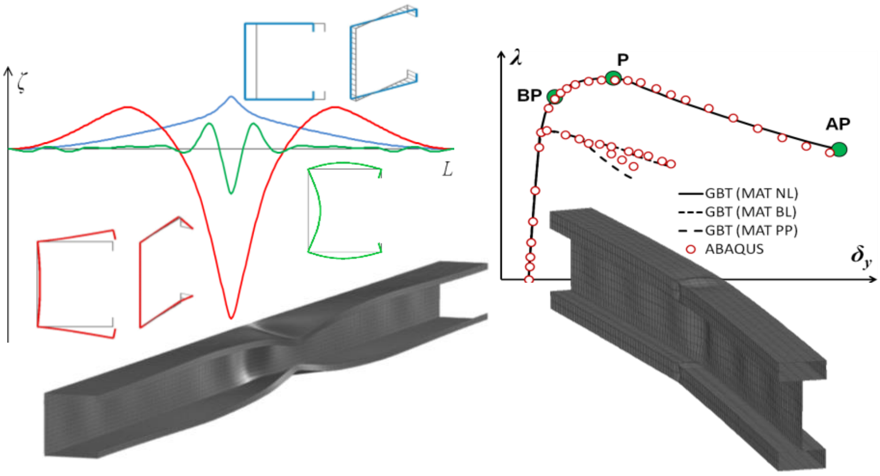
UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



ANÁLISES ELASTO-PLÁSTICAS DE 1ª E 2ª ORDEM DE PERFIS METÁLICOS DE PAREDE FINA UTILIZANDO A TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS

MIGUEL DA SILVA ABAMBRES

Orientador: Doutor Nuno Miguel Rosa Pereira Silvestre
Co-Orientador: Doutor Dinar Reis Zamith Camotim

Tese aprovada em provas públicas para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Civil

Qualificação atribuída pelo Júri: Aprovado com Muito Bom com Distinção

Júri

Presidente: Presidente do Conselho Científico do IST

Vogais: Doutor José Manuel de Almeida César de Sá
Doutor Luís Manuel Calado de Oliveira Martins
Doutor Dinar Reis Zamith Camotim
Doutor Francisco Baptista Esteves Virtuoso
Doutor Nuno Miguel Rosa Pereira Silvestre
Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves

2014

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

ANÁLISES ELASTO-PLÁSTICAS DE 1ª E 2ª ORDEM DE PERFIS METÁLICOS DE PAREDE FINA UTILIZANDO A TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS

MIGUEL DA SILVA ABAMBRES

Orientador: Doutor Nuno Miguel Rosa Pereira Silvestre
Co-Orientador: Doutor Dinar Reis Zamith Camotim

Tese aprovada em provas públicas para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Civil

Qualificação atribuída pelo Júri: Aprovado com Muito Bom com Distinção

Júri

Presidente: Presidente do Conselho Científico do IST

Vogais: Doutor José Manuel de Almeida César de Sá, Professor Catedrático da Faculdade de Engenharia, da Universidade do Porto.

Doutor Luis Manuel Calado de Oliveira Martins, Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico, da Universidade de Lisboa.

Doutor Dinar Reis Zamith Camotim, Professor Associado (com Agregação) do Instituto Superior Técnico, da Universidade de Lisboa.

Doutor Francisco Baptista Esteves Virtuoso, Professor Associado do Instituto Superior Técnico, da Universidade de Lisboa.

Doutor Nuno Miguel Rosa Pereira Silvestre, Professor Associado do Instituto Superior Técnico, da Universidade de Lisboa.

Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade Nova de Lisboa.

INSTITUIÇÃO FINANCIADORA

FUNDAÇÃO PARA A CIÊNCIA E TECNOLOGIA (FCT)

2014

Resumo

Análises Elasto-Plásticas de 1ª e 2ª Ordem de Perfis Metálicos de Parede Fina Utilizando a Teoria Generalizada de Vigas.

Propoem-se formulações originais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) para análises elasto-plásticas de 1ª ordem e de pós-encurvadura de perfis de parede fina, baseadas na teoria J_2 com escoamento associado, e válidas para (i) distribuições arbitrárias de tensões residuais e imperfeições geométricas, (ii) materiais isotrópicos não lineares (e.g., aços carbono/inox), e (iii) padrões de deformação arbitrários (*e.g.*, global, local, distorcional, corte). A análise da secção é baseada na formulação de *Silva* (*2013*), mas adopta cinco tipos de graus de liberdade (g.l.) nodais – um deles ("rotação de empenamento") constitui uma originalidade do trabalho e permite aproximar os perfis de empenamentos através de polinómios cúbicos (em vez de funções lineares) em cada sub-placa. As formulações são validadas através de vários exemplos ilustrativos envolvendo vigas e colunas caracterizadas por diversos tipos de secção (aberta, fechada, (não) ramificada), materiais (bi-lineares e não lineares – e.g., aço inox) e condições de fronteira. Os resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, distribuições de tensões/deslocamentos e mecanismos de colapso) foram validados por comparação com os de análises de EF de casca, tendo-se verificado que globalmente são obtidos resultados muito semelhantes com apenas 9% e 21% (análises de 1ª e 2ª ordem) dos números de g.l. utilizados nos modelos de EF de casca. Para além disso, a natureza modal ímpar da GBT é realçada através de diagramas de participação e funções de amplitude modais, e análises baseadas em diferentes conjuntos de modos de deformação, o que permite adquirir um conhecimento profundo sobre a mecânica comportamental da barra em regime elástico e inelástico.

Abstract

First and Second Order Elastoplastic Analyses of Thin-Walled Metal Members Using Generalized Beam Theory.

Original Generalized Beam Theory (GBT) formulations for elastoplastic first and second order (post-buckling) analyses of thin-walled members are proposed, based on the J_2 theory with associated flow rule, and valid for (i) arbitrary residual stress and geometric imperfection distributions, (ii) non-linear isotropic materials (*e.g.*, carbon/stainless steel), and (iii) arbitrary deformation patterns (*e.g.*, global, local, distortional, shear). The cross-section analysis is based on the formulation by *Silva* (*2013*), but adopts five types of nodal degrees of freedom (d.o.f.) – one of them (warping rotation) is an innovation of present work and allows the use of cubic polynomials (instead of linear functions) to approximate the warping profiles in each sub-plate. The formulations are validated by presenting various illustrative examples involving beams and columns characterized by several cross-section types (open, closed, (un) branched), materials (bi-linear or non-linear – *e.g.*, stainless steel) and boundary conditions. The GBT results (equilibrium paths, stress/displacement distributions and collapse mechanisms) are validated by comparison with those obtained from shell finite element analyses. It is observed that the results are globally very similar with only 9% and 21% (1^{st} and 2^{nd} order) of the d.o.f. numbers required by the shell finite element models. Moreover, the GBT unique modal nature is highlighted by means of modal participation diagrams and amplitude functions, as well as analyses based on different deformation mode sets, providing an in-depth insight on the member behavioural mechanics in both elastic and inelastic regimes.

Palavras Chave

Perfis prismáticos de parede fina

Teoria Generalizada de Vigas (GBT)

Padrões de deformação arbitrários

Materiais elasto-plásticos

Endurecimento isotrópico

Aços carbono e inoxidável

Análises de 1ª ordem

Análises de pós-encurvadura

Mecanismos de colapso

Decomposição modal

Keywords

Prismatic thin-walled members

Generalised Beam Theory (GBT)

Arbitrary deformation patterns

Elastoplastic materials

Isotropic strain-hardening

Carbon and stainless steel alloys

First order analysis

Post-buckling analysis

Collapse mechanisms

Modal decomposition

Agradecimentos

Dedico este trabalho à minha família, nomeadamente aos meus queridos pais Ana Abambres e José Abambres e avós Maria de Lurdes Silva e António Baptista Silva, por todo o amor e conforto recebidos e por tudo o que me têm ensinado.

Nunca esquecerei o incondicional apoio e motivação transmitidos pelos meus melhores amigos Cláudia Fernandes e David Vicente. Muito Obrigado, “manos”!

Aos Professores Dinar Camotim e Nuno Silvestre, meus orientadores científicos, o muito obrigado pela disponibilidade e imenso apoio, motivação e sabedoria transmitidos ao longo dos últimos 5 anos. É uma honra poder trabalhar com os melhores do Mundo.

Ao meu amigo Dinar, agradeço a excelente companhia e apoio em vários momentos importantes deste Ph.D., e por me ter feito gargalhar tantas vezes como resultado do seu apurado sentido de humor.

Obrigado Catarina Soares, Afonso Albuquerque, Francisco Soromenho, David Vicente, Claudia Fernandes, Jorge Lopes, Angelo Marcos, Luís Ferreira, Cristovão Honorato, Saila Pahkakangas, Tomás Almeida, Zé Almeida, Lina Almeida, Liliana, Carminho, Ana Margarida, Carolina Adão, Rúben Murargi, Rui Babau, Helia Pereira, José Fachada, Zé Francisco, João Amaral e Filipa Rosário, pela ajuda, apoio e amizade.

Ao Professor Kim Rasmussen, Francisco Cardoso e amigos Manuela e Rui por me terem recebido tão bem durante a minha temporada de 3.5 meses na Universidade de *Sydney*, onde concluí a investigação para este doutoramento.

À mi amor Anaí, muy importante para la preparacion de la defesa pública. TQM !

Agradeço à Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) pelo apoio financeiro, concedido através (i) da bolsa de doutoramento SFRH/BD/43271/2008 e (ii) do projecto de investigação PTDC/ECM/108146/2008 ("Teoria Generalizada de Vigas (GBT) - Desenvolvimento, Aplicação e Disseminação").

"*Your work is going to fill a large part of your life, and the only way to be truly satisfied is to do what you believe is great work. And the only way to do great work is to love what you do*", Steve Jobs

"*Imagination is the highest form of research*", Albert Einstein

"*No matter what my world looks like today, the world that i´ll live in tomorrow will be the world that i create*", Ryan Leslie

Índice

Lista de Figuras

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Capítulo 6

Capítulo 7

Lista de Tabelas

Capítulo 3

Capítulo 6

Capítulo 7

Lista de Acrónimos

AP – *After Peak* (após a carga última)

BL – Bi-Linear

BP – *Before Peak* (antes da carga última)

C – Corte

CV – Coeficiente de Variação

E – Elástico

EF – Elemento Finito

EFC – Elemento Finito de Casca

EFV – Elemento Finito de Viga

EP – Elasto-Plástico

ET – Extensão Transversal

FCC – Fluxo de Corte Celular

G – Global

g.l. – grau(s) de liberdade

GBT – *Generalised Beam Theory* (Teoria Generalizada de Vigas)

GMNIA – *Geometrically and Materially Non-Linear Imperfect Analysis*

GNIA – *Geometrically Non-Linear Imperfect Analysis*

L – Local

ln – logarítmo neperiano

LSB – *LiteSteel Beam*

LSF – *Light Steel Framing*

MEF – Método dos Elementos Finitos

MFF – Método das Faixas Finitas

MNA – *Materially Non-Linear Analysis*

NL – Não Linear

N-R – Método de *Newton-Raphson*

P – *peak* (carga última)

PP – Perfeitamente-Plástico

PVVP – Problema de Valores e Vectores Próprios

RHS – *Rectangular Hollow Section*

SHS – *Square Hollow Section*

TD – Teoria da Deformação

TE – Teoria do Escoamento

TLC – Teoria das Linhas de Cedência Generalizada

Lista de Símbolos

Caracteres latinos

d – vector de deslocamentos generalizados da barra (g.l. do problema)

D^e - matriz constitutiva elástica da GBT

D^{ep} – matriz constitutiva elasto-plástica convencional

D^{ep*} – matriz constitutiva elasto-plástica consistente

d_k – vector (4x1) elementar de deslocamentos generalizados correspondentes aos polinómios de *Hermite* (Ψ_H) ou funções de *Lagrange* (Ψ_L), e à aproximação do modo de deformação k

d_X, d_Y, d_Z – g.l. nodais da análise da secção (deslocamentos segundo o referencial X, Y, Z)

E – módulo de elasticidade do material

$E_{(xx)}$, $E_{(ss)}$, $E_{(xs)}$ – tensores (1ª ordem) das deformações seccionais

E, $\sigma_{0.2}$, n – parâmetros básicos *Ramberg-Osgood* (n é um expoente de endurecimento)

$E_{0.2}$ – declive da curva σ-ε em $\sigma=\sigma_{0.2}$.

E_t – módulo tangente (materiais bi-lineares)

f – função de cedência de *von Mises*

$f^{\,int}$ – vector de forças internas do problema

$F(\sigma)$ – tensão de *von Mises*

$\overline{f}$ – vector de forças externas correspondente a um parâmetro de carga (λ) unitário

f_i – “componente” i (sub-vector 4x1 associado ao modo i) do vector de forças externas elementar

f_i^{int} – “componente” i (sub-vector 4x1 associado ao modo i) do vector de forças internas elementar

G – módulo de distorção do material

g_{ik} – “componente” i-k (sub-matriz 4x4 associada aos modos de deformação i e k) da matriz geométrica elementar para análises lineares de estabilidade

Caracteres latinos (*cont.*)

h – módulo de endurecimento do material

J_2 – 2º invariante do tensor das tensões deviatórico

k_{ik} – "componente" i-k (sub-matriz 4x4 associadas aos modos de deformação i e k) da matriz de rigidez elástica elementar para análises lineares de 1ª ordem / estabilidade

$K_{ik,tan}$ – "componente" i-k (sub-matriz 4x4 associada aos modos de deformação i e k) da matriz de rigidez tangente elementar para análises não lineares

K_{tan} – matriz de rigidez tangente do problema

L – comprimento do elemento de parede fina.

L_e – comprimento de um elemento finito de viga genérico

$n = \partial f / \partial\sigma$ – vector gradiente

N_{GBT} – número total de modos de deformação da GBT resultante da análise da secção

n_j – vector gradiente n calculado no ponto (σ_j, κ_j).

N_p – Número de sub-placas da secção

$q(x,s) = (q_x, q_s, q_z)$ – carga exterior (e suas componentes) distribuída na superfície média da barra

s – coordenada transversal de um ponto genérico da barra ($0 \leq s \leq b$ – b é a largura da parede).

u – deslocamento axial (direcção x) de um ponto genérico da superfície média da barra

U, V, W – campos de deslocamentos de membrana u, v, w em cada sub-placa (linha) e para cada modo de deformação elementar (coluna)

U_{GBT}, V_{GBT}, W_{GBT} – campos de deslocamentos de membrana u, v, w em cada sub-placa (linha) e para cada modo de deformação da GBT (coluna)

u_k – perfil de deslocamentos axiais (ou empenamentos) do modo de deformação k

v – deslocamento transversal (direcção s) de um ponto genérico da superfície média da barra

v_k – perfil de deslocamentos transversais do modo de deformação k

w – deslocamento de flexão (direcção z) de um ponto genérico da superfície média da barra

w_k – perfil de deslocamentos de flexão do modo de deformação k

x – coordenada axial de um ponto genérico da barra ($0 \leq x \leq L$ – L é o comprimento do perfil)

$\boldsymbol{Y}_{GBT}$ – matriz de transformação da GBT (N_{GBT} x N_{GBT}), a qual guarda em cada coluna os g.l. nodais associados a cada modo de deformação da GBT.

z – coordenada de um ponto genérico da barra na direcção da espessura (e) da parede ($-e/2 \leq z \leq e/2$)

Caracteres gregos

ν – coeficiente de *Poisson* do material

$\zeta_k(x)$ – função de forma (ou de amplitude) do modo de deformação k (define a variação longitudinal dos perfis v_k e w_k).

$\zeta_{k,x}(x)$ – 1ª derivada da função de forma (ou de amplitude) ζ_k do modo de deformação k (define a variação longitudinal do perfil u_k).

$d\varepsilon$ – vector incremento de deformação

$d\varepsilon^e$ – parcela elástica do vector incremento de deformação

$d\varepsilon^p$ – parcela plástica do vector incremento de deformação

$d\mu$ ou μ – factor de proporcionalidade plástico (escalar)

$\gamma^M{}_{xs}$ – distorção de membrana (1ª ordem)

γ_{xs} – distorção de 1ª ou 2ª ordem no plano x-s (tensor *Green-Saint-Venant*)

δW_{ext} – trabalhos virtuais realizados pelas forças externas (cargas aplicadas)

δW_{int} – trabalhos virtuais realizados pelas forças internas (tensões)

$\Delta\varepsilon^e$ – incremento elástico de deformação

$\Delta\varepsilon^{ep}$ – incremento elásto-plástico de deformação

$\delta\varepsilon_{ij}$ – parcela virtual da componente de deformação de 1ª ou 2ª ordem ε_{ij} (tensor *Green-Saint-Venant*)

$\varepsilon = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{ss}, \gamma_{xs}]$ – vector deformação num ponto genérico

$\varepsilon_0{}^y$ – extensão total correspondente à tensão de cedência inicial

ε_1 , ε_2 – extensões totais correspondentes às tensões σ_1 e σ_2

$\varepsilon^c{}_u$, $\sigma^c{}_u$ – extensão e tensão últimas à compressão

$\varepsilon^M{}_{ss}$ – extensão transversal de membrana (1ª ordem)

ε_{ss} – extensão transversal de 1ª ou 2ª ordem (tensor *Green-Saint-Venant*)

$\varepsilon^t{}_u$, $\sigma^t{}_u$ – extensão e tensão últimas à tracção

ε_u – extensão última

ε_{xx} – extensão axial de 1ª ou 2ª ordem (tensor *Green-Saint-Venant*)

η_1– η_4 – polinómios de *Hermite* no domínio de uma sub-placa genérica (análise da secção)

θ_x – g.l. nodal da análise da secção (“rotação de flexão transversal” – rotação em torno do eixo axial x)

θ_z – g.l. nodal da análise da secção (“rotação de empenamento” – rotação em torno do eixo local z)

κ – parâmetro de endurecimento do material (escalar)

Caracteres gregos (*cont.*)

λ – parâmetro de carga da análise

$\lambda(\delta)$ – curva (parâmetro de) carga - deslocamento

ξ – variável adimensional ($\xi = s/b_p$ – b_p é a largura da sub-placa) que varia entre 0 e 1 no domínio de cada sub-placa.

$\sigma = [\sigma_{xx}, \sigma_{ss}, \sigma_{xs}]$ – vector tensão num ponto genérico

$\sigma^{y}(\kappa)$ – função de endurecimento do material

$\sigma_{0.\mathrm{x}}$ – tensão limite de proporcionalidade a 0.x %

σ_0^y – tensão de cedência inicial

σ_1 , σ_2 – tensões limite de proporcionalidade a 1 e 2%

σ_{Mises} – tensão de *von Mises*

σ_{mn} – componente de tensão genérica (σ_{xx}, σ_{ss} ou σ_{xs}) do tensor 2º *Piola-Kirchhoff*

σ_u – tensão última

$\chi_{(\mathrm{xx})}$, $\chi_{(\mathrm{ss})}$, $\chi_{(\mathrm{xs})}$ – tensores (1ª ordem) das deformações longitudinais

Ψ_H – vector de polinómios de *Hermite* relativos à aproximação de um EF de viga genérico

Ψ_L – vector de funções de *Lagrange* relativas à aproximação de um EF de viga genérico

σ_{ss} – componente transversal do tensor 2º *Piola-Kirchhoff*

σ_{xs} – componente de corte do tensor 2º *Piola-Kirchhoff*

σ_{xx} – componente axial (ou longitudinal) do tensor 2º *Piola-Kirchhoff*

σ^0_{ij} – componentes de tensão de pré-encurvadura para análises lineares de estabilidade

Capítulo 1

Introdução

1.1. Utilização de elementos metálicos de parede fina na construção

1.1.1 Considerações gerais

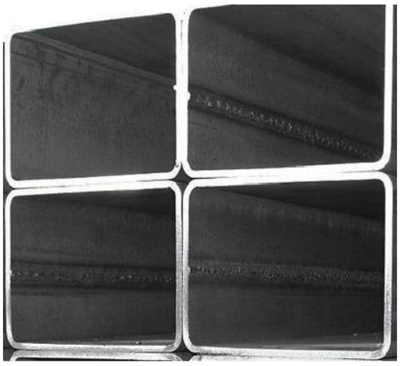
A elevada rigigez, resistência e ductilidade dos metais[1], bem como os recentes avanços na sua tecnologia de produção, têm permitido a construção de sistemas estruturais altamente eficientes (elevada relação resistência/peso) e de forte impacto visual. Em particular, os elementos de parede fina constituem uma solução construtiva bastante económica (tempos de transporte e execução reduzidos) em diversas áreas das engenharias Aeronáutica, Civil, Mecânica, Química e *Offshore* (*Loughlan 2004*). Estes elementos são compostos por paredes (placas) muito esbeltas (i.e., rácio largura/espessura elevado – normalmente assumido ≥10), ligadas entre si através de arestas longitudinais. Devido à elevada esbelteza, a sua modelação numérica assume estados planos de tensão/deformação em cada parede, ou seja, a mecânica estrutural rege-se pelo comportamento da superfície média do elemento. Existem dois tipos de elementos, os perfis e os painéis – os primeiros são peças lineares utilizadas essencialmente em estruturas reticuladas, e os painéis são peças laminares frequentemente aplicadas em lajes mistas aço-betão, ou no revestimento de fachadas e coberturas[2]. Quanto ao fabrico destes elementos (abordado na sub-secção 1.1.2), os processos mais utilizados são a enformagem a frio para os painéis, e a (i) laminagem a quente, (ii) enformagem a frio e/ou (iii) soldadura, no caso de perfis em aço – ver Figs. 1.1 e 1.2.

1 Importa referir que, apesar de alguns conceitos serem genéricos para qualquer metal, todos os assuntos abordados nesta secção aplicam-se ao metal mais abundante na indústria da construção – o aço (carbono, inoxidável).

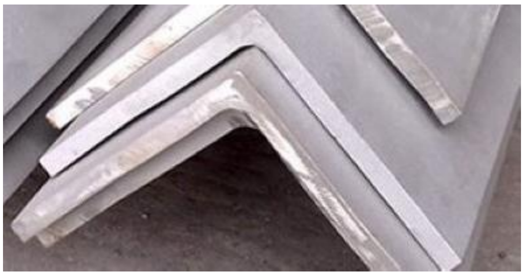
2 Nos revestimentos, os painéis podem ser metálicos ou compósitos, sendo os últimos frequentemente designados na literatura de *Sandwich* (designação Anglo-Saxónica).

O início da utilização de elementos estruturais em aço na construção civil remonta à primeira metade do século XIX, em Inglaterra e nos Estados Unidos da América (E.U.A.), sendo a maioria dos perfis fabricados pelo processo de laminagem a quente. Embora o seu desempenho estrutural tenha sido muito positivo, a reduzida versatilidade de fabrico e o elevado custo de produção motivaram a indústria siderúrgica na procura de soluções mais económicas/leves. Foi no início do século XX, nas indústrias automóvel e naval, que primeiro surgiu uma tecnologia para fabricar componentes estruturais de veículos através de um processo de dobragem de chapas finas de aço (e, em menor escala, de alumínio) – enformagem a frio (*Silvestre 2005*). Nessa época, também a indústria aeronáutica se viria a transformar num domínio privilegiado para a utilização de elementos enformados a frio (*Walker 1975*).

(a)



(b)



(c)

Fig. 1.1. Exemplos de secções típicas de parede fina: (a) em Z enformada a frio, (b) RHS enformada a frio e soldada, (c) I e cantoneira laminadas a quente[3].

Nos anos 20 e 30 do séc. XX, a aceitação do aço enformado a frio como um material de construção era ainda limitada, devido à falta de regulamentação adequada para dimensionamento (*Allen 2006*). Durante e após a segunda guerra Mundial, a indústria da construção metálica começou-se a diferenciar, divergir

3 Retirado de: (a) *www.polmetal.de*, (b) *www.steelhollowsection.com*, (c) *www.photo-dictionary.com* (esquerda) e *www.shanghaibuildingmaterial.com* (direita).

e crescer. Em 1939, o *American Iron and Steel Institute* (AISI) patrocionou um programa de investigação na Universidade de *Cornell* (E.U.A.), sob direcção do Professor *George Winter* – muitas vezes mencionado como "o pai do aço enformado a frio" (*Winter 1959*), o qual resultou no primeiro regulamento sobre dimensionamento de estruturas em aço enformado a frio, publicado pelo AISI em 1946 (*Allen 2006*). Desde então, resultado da crescente investigação científica desenvolvida, têm sido editadas várias actualizações do primeiro regulamento, e actualmente já existem vários regulamentos Mundiais para o dimensionamento deste tipo de estruturas (*e.g.*, *AS, NZS 2001*, *ASCE 2002*, *CEN 2006c*, *AISI 2007*). A utilização de elementos enformados a frio está em franca expansão na construção civil, sendo actualmente um produto muito competitivo face a outras soluções estruturais. Para além de aplicações como treliças, estruturas de pontes de pequenos vãos e chapas perfiladas em lajes mistas (ver Fig. 1.3), a utilização em sistemas porticados de edíficios de baixa a média altura (LSF – *Light Steel Framing* em língua Inglesa) corresponde a um sector em forte crescimento nas últimas duas décadas. Trata-se de um sistema construtivo com estrutura reticulada (incluindo paredes estruturais) de perfis (vigas, colunas, contraventamentos, asnas de cobertura, madres) pouco espaçados entre si (tipicamente 400 a 600 mm) – ver Fig. 1.4. A estrutura metálica fica envolvida e protegida pelos revestimentos dos pisos, paredes e cobertura, os quais combinam uma alta capacidade isolante termo-acústica com uma aparência atraente – soluções típicas são o gesso cartonado para paredes internas, e as placas OSB (*Oriented Strand Board* em língua Inglesa) para pisos e paredes exteriores, também com função estrutural.

