contemplam curvaturas como graus de liberdade – T21 e T18 – uma situação onde se impuseram também condições de fronteira estáticas. Nesta, concluiu-se que os valores da energia de deformação convergiam para a solução exacta por valores inferiores àqueles obtidos com a imposição de condições de fronteira cinemáticas apenas. Assim, o espaço das soluções é restringido, pelo que a qualidade da solução é globalmente inferior àquela onde tais limitações não são consideradas.

Foi também efectuada, no caso da laje rectangular sujeita a uma carga uniforme, uma análise aos tempos demorados pelo programa de cálculo, por elemento, na formação das matrizes de rigidez, dos vectores de forças, na rotação destes para o referencial local e seu espalhamento. Juntando esta informação com todos os resultados de convergência concluiu-se que o elemento T18 será o que apresenta melhor relação qualidade/custo computacional.

## 6.2 Desenvolvimentos Futuros

Os exemplos numéricos abordados nesta dissertação têm a função de comprovar e testar a formulação e implementação efectuada para os vários elementos. No entanto, por motivos de tempo e espaço, ficam por analisar algumas questões que poderão ser exploradas no futuro. De um modo geral, poderá ser interessante contemplar situações que envolvam geometria diversas, com especial ênfase em bordos enviesados, condições de apoio mais diversificadas e outro tipo de solicitações, tais como assentamentos de apoio. Será interessante aferir numericamente a taxa de convergência na presença de singularidades devidas a bordos enviesados.

Outro aspecto relevante a considerar será a derivação e implementação dos vectores de forças nodais equivalentes consistentes associados a acções aplicadas ao longos dos bordos, de acordo com o segundo termo do segundo membro da equação (3.7b).

No caso dos elementos T21 e T18, as curvaturas fazem parte do conjunto dos graus de liberdade elementares. Na presença de variações de rigidez de flexão da laje no plano médio, estas impõe uma excessiva continuidade, nomeadamente na curvatura normal. Este facto poderia ser totalmente resolvido através da utilização de restrições em *nós duplos*. Exemplos futuros poderão ser realizados explorando este conceito, fazendo variar a espessura da laje ou o material que a constitui – por intermédio do coeficiente de Poisson ou do módulo de elasticidade. Ainda para estes elementos, uma outra situação deverá ser discutida, nomeadamente, quais as condições de fronteira a impor em pontos angulosos onde convirjam bordos não perpendiculares entre si.

Nesta dissertação foi abordada a solicitação envolvendo variações de temperatura lineares na espessura da laje. Outros fenómenos interessantes de contemplar serão as análises de vibração livre e de estabilidade linear. Para tal, será necessário determinar as matrizes características, *viz.* a matriz de massa consistente e a matriz de rigidez geométrica, respectivamente.

Finalmente, seria interessante desenvolver elementos de casca fina cuja parcela de flexão seria baseada nos elementos de laje aqui estudados.



## Apêndice A

# Integração de Funções Descontínuas

O teorema da divergência na presença de singularidades foi estudada, por exemplo, por Chadwick (1999, página 114).

Considere-se uma função  $f(x_1, x_2)$  com  $k = 1, 2, \dots, n$  descontinuidades definidas sobre uma linha  $\Gamma$ , parametrizada através da variável  $s$ , tal como representado na figura A.1. Note-se que, em geral, as descontinuidades de  $f(s)$  podem ocorrer em qualquer ponto ao longo da linha  $\Gamma$ . No entanto, no caso particular das lajes finas é necessário avaliar o integral  $\int_{\Gamma} \frac{\partial m_{nt}(s)}{\partial t} d\Gamma$ . Neste caso as descontinuidades de  $m_{nt}(s)$  apenas ocorrem em pontos angulosos de  $\Gamma$ .

As descontinuidades ocorrem para o conjunto de valores  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  de  $s$ . Deste modo,  $\Gamma$  é dividida em  $(n + 1)$  linhas onde  $f$  é contínua. Neste caso,  $\Gamma_1$  é parametrizada por  $s_0 \leq s \leq s_1$ , e assim sucessivamente. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} f d\Gamma &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial}{\partial t} f d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial t} f d\Gamma_2 + \dots + \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} f d\Gamma_{n+1} = \\ &= f|_{s_0}^{s_1} + f|_{s_1}^{s_2} + \dots + f|_{s_n}^{s_{n+1}} = f|_{s_0}^{s_{n+1}} - \sum_{k=1}^n \llbracket f \rrbracket_k \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

onde  $\frac{\partial}{\partial t} = \nabla f \cdot \mathbf{t}$  é a derivada direccional tangencial ao longo do vector unitário  $\mathbf{t}$ .

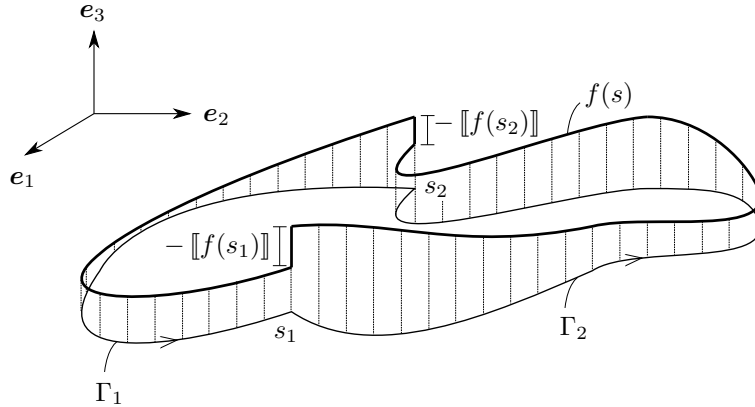


Figura A.1: Função descontínua ao longo de uma linha fechada.

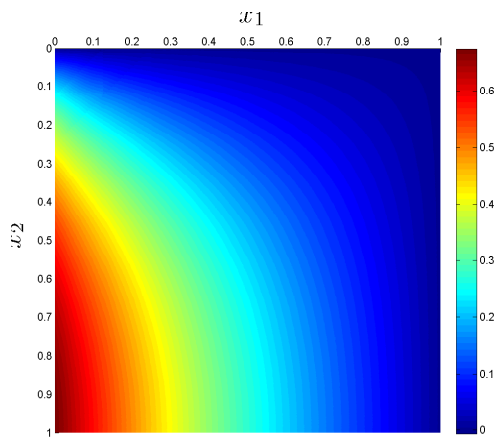
Caso  $\Gamma$  seja uma linha fechada  $f_{s_0} = f_{s_{n+1}}$  e a expressão (A.1) resulta em

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} f \, d\Gamma = - \sum_{k=1}^n \llbracket f \rrbracket_k \quad (\text{A.2})$$

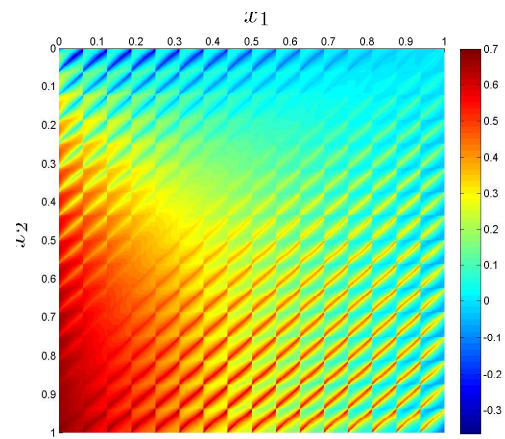
## Apêndice B

# Flutuações na Implementação Numérica

A opção pela implementação simbólica com recurso a coordenadas de área e consequente abandono de uma implementação numérica, onde as funções de aproximação são obtidas através da inversão numérica da matriz  $\mathbf{A}$  – ver equação (3.48), página 35 – em cada ponto de interesse (tipicamente, em pontos de Gauss), tem por objectivo a anulação de flutuações e erros numéricos registados nas estruturas em estudo. Observe-se, a título de exemplo, na figura B.1, o esforço transversal  $v_1$  para duas malhas de 128 e 512 elementos T21. À partida, esta última deveria apresentar resultados mais precisos uma vez que é mais refinada. No entanto, verificam-se erros numéricos que tornam a sua avaliação inviável.