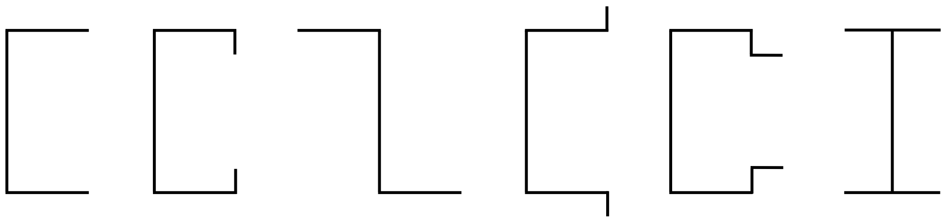
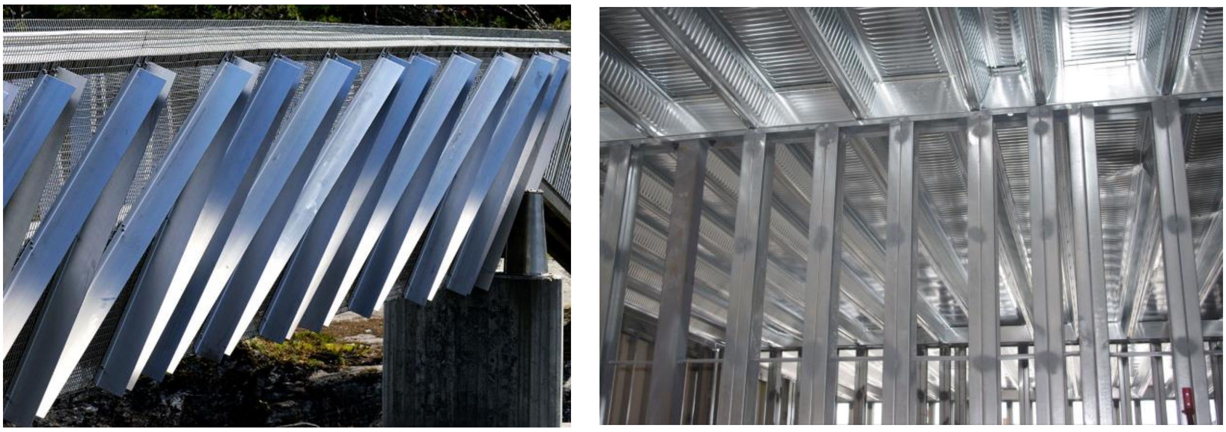


Fig. 1.2. Algumas das secções mais utilizadas em perfis enformados a frio: C, C-reforçado, Z, *Hat*, *Rack*[4] e I (retirado de *Basaglia 2010*).

Por último, nas Figs. 1.5(a)-(b) apresentam-se exemplos da aplicação em engenharia civil de elementos de parede fina constituídos por chapas soldadas, os quais são normalmente empregues em edifícios de grande porte ou estruturas de grandes vãos (*e.g.*, coberturas, pontes). Já os perfis laminados a quente, são maioritariamente utilizados em edifícios de pequeno/médio porte ou em estruturas de "pequenos" vãos.

4 Designação proveniente do nome das estruturas em que essa secção é normalmente empregue – *storage racks* (estruturas de armazenamento, em Inglês).



(a) (b)

Fig. 1.3. (a) Perfis enformados a frio na estrutura de uma ponte, e (b) laje nervurada constituída por chapa enformada a frio[5].

(a) (b)

Fig. 1.4. Estruturas em aço leve (LSF): (a) moradia e (b) edifício de médio porte[6].

1.1.2 Fabrico

O aço é um material bastante sustentável, pois é 100% e infinitamente (no tempo) reciclável, sendo o mais reciclado de todos os materiais – a sua taxa de recuperação global é superior a 70%. A produção de aço tem desde sempre acompanhado o desenvolvimento económico global, facto esse actualmente em evidência na China, uma das economias mais dinâmicas a nível Mundial. Embora a produção de aço na China, tal como na Índia, tenha origens ancestrais, essa indústria evoluiu muito pouco até à segunda metade do séc. XX. O seu arranque apenas se deu após as reformas económicas

5 Retirado de *www.nasjonaleturistveger.no* (esquerda) e *english.dda.gov.cn* (direita).

6 Retirado de *www.cemear.com.br* (esquerda) e *www.bmp-group.com* (direita).

dos anos 80, as quais abriram portas ao comércio internacional, despoletando um enorme crescimento económico e expansão massiva da indústria de produção do aço. Graças aos avanços tecnológicos, dissipa-se actualmente metade da energia gasta há 30 anos para produzir 1 ton de aço, o que resulta numa redução da emissão de gases para a atmosfera – fundamental no combate às alterações climáticas (*World Steel Association 2012*).

(a) (b)

Fig. 1.5. Secções soldadas em (a) edifícios de grande porte, e (b) tabuleiros de pontes[7].

Seguidamente explicam-se sucintamente os processos mais utilizados em todo o Mundo no fabrico de perfis de parede fina: (i) laminagem a quente, (ii) enformagem a frio e/ou (iii) soldadura. A laminagem a quente é geralmente executada acima da temperatura de recristalização do material (*e.g.*, em torno dos 850 ºC para o aço carbono), sendo os perfis produzidos por arrefecimento do material na sua forma final. O produto final apresenta tensões residuais, maioritariamente de membrana, resultantes do arrefecimento diferencial das várias partes da secção. Já os perfis enformados a frio são produzidos à temperatura ambiente, por dobragem transversal de chapas (ou folhas) planas de espessura constante (0.35 – 6.4 mm), havendo a necessidade de soldar no caso de secções total ou parcialmente fechadas. Existem dois tipos de enformagem a frio, a laminagem a frio[8] (*Hancock 1998*) ou a quinagem[9]. Em ambos os casos, antes de se iniciar o fabrico do perfil, a folha de aço encontra-se armazenada em bobina

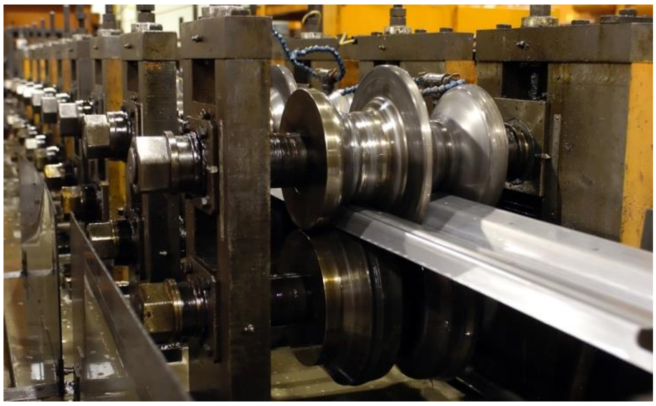
7 Retirado de *www.art.com* (esquerda) e *www.americanbridge.net* (direita).

8 *Cold-Rolling* ou *Roll-Forming* na língua Inglesa.

9 *Press-Braking* na língua Inglesa.

(Fig. 1.6(a)), onde em função do raio de curvatura associado ao perfil em causa, se podem desenvolver extensões plásticas longitudinais ao longo da espessura da folha. Posteriormente, esta é desenrolada da bobina e introduzida na linha de produção. Na laminagem a frio, processo mais eficiente e mais utilizado em produção de grande escala, a linha de produção consiste num conjunto de rolos compressores que continuamente vão deformar o metal até a secção transversal desejada ser obtida ao longo do comprimento de perfil desejado, conduzindo inevitavelmente à ocorrência de deformações plásticas resultantes da flexão transversal (ε_{ss}) das dobras da secção (Fig. 1.6(b)). No final da linha de produção, um corte transversal é efectuado de modo a obter perfis com o comprimento desejado. Na quinagem, a folha metálica é planificada através de forças exercidas nas zonas das arestas (dobras) finais do perfil, por um cunho contra uma matriz (instalados numa quinadora) – ver Fig. 1.7. Similarmente à laminagem a frio, essas forças também originam deformações plásticas transversais. A plastificação, descargas elásticas e variações de temperatura (*e.g.* contacto com rolos compressores ou matriz) que ocorrem durante a enformagem a frio conduzem a distribuições de deformações e tensões residuais associadas a diferentes níveis de endurecimento (ou deformação plástica). Como resultado, as propriedades materiais são heterogéneas ao longo da secção transversal, sendo as zonas das dobras aquelas que maior endurecimento sofreram, exibindo por isso uma maior tensão de cedência e menor ductilidade (*Gao e Moen 2010*). A possibilidade de criar, sem custos adicionais significativos, formas e dimensões adaptadas às necessidades particulares de cada aplicação, constitui uma enorme vantagem dos elementos enformados a frio e justifica a sua utilização tão diversificada.

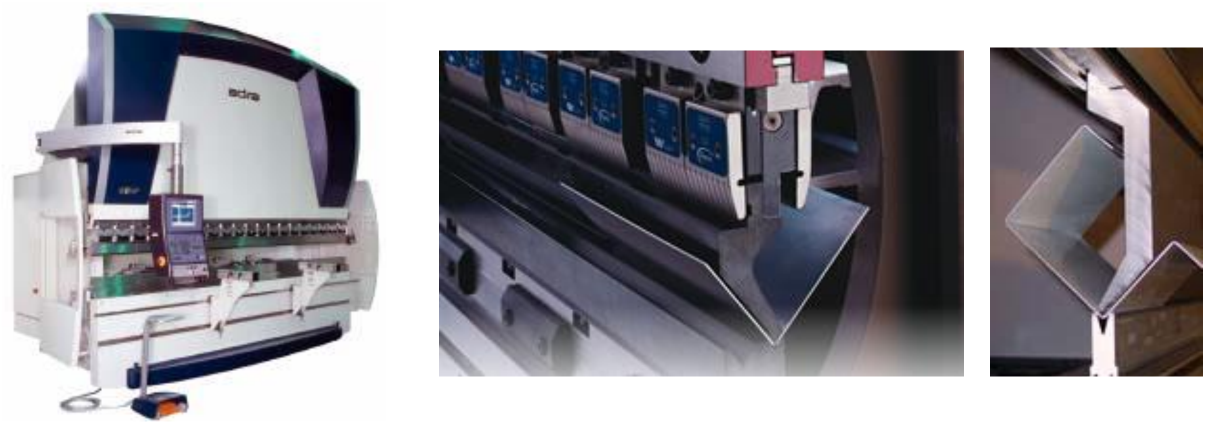
(a)



(b)

Fig. 1.6. Laminagem a frio: (a) bobina de aço inoxidável e (b) enformagem de um perfil na linha de produção[10].

10 Retirado de *www.diytrade.com* (esquerda) e *www.shapecorp.com/manufacturing* (direita).



(a) (b)

Fig. 1.7. Quinagem: (a) quinadora e (b) enformagem de um perfil na linha de produção[11].

No que diz respeito aos perfis soldados (excluindo os tubulares enformados a frio), estes são constituídos por placas soldadas entre si na direcção longitudinal[12]. Este tipo de elementos é tipicamente utilizado em estruturas de grande porte e/ou grandes vãos, sendo as dimensões das suas paredes normalmente muito superiores às dos enformados a frio e, em parte, à dos perfis laminados a quente. As tensões residuais (maioritariamente de membrana) são mais preponderantes do que as deformações permanentes e resultam do arrefecimento restringido das zonas afectadas pelas altas temperaturas do processo de soldadura.

1.1.3 Métodos de análise estrutural

Para além das contribuições de *George Winter* (*Winter 1959*), as quais deram origem à publicação do primeiro regulamento para o dimensionamento de estruturas em aço enformado a frio, publicado em 1946 pelo AISI, importa não esquecer a importante contribuição de *Vlasov* (*1940*, *1959*) para o avanço do conhecimento sobre o comportamento de perfis de parede fina – o autor propôs uma teoria de torção para peças lineares que inclui o efeito do empenamento de torção, e foi um dos primeiros a compreender que o princípio de *Bernoulli*[13] não é válido para barras de parede fina. Devido à elevada esbelteza local e/ou global exibida por elementos metálicos de parede fina, o seu comportamento estrutural é caracterizado por uma forte interação entre efeitos de plasticidade e instabilidade (local e/ou global).

11 Retirado de *https://dspace.ist.utl.pt/bitstream/2295/59233/1/Capitulo*

12 A classe do aço das várias chapas pode ser igual ou diferente (neste caso os perfis denominam-se de híbridos). Por exemplo, é usual em vigas de alma cheia de pontes utilizar banzos com uma classe de aço diferente da alma.

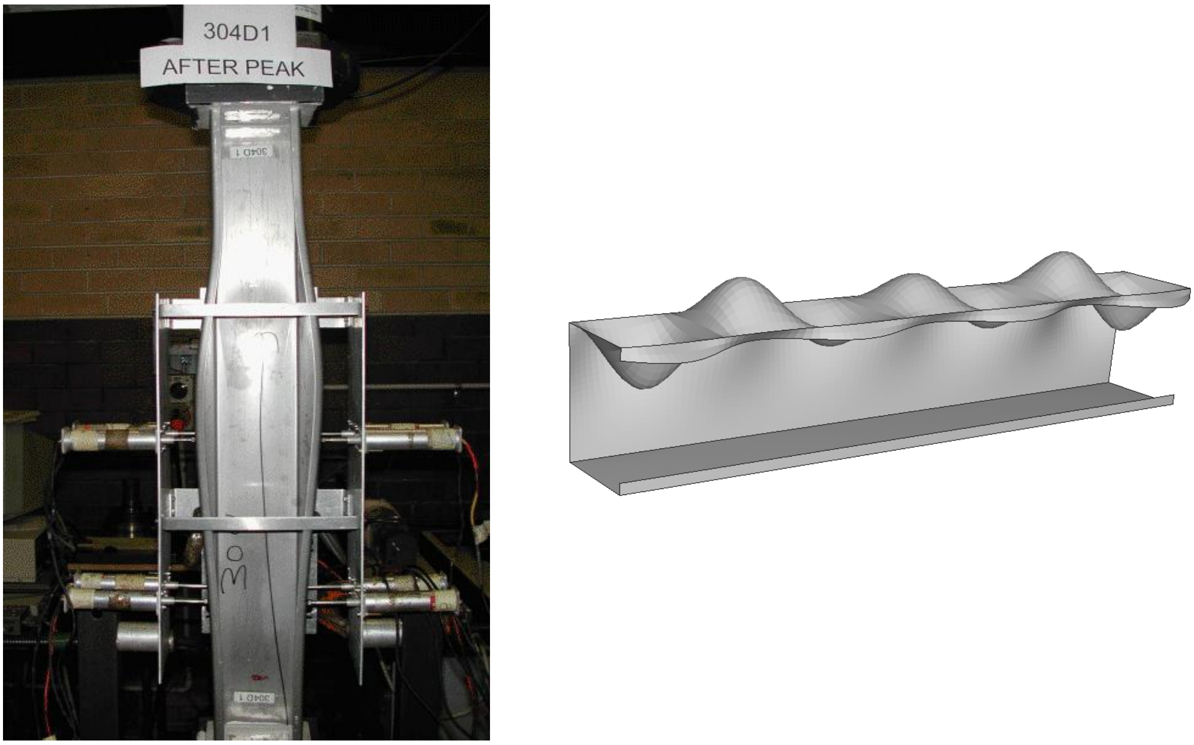
13 No contexto do comportamento de barras, *Bernoulli* admitiu que, após a deformação, qualquer secção transversal se mantém "plana e perpendicular ao eixo da barra".

Enquanto que a deformabilidade global é caracterizada por deslocamentos de corpo rígido da secção transversal no seu plano (deslocamentos de flexão e/ou rotação de torção)[14], a deformabilidade local envolve flexão transversal das paredes da secção no seu plano – é ainda possível fazer a distinção entre deformação local de placa (flexão transversal das paredes sem deslocamento dos cantos da secção) e distorcional (flexão transversal das paredes combinada com movimentos de corpo rígido das paredes envolvidas no deslocamento de alguns cantos da secção) – ver Fig. 1.8. Consequentemente, a análise estrutural rigorosa destes elementos constitui uma tarefa bastante complexa – este facto estimula o desenvolvimento de métodos de análise potentes e de regras de dimensionamento mais eficientes. Neste contexto, um dimensionamento baseado na simulação do comportamento estrutural real[15] requer também uma aproximação precisa da resposta pós-colapso dos vários elementos estruturais (*Hiriyur e Schafer 2005*). Uma vez que as investigações experimentais são invariavelmente limitadas, devido ao elevado custo e duração (incluindo a preparação cuidada do cenário de ensaio), devem ser procuradas abordagens alternativas e complementares. Nas últimas décadas têm ocorrido notáveis avanços na área da mecânica computacional, o que tem conduzido a uma disseminação crescente de ferramentas de cálculo sofisticadas, e consequentemente à vasta utilização de análises numéricas no domínio da engenharia de estruturas. De entre os vários métodos numéricos existentes para esse fim, é unanimemente reconhecido que o método dos elementos finitos (MEF) é aquele que tem sido mais utilizado, resultado da sua sólida fundamentação matemática e versatilidade (não existe qualquer restrição na sua aplicação relativamente ao tipo de análise, material, geometria, carregamento ou condições de fronteira). Uma ferramenta computacionalmente mais eficiente (na análise de barras), igualmente precisa e alternativa ao MEF, é o método das faixas finitas (MFF). No entanto, o MFF apenas poder ser aplicado em barras submetidas a alguns tipos de carregamento e condições de fronteira, estando muito longe de ser tão versátil como o MEF (*Silvestre 2005*). Uma outra abordagem possível, a qual visa essencialmente estimar (majorar) a capacidade resistente da barra, é a teoria das linhas de cedência generalizada (TLC), apesar de ainda requerer bastantes desenvolvimentos para que possa ser considerada uma alternativa segura e eficiente. Por fim, mais recentemente surgiu a teoria generalizada de vigas (GBT) que, apesar do seu domínio de aplicação limitado (elementos prismáticos, de eixo recto, sem perfurações), tem mostrado ser uma alternativa muito potente e

14 A extensão axial é o único modo global que não envolve deslocamentos no plano da secção, pois caracteriza-se por empenamento constante de todos os seus pontos.

15 Particularmente adequado para sistemas estruturais sujeitos a eventos extremos (*e.g.*, explosões, impacto, fogo, vento, sismo), onde importa considerar a redistribuição de forças internas (*e.g.*, colapsos parciais) que antecede o colapso global.

promissora, capaz de competir com o MEF. Seguidamente abordam-se os conceitos fundamentais e faz-se uma breve síntese histórica de cada um dos métodos de análise mencionados anteriormente.



(a) (b)

Fig. 1.8. (a) Modo de colapso distorcional de uma coluna em aço-inox com secção em C-reforçado (*Lecce e Rasmussen 2005*), e (b) instabilidade local de placa de uma viga (*Basaglia 2010*).

1.1.3.1 Método dos elementos finitos (*MEF*)

No MEF aplicado a elementos de parede fina prismáticos, a superfície média do perfil é discretizada numa malha de EFC (normalmente quadriláteros – ver Fig 1.9(a)). No interior de cada EFC, o campo de deslocamento é aproximado pela combinação linear de funções de forma (frequentemente polinómios) cujos coeficientes são os deslocamentos/rotações nodais desse elemento – os graus de liberdade (g.l.) do problema são definidos por condições de fronteira e de compatibilidade entre os vários EFC. No entanto, esta abordagem tem algumas desvantagens: (i) o custo computacional excessivo (grande número de g.l.), e (ii) o processamento/interpretação dos *inputs* e *outputs* – morosos e susceptíveis de erros de interpretação. Para além disso, os resultados de tensões e deslocamentos têm uma natureza nodal em vez da tradicional e mais perceptível "linguagem modal" normalmente adoptada pelas comunidades técnica e científica (*e.g.*, força/extensão axial, momento flector/deslocamento transversal, momento torsor/rotação de torção).

O MEF teve origem no início da segunda metade do século XX, sendo a principal contribuíção para o seu desenvolvimento atribuída a *Clough* (*1960*)[16] (*Silvestre 2005*). Pode-se afirmar que, desde então, o MEF tem sido intensamente utilizado para resolver problemas de naturezas muito diversas e constitui, presentemente, uma ferramenta indispensável no domínio da engenharia de estruturas. Vários investigadores tiveram um papel fundamental no desenvolvimento e disseminação do MEF, tendo publicado obras que são hoje referências imprescindíveis para quem exerça ou pretenda exercer actividade neste domínio (*e.g.*, *Reddy 2004,2005*, *Crisfield 1991,1997*, *De Borst et al. 2012*, *Zienkiewicz et al. 2013*). O avançado estado de maturidade relativo à utilização do MEF (i) conduziu à sua recomendação como alternativa de dimensionamento válida (através de análises fisica e geometricamente não lineares) em regulamentos para estruturas de aço (*e.g.*, *CEN 2006b, AISC 2010*, *BD 2011*), (ii) levou diversos autores como *Dunai* (*2002*) e *Sarawit et al.* (*2003*) a sugerirem a adopção de simulações numéricas, em substituição de ensaios experimentais, para calibrar novas metodologias de dimensionamento, e ainda (iii) originou a publicação de vários trabalhos sobre a utilização de análises avançadas de EF para dimensionar de forma prática e eficiente estruturas porticadas em aço (analisadas como um todo) – com base nesses trabalhos, *Surovek* (*2012*) e *Surovek et al.* (*2011*) publicaram diretrizes de dimensionamento e recomendações relacionadas com (i) o rigor da análise (*e.g.*, modelação), (ii) os estados limite a considerar, e (iii) os factores de redução do carregamento variável.

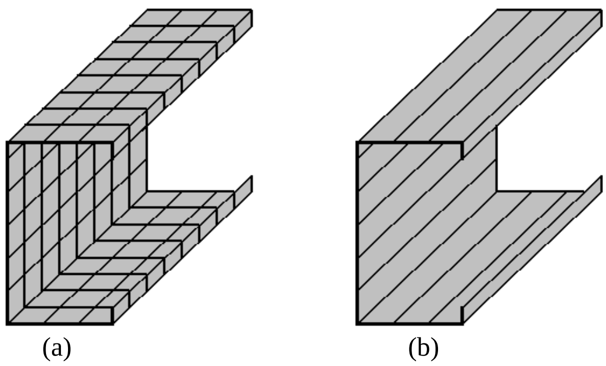


Fig. 1.9. Discretização de uma barra em (a) elementos finitos de casca e (b) faixas finitas (retirado de *Basaglia 2010*).

1.1.3.2 Método das faixas finitas (MFF)

O MFF não é mais que um caso particular do MEF, especialmente desenvolvido para elementos estruturais prismáticos e particularmente vocacionado para problemas que envolvam condições de

16 Uma das primeiras aplicações do MEF a estruturas de engenharia civil foi por si desenvolvida e apresentada num simpósio que, curiosamente, teve lugar em Lisboa (*Clough e Wilson 1962*).

fronteira e carregamento simples. O MFF foi formulado no final da década de 60 e início dos anos 70, de forma independente, (i) por *Cheung* na Universidade de Calgary (*e.g.*, *Cheung 1969,1976*) e (ii) por *Wittrick* na Universidade de Birmingham (*e.g.*, *Wittrick 1968*). No MFF a discretização é feita apenas no plano da secção transversal, de modo a dividir o elemento estrutural em "faixas finitas", i.e., rectângulos com o comprimento da barra ligados entre si por "linhas nodais" (ver Fig. 1.9 (b)). No interior de cada faixa finita, o campo de deslocamentos é aproximado (*Silvestre 2005*): (i) na direcção transversal através de funções de forma polinomiais, as quais asseguram a compatibilidade entre faixas adjacentes ao longo do bordo longitudinal comum, e (ii) na direcção longitudinal através de funções de forma constituídas por expressões analíticas que aproximem com grande precisão a variação longitudinal do campo de deslocamentos e, ao mesmo tempo, satisfaçam as condições de fronteira (*e.g., Cheung e Tham 1998*). O MFF tem sido frequentemente utilizado para efectuar análises lineares de estabilidade ou análises de vibração de barras simplesmente apoiadas (*i.e.*, barras cujas secções extremas estão articuladas local e globalmente e podem empenar livremente), sobretudo devido ao facto de ser possível adoptar como funções de forma longitudinais as soluções exactas das equações diferenciais de equilíbrio (funções sinusoidais) – esta aplicação particular é referida daqui em diante como "MFF semi-analítico" (*Silvestre 2005*). Refira-se ainda que, com o objectivo de estimar a resistência última de perfis de aço enformados a frio, *Key e Hancock* (*1993b*) incorporaram o comportamento elasto-plástico (baseado na teoria de escoamento J_2) na formulação do MFF.