(a) Esforço transversal  $v_1$  para malha de 128 elementos.



(b) Esforço transversal  $v_1$  para malha de 512 elementos.

Figura B.1: Esforço transversal  $v_1$  para duas malhas de 128 e 512 elementos T21, respectivamente, no caso de uma laje quadrada de dimensão  $(1 \times 1)$ , simplesmente apoiada, sujeita a carga efectiva uniforme, com recurso a uma implementação numérica.



## Apêndice C

# Ficheiros de Dados

### C.1 Ficheiro de *input*

```
#
# Name of problem
#
#Simply supported square plate with 2 elements
#
# number of nodes, number of elements, number of materials, number of sections, ...
# number of concentrated loads, number of line results
9 2 1 1 0 1 0
#
# read node data
#
# node number, coord_x, coord_y, orientation of local axis 1 (nx and ny), ...
# number of dofs in the node (1 or 6), code for EBC (-1 restrained; 0 free),...
# value of prescribed BC
# order: w, tx, ty, chi xx, chi xy, chi yy or dw/dn
#
1 0.0 1.0 1.0 0.0 6 -1 0 -1 0 -1 -1 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
2 0.0 0.0 1.0 0.0 6 -1 -1 -1 -1 0 -1 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
3 1.0 1.0 1.0 0.0 6 0 -1 -1 0 -1 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
4 1.0 0.0 1.0 0.0 6 -1 -1 0 -1 -1 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
5 0.0 0.5 1.0 0.0 1 0 0.0
6 1.0 0.5 1.0 0.0 1 -1 0.0
7 0.5 1.0 1.0 0.0 1 -1 0.0
8 0.5 0.0 1.0 0.0 1 0 0.0
9 0.5 0.5 1.0 0.0 1 0 0.0
#
# read element data
#
# element number,
# the element nodes, material number, section number, uniform load value
#
1 1 2 4 5 8 9 1 1 1.0
2 1 4 3 9 6 7 1 1 1.0
```

```
#
# read material data
#
# E, nu
#
1 2e8 0.3
#
# read section data
#
# h
#
1 0.2
#
# read line results data
#
# line number (start point) x1, y1, (end point) x2, y2
#
#1 -0.001 0.001 2.001 0.001
```

## C.2 Ficheiro de *output*

# Results Data File

#Simply supported square plate with 2 elements

# Generalized displacements results

|   |            |            |             |             |             |             |             |             |
|---|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.000E+000 | 1.000E+000 | 0.000E+000  | -7.360E-007 | 0.000E+000  | -7.647E-008 | 0.000E+000  | 0.000E+000  |
| 2 | 0.000E+000 | 0.000E+000 | 0.000E+000  | 0.000E+000  | 0.000E+000  | 0.000E+000  | -1.245E-006 | 0.000E+000  |
| 3 | 1.000E+000 | 1.000E+000 | 4.431E-007  | 0.000E+000  | 0.000E+000  | 1.041E-006  | 0.000E+000  | 1.041E-006  |
| 4 | 1.000E+000 | 0.000E+000 | 0.000E+000  | 0.000E+000  | -7.360E-007 | 0.000E+000  | 0.000E+000  | -7.647E-008 |
| 5 | 0.000E+000 | 5.000E-001 | -5.381E-007 |             |             |             |             |             |
| 6 | 1.000E+000 | 5.000E-001 | 0.000E+000  |             |             |             |             |             |
| 7 | 5.000E-001 | 1.000E+000 | 0.000E+000  |             |             |             |             |             |
| 8 | 5.000E-001 | 0.000E+000 | -5.381E-007 |             |             |             |             |             |
| 9 | 5.000E-001 | 5.000E-001 | -4.872E-007 |             |             |             |             |             |

# Generalized reactions results

|   |            |            |             |             |             |            |             |            |
|---|------------|------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|------------|
| 1 | 0.000E+000 | 1.000E+000 | -3.895E-001 | -----       | -6.870E-002 | -----      | -1.548E-004 | 6.311E-003 |
| 2 | 0.000E+000 | 0.000E+000 | -2.210E-001 | 5.886E-002  | 5.886E-002  | 5.288E-003 | -----       | 5.288E-003 |
| 3 | 1.000E+000 | 1.000E+000 | -----       | 4.632E-002  | 4.632E-002  | -----      | -7.237E-003 | -----      |
| 4 | 1.000E+000 | 0.000E+000 | -3.895E-001 | -6.870E-002 | -----       | 6.311E-003 | -1.548E-004 | -----      |
| 6 | 1.000E+000 | 5.000E-001 | 7.402E-002  |             |             |            |             |            |
| 7 | 5.000E-001 | 1.000E+000 | 7.402E-002  |             |             |            |             |            |

# Resulting generalized forces

Total force is -1.000E+000

Total moment x is 3.647E-002

Total moment y is 3.647E-002

# Moments (mxx, myy, mxy) and shear (vx, vy) results

|   |   |            |            |             |             |             |             |             |
|---|---|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 1 | 0.000E+000 | 1.000E+000 | -1.120E-002 | -3.361E-003 | 0.000E+000  | 6.753E-001  | -8.580E-002 |
| 1 | 2 | 0.000E+000 | 0.000E+000 | 0.000E+000  | 0.000E+000  | -1.277E-001 | 1.456E-002  | 1.456E-002  |
| 1 | 3 | 1.000E+000 | 0.000E+000 | -3.361E-003 | -1.120E-002 | 0.000E+000  | -8.580E-002 | 6.753E-001  |
| 2 | 1 | 0.000E+000 | 1.000E+000 | -1.120E-002 | -3.361E-003 | 0.000E+000  | 8.469E-001  | 8.866E-002  |
| 2 | 2 | 1.000E+000 | 0.000E+000 | -3.361E-003 | -1.120E-002 | 0.000E+000  | 8.866E-002  | 8.469E-001  |
| 2 | 3 | 1.000E+000 | 1.000E+000 | 1.982E-001  | 1.982E-001  | 0.000E+000  | 9.893E-002  | 9.893E-002  |

Flexure strain energy: 9.290808E-008



## Apêndice D

# Resultados Numéricos

### D.1 *Patch Test*

| Elemento | Nó | Coordenada $x_1$ | Coordenada $x_2$ | $m_{11} (\times 10^{-15})$ | $m_{22} (\times 10^{-15})$ | $m_{12}$ |
|----------|----|------------------|------------------|----------------------------|----------------------------|----------|
| 1        | 1  | 0,0              | 0,0              | 0,00000                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 1        | 2  | 40,0             | 0,0              | 0,00000                    | 3,55271                    | 1,00000  |
| 1        | 3  | 13,0             | 7,0              | -0,01388                   | -5,05151                   | 1,00000  |
| 2        | 1  | 13,0             | 7,0              | 1,72085                    | -45,07505                  | 1,00000  |
| 2        | 2  | 40,0             | 0,0              | 0,22204                    | -1,77636                   | 1,00000  |
| 2        | 3  | 35,0             | 4,0              | 0,00000                    | -28,42171                  | 1,00000  |
| 3        | 1  | 18,0             | 14,0             | -3,49720                   | -0,49960                   | 1,00000  |
| 3        | 2  | 0,0              | 20,0             | 1,11022                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 3        | 3  | 0,0              | 0,0              | -0,22204                   | 0,00000                    | 1,00000  |
| 4        | 1  | 13,0             | 7,0              | -0,22204                   | -4,27436                   | 1,00000  |
| 4        | 2  | 18,0             | 14,0             | 12,43450                   | 1,77636                    | 1,00000  |
| 4        | 3  | 0,0              | 0,0              | 1,77636                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 5        | 1  | 13,0             | 7,0              | 2,52576                    | 13,43370                   | 1,00000  |
| 5        | 2  | 30,0             | 16,0             | 8,04912                    | 39,96803                   | 1,00000  |
| 5        | 3  | 18,0             | 14,0             | 10,05446                   | 31,75238                   | 1,00000  |
| 6        | 1  | 13,0             | 7,0              | 0,06245                    | -2,31759                   | 1,00000  |
| 6        | 2  | 35,0             | 4,0              | -0,05551                   | -4,74620                   | 1,00000  |
| 6        | 3  | 30,0             | 16,0             | 0,77716                    | -3,23352                   | 1,00000  |
| 7        | 1  | 35,0             | 4,0              | 7,77156                    | 1,94289                    | 1,00000  |
| 7        | 2  | 40,0             | 20,0             | -1,11022                   | -4,55191                   | 1,00000  |
| 7        | 3  | 30,0             | 16,0             | 3,49720                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 8        | 1  | 40,0             | 0,0              | 0,00000                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 8        | 2  | 40,0             | 20,0             | 0,00000                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 8        | 3  | 35,0             | 4,0              | 0,00000                    | 0,51348                    | 1,00000  |
| 9        | 1  | 18,0             | 14,0             | 4,37150                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 9        | 2  | 30,0             | 16,0             | 8,31626                    | -0,22204                   | 1,00000  |
| 9        | 3  | 0,0              | 20,0             | 0,55511                    | -35,52714                  | 1,00000  |
| 10       | 1  | 30,0             | 16,0             | 0,23592                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 10       | 2  | 40,0             | 20,0             | 0,00000                    | 0,00000                    | 1,00000  |
| 10       | 3  | 0,0              | 20,0             | 0,00000                    | 0,00000                    | 1,00000  |