Actualmente, e com aplicação preferencial no domínio da estabilidade de elementos de aço enformados a frio, *Hancock* e seus colaboradores (*e.g.*, *Papangelis e Hancock 1995*) comercializam um *software* da sua autoria baseado no MFF semi-analítico, designado THIN-WALL (*CASE 1996*). Vários investigadores têm utilizado este programa para estimar tensões de bifurcação local de placa, distorcional e global de barras com vários tipos de secção e submetidas a diferentes combinações de compressão e flexão (*e.g., Narayanan e Mahendran 2002, 2003, Yang et al. 2004*). Nos últimos anos foi desenvolvida uma nova formulação do MFF semi-analítico – o MFF "constrangido" (MFFc)[17] (*e.g.*, *Ádány et al. 2010*, *Li et al. 2011,2012*), com o objectivo de incorporar no MFF as características modais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT – abordada em 1.1.3.4) – os modos de instabilidade passam a ser dados como uma combinação linear de modos de deformação (globais, locais e/ou distorcionais). Por fim, importa referir que tanto o MFF semi-analítico como o MFFc estão actualmente integrados no *software* CUFSM (*CUFSM 2011*) desenvolvido por *Schafer*, estando a última versão disponível no sítio pessoal do autor, a qual permite também a utilização do MFF "convencional" para condições de

17 *cFSM – constrained finite strip method*, na designação Anglo-Saxónica.

fronteira gerais (barras bi-encastradas, encastradas-apoiadas, etc), conseguido através da adopção de funções de aproximação longitudinal baseadas em funções trignométricas (*Li e Schafer 2010*). Por último, importa realçar o facto de os programas THIN-WALL e CUFSM anteriormente referidos serem bastante utilizados pela comunidade científica na determinação de tensões de bifurcação elásticas para desenvolvimento de novas formulações do método da resistência directa[18] (*Schafer 2008*), um método de dimensionamento de perfis de aço enformados a frio que já se encontra incorporado nos regulamentos norte americano (*AISI 2007*) e australiano/neo-zelandês (*AS/NZS 2001*).

1.1.3.3 Teoria das linhas de cedência generalizada (TLC)

A combinação de fenómenos de instabilidade com a resposta inelástica do material em elementos metálicos de parede fina, conduz a um pós-colapso (trajectória de equilíbrio descendente) caracterizado pela concentração de deformações nas zonas mais solicitadas (i.e., de "charneira plástica"), o que corresponde ao desenvolvimento de um mecanismo de colapso espacial. As análises de mecanismos espaciais podem ser subdivididas em dois grupos: clássicas e generalizadas (*Bakker 1990*). A teoria clássica de linhas de cedência (ou charneiras plásticas) (i) foi proposta por *Ingerslev* (*1923*), (ii) é usualmente aplicada à determinação da capacidade resistente de lajes de betão carregadas transversalmente, (iii) assume apenas contribuições de momentos de primeira ordem para a energia de dissipação do mecanismo, e (iv) encontra-se totalmente aceite internacionalmente e inserida nos regulamentos estruturais de betão armado e pré-esforçado.

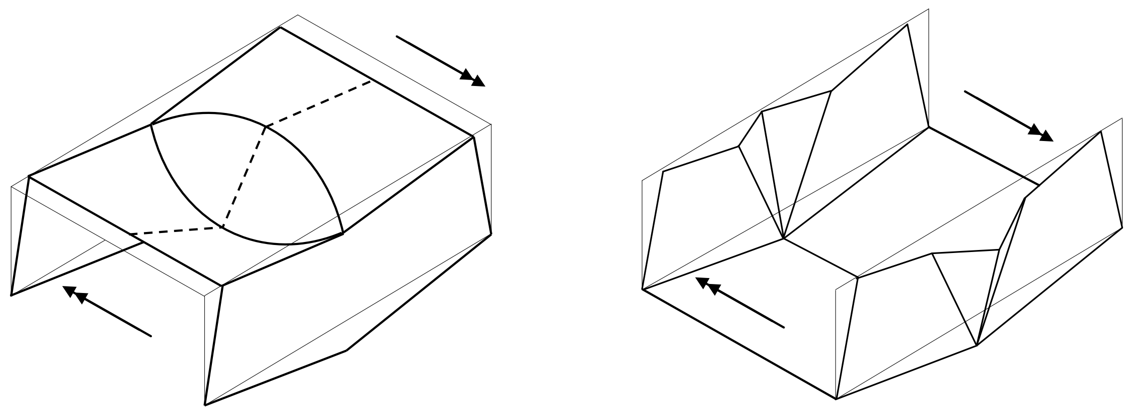


Fig. 1.10. Vigas em C sujeitas a momentos positivos e negativos:exemplos de mecanismos de colapso pela TLC.

18 *Direct Strength Method*, segundo a designação Anglo-Saxónica.

A análise generalizada tem como objectivo obter o comportamento (trajectória de equilíbrio descendente) de elementos de parede fina com base no conhecimento (aproximação) do correspondente mecanismo de colapso (ver Fig. 1.10). O conhecimento desta trajectória (i) fornece informação sobre a ductilidade da estrutura e (ii) pode ser usado para estimar a carga de colapso (ou última) – a intersecção da resposta elástica (*elastic loading curve* na Fig. 1.11) com a curva em fase de pós-colapso determinada (*plastic unloading curve* na Fig. 1.11), resulta num majorante da carga de colapso (*upper bound of failure load* na Fig. 1.11). Claro que esta abordagem só poderá ser vantajosa se puder ser eficientemente generalizada (*i.e.*, a selecção *a priori* do mecanismo de colapso) a várias (i) geometrias de secção, (ii) materiais, (iii) carregamentos, e (iv) distribuições de imperfeições geométricas e tensões residuais, factos que constituem um grande desafio. Neste contexto, referem-se os trabalhos relevantes de *Murray e Khoo* (*1981*), *Murray* (*1984*), *Kotelko* (*2004*) e *Ungureanu et al.* (*2010*). *Murray* analisou os padrões de deformação de mecanismos de colapso obtidos experimentalmente, e concluiu que a configuração de cada um correspondia à combinação linear de mecanismos básicos. No entanto, sabe-se que mecanismos espaciais admissíveis podem estar associados a capacidades resistentes consideravelmente inferiores às observadas experimentalmente, o que impede a utilização de métodos de optimização que procurem o mecanismo "crítico", com vista a desenvolver métodos robustos de análise (*Hiriyur e Schafer 2005*). Com este propósito, *Ungureanu et al.* (*2010*) apresentaram uma base de dados de mecanismos de colapso (local) de colunas e vigas curtas enformadas a frio, os quais foram validados através de observações experimentais e modelos de EFC.

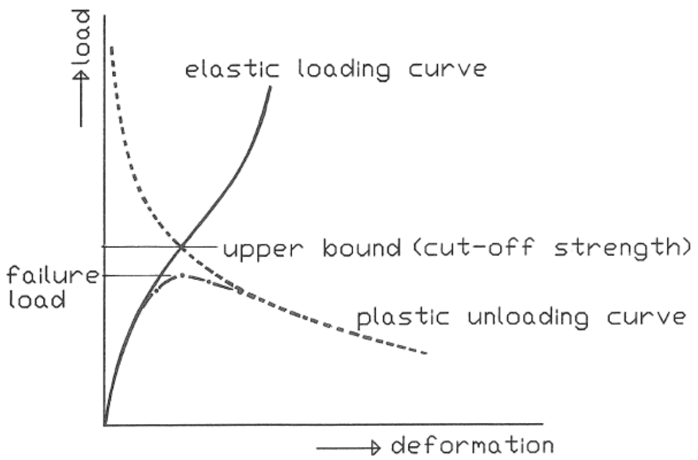


Fig. 1.11. Diagrama carga-deformação genérico: regimes elástico, elasto-plástico e rigido-plástico (retirado de *Bakker 1990*).

A análise de linhas de cedência generalizada tem duas formas de ser abordada, uma baseada no conceito de trabalho e outra no conceito de equilíbrio. Enquanto que na teoria clássica, ambas conduzem ao mesmo resultado, na teoria generalizada fornecem resultados diferentes (*Hiriyur e Schafer 2005*). Importa ainda referir que linhas de cedência inclinadas em relação à direcção do carregamento exterior são de especial interesse, uma vez que a determinação dos momentos plásticos resistentes nas charneiras plásticas depende da acção de forças de corte/axiais e momentos torsores – existem várias teorias sobre a determinação do momento resistente nessas charneiras (*e.g.*, *Murray 1984*, *Bakker 1990*, *Zhao e Hancock 1993a,b*, *Rhodes 2002* – *Zhao* (*2003*) faz uma revisão e comparação dos principais métodos propostos até 2003).

***1.1.3.4 Teoria generalizada de vigas* (*GBT*)**

A teoria generalizada de vigas (GBT – *Generalized Beam Theory* em Inglês) é uma teoria de barras de parede fina, (i) válida para elementos prismáticos[19], de eixo recto e sem perfurações, e (ii) que contabiliza todos os tipos de deformação (*e.g.*, global, local, distorcional) da secção transversal. Esta teoria tem sido reconhecida internacionamente como uma alternativa potente, versátil, elegante e eficiente a outros métodos numéricos tradicionais (MEF ou o MFF) para analisar elementos e sistemas estruturais de parede fina. A sua elegância e eficiência resultam essencialmente da sua natureza modal ímpar – o campo de deslocamentos é expresso como uma combinação linear de modos de deformação da secção, os quais (i) têm um significado físico/estrutural familiar (*e.g.*, flexão, torção, corte, encurvadura local/ distorcional) – em contraste com o tipo de g.l. utilizados nos MEF e MFF (ver Fig. 1.12), e (ii) variam continuamente a sua amplitude ao longo do comprimento da barra. Esta característica permite ao utilizador (i) adquirir um conhecimento aprofundado sobre a mecânica comportamental do elemento estrutural, e (ii) excluir judiciosamente, de futuras análises da GBT, todos os modos de deformação que se concluiu desempenharem um papel irrelevante no comportamento estrutural sob escrutínio, reduzindo ainda mais o número de g.l. envolvidos. A GBT tem atraído o interesse de vários investigadores à escala mundial, conduzindo a novas formulações e aplicações. Segundo a opinião do autor, trata-se de uma alternativa com potencialidades (eficiência e clareza) para vir a substituir o potente MEF como ferramenta principal de análise de elementos de parede fina.

19 Actualmente já existe uma formulação da GBT para análises lineares de estabilidade de barras de eixo recto com secção variável (*Nedelcu 2010, 2011*). No entanto, a GBT apenas fornece bons resultados para pequenas variações longitudinais da secção, o que corresponde à maioria dos casos encontrados na prática.

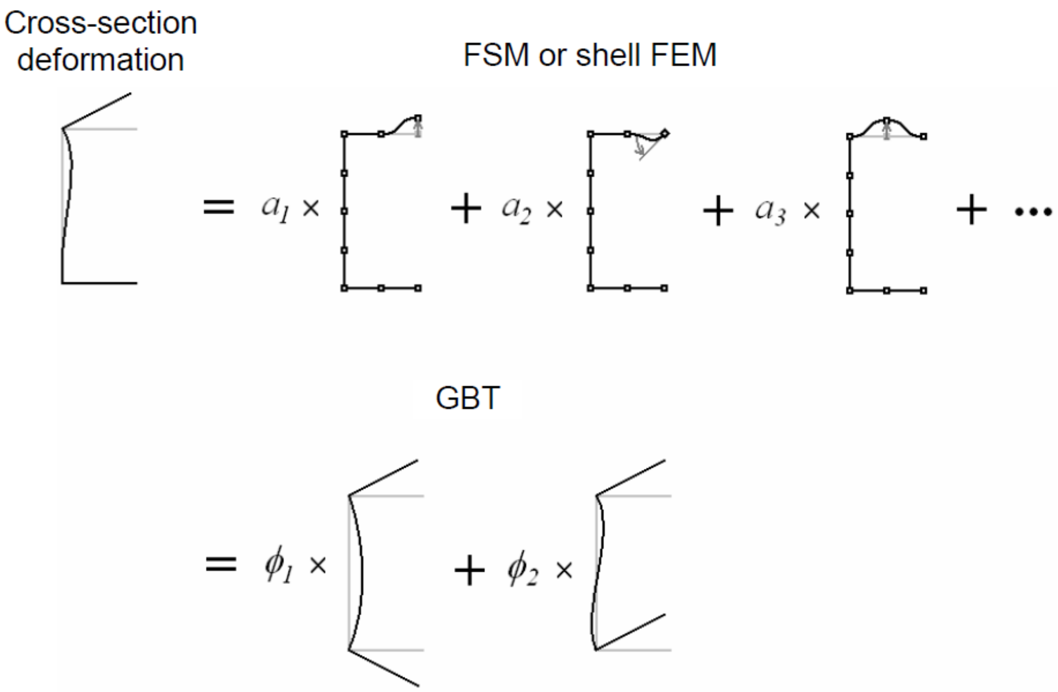


Fig. 1.12. Deformação da secção: comparação entre o MEF ou MFF e a GBT (retirado de *Silva 2013*).

Desde o trabalho pioneiro de *Richard Schardt* (Universidade de Darmstadt) na década de 60 (*Schardt 1966*), a GBT tem sofrido avanços consideráveis. Um resumo histórico da GBT no período 1966-2005 pode ser consultado em *Silvestre* (*2005*)[20]. Grande parte dos desenvolvimentos da GBT tem ocorrido no Instituto Superior Técnico (Universidade de Lisboa) devido ao intenso trabalho do grupo de investigação liderado por Camotim e Silvestre, ao qual pertence o autor desta tese. Seguidamente, faz-se referência a alguns dos últimos desenvolvimentos e aplicações da GBT com origem no IST-UL[21]. Não se pretendendo uma abordagem exaustiva, mas apenas fazer uma breve referência às contribuições mais relevantes no âmbito desta tese (análise de barras, materiais isotrópicos elasto-plásticos, análises de 1ª ordem e de estabilidade, e análises de pós-encurvadura), importa realçar os trabalhos de:

(i) *Silvestre e Camotim* (*2003*), onde a incorporação de modos de corte e de extensão transversal nas análises da GBT foi levada a cabo para secções abertas não ramificadas – trata-se de procedimentos de difícil (ou mesmo impossível) extensão a secções arbitrárias.

(ii) *Silvestre e Camotim* (*2003*, *2006*), onde é analisado o comportamento de pós-encurvadura de colunas de aço enformado a frio.

20 Esta tese de doutoramento, orientada por Camotim, foi para o autor deste trabalho a referência principal na compreensão dos conceitos fundamentais da GBT.

21 Excluindo aqueles em que o autor esteve envolvido, os quais deram origem às publicações referidas na secção 1.4.

(iii) *Gonçalves e Camotim* (*2004*, *2007*), referentes a análises de bifurcação (de natureza global ou local) em regime elasto-plástico de elementos estruturais constituídos por materiais com endurecimento não linear, tais como o alumínio ou o aço inox – foi a primeira formulação inelástica da GBT.

(iv) *Gonçalves e Camotim* (*2005*), onde foi proposto o primeiro elemento finito fisicamente não linear da GBT para análises de 1ª ordem, apesar de a formulação ser ainda limitada por restringir a possibilidade de ocorrência de escoamento plástico à superfície média da barra – tal medida impossibilita, p.e., o estudo de barras (i) com um modo de colapso de natureza local/distorcional e/ou (ii) com secção aberta e sujeitas a torção.

(v) *Camotim et al.* (*2004*, *2006b*) publicaram sínteses da actividade de investigação sobre a GBT realizada no IST.

(vi) *Gonçalves et al.* (*2005*, *2009*) propuseram uma abordagem válida para secções arbitrárias de parede fina que permite isolar os modos de defomação com distorções de membrana em células de secções fechadas. Juntamente com os modos convencionais (distorções e extensões transversais de membrana nulas), estes modos permitem descrever com rigor o comportamento linear de 1ª ordem/estabilidade de elementos tubulares (*e.g.*, tabuleiros de pontes). As desvantagens desta abordagem consistem (i) no facto de os modos de corte não terem um significado físico evidente, e (ii) na impossibilidade de isolar o modo de torção em secções celulares[22] – estes factores conduzem à utilização de um número desnecessariamente elevado de modos de deformação.

(vii) *Dinis et al.* (*2006*), onde foi proposta a primeira formulação geral da GBT para analisar secções abertas ramificadas arbitrárias.

(viii) Bebiano *et al.* (2007), onde se aborda a estabilidade elástica de vigas actuadas por carregamentos arbitrários, i.e. aqueles que geram diagramas de momentos flectores não uniformes. Tratou-se do primeiro trabalho da GBT onde se incluiu o efeito das tensões de corte (tangenciais) na degradação da rigidez de vigas.

(ix) *Silva et al.* (*2008*) e *Silva* (*2013*), os quais propuseram uma alternativa bastante versátil que permite analisar qualquer secção de parede fina. Ao contrário das formulações anteriores, os modos de deformação elementares não são obtidos pela imposição de condições cinemáticas particulares. Ao invés, são considerados modos "nodais" semelhantes aos adoptados em modelos de elementos finitos de casca, ou seja, resultantes da imposição unitária de cada g.l. nodal (e anulamento dos restantes) e utilização de funções de forma polinomiais em cada sub-placa. Posteriormente, procedimentos de diagonalização simultânea de matrizes (problemas de

22 Uma secção celular contém pelo menos uma célula, i.e., um conjunto de paredes que formam um polígono.

valores/vectores próprios) dão origem a quatro famílias de modos de deformação da GBT: (i) convencionais (γ^M_{xs}=0 e ε^M_{ss}=0), (ii) de corte, (iii) de extensão transversal e (iv) de fluxo de corte celular. Estes últimos permitem isolar o modo de torção em secções celulares, anteriormente obtido pela combinação linear de outros modos.

(x) *Bebiano et al.* (2008, 2013), onde é apresentado o *software* GBTUL destinado à análise linear de estabilidade e de vibração de barras de parede fina (disponível em *www.civil.ist.utl.pt/gbt*).

(xi) *Camotim et al.* (*2010a,b*), onde se apresentam os desenvolvimentos recentes (à época) e futuros da GBT.

(xii) *Gonçalves et al.* (*2010*), tendo proposto um novo método para determinar modos de deformação em secções arbitrárias de parede fina com ou sem constrangimentos internos e/ou externos, baseado na (i) imposição de hipóteses cinemáticas específicas, e (ii) ortogonalização de modos da GBT, os quais são subdivididos em (ii_1) convencionais (γ^M_{xs}=0 e ε^M_{ss}=0), (ii_2) de corte e (ii_3) de extensão transversal. Esta abordagem permite também isolar o modo de torção em secções total ou parcialmente fechadas.

(xiii) *Silvestre et al.* (*2011*), onde as hipóteses cinemáticas e os procedimentos adoptados na GBT para determinar os modos de deformação da secção são abordados de uma nova perspectiva, considerada mais adequada a uma verdadeira comparação entre a GBT e o MFF "constrangido" (abordado em 1.1.3.2).

(xiv) *Gonçalves e Camotim* (*2011*, *2012*), onde são propostas formulações originais para análises elastoplásticas geometricamente lineares ou não lineares da GBT – são formulados dois elementos finitos de viga, um baseado (i) em tensões e na teoria de escoamento J_2 (critério de cedência de *von Mises*), e outro (ii) em resultantes de tensões e na função de cedência de *Ilyushin* modificada. No caso das análises de pós-encurvadura (*Gonçalves e Camotim 2012*), concluiu-se que a formulação baseada na função de *Ilyushin* (computacionalmente mais eficiente pelo facto de não ser necessária integração na espessura das paredes) conduz a respostas estruturais geralmente mais rígidas, quer em fase de pré- como de pós-colapso. No entanto, pode conduzir a estimativas aceitáveis da carga de colapso em algumas aplicações práticas. Relativamente à formulação baseada na teoria J_2, apesar de computacionalmente mais dispendiosa que a anterior, foi mostrado conduzir (para números relativamente pequenos de modos de deformação e EF) a resultados muito precisos até ao colapso e ligeiramente sobreestimados na trajectória de equilíbrio descendente.

Estes trabalhos contribuíram de forma decisiva para difundir a GBT entre a comunidade técnico-científica ligada à investigação de elementos/sistemas estruturais de parede fina e, em simultâneo, para ilustrar a sua versatilidade e eficiência computacional quando comparada com o MEF e MFF.

1.2. Modelos constitutivos para metais

Várias teorias assentes em diferentes abordagens têm sido propostas para formular modelos constitutivos de materiais metálicos. Embora a plasticidade policristalina tenha emergido como um método viável, a prática corrente em mecânica computacional (*Wu 2005*) continua a ser a abordagem do contínuo (ou matemática), segundo a qual é desprezada qualquer singularidade no campo de deslocamentos (*Gozzi 2004*). Os primeiros desenvolvimentos de teorias matemáticas relativas a estados multi-dimensionais de tensão tiveram origem em duas grandes "escolas" (*Wu 2005*) – (i) a teoria do escoamento (TE) e (ii) a teoria da deformação (TD), cujas principais características são apresentadas de seguida.

A TE foi sendo desenvolvida desde os anos 20, durante a primeira metade do séc. XX, através de contribuições de diversos autores (*Prandtl*, *Prager*, *Drucker*, *Hodge*, *Hill* e *Sokolovsky*), tendo servido de base para o desenvolvimento de novas teorias ou para a melhoria de outras já existentes. É também conhecida como teoria incremental, uma vez que se baseia na determinação das relações constitutivas incrementais como forma de obter o estado de tensão actual (atendendo à história de carregamento) (*Gozzi 2004*), sendo por isso mais versátil do que a TD. A TD foi originalmente proposta por *Hencky* (*1924*), e posteriormente disseminada por *Nadai* (*1931*) e *Ilyushin* (*1948*), sendo também conhecida por teoria da deformação total, pois baseia-se na determinação das componentes de deformação (e não dos seus incrementos) a partir dos valores das componentes de tensão, não contabilizando a história de tensão. Por este motivo, a formulação da TD não é adequada a condições de "carregamento não proporcional"[23] (*Jones 2009*), sublinhando que estas são frequentes sempre que o problema em questão envolve (i) descargas elásticas, (ii) efeitos geometricamente não lineares e/ou (iii) endurecimento do material. Apesar desta desvantagem, a TD manteve o seu grau de popularidade durante muitos anos, graças à maior simplicidade da sua formulação e ao facto de ter contribuído (até 2010) para uma melhor previsão de cargas de bifurcação em regime elasto-plástico (*e.g.*, colunas comprimidas), uma vez que a TE sobreestimava claramente as soluções. Segundo *Hutchinson* (*1974*), a essência do problema estava no facto da TE prever uma relação totalmente elástica entre as tensões de corte e as distorções no início

23 Define-se como carregamento proporcional aquele que conduz, em cada ponto material, a um vector tensão com direcção invariável no tempo.

da encurvadura. No entanto, esse inconveniente paradoxal da TE (o chamado "*plastic buckling paradox*", em Inglês) foi recentemente ultrapassado através da derivação da rigidez inelástica ao corte (*Becque 2010*, *2011*). Desde os anos 90 que investigadores suecos (*Moller 1992*, *Granlund 1997*, *Olsson 2001*) têm dedicado bastante atenção ao desenvolvimento de modelos constitutivos elasto-plásticos de aços estruturais (nomeadamente o inoxidável), os quais se baseam em diversas análises experimentais (*e.g.*, ensaios uni e biaxiais). Como seguimento desses trabalhos, *Gozzi* (*2004*) efectuou um estudo experimental que visava desenvolver e validar um modelo constitutivo baseado na TE para o aço inoxidável EN 1.4318, tendo-se obtido resultados muito satisfatórios. Pelas vantagens inerentes à TE, e tendo sido esta implementada neste trabalho, apresentam-se de seguida alguns dos seus conceitos fundamentais[24].

1.2.1. Teoria do escoamento

As equações constitutivas inerentes a esta teoria dependem da definição de um critério de cedência e de regras de escoamento e de endurecimento. Enquanto que (i) o critério de cedência permite determinar se um ponto material entra em escoamento plástico para um certo incremento de deformação imposto, (ii) a regra de escoamento define o incremento (infinitesimal) de deformação plástica quando ocorre plastificação do material, e (iii) a regra de endurecimento define a tensão de cedência em função da deformação plástica. O conceito de superfície de cedência e o critério de cedência de *von Mises* (frequentemente adoptado na modelação de metais) são abordados de seguida.

1.2.1.1 O conceito de superfície de cedência

Considere-se um ponto material genérico de um corpo, submetido a um estado bi-dimensional de tensão dado por uma tensão normal (σ) e outra de corte (τ) proporcionais, por exemplo resultantes da torção não uniforme de um tubo de parede fina. Para diferentes trajectórias de carga proporcionais, é possível representar num gráfico a linha de pontos (σ,τ) associados ao início da cedência, i.e., o "instante" a partir do qual o material não recupera totalmente a sua deformação se ocorrer uma descarga total de tensão aplicada (passando a existir deformações plásticas) – na Fig. 1.13 ilustram-se os pontos de cedência inicial associados às trajectórias proporcionais OA, OB, OC e OD. Num caso *n*-dimensional, a linha de cedência dá origem a uma superfície de cedência[25], a qual (i) se constata

24 O leitor interessado em compreender a teoria da deformação é aconselhado a consultar *Jones* (*2009*).

25 Daqui em diante utiliza-se sempre o termo "superfície de cedência" independentemente da dimensão do espaço de tensões.

experimentalmente ser convexa (*Wu 2005*) e (ii) define (limita) o espaço de tensões para o qual o comportamento material é elástico (linear ou não linear) para um certo nível de deformação plástica.

Para perceber o conceito de evolução de superfície de cedência de um material, considere-se o caso mais simples de um ensaio uniaxial e a respectiva relação σ-ε representada na Fig. 1.14. Note-se que neste caso particular, o material exibe um comportamento elástico não linear, estando a cedência inicial (σ=±σ_0^y) representada pelos pontos a vermelho, os quais correspondem aos pontos de tensão limite de proporcionalidade a ε^p %. Quando se carrega o material à tracção até ao ponto (I), a tensão de cedência aumenta com o nível de deformação plástica, sendo essa relação definida pela regra de endurecimento do material – o

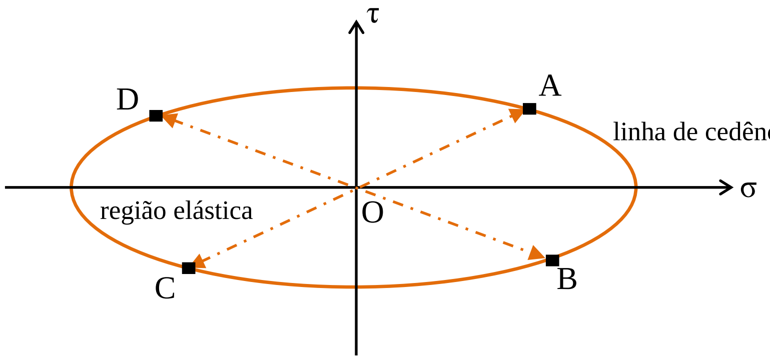


Fig. 1.13. Linha de cedência inicial e respectiva região elástica num espaço bi-dimensional de tensões.

endurecimento de materiais isotrópicos traduz-se numa expansão da superfície de cedência (*Wu 2005*). Considere-se agora que se efectua uma descarga total de tensão a partir de (I) e se inverte o sentido do carregamento até o material ceder novamente. Assumindo como definição de tensão de cedência subsequente, relativa a uma pré-deformação plástica ε=ε_I^p, a tensão limite de proporcionalidade a δ = ε^p %, verifica-se que a tensão de cedência na descarga (à compressão) é inferior à tensão de cedência na recarga (à tracção) – ver pontos a amarelo na Fig. 1.14. Trata-se de um fenómeno designado “efeito de *Bauschinger*”, o qual foi descoberto por *Bauschinger* (*1886*) através de ensaios experimentais em metais[26], e não se deve confundir com os casos de materiais que são genuinamente assimétricos (comportamento originalmente diferente à tracção e à compressão). Segundo *Wu* (*2005*), o efeito de *Bauschinger* causa uma translação (sem rotação) da superfície de cedência no espaço de tensões, o que se designa por endurecimento cinemático (anisotrópico[27]) – de facto constata-se na Fig.

26 Este efeito tem uma influência muito importante na previsão do efeito de *springback* no processo de enformagem a frio de perfis metálicos (*Gau e Kinzel 2001*).

27 Neste contexto, a definição de isotropia (comportamentos iguais em todas as direcções) inclui também a de simetria (comportamentos iguais à tracção e à compressão).

1.14 que o valor algébrico das tensões de cedência à compressão e tracção aumenta no estado de cedência subsequente (pontos a amarelo). É sabido, das diversas análises experimentais efectuadas desde meados do século passado, que os principais modos de evolução de uma superfície de cedência são a expansão, contracção, translacção e distorção (*Sung et al. 2011*).

Sabe-se que a geometria e dimensão das superfícies de cedência subsequentes são influenciados pela definição de cedência que é utilizada experimentalmente (*Wu 2005*). A aplicação da verdadeira definição de cedência na determinação experimental da superfície de cedência é um processo muito moroso e relativamente ambíguo, como consequência dos erros inerentes aos equipamentos de ensaio e medição utilizados. Como tal, com vista ao estabelecimento de uma teoria de plasticidade unificada, é fundamental estabelecer uma definição de cedência objectiva e que conduza a resultados semelhantes aos teoricamente esperados. A definição que mais tem sido usada em experimentação moderna (*Wu 2005*) é a de "tensão limite de proporcionalidade a x % de deformação", tal como foi assumido no exemplo da Fig. 1.14 [28].

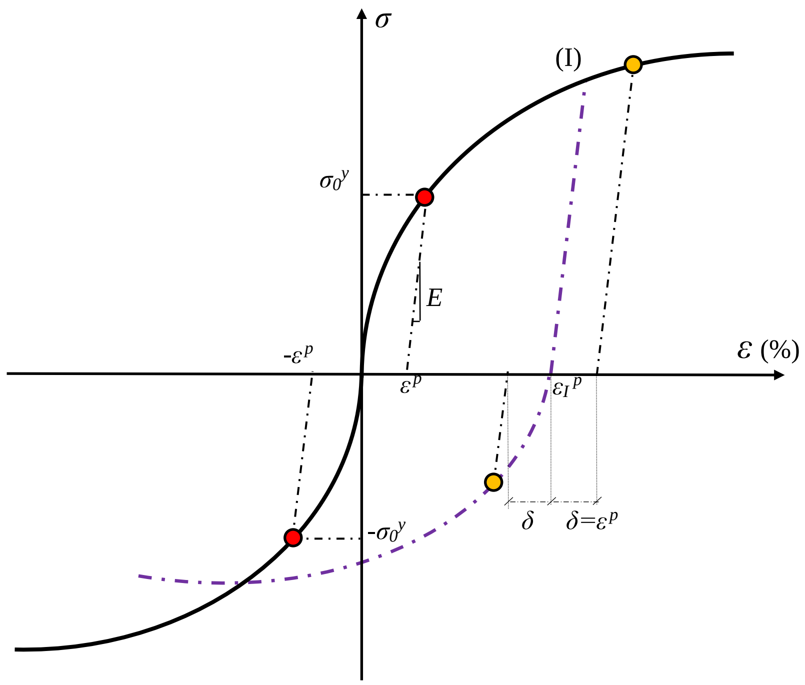


Fig. 1.14. Cedência inicial (pontos a vermelho) e subsequente (pontos a amarelo) para um caso uni-dimensional.

28 A "tensão limite de proporcionalidade a x % de deformação" é a tensão que resulta da intersecção da curva σ-ε com a recta de declive *E* (módulo de *Young*) que passa no ponto (σ, ε) = (0, x) – ver rectas a traço-ponto que dão origem aos pontos vermelhos da Fig. 1.14.

Esta definição considera-se preferível à definição de limite de proporcionalidade, pelo facto de este (i) ser muito ambíguo no caso de materiais que têm uma transição “suave” entre o comportamento linear e não linear (*e.g.*, ligas de alumínio ou aço inoxidável), e (ii) corresponder normalmente a deformações pequenas, domínio onde os resultados se encontram frequentemente dispersos devido aos erros associados ao equipamento (*Wu 2005, Sung et al. 2011*). Uma vez explicado o conceito de tensão limite de proporcionalidade para o caso uni-dimensional, importa agora fazer referência à forma como vários autores aplicam essa metodologia para um caso *n*-dimensional. *Hsu* (*1966*) publicou e analisou resultados experimentais de diversos autores relativos à determinação de superfícies de cedência com base em curvas $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ obtidas para uma certa trajectória de carga, onde

$$\begin{gathered} \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\sigma_I - \sigma_{II}\right)^2 + \left(\sigma_{II} - \sigma_{III}\right)^2 + \left(\sigma_{III} - \sigma_I\right)^2\right]} \\ \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}\right)^2 + \left(\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III}\right)^2 + \left(\varepsilon_{III} - \varepsilon_I\right)^2\right]} \end{gathered} \quad , \tag{1.1}$$

sendo *I-II-III* as direcções principais de tensão e deformação. A tensão $\bar{\sigma}$ representa o dobro da média geométrica das tensões principais de corte, enquanto que $\bar{\varepsilon}$ representa a média geométrica das respectivas distorções. De facto, os materiais testados eram todos metais e está comprovado que critérios de cedência baseados no comportamento ao corte descrevem muito bem materiais dúcteis. Segundo *Wu* (*2005*), evidências experimentais mostram que a superfície de cedência inicial (i) de metais como o alumínio, o aço macio e o aço inox, (ii) à temperatura ambiente e (iii) para um estado bi-dimensional de tensão (axial e de corte), é aproximadamente elíptica. Vários autores (*e.g.*, *Ishikawa 1997*, *Wu 2003,2005*, *Wu et al. 1995, Sung et al. 2011*, *Philips e Lee 1979*, *Philips e Lu 1984*) têm dedicado o seu trabalho à obtenção de superfícies de cedência de metais, analisando factores como (i) endurecimento isotrópico e anisotrópico, (ii) trajectórias de tensão, (iii) nível de pré-deformação, (iv) nível de pré-tensão e (v) definição experimental de cedência, de modo a tentarem relacioná-los com a variabilidade (dimensão e geometria) dessas superfícies. Por último, refira-se que a existência de vértices nas mesmas foi um tema de debate em 1950-1960, mas análises experimentais mais recentes apontam apenas para a existência de cantos arredondados (*Philips 1986*).

1.2.1.2 O critério de cedência de von Mises

A independência da cedência plástica da pressão hidrostática superimposta, e a incompressibilidade plástica[29], são dois dos princípios básicos da teoria clássica da plasticidade dos metais (*Wu 2005*). Gerações de cientistas e engenheiros de materiais estudaram a teoria clássica de plasticidade de metais com base nestas hipóteses, as quais também fazem parte de obras de referência como as de *Hill* (*1950*) e *Mendelson* (*1968*), ou mesmo de referências mais modernas como *Lubliner* (*1990*) ou *Stouffer e Dame* (*1996*). Para além disso, essas hipóteses foram e continuam a ser recomendadas em análises de plasticidade de metais baseadas em potentes *softwares* comerciais de elementos finitos (*e.g.*, ABAQUS). No entanto, a investigação experimental realizada por *Bridgman* (*1952*) permitiu concluir que a pressão hidrostática influencia as curvas de endurecimento do aço carbono. Em ensaios à tracção de provetes submetidos a pressões hidrostáticas na gama 690 - 3100 MPa, observou-se que a ductilidade era o principal aspecto afectado – o facto dessas pressões serem raramente encontradas em aplicações correntes, levou muitos investigadores a assumirem que o efeito da pressão hidrostática era desprezável para o estudo da plasticidade dos metais (*Wilson 2002*). Adicionalmente, *Bridgman* observou que para grandes variações de deformações plásticas não houve alterações do volume do corpo. *Wu* (*2005*) considera a hipótese de incompressobilidade plástica bem estabelecida, uma vez que a deformação volumétrica plástica é pequena quando comparada com a elástica. Nos anos 70, *Spitzig et al.* (*1976*) questionaram a veracidade da hipótese de independência da cedência plástica da pressão hidrostática, tendo ensaiado vários tipos de aço até pressões hidrostáticas de 1100 MPa. Através dos mesmos constataram que a tensão de cedência era linearmente dependente da pressão hidrostática e que o critério de cedência de *Drucker-Prager* era adequado para aços de alta resistência (*Wilson 2002*). Também *Wilson* (*2002*) testou vários tipos de provetes de alumínio sujeitos a um estado de tensão que incluia pressão hidrostática positiva (tracção), tendo constatado que a trajectória carga-deslocamento obtida numéricamente com o critério de *Drucker-Prager* apresentava uma óptima concordância com os resultados experimentais, diferindo razoavelmente dos resultados numéricos obtidos com base no critério de *von Mises*, o qual toma a tensão de cedência como independente da pressão hidrostática. *Richard von Mises* sugeriu pela primeira vez o seu critério de cedência em 1913, cujo desenvolvimento

29 Expressa em termos incrementais por $d\varepsilon^p_{11} + d\varepsilon^p_{22} + d\varepsilon^p_{33} = 0$.

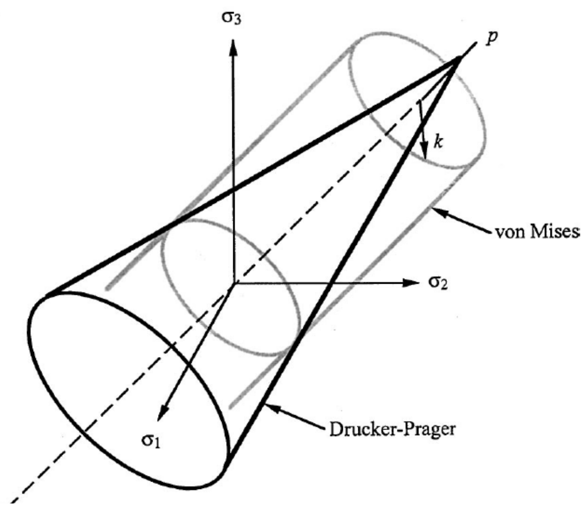


Fig. 1.15. Superfícies de cedência de *Drucker-Prager* e de *von Mises* no espaço de tensões principais (retirada de *Wilson 2002*).

e interpretação (*American Mathematical Society 1963*) tiveram também contribuições importantes de *Hencky*, sendo por esta razão muitas vezes designado de critério de *Mises-Hencky*. Apesar da incerteza sobre a adequabilidade da hipótese em causa, mas motivado pela sua simplicidade quando comparado com outros, o critério de cedência de *von Mises* é o que mais tem sido usado entre a comunidade técnica e científica para o estudo de metais, sendo importante referir que a superfície de cedência de *von Mises* difere pouco da superfície de *Drucker-Prager* para níveis baixos de pressão hidrostática (ver Fig. 1.15, onde $p=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$). Pesa embora se tenha provado experimentalmente a pouca adequabilidade do critério de *von Mises* em certos casos, também vários autores reportaram a sua adequabilidade em análises estruturais envolvendo vários tipos de metais (*e.g.*, *Jiang et al. 2002*, *Wriggers e Chavan 2006*). Nomeadamente, *Wriggers e Chavan* (*2006*) desenvolveram um modelo numérico de elementos finitos de casca para estudar elementos de parede fina em alumínio, o qual estimou razoavelmente bem (i) o comportamento física e geometricamente não linear (trajectórias carga-deslocamento) de colunas tubulares até ao colapso (carga última), e (ii) as relações momento-curvatura de vigas em I.

1.3. Motivação, objectivos e organização da tese

1.3.1 Motivação

A utilização de metais de alta resistência e/ou ductilidade, como o aço carbono e as ligas de aço inoxidável, alumínio ou titânio, bem como os avanços recentes na tecnologia de produção, têm permitido construir sistemas estruturais esbeltos (frequentemente constituídos por elementos de parede fina) que (i) são altamente eficientes (elevados rácios resistência/peso), conduzindo a soluções bastante económicas (*e.g.*, redução do tempo de construção, custo do material/transporte), e (ii) estão frequentemente associados a um notável impacto visual/estético – estas vantagens têm contribuído para a crescente aplicação de estruturas de parede fina em diversas áreas da engenharia Aeronáutica, Automóvel, Civil, Mecânica, Química e *Offshore* (*Loughlan 2004*). Os elementos de parede fina exibem valores de esbeltezas locais e/ou globais que conduzem a um comportamento estrutural e capacidade resistente dominados por uma forte interacção entre efeitos de plasticidade e instabilidade, o que torna a sua rigorosa análise uma tarefa bastante complexa – este facto estimula o desenvolvimento de métodos potentes de análise e de regras de dimensionamento mais eficientes. O método de análise que mais vezes tem sido utilizado mundialmente, prescrito como uma opção de dimensionamento válida para estruturas de aço (*e.g.*, *CEN 2006b*, *AISC 2010*, *BD 2011*), é a realização de análises física e geometricamente não lineares de elementos finitos de casca (EFC). No entanto, esta abordagem tem algumas desvantagens, tais como o custo computacional excessivo, o processamento/interpretação morosos dos *inputs*/*outputs*, e a natureza nodal (em vez de modal) dos resultados. Como se referiu anteriormente, uma alternativa muito promissora ao MEF é a utilização da Teoria Generalizada de Vigas (GBT). A elegância e eficiência da GBT provêm maioritariamente da sua natureza modal ímpar, a qual permite (i) adquirir um conhecimento aprofundado sobre a mecânica comportamental do elemento em qualquer fase da sua resposta, e (ii) judiciosamente excluir de futuras análises semelhantes, todos os modos de deformação cuja contribuição para o comportamento em causa se considere desprezável, reduzindo ainda mais o número de g.l. envolvidos na análise.

A GBT tem atraído o interesse de investigadores em todo o mundo, facto que tem conduzido ao desenvolvimento de novas formulações e aplicações. Em particular, esta teoria tem sido extensivamente desenvolvida no IST-UL (*Camotim et al. 2010a,b*), onde tem sido aplicada a diferentes (i) tipos de análise (1ª ordem, estabilidade, vibração, 2ª ordem ou pós-encurvadura, dinâmica), (ii) condições de fronteira e de carregamento (*e.g.*, apoios localizados, cargas pontuais/concentradas/distribuídas), e (iii) materiais (aço, aço-betão, FRP). Até ao início do trabalho deste doutoramento, a grande maioria dos trabalhos sobre a GBT focava-se apenas em modelos constitutivos elástico lineares, tendo sido excepção as formulações (i) para análises de bifurcação em regime elasto-plástico proposta por *Gonçalves e Camotim* (*2004*, *2007*), e (ii) para análises fisicamente não lineares de 1ª ordem, proposta pelos mesmos autores (*Gonçalves e Camotim 2005*). Contudo, esta última formulação é bastante limitada por restringir a possibilidade de ocorrência de escoamento plástico à superfície média da barra – tal medida impossibilita, p.e., o estudo de barras (i) com um modo de colapso de natureza local/distorcional ou (ii) com secção aberta e sujeitas a torção.

Desta forma, julga-se de elevada relevância o desenvolvimento, implementação e validação de formulações originais da GBT para análises fisicamente não lineares de 1ª ordem e pós-encurvadura de elementos prismáticos de parede fina. Outro aspecto que despoletou um interesse adicional neste trabalho foi a ideia de desenvolver uma formulação aplicável a barras constituídas por um metal promissor – o aço inoxidável. O aço inox tem sido utilizado na indústria da construção há mais de 70 anos, apesar da sua disseminação ter sido limitada devido aos elevados custos de produção (muito superiores aos do aço carbono). Contudo, desenvolvimentos tecnológicos recentes (*Watanabe 1996*) têm alterado este panorama a um ritmo elevado, (i) contribuindo para que o aço inox seja um dos materiais recicláveis mais lucrativos em todo o Mundo (*The Nickel Institute 2012*), e (ii) conduzindo a um interesse renovado nos elementos e sistemas estruturais em aço inoxidável – desde o ano 2000 que tem aumentado o número de aplicações estruturais (*Baddoo 2008*, *Gedge 2008*). Apesar das diversas características atractivas do aço inoxidável quando comparado ao aço carbono (*e.g.*, melhor/atraente aparência, resistência à corrosão muito superior, ciclo de vida mais longo e melhor relação custo-benefício), a utilização do aço inox em aplicações estruturais correntes requer (i) a existência de regras de dimensionamento eficazes e eficientes que explorem por completo as capacidades do material (*i.e*, o seu endurecimento não linear significativo), e/ou (ii) a disseminação de ferramentas *user friendly* de análise estrutural. Devido à sua ductilidade, resistência, e custo elevados, as soluções estruturais neste material tendem a ser esbeltas/leves (*e.g.*, formadas por perfis de parede fina) e altamente optimizadas. Por último, importa referir que o facto de o aço inox exibir um comportamento mecânico significativamente diferente daquele que caracteriza o aço carbono (*e.g.*, a relação tensão-deformação do primeiro é altamente não linear e não exibe um patamar de cedência bem definido), constituiu mais um desafio aliciante desta investigação.

Apesar de no decorrer deste trabalho terem sido desenvolvidas e validadas (por outros autores) outras formulações originais da GBT para análises elasto-plásticas de 1ª e 2ª ordem (*Gonçalves e Camotim 2011*, *2012*), a grande novidade deste trabalho diz respeito à (i) diferente análise da secção implementada - formulação de *Silva* (*2013*) mas incorporando um grau de liberdade inovador, (ii) à inlusão de novos termos não lineares na formulação das equações de equilíbrio da barra, e (iii) à aplicação da formulação de pós-encurvadura a materiais com endurecimento altamente não linear (*e.g.*, aço inoxidável) – para além disso, a validação e análise modal efectuadas ao longo dos exemplos ilustrativos deste trabalho são consideravelmente mais ricas (extensas) do que as realizadas por *Gonçalves e Camotim* (*2011, 2012*).

1.3.2 Objectivos

Apresentam-se, de seguida, os principais objectivos a atingir com a realização deste trabalho – todos eles dizem respeito a perfis de parede fina, prismáticos, de eixo recto e sem perfurações:

(i) Implementar e validar uma análise da secção da GBT para secções arbitrárias e baseada na formulação de *Silva* (*2013*), mas adoptando 5 tipos de g.l. nodais, em vez dos típicos 4 (três deslocamentos e uma rotação de flexão transversal) utilizados em qualquer formulação da GBT proposta até agora. O novo g.l. denomina-se "rotação de empenamento" e surge com o objectivo de aproximar os deslocamentos axiais em cada sub-placa através de polinómios de *Hermite*, em vez de funções lineares como em formulações anteriores – esta "rotação de empenamento" corresponde ao gradiente dos empenamentos em cada nó, garantindo assim a sua continuidade entre sub-placas de uma mesma parede. Esta medida permite ainda captar a não linearidade dos perfis de empenamentos, característica da deformação por corte e/ou espalhamento de plasticidade, através de uma "malha transversal" muito menos discretizada (o que permite melhorar a eficiência computacional).

(ii) Desenvolver, implementar e validar formulações lineares de 1ª ordem e de estabilidade da GBT, válidas para barras com secção arbitrária e sujeitas a qualquer tipo de carregamento.

(iii) Desenvolver, implementar e validar uma formulação da GBT para análises fisicamente não lineares de 1ª ordem (geometricamente lineares) de perfis constituídos por materiais isotrópicos com endurecimento arbitrário (nulo, linear ou não linear). Uma vez que se pretender aplicar a GBT a perfis metálicos, decidiu-se modelar o comportamento elasto-plástico através da teoria de escoamento J_2 (critério de cedência de *von Mises*) com escoamento associado.

(iv) Compreender o comportamento mecânico do aço inoxidável e definir como pode ser modelado através da teoria de escoamento J_2. Em particular, apresenta-se um estado da arte relativo às leis constitutivas uniaxiais (não lineares) utilizadas em modelos numéricos, e decide-se quanto à forma mais simples e precisa de simular o comportamento elástico e elasto-plástico das três principais classes de aço inox utilizadas na construção – austeníticos, ferríticos e austenítico-ferríticos (duplex).

(v) Desenvolver, implementar e validar uma formulação da GBT para análises fisica e geometricamente não lineares (ou de pós-encurvadura) de perfis constituídos por materiais isotrópicos com endurecimento arbitrário (nulo, linear ou não linear).

(vi) Explorar a natureza modal da GBT para analisar a mecânica comportamental dos perfis metálicos analisados.

1.3.3 Organização da tese

No presente capítulo, para além da revisão bibliográfica relativa (i) aos perfis metálicos de parede fina – fabrico, aplicações e métodos de análise, e (ii) aos modelos de plasticidade para materiais metálicos, apresenta-se a motivação e objectivos deste trabalho (e as publicações científicas a que deu origem). A tese está organizada em mais sete capítulos, cujo conteúdo se descreve sucintamente de seguida.

No capítulo 2 abordam-se os conceitos fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT). Após abordar as hipóteses simplificativas, relações cinemáticas, lei constitutiva elástica e procedimentos envolvidos na determinação dos modos de deformação da GBT (análise da secção) – aspectos comuns a todas as formulações da GBT apresentadas nesta tese, apresentam-se as formulações da GBT para análises lineares de 1ª ordem e de estabilidade, juntamente com as aproximações do elemento finito de viga utilizadas em qualquer formulação (linear ou não linear).

Tendo em vista simular o comportamento de elementos e estruturas de aço, apresentam-se no capítulo 3 alguns modelos para simular o comportamento uniaxial do aço carbono e do aço inoxidável. Uma vez que o aço inoxidável é um material estrutural promissor e relativamente pouco disseminado quando comparado com o aço carbono, o capítulo é maioritariamente dedicado ao aço inoxidável, abordando-se aspectos como (i) a composição química, (ii) as principais classes utilizadas na construção, (iii) as aplicações estruturais, (iv) a normalização para dimensionamento e (v) o comportamento mecânico.

O capítulo 4 é dedicado à formulação da teoria de escoamento J_2 implementada neste trabalho, válida para um material isotrópico com endurecimento arbitrário. São abordados assuntos como (i) o critério de cedência, (ii) a regra de escoamento, (iii) a matriz constitutiva elasto-plástica (convencional e consistente), e (iv) métodos explícitos e implícitos de integração numérica (*Euler* Progressivo, *Euler* Regressivo, Normal Média) – incluindo técnicas complementares de sub-incrementação e correcção da solução.

O método do comprimento de arco cilíndrico é a técnica incremental-iterativa implementada neste trabalho. O capítulo 5 descreve detalhadamente (e ilustra) a sua formulação, incluindo as estratégias incremental e iterativa, e o critério de convergência. Optou-se por dedicar um capítulo à apresentação deste método, porque na opinião do autor, e atendendo à complexidade do mesmo, este não é explicado na maioria dos trabalhos de referência com a clareza necessária a uma implementação computacional eficaz, robusta e eficiente.

No capítulo 6 apresenta-se a formulação da GBT para análises fisicamente não lineares de 1ª ordem de perfis de parede fina (i) com secção transversal arbitrária, (ii) constituídos por um material elasto-plástico caracterizado por (ii_1) resposta linear em regime elástico e (ii_2) um endurecimento isotrópico arbitrário (nulo, linear ou não linear), e (iii) submetidos a qualquer carregamento exterior (distribuído e/ou pontual) dependente de um único parâmetro. Ilustram-se, discutem-se e validam-se (por comparação com análises de EFC) os resultados relativos a 8 exemplos numéricos que abrangem vários tipos de carregamento, materiais, secção transversal, e condições de fronteira. Utiliza-se a GBT para a análise modal do comportamento elástico e elasto-plástico de cada perfil analisado, sendo discutidos resultados como diagramas de participação/funções de amplitude modais, e trajectórias de equilíbrio obtidas com base em diferentes conjuntos de modos de deformação.