Tabela D.1: Campo de momentos do elemento T18 obtidos no *patch test* para  $\nu = 0$ .

## D.2 Teste de Distorção

| Elemento | $L$ | $w(L, 0)(\times 10^{-3})$ | Erro (%) | $w(L, 1)(\times 10^{-3})$ | Erro (%) |
|----------|-----|---------------------------|----------|---------------------------|----------|
| T21      | 1   | -2,29                     | -0,51    | 2,30                      | -0,01    |
|          | 2   | -5,21                     | -1,66    | 5,30                      | -0,03    |
|          | 3   | -8,05                     | -3,00    | 8,27                      | -0,33    |
|          | 4   | -10,84                    | -4,02    | 11,22                     | -0,71    |
|          | 5   | -13,62                    | -4,76    | 14,15                     | -1,05    |
|          | 6   | -16,38                    | -5,30    | 17,06                     | -1,35    |
|          | 7   | -19,14                    | -5,71    | 19,97                     | -1,59    |
|          | 8   | -21,89                    | -6,04    | 22,88                     | -1,80    |
|          | 9   | -24,64                    | -6,30    | 25,78                     | -1,98    |
|          | 10  | -27,39                    | -6,52    | 28,67                     | -2,13    |
|          | 11  | -30,14                    | -6,69    | 31,57                     | -2,25    |
|          | 12  | -32,88                    | -6,84    | 34,46                     | -2,37    |
| T18      | 1   | -2,27                     | -1,40    | 2,28                      | -0,64    |
|          | 2   | -5,16                     | -2,61    | 5,15                      | -2,76    |
|          | 3   | -7,86                     | -5,28    | 7,95                      | -4,19    |
|          | 4   | -10,48                    | -7,21    | 10,73                     | -5,06    |
|          | 5   | -13,08                    | -8,49    | 13,49                     | -5,65    |
|          | 6   | -15,68                    | -9,36    | 16,25                     | -6,08    |
|          | 7   | -18,27                    | -9,97    | 19,00                     | -6,41    |
|          | 8   | -20,87                    | -10,42   | 21,74                     | -6,67    |
|          | 9   | -23,47                    | -10,77   | 24,49                     | -6,89    |
|          | 10  | -26,06                    | -11,04   | 27,23                     | -7,07    |
|          | 11  | -28,66                    | -11,26   | 29,97                     | -7,22    |
|          | 12  | -31,26                    | -11,44   | 32,70                     | -7,34    |

Tabela D.2: Valores numéricos dos deslocamentos dos vértices da laje rectangular no teste de distorção e respectivos erros para os elementos T21 e T18.

| Elemento | $L$ | $w(L, 0)(\times 10^{-3})$ | Erro (%) | $w(L, 1)(\times 10^{-3})$ | Erro (%) |
|----------|-----|---------------------------|----------|---------------------------|----------|
| HCT12    | 1   | -2,18                     | -5,00    | 1,99                      | -13,21   |
|          | 2   | -4,84                     | -8,55    | 4,23                      | -20,13   |
|          | 3   | -7,43                     | -10,47   | 6,26                      | -24,59   |
|          | 4   | -9,98                     | -11,70   | 8,23                      | -27,19   |
|          | 5   | -12,51                    | -12,52   | 10,18                     | -28,77   |
|          | 6   | -15,03                    | -13,10   | 12,14                     | -29,79   |
|          | 7   | -17,55                    | -13,53   | 14,11                     | -30,49   |
|          | 8   | -20,07                    | -13,86   | 16,08                     | -31,00   |
|          | 9   | -22,59                    | -14,11   | 18,05                     | -31,37   |
|          | 10  | -25,10                    | -14,32   | 20,02                     | -31,66   |
|          | 11  | -27,62                    | -14,50   | 22,00                     | -31,89   |
|          | 12  | -30,13                    | -14,64   | 23,97                     | -32,08   |
| HCT9     | 1   | -1,54                     | -33,03   | 1,40                      | -39,10   |
|          | 2   | -1,74                     | -67,19   | 2,56                      | -51,64   |
|          | 3   | -0,00                     | -88,14   | 3,09                      | -62,76   |
|          | 4   | -0,00                     | -99,31   | 3,48                      | -69,22   |
|          | 5   | -0,00                     | -105,54  | 3,86                      | -72,97   |
|          | 6   | 1,60                      | -109,26  | 4,28                      | -75,27   |
|          | 7   | 2,36                      | -111,63  | 4,72                      | -76,76   |
|          | 8   | 3,08                      | -113,21  | 5,18                      | -77,77   |
|          | 9   | 3,76                      | -114,31  | 5,66                      | -78,49   |
|          | 10  | 4,43                      | -115,11  | 6,15                      | -79,02   |
|          | 11  | 5,07                      | -115,71  | 6,65                      | -79,43   |
|          | 12  | 5,70                      | -116,16  | 7,15                      | -79,74   |

Tabela D.3: Valores numéricos dos deslocamentos dos vértices da laje rectangular no teste de distorção e respectivos erros para os elementos HCT12 e HCT9.

## D.3 Laje Rectangular, Simplesmente Apoiada

### D.3.1 Carregamento Uniforme

Apresentam-se de seguida os resultados numéricos das grandezas em estudo para o caso da laje rectangular sujeita a carga efectiva uniformemente distribuída.

A obtenção dos valores numéricos de algumas grandezas associados a um determinado nó, podem obrigar ao cálculo de uma média ponderada. No caso dos elementos HCT, ainda há que ter em consideração a presença dos subelementos. Contudo, no caso dos momentos flectores e, para o grau de precisão necessário, não se registam diferenças nos valores nos nós para os diferentes subelementos.

Na tabela D.5 onde se apresentam os valores obtidos para os momentos flectores no centro da laje,  $m_{11}$  e  $m_{22}^{\text{máx}}$  e respectivos erros, é importante salientar que a geometria da laje em análise relativamente ao referencial é diferente daquela utilizada para a obtenção dos valores exactos. Neste caso, tem-se que  $a > b$  enquanto que naquele se tinha  $a < b$ , daí os valores numéricos obtidos para  $m_{11}$  terem que ser comparados com os valores exactos de  $m_{22}$  e vice-versa.

Os valores numéricos dos momentos torsores mínimos nos cantos da laje,  $m_{12}^{\text{mín}}$ , e respectivos erros, assim como as reacções de canto máximas dadas por  $R_{\text{máx}} = -2m_{12}^{\text{mín}}$ , são fornecidos na tabela D.6. Note-se que as reacções de canto têm o sentido do eixo  $x_3$ .