Apresenta-se, no capítulo 7, a formulação da GBT para análises fisicamente não lineares de 2ª ordem (ou de pós encurvadura) de perfis de parede fina (i) com secção arbitrária, (ii) imperfeitos (caracterizados por exibirem imperfeições geométricas e/ou tensões residuais), (iii) constituídos por um material elasto-plástico com endurecimento isotrópico arbitrário, e (iv) submetidos a qualquer carregamento exterior (distribuído e/ou pontual) dependente de um único parâmetro. De seguida, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre a modelação numérica de imperfeições geométricas e define-se a estratégia adoptada nesta tese, e aborda-se de forma resumida a origem, influência e modelação numérica das tensões residuais em perfis de parede fina. Por último, ilustra-se a aplicação da GBT à análise fisicamente não linear de pós-encurvadura de perfis metálicos de parede fina geometricamente imperfeitos (i.e., com deslocamentos/deformações iniciais). São apresentados e validados sete exemplos ilustrativos onde se analisam perfis submetidos a vários tipos de carregamento e caracterizados por diversos materiais, tipos de secção transversal e condições de fronteira. Para além da validação, é também efectuada uma análise modal do comportamento estrutural de cada barra, através da discussão de resultados como diagramas de participação/funções de amplitude modais e trajectórias de equilíbrio obtidas com base em diferentes conjuntos de modos de deformação.

Por último, no capítulo 8 apresentam-se (i) as principais conclusões do trabalho, bem como (ii) os desenvolvimentos futuros propostos como continuação do trabalho efectuado.

1.4. Publicações

O trabalho desenvolvido durante este doutoramento deu origem à submissão/publicação de (i) 5 artigos em revistas internacionais, (ii) 8 artigos em actas de conferências internacionais e (iii) 2 artigos em actas de congressos nacionais. As respectivas referências são apresentadas de seguida, importando referir que o trabalho *Abambres et al.* (*2013e*) foi vencedor do *Vinnakota Award 2013*, atribuído pelo *Structural Stability Research Council* (SSRC).

1.4.1 Revistas internacionais

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013a). Modal decomposition of thin-walled member collapse mechanisms, *Thin-Walled Structures*, **74** (January), 269-291.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013b). GBT-based first-order analysis of elastic-plastic thin-walled steel members exhibiting strain-hardening, *IES Journal A: Civil and Structural Engineering* (Singapore), **6**(2), 119-134.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013f). Physically non linear GBT analysis of thin-walled members, *Computers & Structures*, **129** (December), 148-165.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013g). GBT-based elastic-plastic post-buckling analysis of stainless steel thin-walled members, *Thin-Walled Structures*, *in press*.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N., Rasmussen, K.J.R. (2013). GBT-based structural analysis of elastic-plastic thin-walled members, *Computers & Structures*, **136** (May), pp. 1-23.

1.4.2 Actas de conferência

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2011a). Análise elasto-plástica de barras com secção de parede fina no contexto da teoria generalizada de vigas, *Actas (CD-ROM) do Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia* (CMNE), Coimbra (Portugal), 14-17/6, A. Tadeu *et al.* (eds.).

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2011b). Análise fisicamente não linear de vigas metálicas no contexto da GBT, *Actas do VIII Congresso de Construção Metálica e Mista* (CMM), Guimarães, Portugal, 24-25/11, L. Silva et al. (eds.), II-295-304.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2012a). GBT-based elastic-plastic analysis of cold-formed steel members. *Proceedings of the 7th International Conference on Advances in Steel Structures* (ICASS), Nanjing (China), 14-16/4, S.L. Chan, G.P. Shu (eds.), Vol. 1, 219-227.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2012b). Geometrically and physically non-linear GBT-based analysis of thin-walled steel members, *Proceedings of the 10th International Conference on Advances in Steel Concrete Composite and Hybrid Structures* (ASCCS), Singapore, 2-4/7, J.R. Liew, S.C. Lee (eds.), Research Publishing (Singapore), 187-195.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2012c). First order elastoplastic GBT analysis of tubular beams, *Proceedings of the 14th International Symposium on Tubular Structures*, London (UK), 12-14/9, L. Gardner (ed.), CRC (Taylor & Francis Group), 705-712.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2012d). GBT-based elastic-plastic post-buckling analysis of stainless steel thin-walled members, *Online proceedings of the Stainless Steel in Structures: 4th International Experts Seminar*, Ascot (UK), 6-7/12, The Steel Construction Institute (SCI) (*www.steel-stainless.org/experts12*).

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013c). Inelastic post-buckling GBT analysis of tubular thin-walled metal members, *Proceedings of the 5th International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation* (SEMC), Cape Town (South Africa), 2-4/9, Alphose Zingoni (ed.), CRC Press, 417-418. (full paper in CD-ROM, 1157-1164).

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013d). Geometrically and materially non-linear GBT analysis of tubular thin-walled metal members, *USB-drive Proceedings of the Congress on Numerical Methods in Engineering* (CNM), Bilbao (Spain), 25-28/6.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013e). GBT-based structural analysis of elastic-plastic thin-walled members, *USB Drive Proceedings of the SSRC Annual Stability Conference*, St. Louis (Missouri, USA), 16-20/4

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013h). Análise inelástica de pós-encurvadura de perfis metálicos de parede fina utilizando a teoria generalizada de vigas, *Actas do IX Congresso de Construção Metálica e Mista* (CMM), Matosinhos, Portugal, 24-25/10, L. Silva et al. (eds.).

Capítulo 2

GBT – Conceitos Fundamentais

Abordam-se neste capítulo os conceitos fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT), a qual é válida para perfis prismáticos[1] de parede fina (de eixo recto e sem perfurações) com secção transversal arbitrária (aberta, total ou parcialmente fechada, ramificada ou não ramificada[2] - *e.g.*, ver Fig. 2.1), e submetidos a uma combinação genérica de forças (distribuídas e/ou pontuais). Após abordar as hipóteses simplificativas, relações cinemáticas, lei constitutiva elástica e procedimentos envolvidos na determinação dos modos de deformação da GBT (análise da secção), os quais constituem aspectos comuns a todas as formulações da GBT apresentadas nesta tese, apresentam-se as formulações da GBT para análises lineares de 1ª ordem e de estabilidade, juntamente com as aproximações do elemento finito de viga utilizadas em qualquer formulação (linear ou não linear). Essas análises, apesar de não constituirem uma inovação deste trabalho, serão utilizadas na determinação de imperfeições geométricas iniciais a introduzir como *input* nas análises de pós-encurvadura intrinsecamente não lineares (ver capítulo 7).

2.1. Hipóteses simplificativas e campo de deslocamentos

Considere-se uma barra prismática de parede fina com uma secção transversal formada por n paredes (placas) rigidamente ligadas entre si através dos bordos longitudinais. O sistema de eixos local no plano médio de cada parede (ver Fig. 2.2(a)-(b)) é designado por (x, s, z), sendo x a coordenada longitudinal ($0 \leq x \leq L - L$ é o comprimento do perfil), s a coordenada transversal

1 Actualmente já exite uma formulação da GBT para análises lineares de estabilidade de elementos de eixo recto com secção variável (*Nedelcu 2010, 2011*). No entanto, as barras com secção variável estão fora do âmbito deste trabalho.

2 Uma secção diz-se não ramificada quando em qualquer nó não concorrem mais de 2 paredes. Uma parede é qualquer troço recto da secção sem intersecções com outro(s) ao longo da sua largura.

($0 \leq s \leq b$ – b é a largura da parede) e z a coordenada na direcção da espessura ($-e/2 \leq z \leq e/2$) – os deslocamentos correspondentes são u (axial ou empenamento), v (transversal) e w (flexão).

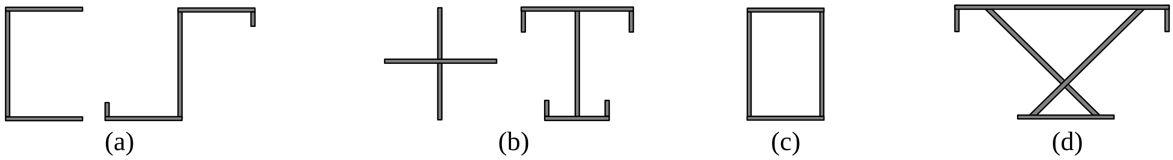


Fig. 2.1. Exemplos de secções de parede fina: (a) abertas não ramificadas, (b) abertas ramificadas, (c) fechadas unicelulares e (d) combinando células fechadas com "ramos" abertos (*Cilmar 2010*).

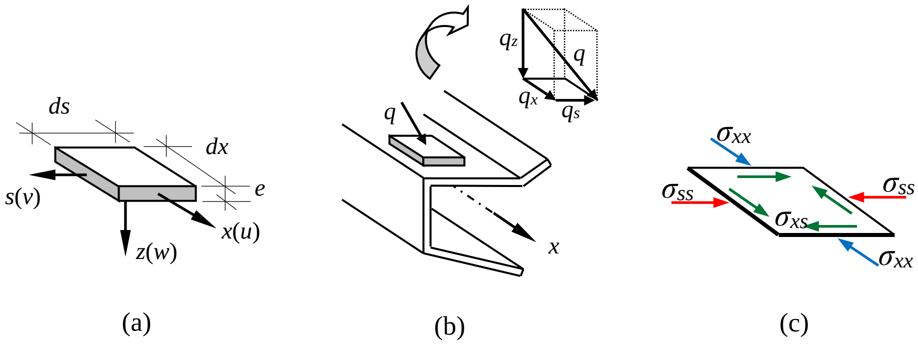


Fig. 2.2. (a) Referencial local na superfície média de cada parede, (b) carga exterior distribuída genérica $q(x,s)$ e (c) componentes de tensão não nulas (hipótese de estado plano de tensão).

Antes de definir o campo de deslocamentos da GBT, importa enunciar as hipóteses de *Kirchhoff-Love* (*Silvestre 2005*) em que esta teoria[3] se baseia, nomeadamente:

(i) As fibras rectas normais à superfície média de cada placa na configuração indeformada, (i_1) são inextensíveis e (i_2) permanecem rectas e normais a essa superfície após deformação;

(ii) A tensão normal na direcção z é nula.

Para um material elástico linear, estas hipóteses conduzem simultaneamente a estados planos de deformação ($\gamma_{xz} = \gamma_{sz} = \varepsilon_{zz} = 0$) e tensão ($\sigma_{xz} = \sigma_{sz} = \sigma_{zz} = 0$ – ver Fig. 2.2(c)), sendo tanto mais realistas quanto maior for a relação entre as dimensões do plano médio e a espessura da parede (*Silvestre 2005*). Neste trabalho, optou-se por impôr estas condições em qualquer formulação da GBT, elástica ou inelástica. Com vista a definir o campo de deslocamentos (u^P, v^P, w^P) de um ponto genérico $P(x, s, z)$ da barra, considere-se (ver Fig. 2.3) as configurações indeformada e deformada, no plano xz, de uma fibra que contenha esse ponto e seja normal à superfície média da placa respectiva – a intersecção da fibra com esse plano dá-se no ponto O (x, s, 0), cujos deslocamentos se

3 Bem como a teoria DMV para a análise geométricamente não linear de placas finas (*Silvestre 2005*).

designam (u, v, w). Aplicando as hipóteses de *Kirchhoff-Love* a deformações infinitesimais, a inextensibilidade da fibra normal no ponto P traduz-se matematicamente por

$$\varepsilon_{zz} = w^P_{,z} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

o que faz com que o deslocamento de flexão seja independente de z, i.e.

$$w^P(x,s,z) = w(x,s) \quad . \quad (2.2)$$

Por outro lado, a adopção da hipótese (i_2) conduz a distorções nulas nos planos xz e sz, ou seja

$$\gamma_{xz} = u^P_{,z} + w^P_{,x} = 0 \qquad \gamma_{sz} = v^P_{,z} + w^P_{,s} = 0 \quad . \quad (2.3)$$

A introdução de (2.2) em (2.3) e posterior integração, dá origem aos deslocamentos axial e transversal do ponto P, vindo

$$u^P(x,s,z) = u(x,s) - z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad v^P(x,s,z) = v(x,s) - z\frac{\partial w}{\partial s} \quad , \quad (2.4)$$

de onde se conclui que os deslocamentos de qualquer ponto da barra podem ser obtidos em função do campo de deslocamentos da sua superfície média – $u(x,s)$, $v(x,s)$ e $w(x,s)$, designados deslocamentos de membrana. A Fig. 2.4 ilustra a decomposição do deslocamento axial u (num elemento infinitesimal de placa ds) nas parcelas de membrana e de flexão ($-z\, w_{,x}$). A elegância e eficiência da GBT provêm da sua natureza modal única, patente na definição do campo de deslocamentos de membrana – combinação linear de modos de deformação da secção, em parte com significado estrutural bem conhecido (*e.g.*, extensão axial, flexão, torção, instabilidade local/distorcional), que variam ao longo do comprimento da barra, ou seja,

$$u(x,s) = u_k(s)\zeta_{k,x}(x) \qquad v(x,s) = v_k(s)\,\zeta_k(x) \qquad w(x,s) = w_k(s)\,\zeta_k(x) \quad , \quad (2.5)$$

onde (i) k é um índice mudo que representa cada modo de deformação ($k=1,\ldots,N_{GBT}$), (ii) $u_k(s)$, $v_k(s)$ e $w_k(s)$ são perfis de deslocamentos que variam ao longo da linha média da secção (z=0), definindo cada modo da GBT (determinados na análise da secção – secção 2.4), e (iii) $\zeta_k(x)$ são funções de forma (ou de amplitude) que definem a variação longitudinal desses perfis (obtidas pela análise da barra – secção 2.3). A presença da derivada $\zeta_{k,x}(x)$ na expressão de $u(x,s)$, (i) tem como objectivo preservar a coerência entre a GBT e as teorias clássicas de vigas[4] (*Silvestre 2005*), e (ii) conduz a um maior desacoplamento dos sistemas de equações de equilíbrio para a maioria das análises estruturais com interesse prático.

4 Sendo $\zeta_k(x)$ uma função adimensional, a presença dessa derivada conduz a um perfil $u_k(s)$ com unidades [L^2], de modo a garantir que $u(x,s)$ tenha unidade de deslocamento.

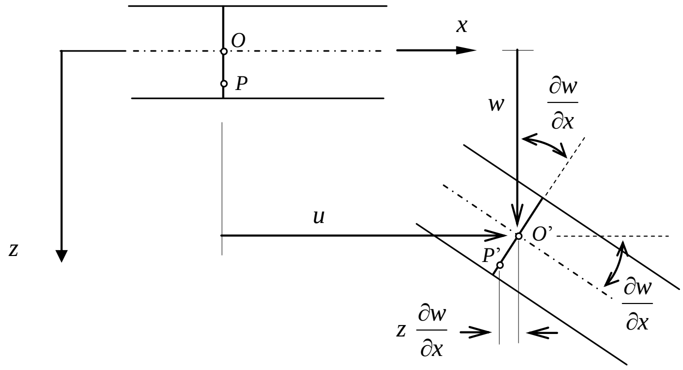


Fig. 2.3. Cinemática (plano *xz*) da fibra normal de uma placa (*Silvestre 2005*).

2.2 Relação constitutiva elástica

Todos os materiais elasto-plásticos abordados nesta tese são isotrópicos e apresentam um comportamento linear em regime elástico, sendo a respectiva lei constitutiva elástica dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} \quad , \qquad (2.6)$$

onde (i) $\{\sigma_{xx}, \sigma_{ss}, \sigma_{xs}\}$ são as tensões axial, transversal e de corte representadas na Fig. 2.2(c) – $\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{ss}, \gamma_{xs}\}$ são as deformações homólogas, e (ii) E, G e ν são os módulos de elasticidade e de distorção, e o coeficiente de *Poisson* do material, respectivamente. A derivação desta relação baseou-se (i) na lei de *Hooke* generalizada, (ii) na hipótese de estado plano de tensão referida anteriormente ($\sigma_{xz} = \sigma_{sz} = \sigma_{zz} = 0$), e ainda (iii) na hipótese $\gamma_{xz} = \gamma_{sz} = 0$ e $\varepsilon_{zz} \neq 0$, apesar de também se ter assumido um estado plano de deformação na derivação do campo de deslocamentos (ver (2.1)). A decisão de descartar essa hipótese, baseou-se no facto de (iii$_1$) $\sigma_{zz} = \varepsilon_{zz} = 0$ conduzir a um comportamento material irrealista ($\sigma_{xx} = -\sigma_{ss}$ e $\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{ss}$), e (iii$_2$) a extensão ε_{zz} ser mais relevante (devido ao efeito de *Poisson*) do que a tensão σ_{zz}.

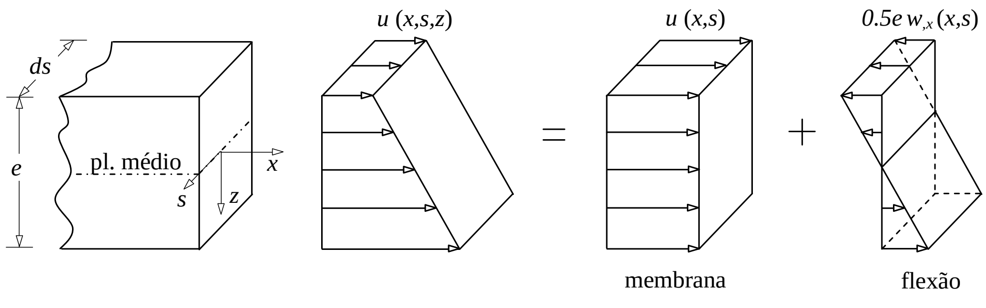


Fig. 2.4. Deslocamento axial num elemento infinitesimal de placa: parcelas de membrana e flexão (*Silvestre 2005*).

2.3 Análises lineares de 1ª ordem e de estabilidade

Apresentam-se nesta secção as formulações da GBT desenvolvidas e implementadas para análises lineares (material elástico linear) de 1ª ordem e de estabilidade. Após o estabelecimento da equação geral de equilíbrio, formula-se um elemento finito de viga (EFV) e definem-se as correspondentes matrizes de rigidez e geométrica. Importa referir que as formulações apresentadas foram implementadas e validadas por comparação de resultados com os obtidos por análises de elementos finitos de casca (EFC) – essa validação não é aqui abordada por não corresponder ao objectivo da tese, mas estará implícita nos resultados discutidos no capítulo 7, uma vez que a modelação das imperfeições geométricas em análises de pós-encurvadura será efectuada através da combinação linear de modos de instabilidade.

2.3.1 Equação geral de equilíbrio

A equação geral de equilíbrio de um corpo elástico para análises lineares de 1ª ordem e de estabilidade, quando submetido a forças conservativas *quasi-estáticas*[5] dependentes de um único parâmetro de carga (λ), é obtida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (*Silvestre 2005*),

$$\delta W_{int} + \beta\,\delta W_{ext} = 0 \quad , \quad (2.7)$$

onde (i) δW_{int} e δW_{ext} são os trabalhos vituais das forças internas (tensões) e externas (cargas aplicadas), respectivamente, e (ii) β vale 1 no caso de análises de 1ª ordem, sendo nulo para análises de estabilidade. O termo δW_{int} é definido por

$$\delta W_{int} = \int_L \int_b \int_e \left[\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{L} + \sigma_{ss}\delta\varepsilon_{ss}^{L} + \sigma_{xs}\delta\gamma_{xs}^{L} \right) + \left(1-\beta\right)\left(\sigma_{xx}^{0}\delta\varepsilon_{xx}^{NL} + \sigma_{ss}^{0}\delta\varepsilon_{ss}^{NL} + \sigma_{xs}^{0}\delta\gamma_{xs}^{NL} \right) \right] dz\, ds\, dx \quad , \quad (2.8)$$

onde (i) σ_{xx}, σ_{ss} e σ_{xs} são componentes axial (ou longitudinal), transversal e de corte do tensor das tensões 2º *Piola-Kirchhoff*, respectivamente, (ii) σ^0_{xx}, σ^0_{ss} e σ^0_{xs} são as tensões de pré-encurvadura, obtidas através de uma análise de 1ª ordem preliminar, e (iii) (ε^{L}_{xx}, ε^{NL}_{xx}), (ε^{L}_{ss}, ε^{NL}_{ss}) e (γ^{L}_{xs}, γ^{NL}_{xs}) são as parcelas lineares e não lineares das componentes do tensor das deformações *Green-Saint-Venant* – extensão axial, extensão transversal e distorção, respectivamente. A definição completa dessas componentes para um ponto genérico P é dada por (derivação no Anexo 2.A)

5 A aceleração de qualquer parte do corpo é desprezável.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \varepsilon^L_{xx} + \varepsilon^{NL}_{xx} = u^P_{,x} + \frac{1}{2}\left[\left(u^P_{,x}\right)^2 + \left(v^P_{,x}\right)^2 + \left(w^P_{,x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{ss} &= \varepsilon^L_{ss} + \varepsilon^{NL}_{ss} = v^P_{,s} + \frac{1}{2}\left[\left(u^P_{,s}\right)^2 + \left(v^P_{,s}\right)^2 + \left(w^P_{,s}\right)^2\right] \\
\gamma_{xs} &= \gamma^L_{xs} + \gamma^{NL}_{xs} = u^P_{,s} + v^P_{,x} + \left(u^P_{,x}u^P_{,s} + v^P_{,x}v^P_{,s} + w^P_{,x}w^P_{,s}\right)
\end{aligned} \quad , \quad (2.9)$$

onde u^P, v^P e w^P são obtidos pelas Eqs. (2.2) e (2.4). No entanto, para a análise de estabilidade optou-se por desprezar os termos não lineares de flexão (função de z), vindo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \varepsilon^L_{xx} + \varepsilon^{NL}_{xx} = \left(u_{,x} - zw_{,xx}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(u_{,x}\right)^2 + \left(v_{,x}\right)^2 + \left(w_{,x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{ss} &= \varepsilon^L_{ss} + \varepsilon^{NL}_{ss} = \left(v_{,s} - zw_{,ss}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(u_{,s}\right)^2 + \left(v_{,s}\right)^2 + \left(w_{,s}\right)^2\right] \\
\gamma_{xs} &= \gamma^L_{xs} + \gamma^{NL}_{xs} = \left(u_{,s} + v_{,x} - 2zw_{,xs}\right) + \left(u_{,x}u_{,s} + v_{,x}v_{,s} + w_{,x}w_{,s}\right)
\end{aligned} \quad , \quad (2.10)$$

onde a parcela não linear é a mais completa até hoje utilizada em formulações da GBT[6]. Tirando partido da definição do campo de deslocamentos (2.5), as componentes virtuais das deformações são dadas por

$$\begin{aligned}
&\delta\varepsilon^L_{xx} = \left(u_i - zw_i\right)\delta\zeta_{i,xx} && \delta\varepsilon^{NL}_{xx} = u_i u_k \zeta_{k,xx}\delta\zeta_{i,xx} + \left(v_i v_k + w_i w_k\right)\zeta_{k,x}\delta\zeta_{i,x} \\
&\delta\varepsilon^L_{ss} = \left(v_{i,s} - zw_{i,ss}\right)\delta\zeta_i && \delta\varepsilon^{NL}_{ss} = u_{i,s}u_{k,s}\zeta_{k,x}\delta\zeta_{i,x} + \left(v_{i,s}v_{k,s} + w_{i,s}w_{k,s}\right)\zeta_k\delta\zeta_i \\
&\delta\gamma^L_{xs} = \left(u_{i,s} + v_i - 2zw_{i,s}\right)\delta\zeta_{i,x} && \delta\gamma^{NL}_{xs} = \left\{\begin{array}{l} u_i u_{k,s}\zeta_{k,x}\delta\zeta_{i,xx} + u_{i,s}u_k\zeta_{k,xx}\delta\zeta_{i,x} + \\ +\left(v_i v_{k,s} + w_i w_{k,s}\right)\zeta_k\delta\zeta_{i,x} + \\ +\left(v_{i,s}v_k + w_{i,s}w_k\right)\zeta_{k,x}\delta\zeta_i \end{array}\right\}
\end{aligned} \quad , \quad (2.11)$$

onde i e k são índices mudos referentes aos modos de deformação da GBT. No que respeita às tensões (σ_{ij} , σ^0_{ij}, $ij = xx, ss, xs$) que figuram em (2.8), as mesmas são obtidas pela relação constitutiva (2.6), onde as deformações consideradas devem incluir apenas a sua parcela linear – ver (2.10), vindo

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(u_k\zeta_{k,xx} + \nu\, v_{k,s}\zeta_k\right) + \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(-w_k\zeta_{k,xx} - \nu\, w_{k,ss}\zeta_k\right) \\
\sigma_{ss} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(v_{k,s}\zeta_k + \nu\, u_k\zeta_{k,xx}\right) + \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(-w_{k,ss}\zeta_k - \nu\, w_k\zeta_{k,xx}\right) \\
\sigma_{xs} &= G\left(u_{k,s} + v_k - 2z\, w_{k,s}\right)\zeta_{k,x}
\end{aligned} \quad . \quad (2.12)$$

6 A exclusão dos termos não lineares de flexão foi baseada no facto de os perfis analisados serem constituidos por paredes de reduzida espessura (elevada esbelteza), e também por essa hipótese ter sido anteriormente validada por diversos autores (*e.g.*, *Silvestre 2005*, *Silva 2013*) – *Silva* (*2013*) chegou mesmo a utilizar a formulação (2.10).