Para o caso particular do esforço transversal máximo,  $v_1^{\text{máx}}$ , este registar-se-á nos nós sobre o bordo apoiado em  $x_1 = 0$  e sobre o eixo de simetria em  $x_2 = 1$ . Os resultados registados, as médias e respectivos erros apresentam-se na tabela D.7. Do mesmo modo, o esforço transversal máximo,  $v_2^{\text{máx}}$  regista-se sobre o bordo apoiado em  $x_2 = 0$  e sobre o eixo de simetria em  $x_1 = 0$ . Os mesmos valores numéricos para este esforço são dados na tabela D.8. De referir que, à semelhança dos momentos flectores, os valores numéricos de  $v_1$  terão de ser comparados com os valores exactos de  $v_2$  e vice-versa.

| $h$    | Elemento | $U (\times 10^{-6})$ | Erro (%)              | $w_{\text{máx}} (\times 10^{-6})$ | Erro (%)               |
|--------|----------|----------------------|-----------------------|-----------------------------------|------------------------|
| 1      | T21      | 1,92353687935        | $9,28 \cdot 10^{-03}$ | 1,105930705491                    | $1,08 \cdot 10^{-02}$  |
|        | T18      | 1,92126335034        | $1,27 \cdot 10^{-01}$ | 1,106163189590                    | $-1,02 \cdot 10^{-02}$ |
|        | HCT12    | 1,84744491538        | $3,96 \cdot 10^{+00}$ | 1,061453395753                    | $4,03 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9     | 1,74911152246        | $9,08 \cdot 10^{+00}$ | 1,007000019315                    | $8,96 \cdot 10^{+00}$  |
| 0,5    | T21      | 1,92371306102        | $1,24 \cdot 10^{-04}$ | 1,106048590145                    | $1,28 \cdot 10^{-04}$  |
|        | T18      | 1,92364962681        | $3,42 \cdot 10^{-03}$ | 1,106050960350                    | $-8,63 \cdot 10^{-05}$ |
|        | HCT12    | 1,91378370672        | $5,16 \cdot 10^{-01}$ | 1,100530922941                    | $4,99 \cdot 10^{-01}$  |
|        | HCT9     | 1,87343591044        | $2,61 \cdot 10^{+00}$ | 1,079448942749                    | $2,41 \cdot 10^{+00}$  |
| 0,25   | T21      | 1,92371541807        | $1,91 \cdot 10^{-06}$ | 1,106049983846                    | $1,97 \cdot 10^{-06}$  |
|        | T18      | 1,92371396285        | $7,76 \cdot 10^{-05}$ | 1,106050031367                    | $-2,33 \cdot 10^{-06}$ |
|        | HCT12    | 1,92271663949        | $5,19 \cdot 10^{-02}$ | 1,105487202410                    | $5,09 \cdot 10^{-02}$  |
|        | HCT9     | 1,91119513850        | $6,51 \cdot 10^{-01}$ | 1,099778365660                    | $5,67 \cdot 10^{-01}$  |
| 0,125  | T21      | 1,92371545418        | $3,03 \cdot 10^{-08}$ | 1,106050005290                    | $3,06 \cdot 10^{-08}$  |
|        | T18      | 1,92371542396        | $1,60 \cdot 10^{-06}$ | 1,106050006202                    | $-5,18 \cdot 10^{-08}$ |
|        | HCT12    | 1,92363596720        | $4,13 \cdot 10^{-03}$ | 1,106001309076                    | $4,40 \cdot 10^{-03}$  |
|        | HCT9     | 1,92066106285        | $1,59 \cdot 10^{-01}$ | 1,104507443885                    | $1,39 \cdot 10^{-01}$  |
| 0,0625 | T21      | 1,92371545466        | $5,51 \cdot 10^{-09}$ | 1,106050005631                    | $-2,63 \cdot 10^{-10}$ |
|        | T18      | 1,92371545451        | $1,35 \cdot 10^{-08}$ | 1,106050005730                    | $-9,19 \cdot 10^{-09}$ |
|        | HCT12    | 1,92370988742        | $2,89 \cdot 10^{-04}$ | 1,106046184635                    | $3,45 \cdot 10^{-04}$  |
|        | HCT9     | 1,92296668222        | $3,89 \cdot 10^{-02}$ | 1,105667735086                    | $3,46 \cdot 10^{-02}$  |

Tabela D.4: Valores da energia de deformação e do deslocamento máximo no centro da laje para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. Os valores exactos são  $U = 1,92371545477 \cdot 10^{-06}$  e  $w_{\text{máx}} = 1,106050005629 \cdot 10^{-06}$ .

| $h$    | Elemento | $m_{11} (\times 10^{-1})$ | Erro (%)               | $m_{22}^{\text{máx}} (\times 10^{-1})$ | Erro (%)               |
|--------|----------|---------------------------|------------------------|----------------------------------------|------------------------|
| 1      | T21      | 1,85949735                | $-2,96 \cdot 10^{-01}$ | 4,08516457                             | $-4,39 \cdot 10^{-01}$ |
|        | T18      | 1,84901577                | $2,69 \cdot 10^{-01}$  | 4,07764700                             | $2,54 \cdot 10^{-01}$  |
|        | HCT12    | 1,50004919                | $1,91 \cdot 10^{+01}$  | 3,91363732                             | $3,78 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9     | 1,31305274                | $2,92 \cdot 10^{+01}$  | 3,69395024                             | $9,18 \cdot 10^{+00}$  |
| 0,5    | T21      | 1,85428210                | $-1,46 \cdot 10^{-02}$ | 4,06833401                             | $-2,48 \cdot 10^{-02}$ |
|        | T18      | 1,85362879                | $2,07 \cdot 10^{-02}$  | 4,06794365                             | $-1,52 \cdot 10^{-02}$ |
|        | HCT12    | 1,73369221                | $6,49 \cdot 10^{+00}$  | 4,03261967                             | $8,53 \cdot 10^{-01}$  |
|        | HCT9     | 1,62294082                | $1,25 \cdot 10^{+01}$  | 4,02682247                             | $9,96 \cdot 10^{-01}$  |
| 0,25   | T21      | 1,85402866                | $-9,06 \cdot 10^{-04}$ | 4,06738667                             | $-1,56 \cdot 10^{-03}$ |
|        | T18      | 1,85398890                | $1,24 \cdot 10^{-03}$  | 4,06736270                             | $-9,66 \cdot 10^{-04}$ |
|        | HCT12    | 1,81991864                | $1,84 \cdot 10^{+00}$  | 4,05872537                             | $2,11 \cdot 10^{-01}$  |
|        | HCT9     | 1,92631942                | $-3,90 \cdot 10^{+00}$ | 4,11303982                             | $-1,12 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,125  | T21      | 1,85401291                | $-5,64 \cdot 10^{-05}$ | 4,06732736                             | $-9,71 \cdot 10^{-05}$ |
|        | T18      | 1,85401046                | $7,56 \cdot 10^{-05}$  | 4,06732586                             | $-6,02 \cdot 10^{-05}$ |
|        | HCT12    | 1,84514813                | $4,78 \cdot 10^{-01}$  | 4,06530740                             | $4,96 \cdot 10^{-02}$  |
|        | HCT9     | 1,83566168                | $9,90 \cdot 10^{-01}$  | 4,06582988                             | $3,67 \cdot 10^{-02}$  |
| 0,0625 | T21      | 1,85401193                | $-3,52 \cdot 10^{-06}$ | 4,06732366                             | $-6,07 \cdot 10^{-06}$ |
|        | T18      | 1,85401177                | $4,66 \cdot 10^{-06}$  | 4,06732356                             | $-3,77 \cdot 10^{-06}$ |
|        | HCT12    | 1,85818292                | $-2,25 \cdot 10^{-01}$ | 4,06938933                             | $-5,08 \cdot 10^{-02}$ |
|        | HCT9     | 1,84871607                | $2,86 \cdot 10^{-01}$  | 4,06687816                             | $1,09 \cdot 10^{-02}$  |