A introdução de (2.11)-(2.12) em (2.8) permite reescrever δW_{int} no formato

$$\int_L \begin{pmatrix} \left[C_{ik}\zeta_{k,xx}+\left(D^2_{ik}+C^3_{ki}\right)\zeta_k\right]\delta\zeta_{i,xx}+\left[D_{ik}\zeta_{k,x}\right]\delta\zeta_{i,x}+ \\ \left[\left(D^2_{ki}+C^3_{ik}\right)\zeta_{k,xx}+B_{ik}\zeta_k\right]\delta\zeta_i \end{pmatrix} dx +$$

$$+(1-\beta)\lambda\int_L \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \left(X^1_{pik}\zeta^0_{p,xx}+X^2_{pik}\zeta^0_p+X^7_{pik}\zeta^0_{p,xx}+X^8_{pik}\zeta^0_p+X^{11}_{pik}\zeta^0_{p,xx}+X^{12}_{pik}\zeta^0_p\right)\zeta_{k,x} \\ +\left(\Gamma^3_{pik}\zeta^0_{p,x}\right)\zeta_k+\rho\left(S^7_{pik}\zeta^0_p+S^8_{pik}\zeta^0_{p,xx}\right)\zeta_{k,x} \end{bmatrix}\delta\zeta_{i,x} \\ +\left[\left(\Gamma^3_{pki}\zeta^0_{p,x}\right)\zeta_{k,x}+\rho\left(S^3_{pik}\zeta^0_p+S^4_{pik}\zeta^0_{p,xx}+S^5_{pik}\zeta^0_p+S^6_{pik}\zeta^0_{p,xx}\right)\zeta_k\right]\delta\zeta_i \end{pmatrix} dx \;, \quad (2.13)$$

onde (i) i, k e p são índices mudos (associados a modos de deformação) que indicam componentes de tensores de 1ª, 2ª e 3ª ordem, (ii) λ é o parâmetro de carga, (iii) $\lambda\,\zeta^0_p$ são as funções de amplitude modais da solução de pré-encurvadura para análises de estabilidade, (iv) ρ=0 se σ^0_{xx} e/ou σ^0_{xs} forem as tensões preponderantes de pré-encurvadura, e ρ=1 se as tensões dominantes forem as transversais (σ^0_{ss}), e (v) os tensores de 2ª e 3ª ordem são dados por

$$B_{ik}=B^1_{ik}+B^2_{ik}=\tfrac{E}{1-\nu^2}\int_b \begin{pmatrix} e\,v_{i,s}v_{k,s}+ \\ \dfrac{e^3}{12}w_{i,ss}w_{k,ss}\end{pmatrix} ds \qquad C_{ik}=C^1_{ik}+C^2_{ik}=\tfrac{E}{1-\nu^2}\int_b \begin{pmatrix} e\,u_i u_k+ \\ \dfrac{e^3}{12}w_i w_k\end{pmatrix} ds$$

$$C^3_{ik}=\tfrac{E\nu}{1-\nu^2}\int_b e\,v_{i,s}u_k\,ds \;, \quad (2.14)$$

$$D_{ik}=D^1_{ik}+D^3_{ik}=G\int_b \begin{pmatrix} \dfrac{e^3 w_{i,s}w_{k,s}}{3}+ \\ e\left(u_{i,s}+v_i\right)\left(u_{k,s}+v_k\right)\end{pmatrix} ds \qquad D^2_{ik}=\tfrac{E\nu}{12(1-\nu^2)}\int_b e^3 w_i w_{k,ss}ds$$

$$X^1_{pik}=\tfrac{E}{1-\nu^2}\int_b e\,u_p\left(v_i v_k+w_i w_k\right)ds \qquad X^2_{pik}=\tfrac{E\nu}{1-\nu^2}\int_b e\,v_{p,s}\left(v_i v_k+w_i w_k\right)ds$$

$$X^7_{pik}=\tfrac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_b e^3 u_p w_{i,s}w_{k,s}\,ds \qquad X^8_{pik}=\tfrac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_b e^3 v_{p,s}w_{i,s}w_{k,s}\,ds$$

$$X^{11}_{pik}=\tfrac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_b e^3 w_p\left(v_i w_{k,s}+w_{i,s}v_k\right)ds \qquad X^{12}_{pik}=\tfrac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_b e^3 w_{p,ss}\left(v_i w_{k,s}+w_{i,s}v_k\right)ds \quad (2.15)$$

$$S^3_{pik}=\tfrac{E}{1-\nu^2}\int_b e\,v_{p,s}w_{i,s}w_{k,s}\,ds \qquad S^4_{pik}=\tfrac{E\nu}{1-\nu^2}\int_b e\,u_p w_{i,s}w_{k,s}\,ds$$

$$S^5_{pik}=\tfrac{E}{1-\nu^2}\int_b e\,v_{p,s}v_{i,s}v_{k,s}\,ds \qquad S^6_{pik}=\tfrac{E\nu}{1-\nu^2}\int_b e\,u_p v_{i,s}v_{k,s}\,ds$$

$$S^7_{pik}=\tfrac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_b e^3 v_{p,s}w_{i,s}w_{k,s}\,ds \qquad S^8_{pik}=\tfrac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_b e^3 u_p w_{i,s}w_{k,s}\,ds \qquad \Gamma^3_{pik}=G\int_b e\left(v_p+u_{p,s}\right)w_i w_{k,s}\,ds$$

(o Anexo 2.C apresenta a forma como estes tensores foram implementados computacionalmente). Relativamente ao trabalho virtual das forças externas, tem-se

$$\delta W_{ext} = -\int_L\int_b \left(q_x\delta u + q_s\delta v + q_z\delta w\right)\, ds\, dx = -\int_L\int_b \left[q_x u_i \delta\zeta_{i,x} + \left(q_s v_i + q_z w_i\right)\delta\zeta_i\right] dsdx \;, \quad (2.16)$$

onde q_x, q_s e q_z são as componentes de uma força distribuída arbitrária actuante na superfície média da barra (ver Fig. 2.2(b)) – a consideração de forças pontuais é conseguida pela imposição de condições de fronteira.

2.3.2 Formulação de um elemento finito

O método dos elementos finitos (MEF) é adoptado para obter a solução aproximada mais rigorosa possível de qualquer análise da GBT a abordar nesta tese. Recorrendo a elementos finitos de viga (EFV), as funções de aproximação implementadas para cada EFV (de comprimento L_e) correspondem a duas alternativas:

(i) Polinómios de *Hermite* para aproximar (i$_1$) $\zeta_k(x)$ para modos com deslocamentos no plano da secção, e (i$_2$) $\zeta_{k,x}(x)$ para os modos (axial e de corte – ver secção 2.4) que apenas exibem empenamentos, ou seja,

$$\zeta_{k,x}^{axial+corte}\left(x\right) = \Psi_H\left(x\right)d_k, \quad \zeta_k^{outros}\left(x\right) = \Psi_H\left(x\right)d_k \qquad , \quad (2.17)$$

onde

$$\Psi_H\left(x\right) = \left[2\xi^3 - 3\xi^2 + 1,\; L_e\left(-\xi^3 + 2\xi^2 - \xi\right),\; 3\xi^2 - 2\xi^3,\; L_e\left(\xi^2 - \xi^3\right)\right], \quad \xi = \frac{x}{L_e} \quad , \quad (2.18)$$

sendo Ψ_H o conjunto dos polinómios de *Hermite* associados a cada um dos deslocamentos generalizados elementares (componentes de d_k) representados na Fig. 2.5(a).

(ii) Polinómios de *Hermite* para aproximar $\zeta_k(x)$ para modos com deslocamentos no plano da secção, e funções lineares de *Lagrange* na aproximação de $\zeta_{k,x}(x)$ para os modos axial e de corte, ou seja,

$$\zeta_{k,x}^{axial+corte}\left(x\right) = \Psi_L\left(x\right)d_k, \quad \zeta_k^{outros}\left(x\right) = \Psi_H\left(x\right)d_k \qquad , \quad (2.19)$$

onde

$$\Psi_L(x) = \left\{ \begin{array}{lll} [1-3\xi,\ 3\xi,\ 0,\ 0], & \xi = \dfrac{x}{L_e}, & x \in [0,\ L_e/3] \\ [0,\ 2-3\xi,\ 3\xi-1,\ 0], & \xi = \dfrac{x}{L_e}, & x \in [L_e/3,\ 2L_e/3] \\ [0,\ 0,\ 3-3\xi,\ 3\xi-2], & \xi = \dfrac{x}{L_e}, & x \in [2L_e/3,\ L_e] \end{array} \right\} \quad , \quad (2.20)$$

sendo Ψ_L o conjunto das funções de *Lagrange* associadas a cada um dos deslocamentos generalizados elementares representados na Fig. 2.5(b) – EFV sub-dividido em 3 troços iguais.

O equilíbrio do EFV é formulado através da introdução da respectiva aproximação ((2.17) ou (2.19)) na equação (2.7) ($L \equiv L_e$), obtendo-se

$$\left(k_{ik} + (1-\beta)\lambda g_{ik}\right) d_k = \beta\left(f_i^q + f_i^F\right) \quad , \quad (2.21)$$

onde (i) k_{ik} e g_{ik} são, respectivamente, as "componentes" *i-k* (sub-matrizes 4x4 associadas aos modos de deformação *i* e *k*) das matrizes de rigidez elástica e geométrica, e (ii) $f_i^q + f_i^F$ é a "componente" *i* (sub-vector 4x1 associado ao modo *i*) do vector de forças exteriores (*q*-distribuídas e/ou *F*-pontuais) – cada entrada corresponde ao trabalho das forças aplicadas ao EFV no campo de deslocamentos que resulta da imposição de um deslocamento unitário (o da entrada homóloga do vector *d*) e dos restantes nulos. As variáveis referidas vêm definidas por

$$k_{ik} = C_{ik}\int_{L_e}\left(ddS^i\right)^T ddS^k dx + \left(D_{ik}^2 + C_{ki}^3\right)\int_{L_e}\left(ddS^i\right)^T S^k dx + D_{ik}\int_{L_e}\left(dS^i\right)^T dS^k dx + $$
$$+\left(D_{ki}^2 + C_{ik}^3\right)\int_{L_e}\left(S^i\right)^T ddS^k dx + B_{ik}\int_{L_e}\left(S^i\right)^T S^k dx$$

$$f_i^q = \int_{L_e}\left[\left(dS^i\right)^T q_i^u + \left(S^i\right)^T q_i^{v,w}\right]dx, \quad q_i^u = \int_b q_x u_i ds, \quad q_i^{v,w} = \int_b \left(q_s v_i + q_z w_i\right) ds \quad , \quad (2.22)$$

$$g_{ik} = \left[\begin{array}{l} X_{pik}^1 I_{pik}^1 + X_{pik}^2 I_{pik}^2 + X_{pik}^7 I_{pik}^1 + X_{pik}^8 I_{pik}^2 + X_{pik}^{11} I_{pik}^1 + X_{pik}^{12} I_{pik}^2 + \\ +\Gamma_{pik}^3 I_{pik}^{10} + \Gamma_{pki}^3 I_{pik}^9 + \rho\left(S_{pik}^3 I_{pik}^5 + S_{pik}^4 I_{pik}^6 + S_{pik}^5 I_{pik}^5 + S_{pik}^6 I_{pik}^6 + S_{pik}^7 I_{pik}^2 + S_{pik}^8 I_{pik}^1\right) \end{array}\right]$$

onde *i* e *k* são índices livres, e *p* é um índice mudo, sendo os vectores S^k, dS^k e ddS^k (dependentes das funções de aproximação) e os tensores I^m_{pik} dados por

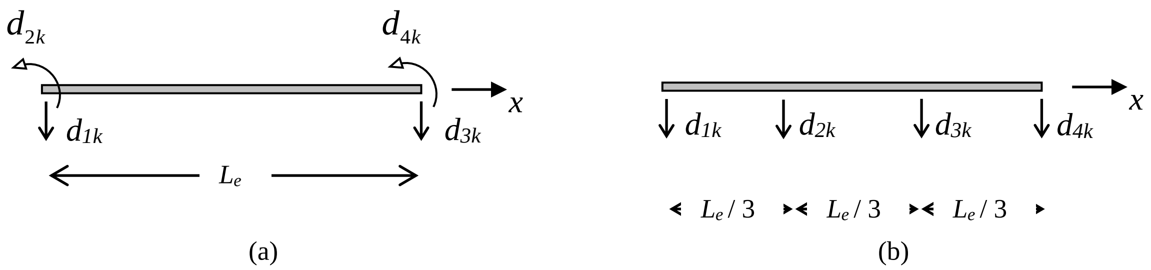


Fig. 2.5. Deslocamentos generalizados associados aos (a) polinómios de *Hermite* ou (b) funções de *Lagrange* adoptados na aproximação do EFV referente ao modo *k*.

$$\begin{aligned} I^{1}_{pik} &= \int_{L_e} \zeta^{0}_{p,xx}\left(dS^{i}\right)^{T} dS^{k}dx & I^{6}_{pik} &= \int_{L_e} \zeta^{0}_{p,xx}\left(S^{i}\right)^{T} S^{k}dx \\ I^{2}_{pik} &= \int_{L_e} \zeta^{0}_{p}\left(dS^{i}\right)^{T} dS^{k}dx & I^{9}_{pik} &= \int_{L_e} \zeta^{0}_{p,x}\left(S^{i}\right)^{T} dS^{k}dx \\ I^{5}_{pik} &= \int_{L_e} \zeta^{0}_{p}\left(S^{i}\right)^{T} S^{k}dx & I^{10}_{pik} &= \int_{L_e} \zeta^{0}_{p,x}\left(dS^{i}\right)^{T} S^{k}dx \end{aligned} \quad , \tag{2.23}$$

$$S^{k} = \begin{Bmatrix} P\Psi_{(H\ ou\ L)} \Leftrightarrow v_k, w_k = 0 \\ \Psi_{H} \Leftrightarrow v_k, w_k \neq 0 \end{Bmatrix}, dS^{k} = \begin{Bmatrix} \Psi_{(H\ ou\ L)} \Leftrightarrow v_k, w_k = 0 \\ \Psi_{H,x} \Leftrightarrow v_k, w_k \neq 0 \end{Bmatrix}, ddS^{k} = \begin{Bmatrix} \Psi_{(H\ ou\ L),x} \Leftrightarrow v_k, w_k = 0 \\ \Psi_{H,xx} \Leftrightarrow v_k, w_k \neq 0 \end{Bmatrix}, \tag{2.24}$$

onde P indica primitiva, e os índices H (*Hermite*) ou L(*Lagrange*) identificam a aproximação usada – ver (2.18) e (2.20). Definidas as matrizes de rigidez e geométrica do EFV, importa fazer referência à imposição de condições de fronteira em secções com empenamentos restringidos ($\zeta_{k,x}(x)$ = 0, ver (2.4)-(2.5)) e sujeitas a tensões de corte ($\sigma_{xs} \neq 0$). Como se pode observar pela definição de σ_{xs} em (2.12), as condições estática e cinemática mencionadas são incompatíveis ($\zeta_{k,x}$=0 => σ_{xs}=0), o que corresponde a um cenário típico de *shear locking* (*Belytschko et al. 2000*). Após validação, concluiu-se que a opção que conduz a melhores resultados é a que garante a admissibilidade cinemática, ou seja, $\zeta_{k,x}$=0 nas secções impedidas de empenar. Para além disso, verificou-se que (i) a anulação de $\zeta_{k,xx}$ nessas secções, apenas para os modos de corte (a definir na secção 2.4), e (ii) o refinamento da malha de EF na zona afectada (solução típica), permitem melhorar a qualidade dos resultados[7].

Uma vez formulado o elemento finito, as restantes etapas do MEF consistem em:

(i) Discretização da barra em EFV (obtenção da malha) – aconselha-se um maior refinamento nas zonas de maior variação dos deslocamentos e/ou de concentração de deformações (*e.g.*,

7 A condição $\zeta_{k,xx}$ = 0 é necessária para ajustar o nível das tensões axiais (σ_{xx}) em equilíbrio com a ausência de tensões de corte (σ_{xs}) – ver (2.12).

cargas localizadas), bem como a correspondência entre os limites longitudinais de cada carga e os nós da malha.

(ii) Assemblagem das variáveis globais – matrizes de rigidez e geométrica, e vectores de deslocamentos e de forças externas.

(iii) Imposição das condições de fronteira da barra – eliminação de todas as linhas e colunas associadas aos graus de liberdade (g.l.) anulados.

(iv) Resolução do sistema de equações de equilíbrio – problema linear no caso de uma análise de 1ª ordem, e um problema de valores e vectores próprios no caso de uma análise linear de estabilidade, onde o vector d_b define o modo de instabilidade associado ao parâmetro de carga λ_b.

2.4 Análise da secção

A análise da secção é uma etapa fundamental (única) da GBT, sem a qual a "elegância" e significativa eficiência computacional inerentes a esta teoria não seriam possíveis. A análise da secção, precedente à análise da barra, conduz à identificação dos modos de deformação da GBT, ou seja, à determinação dos respectivos perfis de deslocamentos ao longo da linha média da secção (u_k, v_k, w_k em (2.5)). Para se proceder a esta análise, é necessário discretizar as paredes da secção em várias sub-placas – os nós resultantes designam-se naturais se definirem as extremidades das paredes e suas intersecções, ou intermédios[8] caso contrário, como se ilustra na Fig. 2.6 para o caso de uma secção em I. Os modos de deformação da GBT (i) não têm uma determinação única, (ii) existem em igual número e resultam da combinação linear dos modos de deformação elementares (previamente determinados), através da resolução de problemas auxiliares de valores e vectores próprios, (iii) subdividem-se em várias famílias de acordo com a sua natureza cinemática, e (iv) ao invés dos modos elementares, apresentam um significado estrutural bastante claro e/ou familiar – *e.g.*, os modos de deformação (e respectivas rigidezes) da teoria clássica de vigas são totalmente identificados (extensão axial, flexão na maior/menor inércias e torção), o que (iv$_1$) dá origem a um desacoplamento significativo do sistema de equações de equilíbrio (*Silvestre 2005*), e (iv$_2$) possibilita a exclusão de vários modos da análise, sem prejudicar a qualidade/precisão dos resultados – esta decisão é tomada através da experiência e conhecimento adquiridos pelo utilizador, da avaliação da participação modal (ver 2.4.3) em análises realizadas *à priori* com um maior número de modos, e/ou por meio de considerações de simetria (em função da geometria da secção e tipo de carregamento). Antes de descrever os procedimentos adoptados neste trabalho para

8 Estes condicionam o "grau" de discretização da secção transversal, uma vez que os naturais resultam da sua geometria.

determinar os modos de deformação elementares e da GBT, importa fazer referência (*Cilmar 2010, Silva et al. 2008, Silva 2013*) a algumas das formulações propostas na literatura:

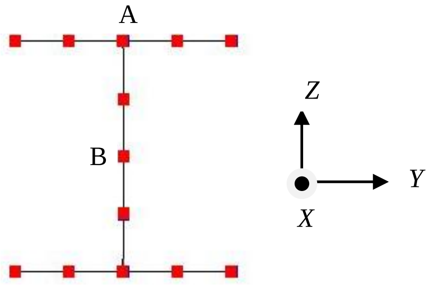


Fig. 2.6. Discretização de uma secção em I: nó natural (A) e nó intermédio (B).

(i) Os trabalhos pioneiros de *Schardt* (*1970*, *1989*) no âmbito de análises lineares de 1ª ordem, encurvadura ou vibração de membros isotrópicos de parede fina com secções abertas, introduziram os chamados modos de deformação convencionais, i.e., aqueles que exibem distorções (γ_{xs}) e extensões transversais (ε_{ss}) de membrana (z=0) nulas[9]. Os modos convencionais podem-se subdividir em globais (extensão axial, flexão na maior e menor inércias, e torção[10]) e locais (estes podem-se ainda classificar em distorcionais ou locais-de-placa para alguns tipos de secções, como se explicará adiante). Nos casos de secções total ou parcialmente fechadas e/ou análises geometricamente não lineares, a adopção de outros tipos de modos (designados não convencionais) é fundamental para garantir a precisão dos resultados.

(ii) A incorporação de modos de corte e de extensão transversal nas análises da GBT foi levada a cabo por *Silvestre e Camotim* (*2003*) – esses modos são obtidos através da imposição unitária, em cada nó da secção, de deslocamentos axiais (u) e transversais (v), respectivamente. Contudo, estes desenvolvimentos foram apenas aplicados a secções abertas não ramificadas, sendo de difícil (ou mesmo impossível) extensão a secções arbitrárias.

(iii) A primeira formulação geral da GBT para analisar secções abertas ramificadas arbitrárias, foi proposta por *Dinis et al.* (*2006*).

(iv) *Gonçalves et al.* (*2005, 2009*) propuseram uma abordagem geral válida para secções arbitrárias de parede fina, a qual permite isolar os modos de defomação associados às distorções de membrana em células de secções fechadas. Juntamente com os modos convencionais, estes modos permitem descrever com rigor o comportamento linear de 1ª ordem/estabilidade de elementos tubulares

9 Extensões e distorções infinitesimais (parcelas lineares das componentes do tensor de *Green-Saint-Venant*). A hipótese de distorções nulas é também designada por hipótese de *Vlasov*.

10 O modo de torção não é convencional em secções total ou parcialmente fechadas, devido à existência de fluxo de corte de membrana (teoria de *Bredt*).

(*e.g.*, tabuleiros de pontes) sujeitos a vários tipos de carregamento. As desvantagens desta abordagem consistem (i) no facto de os modos de corte não terem um significado físico evidente, e (ii) na impossibilidade de isolar o modo de torção em secções celulares[11] – estes factores conduzem à utilização de um número desnecessariamente elevado de modos de deformação.

(v) *Silva et al.* (*2008*) e *Silva* (*2013*) propuseram uma alternativa bastante versátil que permite analisar qualquer secção de parede fina. Ao contrário das formulações anteriores, os modos de deformação elementares não são obtidos pela imposição de condições cinemáticas particulares. Ao invés, são considerados modos nodais semelhantes aos adoptados em modelos de elementos finitos de casca, ou seja, resultantes da imposição unitária de cada g.l. nodal (e anulamento dos restantes) e utilização de funções de forma polinomiais em cada sub-placa. Posteriormente, procedimentos de diagonalização simultânea de matrizes (problemas de valores/vectores próprios) dão origem a quatro famílias de modos de deformação da GBT: (i) convencionais (γ^M_{xs}=0 e ε^M_{ss}=0), (ii) de corte, (iii) de extensão transversal e (iv) de fluxo de corte celular. Estes últimos permitem isolar o modo de torção em secções celulares, anteriormente obtido pela combinação linear de outros modos.

(vi) Recentemente, *Gonçalves et al.* (*2010*) propuseram um novo método geral para determinar modos de deformação em secções de parede fina, baseado (i) em procedimentos bem definidos e de fácil implementação, (ii) na imposição de hipóteses cinemáticas específicas, e ainda (iii) na ortogonalização de modos da GBT, os quais são subdivididos em (iii_1) convencionais (γ^M_{xs}=0 e ε^M_{ss}=0), (iii_2) de corte (dois tipos distintos) e (iii_3) de extensão transversal. Esta abordagem também permite caracterizar a torção de secções celulares através de um único modo.

(vii) As análises da secção da GBT propostas até então, consideram no máximo quatro g.l. por nó da secção transversal (u, v, w, θ_x – rotação de flexão transversal) (*Gonçalves et al. 2010*).

Neste trabalho adopta-se a análise da secção formulada por *Silva* (*2013*) e anteriormente referida, com a única diferença de poderem ser adoptados 4 ou 5 tipos de g.l. nodais em vez de apenas 3 deslocamentos. As análises da secção da GBT propostas até então consideram três (d_X, d_Y, d_Z) ou quatro (d_X, d_Y, d_Z, θ_X – rotação[12] em torno do eixo X ou rotação de flexão) g.l. nodais – ver Fig. 2.6. Por isso, de modo a aproximar com rigor os perfis não lineares de empenamentos resultantes da (i) deformação por corte (*e.g.*, efeito de *shear lag*) e/ou (ii) espalhamento de plasticidade, essas formulações requerem um nível de discretização superior (o que é prejudicial à eficiência computacional) ao que seria

11 Uma secção celular contém pelo menos uma célula, i.e., um conjunto de paredes que formam um polígono fechado.

12 Qualquer g.l. designado "rotação" corresponde à 1ª derivada do campo de deslocamentos a que está associado.

necessário se os perfis de deslocamentos axiais fossem aproximados por funções não lineares em cada sub-placa – para além disso, a aproximação linear não garante a continuidade dos gradientes de empenamentos entre sub-placas da mesma placa. Devido a estas razões, a análise da secção implementada permite considerar um 5º g.l. nodal que corresponde a uma rotação em torno do eixo local *z* (ver Fig. 2.2(a)), denominada rotação de empenamento (θ_z) – em cada nó, considera-se uma rotação independente por parede (direcção) convergente. Esta inovação permite aproximar cada perfil de empenamentos $u_k(s)$ através de polinómios cúbicos (em vez de funções lineares) em cada sub-placa da secção discretizada, de acordo com o ilustrado na sub-secção seguinte[13]. Após apresentar detalhadamente os procedimentos inerentes à determinação dos modos de deformação elementares e da GBT, a sub-secção 2.4.4 apresenta um exemplo ilustrativo que permite analisar as diferenças, vantagens e/ou desvantagens da inclusão deste novo g.l. (rotação de empenamento) na análise fisica e geometricamente linear de uma ponte em caixão sujeita ao efeito de *shear lag*.