Tabela D.5: Valores dos momentos flectores  $m_{11}$  e  $m_{22}^{\text{máx}}$  no centro da laje rectangular para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. Os valores exactos são  $m_{11} = 1,85401186 \cdot 10^{-01}$  e  $m_{22}^{\text{máx}} = 4,06732341 \cdot 10^{-01}$ .

| $h$    | Elemento | $m_{12}^{\min} (\times 10^{-1})$ |            |          | $R_{\max} (\times 10^{-1})$ | Erro(%)               |
|--------|----------|----------------------------------|------------|----------|-----------------------------|-----------------------|
| 1      | T21      | -1,82647                         |            |          | 3,65294                     | $1,31 \cdot 10^{+00}$ |
|        | T18      | -1,78906                         |            |          | 3,57813                     | $3,33 \cdot 10^{+00}$ |
|        |          | Subelem. 1                       | Subelem. 2 | Média    |                             |                       |
|        | HCT12    | -1,64024                         | -1,58693   | -1,61358 | 3,22717                     | $1,28 \cdot 10^{+01}$ |
|        | HCT9     | -1,38150                         | -1,11404   | -1,24777 | 2,49554                     | $3,26 \cdot 10^{+01}$ |
| 0,5    | T21      | -1,84457                         |            |          | 3,68914                     | $3,30 \cdot 10^{-01}$ |
|        | T18      | -1,83565                         |            |          | 3,67129                     | $8,12 \cdot 10^{-01}$ |
|        |          | Subelem. 1                       | Subelem. 2 | Média    |                             |                       |
|        | HCT12    | -1,70755                         | -1,68961   | -1,69858 | 3,39716                     | $8,22 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT9     | -1,65729                         | -1,56283   | -1,61006 | 3,22012                     | $1,30 \cdot 10^{+01}$ |
| 0,25   | T21      | -1,84918                         |            |          | 3,69836                     | $8,13 \cdot 10^{-02}$ |
|        | T18      | -1,84686                         |            |          | 3,69372                     | $2,07 \cdot 10^{-01}$ |
|        |          | Subelem. 1                       | Subelem. 2 | Média    |                             |                       |
|        | HCT12    | -1,78700                         | -1,79239   | -1,78970 | 3,57939                     | $3,30 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT9     | -1,77746                         | -1,75319   | -1,76532 | 3,53064                     | $4,61 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,125  | T21      | -1,85031                         |            |          | 3,70062                     | $2,02 \cdot 10^{-02}$ |
|        | T18      | -1,84972                         |            |          | 3,69944                     | $5,19 \cdot 10^{-02}$ |
|        |          | Subelem. 1                       | Subelem. 2 | Média    |                             |                       |
|        | HCT12    | -1,82961                         | -1,83098   | -1,83030 | 3,66059                     | $1,10 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT9     | -1,82548                         | -1,81932   | -1,82240 | 3,64479                     | $1,53 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,0625 | T21      | -1,85059                         |            |          | 3,70118                     | $5,05 \cdot 10^{-03}$ |
|        | T18      | -1,85044                         |            |          | 3,70088                     | $1,30 \cdot 10^{-02}$ |
|        |          | Subelem. 1                       | Subelem. 2 | Média    |                             |                       |
|        | HCT12    | -1,84448                         | -1,84414   | -1,84431 | 3,68862                     | $3,44 \cdot 10^{-01}$ |
|        | HCT9     | -1,84252                         | -1,84098   | -1,84175 | 3,68350                     | $4,83 \cdot 10^{-01}$ |

Tabela D.6: Valores do momento torsor mínimo  $m_{12}^{\min}$  e da reacção máxima  $R_{\max}$  no canto da laje rectangular para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. Os valores exactos são  $m_{12} = -1,85068 \cdot 10^{-01}$  e  $R_{\max} = 3,70136 \cdot 10^{-01}$ .

| $h$    | Elem. | $v_1^{\text{máx}} (\times 10^{-1})$ |          |            |           |          | Erro(%)                |
|--------|-------|-------------------------------------|----------|------------|-----------|----------|------------------------|
| 1      | T21   | Elem. 1                             |          | Elem. 2    |           | Média    | $-5,65 \cdot 10^{+00}$ |
|        |       | 8,605292                            |          | 7,019099   |           | 7,812195 |                        |
|        | T18   | 5,887646                            |          | 4,298360   |           | 5,093003 | $3,11 \cdot 10^{+01}$  |
|        |       | Subelem. 1                          |          | Subelem. 2 |           | Média    |                        |
|        | HCT12 | 0,866757                            | 2,309615 | 2,898607   | -0,357742 | 1,429309 | $8,07 \cdot 10^{+01}$  |
|        | HCT9  | 1,719410                            | 0,000000 | 0,000863   | 1,122864  | 0,712726 | $9,04 \cdot 10^{+01}$  |
| 0,5    | T21   | Elem. 1                             |          | Elem. 2    |           | Média    | $-1,34 \cdot 10^{+00}$ |
|        |       | 7,518680                            |          | 7,467860   |           | 7,493270 |                        |
|        | T18   | 6,971267                            |          | 6,545163   |           | 6,758215 | $8,60 \cdot 10^{+00}$  |
|        |       | Subelem. 1                          |          | Subelem. 2 |           | Média    |                        |
|        | HCT12 | 4,813887                            | 2,622960 | 4,542148   | 2,447418  | 3,606603 | $5,12 \cdot 10^{+01}$  |
|        | HCT9  | 5,540966                            | 0,602269 | 1,660246   | 3,130971  | 2,733613 | $6,30 \cdot 10^{+01}$  |
| 0,25   | T21   | Elem. 1                             |          | Elem. 2    |           | Média    | $-1,01 \cdot 10^{-01}$ |
|        |       | 7,401310                            |          | 7,402291   |           | 7,401801 |                        |
|        | T18   | 7,313575                            |          | 7,217898   |           | 7,265737 | $1,74 \cdot 10^{+00}$  |
|        |       | Subelem. 1                          |          | Subelem. 2 |           | Média    |                        |
|        | HCT12 | 6,059689                            | 4,939936 | 5,861605   | 5,029998  | 5,472807 | $2,60 \cdot 10^{+01}$  |
|        | HCT9  | 7,319325                            | 2,103994 | 2,359654   | 3,890255  | 3,918307 | $4,70 \cdot 10^{+01}$  |
| 0,125  | T21   | Elem. 1                             |          | Elem. 2    |           | Média    | $-6,27 \cdot 10^{-03}$ |
|        |       | 7,394749                            |          | 7,394819   |           | 7,394784 |                        |
|        | T18   | 7,380549                            |          | 7,355547   |           | 7,368048 | $3,55 \cdot 10^{-01}$  |
|        |       | Subelem. 1                          |          | Subelem. 2 |           | Média    |                        |
|        | HCT12 | 6,756896                            | 6,440665 | 6,618803   | 6,411719  | 6,557021 | $1,13 \cdot 10^{+01}$  |
|        | HCT9  | 8,068433                            | 3,038112 | 2,713999   | 4,399476  | 4,555005 | $3,84 \cdot 10^{+01}$  |
| 0,0625 | T21   | Elem. 1                             |          | Elem. 2    |           | Média    | $-3,93 \cdot 10^{-04}$ |
|        |       | 7,394347                            |          | 7,3943517  |           | 7,394349 |                        |
|        | T18   | 7,391357                            |          | 7,385117   |           | 7,388237 | $8,23 \cdot 10^{-02}$  |
|        |       | Subelem. 1                          |          | Subelem. 2 |           | Média    |                        |
|        | HCT12 | 7,087067                            | 7,013496 | 7,008090   | 6,972148  | 7,020200 | $5,06 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9  | 8,445859                            | 3,636627 | 2,916864   | 4,677848  | 4,919300 | $3,35 \cdot 10^{+01}$  |

Tabela D.7: Valores do esforço transverso máximo  $v_1^{\text{máx}}$  da laje rectangular para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. O valor exacto é  $v_1^{\text{máx}} = 7,394320 \cdot 10^{-01}$ .



| $h$      | Elem. | $v_2^{\text{máx}} (\times 10^{-1})$ |            |            |            |          | Erro(%)                |
|----------|-------|-------------------------------------|------------|------------|------------|----------|------------------------|
| 1        |       | Elem. 1                             |            | Elem. 2    |            | Média    |                        |
|          |       | 9,753271                            |            | 9,615937   |            | 9,684604 |                        |
|          | T18   | 9,023894                            |            | 8,757303   |            | 8,890598 | $4,41 \cdot 10^{+00}$  |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
|          | HCT12 | Subelem. 1                          | Subelem. 2 | Subelem. 1 | Subelem. 2 | Média    | $6,25 \cdot 10^{+01}$  |
|          |       | 3,991410                            | 1,928383   | 2,959264   | 5,089967   | 3,492256 |                        |
| 0,5      | HCT9  | 4,155519                            |            | 1,849068   |            | 4,242612 | $5,44 \cdot 10^{+01}$  |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
|          |       | Elem. 1                             |            | Elem. 2    |            | Média    |                        |
|          |       | 9,318322                            |            | 9,324261   |            | 9,321292 |                        |
|          | T18   | 9,332283                            |            | 9,239585   |            | 9,285934 | $1,58 \cdot 10^{-01}$  |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
| 0,25     | HCT12 | Subelem. 1                          | Subelem. 2 | Subelem. 1 | Subelem. 2 | Média    | $3,40 \cdot 10^{+01}$  |
|          |       | 6,375308                            | 5,505968   | 5,708170   | 6,966336   | 6,138945 |                        |
|          | HCT9  | 6,705946                            |            | 2,619076   |            | 6,108711 | $3,43 \cdot 10^{+01}$  |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
|          |       | Elem. 1                             |            | Elem. 2    |            | Média    |                        |
|          |       | 9,301816                            |            | 9,302162   |            | 9,301989 |                        |
| 0,125    | T18   | 9,322857                            |            | 9,302518   |            | 9,312687 | $-1,30 \cdot 10^{-01}$ |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
|          | HCT12 | Subelem. 1                          | Subelem. 2 | Subelem. 1 | Subelem. 2 | Média    | $1,64 \cdot 10^{+01}$  |
|          |       | 7,765201                            | 7,534074   | 7,699444   | 8,105695   | 7,776103 |                        |
|          | HCT9  | 7,762304                            |            | 3,228065   |            | 7,304665 | $2,15 \cdot 10^{+01}$  |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
| 0,0625   |       | Elem. 1                             |            | Elem. 2    |            | Média    |                        |
|          |       | 9,300679                            |            | 9,300701   |            | 9,300690 |                        |
|          | T18   | 9,307618                            |            | 9,302467   |            | 9,305042 | $-4,77 \cdot 10^{-02}$ |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
|          | HCT12 | Subelem. 1                          | Subelem. 2 | Subelem. 1 | Subelem. 2 | Média    | $7,68 \cdot 10^{+00}$  |
|          |       | 8,704953                            | 8,610411   | 8,500752   | 8,529815   | 8,586483 |                        |
| 0,03125  | HCT9  | 7,385009                            |            | 12,75007   |            | 10,06754 | $-8,25 \cdot 10^{+00}$ |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
|          |       | Elem. 1                             |            | Elem. 2    |            | Média    |                        |
|          |       | 9,300608                            |            | 9,300609   |            | 9,300608 |                        |
|          | T18   | 9,302454                            |            | 9,301158   |            | 9,301806 | $-1,29 \cdot 10^{-02}$ |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
| 0,015625 | HCT12 | Subelem. 1                          | Subelem. 2 | Subelem. 1 | Subelem. 2 | Média    | $3,68 \cdot 10^{+00}$  |
|          |       | 8,916188                            | 8,925811   | 8,987275   | 9,004069   | 8,958336 |                        |
|          | HCT9  | 8,647070                            |            | 3,840523   |            | 8,419302 | $9,48 \cdot 10^{+00}$  |
|          |       |                                     |            |            |            |          |                        |
|          |       | Elem. 1                             |            | Elem. 2    |            | Média    |                        |
|          |       | 9,300603                            |            | 9,300603   |            | 9,300603 |                        |

Tabela D.8: Valores do esforço transversal máximo  $v_2^{\text{máx}}$  da laje rectangular para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. O valor exacto é  $v_2^{\text{máx}} = 9,300603 \cdot 10^{-01}$ .

## D.3.2 Variação de Temperatura Constante

| $h$    | Elemento | $w_{\text{máx}} (\times 10^{-04})$ | Erro (%)               |
|--------|----------|------------------------------------|------------------------|
| 1      | T21      | 5,921009118119                     | $5,51 \cdot 10^{-03}$  |
|        | T18      | 5,920441759500                     | $1,51 \cdot 10^{-02}$  |
|        | HCT12    | 5,767294375475                     | $2,60 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9     | 5,639419031431                     | $4,76 \cdot 10^{+00}$  |
| 0,5    | T21      | 5,921337168679                     | $-3,21 \cdot 10^{-05}$ |
|        | T18      | 5,921290475768                     | $7,56 \cdot 10^{-04}$  |
|        | HCT12    | 5,901278678607                     | $3,39 \cdot 10^{-01}$  |
|        | HCT9     | 5,843942251161                     | $1,31 \cdot 10^{+00}$  |
| 0,25   | T21      | 5,921337168679                     | $-4,26 \cdot 10^{-07}$ |
|        | T18      | 5,921290475768                     | $1,59 \cdot 10^{-05}$  |
|        | HCT12    | 5,901278678607                     | $3,46 \cdot 10^{-02}$  |
|        | HCT9     | 5,843942251161                     | $3,24 \cdot 10^{-01}$  |
| 0,125  | T21      | 5,921335271070                     | $-7,64 \cdot 10^{-09}$ |
|        | T18      | 5,921335251413                     | $3,24 \cdot 10^{-07}$  |
|        | HCT12    | 5,921157210413                     | $3,01 \cdot 10^{-03}$  |
|        | HCT9     | 5,916574484856                     | $8,04 \cdot 10^{-02}$  |
| 0,0625 | T21      | 5,921335270656                     | $-6,49 \cdot 10^{-10}$ |
|        | T18      | 5,921335270813                     | $-3,30 \cdot 10^{-09}$ |
|        | HCT12    | 5,921320993864                     | $2,41 \cdot 10^{-04}$  |
|        | HCT9     | 5,920151529929                     | $2,00 \cdot 10^{-02}$  |

Tabela D.9: Valores do deslocamento máximo no centro da laje para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. O valor exacto é  $w_{\text{máx}} = 5,921335270618 \cdot 10^{-04}$ .