2.4.1 Modos de deformação elementares

Como referido anteriormente, para se proceder à análise da secção é necessário discretizá-la em várias sub-placas, o que resulta num conjunto de nós naturais e intermédios (ver Fig. 2.6). A cada nó vão estar associados vários tipos de *g.l*, tendo sido nesta tese implementadas duas hipóteses: (i) 4 g.l. (d_X, d_Y, d_Z, θ_X – 3 deslocamentos e uma rotação de flexão) ou (ii) 5 g.l. (d_X, d_Y, d_Z, θ_X, θ_z – 3 deslocamentos, 1 rotação de flexão e 1 rotação de empenamento). A determinação dos modos elementares resulta da imposição de um valor unitário de cada g.l. nodal e bloqueio de todos os outros. Resta definir qual a distribuição dos deslocamentos de membrana (*u*, *v*, *w*) no domínio de cada sub-placa em função dos respectivos g.l. nodais, vindo

$$u^L(\xi) = u_i(1-\xi) + u_f\xi \qquad u^{NL}(\xi) = u_i\eta_1 + \theta_{zi}\eta_2 + u_f\eta_3 + \theta_{zf}\eta_4$$
$$v(\xi) = v_i(1-\xi) + v_f\xi \qquad w(\xi) = w_i\eta_1 + \theta_{xi}\eta_2 + w_f\eta_3 + \theta_{xf}\eta_4 \qquad ,(2.25)$$

$$\eta_1 = 1-3\xi^2+2\xi^3 \quad \eta_2 = b_p(-\xi+2\xi^2-\xi^3) \quad \eta_3 = 3\xi^2-2\xi^3 \quad \eta_4 = b_p(\xi^2-\xi^3)$$

onde (i) os índices *i* e *f* simbolizam os nós *inicial* e *final*, estando os respectivos g.l. representados na Fig. 2.7, (ii) $\xi = s/b_p$ é uma variável adimensional que varia entre 0 e 1 no domínio de cada sub-placa (de largura b_p), (iii) os empenamentos são aproximados por uma função (iii$_1$) linear (u^L) ou (iii$_2$) não linear

13 Importa fazer referência às recentes contribuições de *Vieira* (2010) e *Vieira et al.* (2014), os quais desenvolveram uma teoria de vigas com secção deformável distinta da GBT (incluindo a forma de identificação dos modos de deformação), segundo a qual são utilizadas funções polinomiais para aproximar os perfis de deslocamentos axiais.

(u^{NL}) baseada em polinómios de *Hermite* ($\eta_1 - \eta_4$), e (iv) os deslocamentos transversais (v) e de flexão (w) são aproximados por funções lineares e polinómios de *Hermite*, respectivamente.

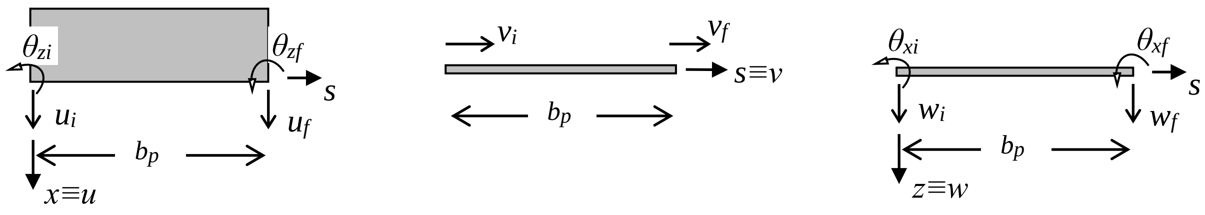


Fig. 2.7. Graus de liberdade nodais associados aos campos de deslocamentos u, v e w numa sub-placa genérica da secção.

A título ilustrativo, apresentam-se nas Figs. 2.8, 2.9 e 2.10 as configurações dos 21 modos de deformação elementares de uma cantoneira com apenas 1 nó intermédio numa das abas. A Fig. 2.8 representa os modos que não exibem empenamentos ($v \neq 0$ e/ou $w \neq 0$, $u=0$) e a Fig. 2.9 diz respeito aos restantes, os quais apenas exibem empenamentos com distribuição não linear em cada sub-placa ($v=w=0$, $u \neq 0$). Note-se que os modos (i) **1-4** dizem respeito à imposição de deslocamentos horizontais,

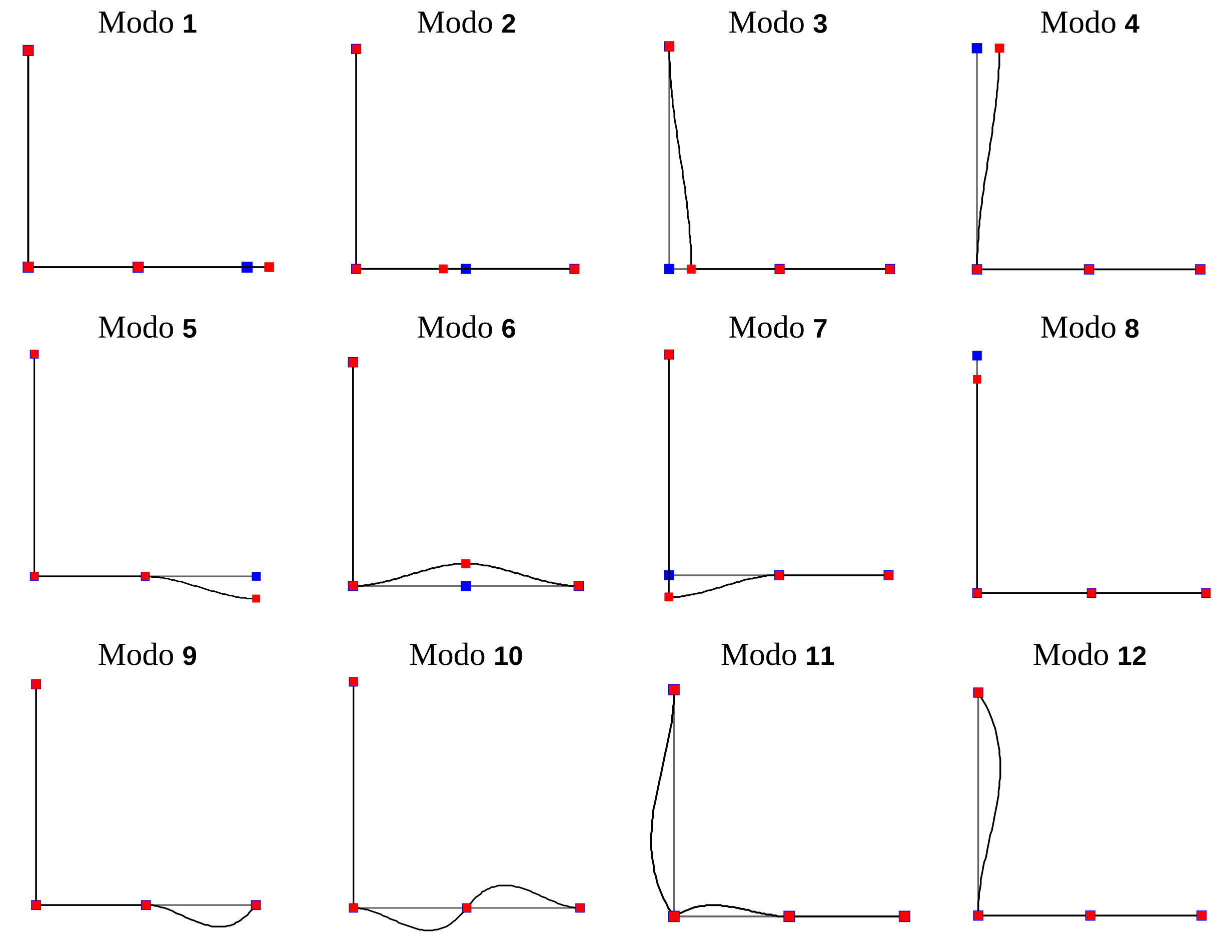


Fig. 2.8. Secção em cantoneira – modos de deformação elementares com deslocamentos no plano da secção.

(ii) **5-8** resultam de deslocamentos verticais, (iii) **9-12** provêm de rotações de flexão impostas, (iv) **13-16** são obtidos de deslocamentos axiais, e (v) **17-21** correspondem à imposição de rotações de empenamento (duas no nó de intersecção das abas e uma por cada um dos restantes nós). Caso se opte por uma aproximação linear dos empenamentos (i.e., as rotações de empenamento não constituem g.l.), os modos correspondentes (v=w=0, u≠0) são os ilustrados na Fig. 2.10.

Matematicamente, os deslocamentos de membrana numa secção genérica da barra, resultantes da combinação linear dos modos de deformação elementares, são definidos por

$$u = Uy \quad v = Vy \quad w = Wy \qquad , \quad (2.26)$$

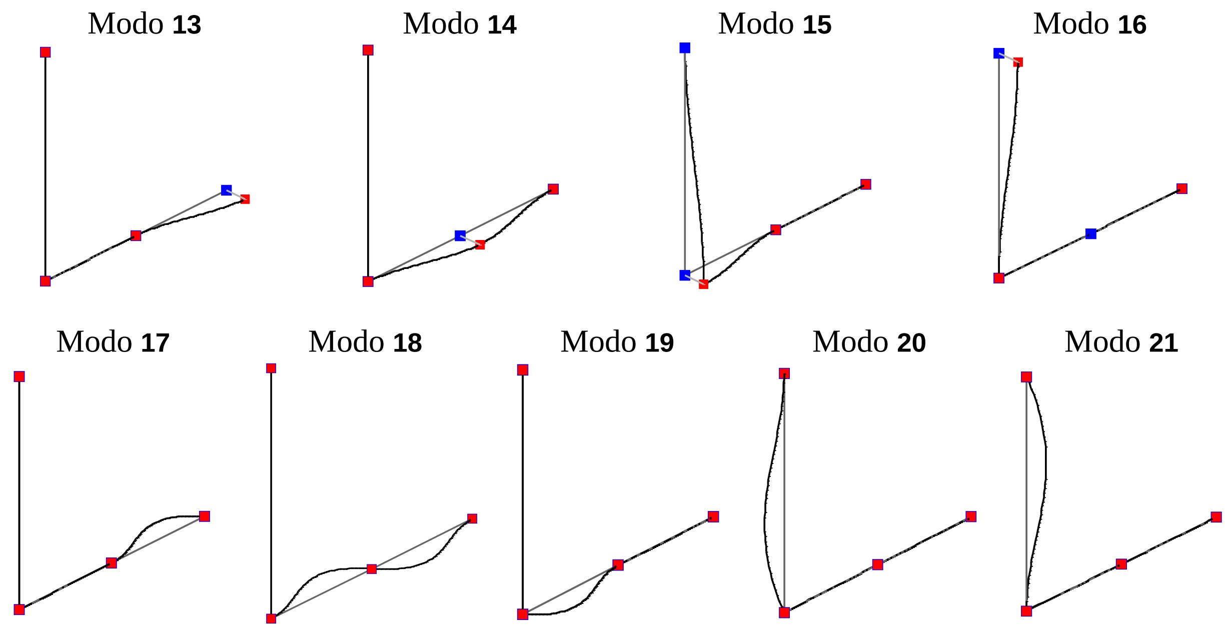


Fig. 2.9. Secção em cantoneira – modos de deformação elementares com empenamentos (aproximação não linear).

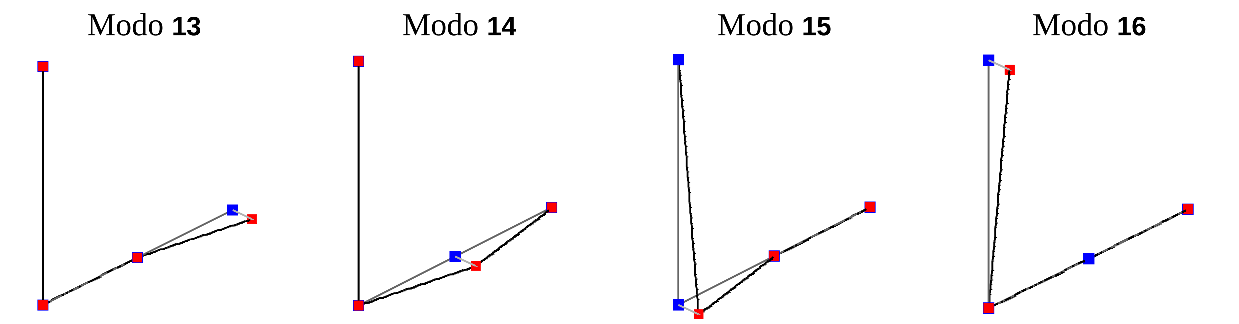


Fig. 2.10. Secção em cantoneira – modos de deformação elementares com empenamentos (aproximação linear).

onde (i) u, v e w são vectores coluna cujas componentes são as distribuições de deslocamentos em cada uma das N_p sub-placas da secção, (ii) U, V e W são matrizes que definem, para cada um dos modos elementares (coluna da matriz), os campos de deslocamentos u, v e w (função de $\xi = s/b_p$) em cada sub-placa da secção (linha da matriz), e (iii) y é um vector coluna que contabiliza o verdadeiro valor (na secção em causa) do g.l. (deslocamento ou rotação impostos) associado a cada modo elementar, pela mesma ordem com que estes são referenciados ao longo das colunas de U, V e W.

2.4.2 Modos de deformação da GBT

Definidos os N_{el} modos de deformação elementares, descrevem-se de seguida os procedimentos propostos por *Silva* (*2013*) para determinação dos modos de deformação da GBT, os quais estão subdivididos em 4 famílias: (i) Convencionais, (ii) Corte, (iii) Extensão Transversal e (iv) Fluxo de Corte Celular. Cada conjunto de modos é obtido através da resolução de sucessivos problemas de valores e vectores próprios (PVVP) envolvendo alguns dos tensores de 2ª ordem definidos em (2.14), escritos em função dos modos de deformação elementares. O Anexo 2.C apresenta a forma como esses tensores foram implementados computacionalmente.

2.4.2.1 Modos convencionais (CONV)[14]

Os modos convencionais são caracterizados por exibirem distorções (γ_{xs}) e extensões transversais (ε_{ss}) de membrana (de 1ª ordem) nulas. O número de modos convencionais (N_{conv}) equivale à dimensão do sub-espaço dos modos elementares que verifica essas hipóteses, o qual corresponde aos vectores próprios ($\boldsymbol{Y_I}$) relativos aos N_{conv} valores próprios nulos (λ_k=0) de[15]

$$\left[\left(\boldsymbol{B^1} + \boldsymbol{D^3}\right) - \lambda_k \boldsymbol{I}\right] y_k = 0 \qquad , \quad (2.27)$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade – cada vector próprio contém o valor dos g.l. nodais da secção utilizados na definição dos modos elementares, pela ordem com que são definidos em y (ver (2.26)). De modo a fazer a distinção entre modos globais (exibem movimentos de corpo rígido no plano da secção – extensão axial, flexão na maior/menor inércias e torção) e locais (envolvem flexão transversal das paredes da secção), procede-se agora à transformação das matrizes B^2 e C (escritas no espaço dos modos elementares) para o sub-espaço $\boldsymbol{Y_I}$

$$\boldsymbol{B^2_{II}} = \boldsymbol{Y_I^T B^2 Y_I} \qquad \boldsymbol{C_{II}} = \boldsymbol{Y_I^T C Y_I} \qquad , \quad (2.28)$$

14 No Anexo 2.B fundamenta-se cada uma das etapas para determinação dos modos convencionais, permitindo compreender de uma forma geral as linhas de raciocínio por detrás da determinação dos restantes modos da GBT.

15 *Silva* (*2013*) define expressões analíticas para determinar o número exacto de modos convencionais para vários tipos de secções. Dado ser muito difícil, do ponto de vista numérico, obter valores próprios exactamente nulos, resultando sempre pequeníssimos resíduos, essas expressões foram bastante úteis na implementação computacional.

com vista a resolver o problema

$$\left(\boldsymbol{B}_{II}^{2} - \lambda_k \boldsymbol{C}_{II}\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.29)$$

onde:

(i) A λ_k=0 corresponde um sub-espaço vectorial ($\boldsymbol{Y}_{II}^{glob}$) definido por ($i_1$) 4 vectores próprios se a secção for aberta, ou (i_2) 3 vectores próprios se a secção for total/parcialmente fechada, os quais estão associados à combinação de modos de deformação globais (relembra-se que o modo de torção só está incluído, ou seja, é convencional, no caso de secções abertas).

(ii) Aos distintos λ_k>0 corresponde um sub-espaço vectorial ($\boldsymbol{Y}_{II}^{loc}$) associado a modos locais – distorcionais e/ou locais-de-placa. Enquanto que (ii_1) os últimos existem em qualquer tipo de secção transversal e são caracterizados pela flexão transversal das suas paredes sem deslocamentos dos nós de intersecção das mesmas (cantos) (*e.g.*, Fig. 2.11), (ii_2) os modos distorcionais não existem em todas as secções[16] e a sua deformação no plano combina a flexão transversal das paredes com movimentos de corpo rígido das partes envolvidas no deslocamento de alguns cantos da secção (*e.g.*, Fig. 2.12) – é por estes motivos que os modos locais-de-placa não exibem empenamentos (ou são desprezáveis), e os distorcionais apresentam deslocamentos axiais significativos nas paredes com maiores deslocamentos transversais (v). Ao contrário dos modos globais, os modos locais ficam perfeitamente definidos no final desta etapa, sendo os respectivos g.l. nodais dados por

$$\boldsymbol{Y}_{loc}^{conv} = \boldsymbol{Y}_{I}\,\boldsymbol{Y}_{II}^{loc} \quad . \quad (2.30)$$

As configurações destes modos (i.e., os campos de deslocamentos u,v e w) podem ser obtidas através das expressões (2.26), substituindo y por $\boldsymbol{Y}_{loc}^{conv}$.

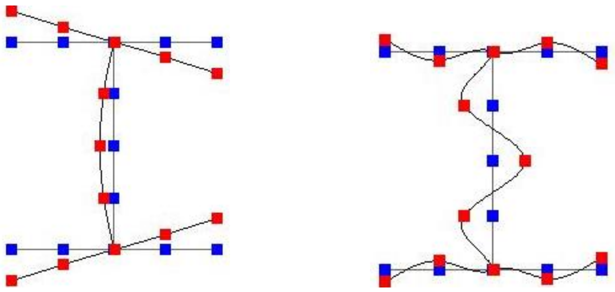


Fig. 2.11. Secção em I: exemplos de modos locais-de-placa.

16 Por exemplo, em secções abertas não ramificadas existem n-3 modos distorcionais, onde n é o número de paredes.

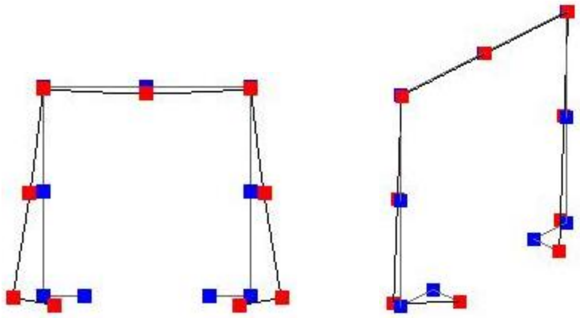


Fig. 2.12. Secção em C reforçada: modo distorcional simétrico – configuração no plano e perfil de empenamentos.

No que respeita aos modos globais associados ao sub-espaço $\boldsymbol{Y}_{II}^{glob}$ (vectores próprios correspondentes a λ_k=0 em (2.29)), o modo de torção (*e.g.*, Fig. 2.13) para secções abertas (relembra-se que em secções celulares este modo é de fluxo de corte celular – FCC) é obtido com base no vector próprio ($\boldsymbol{Y}_{III}^{tor}$) associado ao único valor próprio não nulo de

$$\left(\boldsymbol{D}_{III}^{1} - \lambda_k \boldsymbol{C}_{III}\right) y_k = 0$$
$$\boldsymbol{D}_{III}^{1} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right)^T \boldsymbol{D}^1 \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right) \qquad \boldsymbol{C}_{III} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right)^T \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right) \quad , \quad (2.31)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{Y}_{tor}^{conv} = \boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{tor} \quad (2.32)$$

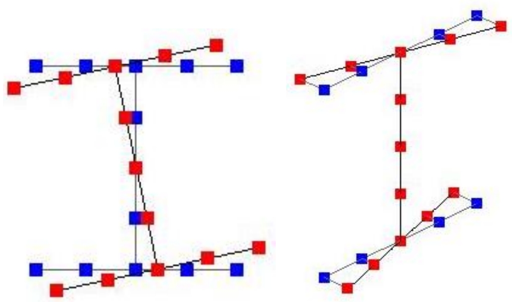


Fig. 2.13. Secção em I: modo de torção – configuração no plano e perfil de empenamentos.

Relativamente aos modos globais de extensão axial e flexão, deve-se primeiro transformar as matrizes $\boldsymbol{X}_{mod}^{1}$ e $\boldsymbol{C}$ em função do tipo de secção, vindo

$$\boldsymbol{X}_{mod}^{1} = \frac{E}{\left(1 - \nu^2\right)} \int_b e\left(v_i v_k + w_i w_k\right) ds \qquad \boldsymbol{X}_{mod,III}^{1} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\right)^T \boldsymbol{X}_{mod}^{1} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\right)$$
$$\boldsymbol{C}_{III} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\right)^T \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\right) \quad , (2.33)$$

para secções abertas ou

$$\boldsymbol{X}_{mod,III}^{1} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right)^T \boldsymbol{X}_{mod}^{1} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right) \qquad \boldsymbol{C}_{III} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right)^T \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right) \quad . \quad (2.34)$$

para secções celulares, onde (i) $\boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}$ define os vectores próprios associados a λ_k=0 em (2.31), e (ii) $\boldsymbol{Y}_I$ e $\boldsymbol{Y}_{II}^{glob}$ provêm das etapas anteriores. Efectuada a transformação, da resolução do PVVP

$$(\boldsymbol{X}^{1}_{mod,III} - \lambda_k \boldsymbol{C}_{III})\, y_k = 0 \quad , \quad (2.35)$$

conclui-se que:

(i) A $\lambda_1 = 0$ corresponde um vector próprio ($\boldsymbol{Y}_{III}^{axial}$) associado a deslocamentos nulos no plano da secção e empenamento uniforme, permitindo obter o modo de extensão axial (*e.g.*, Fig. 2.14) através de

$$\boldsymbol{Y}_{axial}^{conv} = \boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial} \boldsymbol{Y}_{III}^{axial} \quad , \quad (2.36)$$

no caso de secções abertas, ou de

$$\boldsymbol{Y}_{axial}^{conv} = \boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{axial} \quad (2.37)$$

no caso de secções celulares.

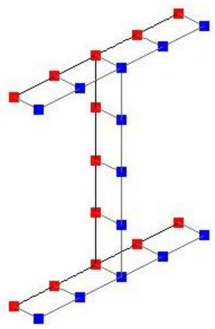


Fig. 2.14. Secção em I: modo de extensão axial.

(ii) A $\lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ correspondem 2 vectores próprios ($\boldsymbol{Y}_{III}^{flex}$) associados a deslocamentos uniformes no plano da secção, na direcção dos seus eixos principais centrais de inércia[17], permitindo obter os 2 modos de flexão recta (*e.g.*, Figs. 2.15(a)-(b)) através de

$$\boldsymbol{Y}_{flex}^{conv} = \boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex} \quad , \quad (2.38)$$

no caso de secções abertas, ou de

$$\boldsymbol{Y}_{flex}^{conv} = \boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex} \quad (2.39)$$

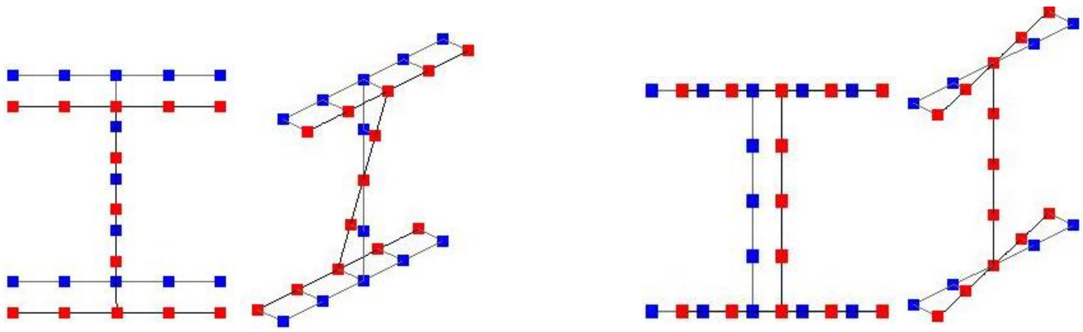
no caso de secções celulares.