| $h$    | Elemento | $m_{11} (\times 10^{+02})$ | Erro (%)               | $m_{22} (\times 10^{+01})$ | Erro (%)               | $m_{tt} (\times 10^{+02})$ | Erro (%)               |
|--------|----------|----------------------------|------------------------|----------------------------|------------------------|----------------------------|------------------------|
| 1      | T21      | -1,189667954               | $-2,27 \cdot 10^{-01}$ | -1,4235542                 | $2,74 \cdot 10^{+00}$  | -1,33511313773             | $-1,22 \cdot 10^{+00}$ |
|        | T18      | -1,192281702               | $-4,47 \cdot 10^{-01}$ | -1,4080285                 | $3,80 \cdot 10^{+00}$  | -1,33891179426             | $-3,81 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT12    | -1,389669793               | $-1,71 \cdot 10^{+01}$ | -4,1735474                 | $-1,85 \cdot 10^{+02}$ | -1,42950420869             | $-6,57 \cdot 10^{+01}$ |
|        | HCT9     | -1,133938449               | $4,47 \cdot 10^{+00}$  | -1,5742420                 | $-7,56 \cdot 10^{+00}$ | -1,14604947531             | $1,28 \cdot 10^{+02}$  |
| 0,5    | T21      | -1,187147940               | $-1,47 \cdot 10^{-02}$ | -1,4621570                 | $9,84 \cdot 10^{-02}$  | -1,33335039620             | $-1,17 \cdot 10^{-02}$ |
|        | T18      | -1,187229919               | $-2,16 \cdot 10^{-02}$ | -1,4615762                 | $1,38 \cdot 10^{-01}$  | -1,33455120194             | $-8,32 \cdot 10^{-01}$ |
|        | HCT12    | -1,238358973               | $-4,33 \cdot 10^{+00}$ | -2,1008477                 | $-4,35 \cdot 10^{+01}$ | -1,32729017687             | $4,13 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9     | -1,165601887               | $1,80 \cdot 10^{+00}$  | -1,5111783                 | $-3,25 \cdot 10^{+00}$ | -1,36115380415             | $-1,90 \cdot 10^{+01}$ |
| 0,25   | T21      | -1,186983491               | $-8,33 \cdot 10^{-04}$ | -1,4634973                 | $6,83 \cdot 10^{-03}$  | -1,33333355103             | $-1,49 \cdot 10^{-04}$ |
|        | T18      | -1,186987892               | $-1,20 \cdot 10^{-03}$ | -1,4634635                 | $9,14 \cdot 10^{-03}$  | -1,33353345986             | $-1,37 \cdot 10^{-01}$ |
|        | HCT12    | -1,200316594               | $-1,12 \cdot 10^{+00}$ | -1,6117963                 | $-1,01 \cdot 10^{+01}$ | -1,32940731681             | $2,68 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9     | -1,180497361               | $5,46 \cdot 10^{-01}$  | -1,4520333                 | $7,90 \cdot 10^{-01}$  | -1,33943413756             | $-4,17 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,125  | T21      | -1,186974222               | $-5,24 \cdot 10^{-05}$ | -1,4635911                 | $4,26 \cdot 10^{-04}$  | -1,33333333966             | $-4,33 \cdot 10^{-06}$ |
|        | T18      | -1,186974446               | $-7,12 \cdot 10^{-05}$ | -1,4635891                 | $5,63 \cdot 10^{-04}$  | -1,33336039873             | $-1,85 \cdot 10^{-02}$ |
|        | HCT12    | -1,190418587               | $-2,90 \cdot 10^{-01}$ | -1,4994207                 | $-2,45 \cdot 10^{+00}$ | -1,33257783592             | $5,16 \cdot 10^{-01}$  |
|        | HCT9     | -1,184824229               | $1,81 \cdot 10^{-01}$  | -1,4531601                 | $7,13 \cdot 10^{-01}$  | -1,33455333913             | $-8,34 \cdot 10^{-01}$ |
| 0,0625 | T21      | -1,186973640               | $-3,28 \cdot 10^{-06}$ | -1,4635969                 | $2,66 \cdot 10^{-05}$  | -1,33333333353             | $-1,32 \cdot 10^{-07}$ |
|        | T18      | -1,186973652               | $-4,35 \cdot 10^{-06}$ | -1,4635968                 | $3,52 \cdot 10^{-05}$  | -1,33333677902             | $-2,35 \cdot 10^{-03}$ |
|        | HCT12    | -1,187846954               | $-7,36 \cdot 10^{-02}$ | -1,4724432                 | $-6,04 \cdot 10^{-01}$ | -1,33326247270             | $4,84 \cdot 10^{-02}$  |
|        | HCT9     | -1,186282557               | $5,82 \cdot 10^{-02}$  | -1,4591851                 | $3,01 \cdot 10^{-01}$  | -1,33373973687             | $-2,78 \cdot 10^{-01}$ |

Tabela D.10: Valores dos momentos flectores  $m_{11}$  e  $m_{22}$  no centro da laje rectangular para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. Os valores exactos são  $m_{11} = -1,186973601 \cdot 10^{+02}$ ,  $m_{22} = -1,4635973 \cdot 10^{+01}$  e  $m_{tt} = -1,33333333333 \cdot 10^{+02}$ .

### D.4 Laje Circular Encastrada Sujeita a Carga Pontual

| $h$    | Elemento | $U (\times 10^{-08})$ | Erro (%)              | $w_{\text{máx}} (\times 10^{-07})$ | Erro (%)              |
|--------|----------|-----------------------|-----------------------|------------------------------------|-----------------------|
| 0,5    | T21      | 6,4678                | $4,73 \cdot 10^{+00}$ | 1,2936                             | $4,73 \cdot 10^{+00}$ |
|        | T18      | 6,3403                | $6,61 \cdot 10^{+00}$ | 1,2681                             | $6,61 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT12    | 5,8320                | $1,41 \cdot 10^{+01}$ | 1,1664                             | $1,41 \cdot 10^{+01}$ |
|        | HCT9     | 5,5990                | $1,75 \cdot 10^{+01}$ | 1,1198                             | $1,75 \cdot 10^{+01}$ |
| 0,25   | T21      | 6,7028                | $1,27 \cdot 10^{+00}$ | 1,3406                             | $1,27 \cdot 10^{+00}$ |
|        | T18      | 6,5945                | $2,86 \cdot 10^{+00}$ | 1,3189                             | $2,86 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT12    | 6,5322                | $3,78 \cdot 10^{+00}$ | 1,3064                             | $3,78 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT9     | 6,3724                | $6,14 \cdot 10^{+00}$ | 1,2745                             | $6,14 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,125  | T21      | 6,7692                | $2,91 \cdot 10^{-01}$ | 1,3538                             | $2,91 \cdot 10^{-01}$ |
|        | T18      | 6,7020                | $1,28 \cdot 10^{+00}$ | 1,3404                             | $1,28 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT12    | 6,7180                | $1,04 \cdot 10^{+00}$ | 1,3436                             | $1,04 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT9     | 6,6606                | $1,89 \cdot 10^{+00}$ | 1,3321                             | $1,89 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,0625 | T21      | 6,7837                | $7,79 \cdot 10^{-02}$ | 1,3567                             | $7,79 \cdot 10^{-02}$ |
|        | T18      | 6,7479                | $6,05 \cdot 10^{-01}$ | 1,3496                             | $6,05 \cdot 10^{-01}$ |
|        | HCT12    | 6,7649                | $3,54 \cdot 10^{-01}$ | 1,3530                             | $3,54 \cdot 10^{-01}$ |
|        | HCT9     | 6,7461                | $6,31 \cdot 10^{-01}$ | 1,3492                             | $6,31 \cdot 10^{-01}$ |

Tabela D.11: Valores da energia de deformação e do deslocamento máximo no centro da laje para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. Os valores exactos são  $U = 6,78895 \cdot 10^{-08}$  e  $w_{\text{máx}} = 1,35779 \cdot 10^{-07}$ .

| $h$    | Elemento | $m_{11} (\times 10^{-08})$ | Erro (%)               |
|--------|----------|----------------------------|------------------------|
| 0,5    | T21      | -6,78                      | $1,48 \cdot 10^{+01}$  |
|        | T18      | -1,05                      | $-3,21 \cdot 10^{+01}$ |
|        | HCT12    | -7,70                      | $3,19 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9     | -8,47                      | $-6,38 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,25   | T21      | -7,48                      | $6,02 \cdot 10^{+00}$  |
|        | T18      | -8,28                      | $-4,08 \cdot 10^{+00}$ |
|        | HCT12    | -7,74                      | $2,68 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9     | -8,14                      | $-2,27 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,125  | T21      | -7,78                      | $2,22 \cdot 10^{+00}$  |
|        | T18      | -7,38                      | $7,22 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT12    | -7,94                      | $2,13 \cdot 10^{-01}$  |
|        | HCT9     | -8,12                      | $-2,00 \cdot 10^{+00}$ |
| 0,0625 | T21      | -7,89                      | $8,88 \cdot 10^{-01}$  |
|        | T18      | -7,66                      | $3,68 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT12    | -7,64                      | $3,98 \cdot 10^{+00}$  |
|        | HCT9     | -7,70                      | $3,24 \cdot 10^{+00}$  |

Tabela D.12: Valores do momento flector  $m_{11}$  no ponto de coordenadas (0,1) para os diferentes refinamentos das malhas dos quatro elementos em estudo e respectivos erros. O valor exacto é  $m_{11} = -7,96 \cdot 10^{-02}$ .



# Bibliografia

- ADINA (2005). *ADINA – Volume I: Theory and Modeling Guide*. ADINA R & D Inc. Report ARD 05-2.
- Argyris, J. H. (1969). ASKA — Automatic System for Kinematic Analysis: A universal system for structural analysis based on the matrix displacement (finite element) method. *Nuclear Engineering and Design*, 10(4), 441–455.
- Argyris, J. H. e K. E. Buck (1968). A sequel to the technical note 14 on the TUBA family of plate elements. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, 72(695), 977–983.
- Argyris, J. H., K. E. Buck, D. W. Scharpf, H. M. Hilber e G. Mareczek (1969). Some new elements for the matrix displacement method. Em L. Berke, R. M. Bader, W. J. Mykytow, J. S. Przemieniecki e M. H. Shirk (Editores) *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics held at Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 15-17 Outubro, 1968*, páginas 333–397. Air Force Dynamics Laboratory. AFFDL-TR-68-150.
- Argyris, J. H., I. Fried e D. W. Scharpf (1968). The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, 72(692), 701–709.
- Argyris, J. H. e D.W. Scharpf (1972). Matrix displacement analysis of shells and plates including transverse shear strain effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(1), 81–139.
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- Batoz, J.-L. e G. Dhatt (1990). *Modélisation des structures par éléments finis: Poutres et plaques*, volume 2. Hermès Sciences Publications, Paris, França. Em francês.
- Batoz, J.-L. e M. B. Tahar (1982). Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(11), 1655–1677.
- Bell, K. (1969). A refined triangular plate bending finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(1), 101–122.
- Bernadou, M. e K. Hassan (1981). Basis functions for general Hsieh-Clough-Tocher triangles, complete or reduced. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(5), 784–789.

- Braess, D. (2007). *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, terceira edição.
- Brebbia, C. A. e J. Dominguez (1992). *Boundary Elements: An Introductory Course*. Witt Press, Computational Mechanics Publications, segunda edição.
- Brenner, S. C. e L. R. Scott (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, terceira edição.
- Butlin, G. A. e R. Ford (1970). A compatible triangular plate bending finite element. *International Journal of Solids and Structures*, 6(3), 323–332.
- Castro, Luís (1996). *Wavelets e séries de Walsh em elementos finitos*. Tese de Doutorado, Instituto Superior Técnico.
- Chadwick, P. (1999). *Continuum Mechanics: Concise Theory and Problems*. Dover Publications, segunda edição.
- Chernuka, M. W., G. R. Cowper, G. M. Lindberg e M. D. Olson (1972). Finite element analysis of plates with curved edges. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4(1), 49–65.
- Chorin, A. J. (1968). Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22(104), 745–762.
- Ciarlet, P. G. (2002). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Classics in applied mathematics. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, segunda edição.
- Clough, R. W. (1980). The finite element method after twenty-five years: A personal view. *Computers & Structures*, 12(4), 361–370.
- Clough, R. W. (1990). Original formulation of the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7(2), 89–101.
- Clough, R. W. (2001). Thoughts about the origin of the finite element method. *Computers & Structures*, 79(22–25), 2029–2030.
- Clough, R. W. (2004). Speech by professor R. W. Clough: Early history of the finite element method from the view point of a pioneer. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(1), 283–287.
- Clough, R. W. e C. A. Felippa (1969). A refined quadrilateral element for analysis of plate bending. Em L. Berke, R. M. Bader, W. J. Mykytow, J. S. Przemieniecki e M. H. Shirk (Editores) *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics held at Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 15-17 Outubro, 1968*, páginas 399–440. Air Force Dynamics Laboratory. AFFDL-TR-68-150.
- Clough, R. W. e J. L. Tocher (1966). Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. Em J. S. Przemieniecki, R. M. Bader, W. F. Bozich, J. R. Johnson e W. J. Mykytow (Editores) *Matrix Methods in Structural Mechanics, Proceedings of the Conference held at Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 26-28 Outubro, 1965*, páginas 515–545. Air Force Flight Dynamics Laboratory. AFFDL-TR-66-80.



- Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(1), 1–23. Também disponível em Classic Reprints Series, International Journal for Numerical Methods in Engineering, volume 37, número 13, páginas 2159–2187, 1994.
- Cowper, G. R., E. Kosko, G. M. Lindberg e M. D. Olson (1969). Static and dynamic applications of a high-precision triangular plate bending element. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 7(10), 1957–1965.
- Cowper, G. R., G. M. Lindberg e M. D. Olson (1970). Discussion of paper by Bruce M. Irons. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(3), 453–454.
- Dasgupta, S. e D. Sengupta (1990). A higher-order triangular plate bending element revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(3), 419–430.
- Domínguez, V. e F.-J. Sayas (2008). Algorithm 884: A simple Matlab implementation of the Argyris element. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 35(2), 16:1–16:11.
- Felippa, C. A. (2001). A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts. *Computers & Structures*, 79(14), 1313–1324.
- Gupta, K. K. e J. L. Meek (1996). A brief history of the beginning of the Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22), 3761–3774.
- Irons, Bruce M. (1969). A conforming quartic triangular element for plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(1), 29–45.
- Joseph, K. T. e K. Singa Rao (1979). A fast algorithm for triangular plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(7), 1100–1104.
- Kelvin, L. e P. G. Tait (1912). *Treatise on Natural Philosophy*, volume II. Cambridge University Press.
- Li, S. e W. K. Liu (2004). *Meshfree Particle Methods*. Springer.
- LNEC (1966). Vocabulário de teoria das estruturas. Technical report, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa. Especificação E183-1966.
- MATLAB (2010). *MATLAB, The Language of Technical Computing*. The MathWorks Inc. Versão 7.11.
- Okabe, M. (1993). Full-explicit interpolation formulas for the Argyris triangle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 106(3), 381–394.
- Okabe, M. (1994). Explicit interpolation formulas for the Bell triangle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 117(3–4), 411–421.
- Pavlova, Y. V. e T. D. Karamanski (1979). A note on plate bending analysis using triangular finite element TUBA 3. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(8), 1268–1270.

- Robinson, J. (1978). Element evaluation — a set of assessment points and standard tests. Em J. Robinson (Editor) *Finite Element Methods in the Commercial Environment*, volume um, páginas 217–247. Robinson and Associates. Papers presented at the Second World Congress on Finite Element Methods, 23–27 Outubro, Bournemouth, Dorset, Inglaterra.
- Samuelsson, A. e O. C. Zienkiewicz (2006). History of the stiffness method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(2), 149–157.
- Strang, G. and G. J. Fix (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nova Jérσία.
- Szilard, R. (2004). *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods*. John Wiley & Sons.
- Tiago, Carlos (2009). Teoria de lajes. Comunicação privada.
- Timoshenko, S. P. e J. N. Goodier (1970). *Theory of elasticity*. McGraw–Hill, terceira edição.
- Timoshenko, S. P. e S. Woinowsky-Krieger (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw–Hill, segunda edição.
- Williamson Jr., Frank (1980). An historical note on the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(6), 930–934.
- Wilson, E. L. (1993). Automation of the finite element method — A personal historical view. *Finite Elements in Analysis and Design*, 13(2–3), 91–104.
- Wolfram Research, Inc. (2010). *Mathematica Edition: Version 8.0*. Wolfram Research, Inc., Champaign, Ilinoís.
- Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor e J. Z. Zhu (2005). *Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, volume 1. Elsevier Butterworth–Heinemann, sexta edição.