Finalmente, os modos convencionais da GBT são definidos pela matriz ($N_{el} \times N_{conv}$)

17 Os valores próprios serão iguais no caso da secção ter inércia constante em qualquer direcção (*e.g.*, secção tubular quadrada ou cruciforme).

$$\boldsymbol{Y}^{conv} = \left[\boldsymbol{Y}^{conv}_{axial} \quad \boldsymbol{Y}^{conv}_{flex} \quad \boldsymbol{Y}^{conv}_{tor} \quad \boldsymbol{Y}^{conv}_{loc}\right] \qquad , \quad (2.40)$$

onde $\boldsymbol{Y}^{conv}_{tor}$ só existe no caso de secções abertas.



(a) (b)

Fig. 2.15. Secção em I: modos de flexão na (a) maior e (b) menor inércias – configurações no plano e perfis de empenamentos.

2.4.2.2 Modos de corte (*C*)

Estes modos estão associados à presença de deformação por corte (γ_{xs}) na superfície média da barra, sendo caracterizados por não exibirem deslocamentos no plano da secção (apenas empenamentos) – a Fig. 2.16 ilustra dois modos de corte obtidos para uma secção em I, estando o modo da esquerda fortemente associado à deformação por esforço transverso resultante de flexão não uniforme (na maior inércia, neste caso), o que está de acordo com a teoria clássica de vigas. Com vista à determinação destes modos, considere-se as sub-matrizes de D^3 e C^1 ($\boldsymbol{D}^3_I$ e $\boldsymbol{C}^1_I$) associadas aos modos elementares com empenamentos ($\boldsymbol{Y}^{el}_u$), e resolva-se o PVVP

$$\left(\boldsymbol{D}^3_I - \lambda_k \boldsymbol{C}^1_I\right) y_k = 0 \qquad , \quad (2.41)$$

de onde surge um único valor próprio nulo, associado ao modo axial, o qual já se encontra definido como convencional. Dado o exposto, os modos de corte são definidos por

$$\boldsymbol{Y}^{corte} = \boldsymbol{Y}^{el}_u \boldsymbol{Y}^{corte}_I \qquad , \quad (2.42)$$

onde $\boldsymbol{Y}^{corte}_I$ é a matriz dos vectores próprios de (2.41) cujos $\lambda_k \neq 0$.

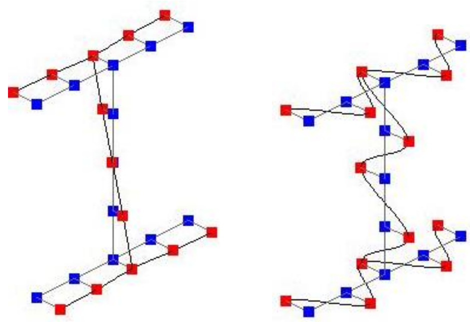


Fig. 2.16. Secção em I: exemplo de dois modos de corte (g.l. de rotação de empenamento considerado).

2.4.2.3 Modos de extensão transversal (*ET*)

Estes modos são caracterizados por (i) não exibirem empenamentos e (ii) serem os únicos que exibem extensão transversal (ε_{ss}) de membrana de 1ª ordem (*e.g.*, Fig. 2.17). Dada a ausência de deslocamentos axias neste tipo de modos, considere-se as sub-matrizes de B^1, D ($\boldsymbol{B_I^1}$ e $\boldsymbol{D_I}$) associadas aos modos elementares sem empenamentos ($\boldsymbol{Y}_{v,w}^{el}$), e resolva-se

$$\left(\boldsymbol{B_I^1} - \lambda_k \boldsymbol{D_I}\right) y_k = 0 \quad . \quad (2.43)$$

Os modos de ET são determinados com base nos vectores próprios ($\boldsymbol{Y}_I^{transv}$) associados a $\lambda_k \neq 0$, vindo[18]

$$\boldsymbol{Y}^{transv} = \boldsymbol{Y}_{v,w}^{el} \boldsymbol{Y}_I^{transv} \quad . \quad (2.44)$$

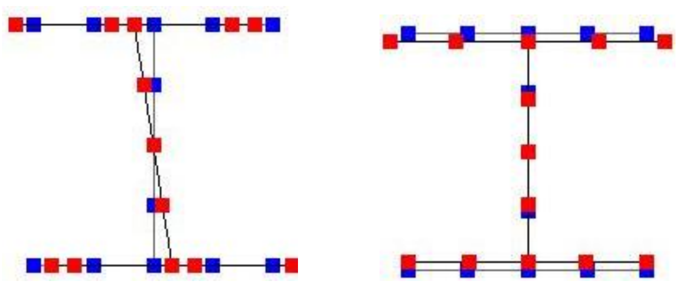


Fig. 2.17. Secção em I: exemplo de dois modos de extensão transversal.

2.4.2.4 Modos de fluxo de corte celular (*FCC*)

Estes modos só existem para secções celulares, sendo caracterizados por (i) não exibirem extensões transversais de membrana (de 1ª ordem), (ii) apresentarem rotação de corpo rígido das células, as quais também distorcem se tiverem alguma parede partilhada, e (iii) exibirem fluxo de corte uniforme em torno de cada célula (*Silva 2013*). Antes de se apresentarem as etapas para determinação destes modos, importa referir que é necessário saber *à priori* quantos modos existem deste tipo, valor (N_{cel}) que pode ser facilmente obtido se se subtrair ao número de modos elementares o número de todos os outros modos da GBT previamente determinados[19].

Como referido anteriormente, o modo global de torção (*e.g.*, Fig 2.18) em secções celulares perence a esta família, sendo neste trabalho determinado de forma independente dos restantes modos (caso existam). Com esse objectivo, começe-se por resolver o seguinte PVVP

$$\left(\boldsymbol{B} - \lambda_k \boldsymbol{I}\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.45)$$

18 Quando não existem células triangulares, o número de modos de ET iguala o de sub-placas (*Silva 2013*).

19 Se não existirem células triangulares, são de esperar tantos modos de FCC quanto o número de células. (*Silva 2013*).

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade. Com base nos vectores próprios associados a $\lambda_k = 0$ ($\boldsymbol{Y}_I^{null}$), transforme-se as matrizes D^3 e C tal que

$$\boldsymbol{D}_I^3 = \left(\boldsymbol{Y}_I^{null}\right)^T \boldsymbol{D}^3 \boldsymbol{Y}_I^{null} \qquad \boldsymbol{C}_I = \left(\boldsymbol{Y}_I^{null}\right)^T \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{Y}_I^{null} \quad , \quad (2.46)$$

resolvendo posteriormente

$$\left(\boldsymbol{D}_I^3 - \lambda_k \boldsymbol{C}_I\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.47)$$

de onde se obtêm valores próprios nulos e não nulos. Considerando os vectores próprios associados a valores próprios não nulos ($\boldsymbol{Y}_{II}^{non\text{-}null}$), proceda-se à seguinte transformação de D^1 e D^3

$$\boldsymbol{D}_{II}^1 = \left(\boldsymbol{Y}_I^{null}\boldsymbol{Y}_{II}^{non\text{-}null}\right)^T \boldsymbol{D}^1 \boldsymbol{Y}_I^{null}\boldsymbol{Y}_{II}^{non\text{-}null} \qquad \boldsymbol{D}_{II}^3 = \left(\boldsymbol{Y}_I^{null}\boldsymbol{Y}_{II}^{non\text{-}null}\right)^T \boldsymbol{D}^3 \boldsymbol{Y}_I^{null}\boldsymbol{Y}_{II}^{non\text{-}null} \quad . \quad (2.48)$$

Finalmente, ao utilizar estas matrizes para resolver o problema

$$\left(\boldsymbol{D}_{II}^1 - \lambda_k \boldsymbol{D}_{II}^3\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.49)$$

obtém-se um vector próprio associado ao modo de torção ($\boldsymbol{Y}_{III}^{tor}$), o qual corresponde ao menor valor próprio positivo, vindo

$$\boldsymbol{Y}_{tor}^{cel} = \boldsymbol{Y}_I^{null}\boldsymbol{Y}_{II}^{non\text{-}null}\boldsymbol{Y}_{III}^{tor} \quad . \quad (2.50)$$

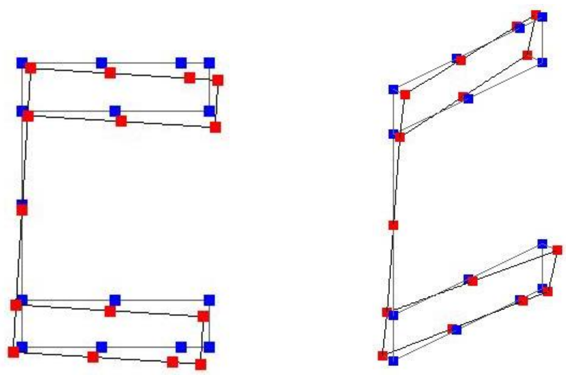


Fig. 2.18. Secção *LiteSteel*: 1º modo de FCC (modo de torção) – configuração no plano e perfil de empenamentos.

No caso de existirem mais modos de FCC ($N_{cel} > 1$ – *e.g.*, Fig. 2.19), a sua determinação volta a envolver a resolução de sucessivos PVVP. Começe-se por obter um sub-espaço vectorial caracterizado por modos com empenamento e extensão transversal (ε_{ss}) de 1ª ordem nulos, o que equivale a resolver

$$\left(\left(\boldsymbol{B}^1 + \boldsymbol{C}^1\right) - \lambda_k \boldsymbol{I}\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.51)$$

e seleccionar todos os vectores próprios ($\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{non\text{-}u\text{-}transv}}$) associados a $\lambda_k = 0$. Com base neste sub-espaço vectorial, obtenha-se a transformação dos tensores B^2 e C definida por

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{2}} = \left(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{non\text{-}u\text{-}transv}}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{2}}\, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{non\text{-}u\text{-}transv}} \qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{I}} = \left(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{non\text{-}u\text{-}transv}}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{non\text{-}u\text{-}transv}} \quad , \quad (2.52)$$

e proceda-se à resolução de

$$\left(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{2}} - \lambda_k \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{I}}\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.53)$$

de onde se obtêm 3 valores próprios nulos cujos respectivos vectores estão associados (e são os únicos) à rotação de corpo rígido da secção no seu plano. Com base nos primeiros $N_{cel} - 1$ vectores próprios ($\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{N_{cel}\text{-}1}}$) associados aos $\lambda_k \neq 0$ ordenados por ordem crescente, construa-se o sub-espaço ($\boldsymbol{Y}^{corte}$ definida em (2.42))

$$\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{corte,(N_{cel}\text{-}1)}} = \left[\, \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{corte}} \quad \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{non\text{-}u\text{-}transv}} \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{N_{cel}\text{-}1}} \,\right] \quad (2.54)$$

e proceda-se à seguinte transformação de D^1 e D^3

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{II}}^{1} = \left(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{corte,(N_{cel}\text{-}1)}}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{D}^{1}\, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{corte,(N_{cel}\text{-}1)}} \qquad \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{II}}^{3} = \left(\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{corte,(N_{cel}\text{-}1)}}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{D}^{3}\, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{corte,(N_{cel}\text{-}1)}} \quad . \quad (2.55)$$

Finalmente, obtenha-se com base nestes tensores os vectores próprios ($\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{III}}^{\boldsymbol{non\text{-}tor}}$) correspondentes a $\lambda_k \neq 0$ em

$$\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{1}} - \lambda_k \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{3}}\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.56)$$

onde o número de valores próprios nulos iguala o número de modos de corte. Deste modo, os restantes modos de FCC ficam definidos por

$$\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{non\text{-}tor}}^{\boldsymbol{cel}} = \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{II}}^{\boldsymbol{corte,(N_{cel}\text{-}1)}} \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{III}}^{\boldsymbol{non\text{-}tor}} \quad , \quad (2.57)$$

vindo[20] ($N_{cel} > 1$)

$$\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{cel}} = \left[\, \boldsymbol{Y}_{tor}^{\boldsymbol{cel}} \quad \boldsymbol{Y}_{non-tor}^{\boldsymbol{cel}} \,\right] \quad . \quad (2.58)$$

20 Pode acontecer, em casos muito particulares (*e.g.*, duas secções SHS com uma parede partilhada), que os modos de FCC não sejam suficientemente independentes entre si (*Silva 2013*) (o critério é subjectivo – p.e., foi implementada a condição de obter uma "decomposição em valores singulares" de $\boldsymbol{Y}^{cel}$ com valores $\geq 10^{-3}$). Nesses casos, sugere-se que sejam seleccionados (por tentativa-erro) outros conjuntos de N_{cel} -1 modos na etapa (2.54).

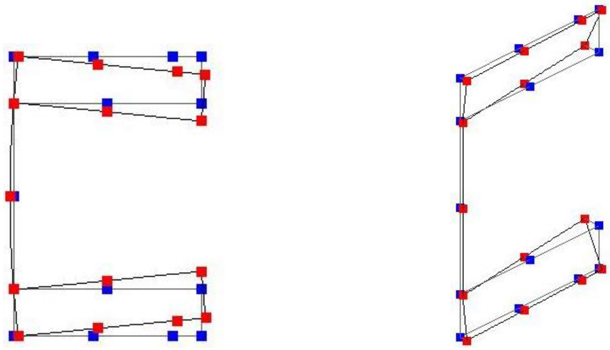


Fig. 2.19. Secção *LiteSteel*: 2º modo de FCC – configuração no plano e perfil de empenamentos.

2.4.2.5 Campo de deslocamentos e propriedades modais da GBT

Definidos os N_{GBT} modos de deformação da GBT, os respectivos campos de deslocamentos de membrana são dados pelas matrizes U_{GBT}, V_{GBT} e W_{GBT}, onde cada coluna define os deslocamentos modais (função de $\xi = s/b_p$) em cada uma das sub-placas da secção (linhas da matriz). A sua determinação resulta de uma simples mudança de base das matrizes de deslocamentos elementares (U, V e W) apresentadas em (2.26), vindo

$$\boldsymbol{Y}_{GBT} = \left[\left.\boldsymbol{Y}_{axial}^{conv}\right|_{u^{\max}=1} \quad \underbrace{\boldsymbol{Y}_{flex}^{conv} \quad \boldsymbol{Y}_{tor} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Y}_{tor}^{conv} & , N_{cel} = 0 \\ \boldsymbol{Y}_{tor}^{cel} & , c.c \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{Y}_{loc}^{conv}}_{d_{Y-Z}^{\max}=1} \quad \left.\boldsymbol{Y}^{corte}\right|_{u^{\max}=1} \quad \underbrace{\boldsymbol{Y}^{transv} \quad \underbrace{\boldsymbol{Y}_{non-tor}^{cel}}_{\text{Se } N_{cel}>1}}_{d_{Y-Z}^{\max}=1} \right] \quad .(2.59)$$

$$U_{GBT} = U\,\boldsymbol{Y}_{GBT} \qquad V_{GBT} = V\,\boldsymbol{Y}_{GBT} \qquad W_{GBT} = W\,\boldsymbol{Y}_{GBT}$$

onde $\boldsymbol{Y}_{GBT}$ é a matriz de transformação (N_{GBT} x N_{GBT}), a qual contém em cada coluna os valores dos g.l. nodais de cada modo da GBT obtido nas subsecções 2.4.2.1-2.4.2.4. No entanto, esses modos foram normalizados com o intuito de facilitar a comparação/interpretação das respectivas funções de amplitude (ζ_k e $\zeta_{k,x}$ em (2.5)), tendo-se adoptado o seguinte critério: (i) os modos com deslocamentos no plano da secção exibem, nesse plano, um deslocamento máximo unitário ($d_{Y-Z}^{\max} = \max\sqrt{v_k^2 + w_k^2} = 1$), e (ii) os modos axial e de corte (apenas exibem empenamentos) são caracterizados por um deslocamento axial máximo unitário ($u^{\max} = 1$).

No que respeita à obtenção das rigidezes associadas aos modos globais de extensão axial, flexão e torção, cujo conhecimento é fundamental ao desenvolvimento de regras de dimensionamento e à verificação de segurança de elementos estruturais, considerem-se os tensores C e D de (2.14) reescritos na base dos modos de deformação da GBT (C_{GBT} e D_{GBT}) – para uma matriz genérica Q

tem-se $Q_{GBT}=\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}{}_{GBT}\ \ Q\ \boldsymbol{Y}_{GBT}$ (o Anexo 2.C apresenta a forma como esses tensores foram implementados matricialmente). É reconhecido (*Silvestre 2005*) que, no caso dos modos de extensão axial e de flexão estarem normalizados como referido anteriormente, e o modo de torção passar a exibir (apenas para este cálculo) uma rotação de 1 rad, os valores das rigidezes pretendidas (para uma secção de parede fina arbitrária) encontram-se na diagonal principal de C_{GBT} e D_{GBT}. Nomeadamente, (i) $C_{GBT}(1,1)=EA/(1-\nu^2)$ é a rigidez axial, (ii) $C_{GBT}(2,2)=EI_u/(1-\nu^2)$ e $C_{GBT}(3,3)=EI_v/(1-\nu^2)$ são as rigidezes de flexão em torno dos eixos principais centrais de maior e menor inércias, e (iii) $C_{GBT}(4,4)=E\Gamma/(1-\nu^2)$ e $D_{GBT}(4,4)=GJ$ correspondem às rigidezes de empenamento (primário + secundário) e de torção[21], respectivamente.

Por fim, importa fazer referência à ortogonalidade entre alguns modos de deformação da GBT em relação a tensores que integram a definição (2.22) da matriz de rigidez elástica: (i) os modos convencionais+torção (quando não convencional) são ortogonais entre eles relativamente a *B* e a *C* (i.e., B_{GBT} e C_{GBT} são diagonais nesse sub-espaço), (ii) os modos globais são ortogonais (ii_1) entre eles relativamente a *D*, e (ii_2) a todos os modos da GBT relativamente a *B*, e (iii) os modos de corte são ortogonais (iii_1) entre eles relativamente a *C* e *D*, e (iii_2) a todos os modos relativamente a *B*.

2.4.3 Participação modal

A elegância e eficiência da GBT resultam do facto do campo de deslocamentos da barra ser obtido pela combinação linear de modos de deformação (relembrar Eq. (2.5)), permitindo assim conhecer a contribuição de cada modo para qualquer configuração de equilíbrio – em regime elástico ou elasto-plástico. Essa contribuição (participação) tem sido normalmente quantificada de duas formas distintas, no contexto de análises elásticas de estabilidade e de pós-encurvadura da GBT (*Silvestre e Camotim 2006, Dinis et al. 2010*), nomeadamente através do rácio (variável ao longo do comprimento da barra) entre a função de amplitude correspondente (ζ_i) e a soma de tais valores modais[22],

$$c_i = \frac{|\zeta_i|}{\sum_{k=1}^{N_{GBT}} |\zeta_k|} \quad , \quad (2.60)$$

ou através de

21 É espectável que a rigidez de torção obtida para secções celulares seja superior à prevista pela teoria de *Bredt*, uma vez que esta última considera um fluxo de corte com distribuição uniforme na espessura das paredes, ao invés da variação linear prevista pela GBT – estas diferenças tendem para zero com a redução da espessura.

22 Obviamente que nas fórmulas (2.60) e (2.61) as funções de forma consideradas para os modos de corte e de extensão axial deverão ser $\zeta_{k,x}$ (relembrar Eq. (2.5)).

$$p_i = \frac{\int_0^L |\zeta_i|}{\sum_{k=1}^{N_{GBT}} \left(\int_0^L |\zeta_k| \right)} \quad , \tag{2.61}$$

permitindo desta forma contabilizar a influência de cada modo ao longo do comprimento da barra. No entanto, ao invés dos padrões de deformação tipicamente encontrados em modos de instabilidade elásticos (globais, locais, distorcionais), os mecanismos de colapso elasto-plástico poderão envolver deformações localizadas nas regiões de máximos deslocamentos[23]. Consequentemente, os factores de participação anteriormente apresentados poderão não se revelar os mais adequados para caracterizar configurações deformadas em regime inelástico. Ao invés, neste trabalho é adoptada a seguinte metodologia para analisar uma configuração de equilíbrio arbitrária da barra, em regime elástico ou elasto-plástico:

(i) Cálculo do campo de deslocamentos tri-dimensionais na superfície média da barra através de (*k* é um índice mudo)

$$\delta(s,x) = \sqrt{(u_k \zeta_{k,x})^2 + (v_k \zeta_k)^2 + (w_k \zeta_k)^2} \quad . \tag{2.62}$$

(ii) Identificação da secção transversal (i.e., coordenada *x*) que exibe o máximo deslocamento tri-dimensional – esta passa a ser a secção de referência para o cálculo da participação de cada modo de deformação (passos seguintes)[24].

(iii) Cálculo dos deslocamentos modais tri-dimensionais máximos ao longo da linha média da secção de referência, definidos para cada modo como (*i* é um índice livre)

$$\delta_{i,\max} = \sqrt{(u_i \zeta_{i,x})^2 + (v_i \zeta_i)^2 + (w_i \zeta_i)^2} \quad . \tag{2.63}$$

(note-se que estes valores não dizem necessariamente respeito ao mesmo ponto da secção). O factor de participação adoptado para o modo de deformação *i* vem então definido por ($0 \leq p_{i\,(\mathrm{mod})} \leq 1$)

$$p_{i(\mathrm{mod})} = \frac{\delta_{i,\max}}{\sum_{k=1}^{N_{GBT}} \delta_{k,\max}} \quad . \tag{2.64}$$

De acordo com esta definição, os modos globais, distorcionais e locais-de-placa exibem normalmente contribuições mais elevadas do que os modos de corte ou de extensão transversal, o que se deve à baixa

23 Contudo, há excepções – p.e., membros em consola exibem frequentemente deformação localizada na vizinhança da secção encastrada.

24 Uma vez que o deslocamento máximo pode ocorrer numa secção encastrada (*e.g.*, numa coluna curta), foi também implementada a possibilidade de adoptar uma secção de referência baseada no campo de deslocamentos no plano da secção ($\delta(s,x) = \sqrt{(v_k\zeta_k)^2 + (w_k\zeta_k)^2}$).

(alta) energia de deformação de flexão (membrana) exibida pelos primeiros três (últimos dois) tipos de modos. Contudo, a inclusão de modos de corte e de extensão transversal em análises da GBT é crucial à obtenção de resultados precisos.

Através do cálculo da percentagem (%) de participação de cada modo ao longo da trajectória de equilíbrio (curva carga-deslocamento) em análises fisica e/ou geometricamente não lineares da GBT (abordadas nos Capítulos 6 e 7), é possível obter diagramas de participação modal que fornecem informação clara e relevante acerca da mecânica comportamental de um dado perfil de parede fina, em regime elástico ou inelástico. Para além disso, estes diagramas permitem avaliar a relevância de certos modos na análise e concluir quanto a uma possível exclusão dos mesmos em análises subsequentes, com o fim de melhorar o custo-benefício entre a precisão de resultados e a eficiência computacional (i.e, o número de g.l. envolvidos). No caso de análises geometricamente não lineares (Capítulo 7), a determinação destes diagramas deve ser inteiramente baseada num campo de deslocamentos que exclua por completo os deslocamentos iniciais das imperfeições geométricas, permitindo assim avaliar a resposta do elemento estrutural apenas relativamente à variação de carga – note-se que à medida que a magnitude dos deslocamentos vai aumentando, a diferença entre desprezar ou não os deslocamentos iniciais tende a tornar-se insignificante.

2.4.4 Novo grau de liberdade – rotação de empenamento θ_z

De modo a ilustrar as diferenças e vantagens da adopção do novo g.l. nodal θ_z (rotação de empenamento) na simulação do comportamento de barras de parede fina, apresentam-se e discutem-se de seguida resultados da GBT relativos à análise linear de 1ª ordem de um tabuleiro "curto" de uma ponte, simplesmente apoiado e ilustrado na Fig. 2.20, o qual (i) tem um vão L=30 m, (ii) apresenta um tabuleiro com secção em caixão de parede fina[25] e as dimensões indicadas na Fig. 2.20(b), (iii) é constituída por um material elástico linear caracterizado por E=200 GPa (módulo de *Young*), ν=0.3 (coeficiente de *Poisson*) e G=76923 MPa (módulo de distorção), e (iv) está sujeita a uma carga uniformemente distribuída ($q = \lambda$ MPa) que actua ao longo de todo o vão e largura do banzo superior. Foram efectuadas duas análises de 1ª ordem da GBT cuja única diferença reside no tipo de g.l. adoptados – ambas envolvem igual discretização da secção (não foram adoptados quaisquer nós intermédios), mas (i) 4 tipos de g.l. por nó (d_X, d_Y, d_Z, θ_X) – apenas 12 em 24 modos de deformação da GBT (1 G, 3 L, 2 de C e 6 de ET) foram utilizados na

25 Note-se que apesar da elevada espessura de todas as paredes da secção, a sua relação largura/espessura é sempre superior a 10 (elevada esbelteza).

análise[26], ou (ii) 5 tipos de g.l. nodais (d_X, d_Y, d_Z, θ_X, θ_z) – 17 em 34 modos da GBT (1 G, 3 L, 7 de C e 6 de ET) foram seleccionados. Os modos seleccionados para ambos os casos correspondem ao modo de flexão na menor inércia, aos modos locais simétricos de baixa energia de deformação, a todos os modos de corte simétricos, e a todos os modos de extensão transversal, estando as configurações dos modos mais relevantes em cada análise ilustradas nas Figs 2.21 (globais, locais e de extensão transversal) e 2.22 (corte) – note-se a linearidade (Fig. 2.22(a)) e não linearidade (Fig. 2.22(b)) da distribuição de empenamentos em cada sub-placa, consequência da exclusão ou inclusão do g.l. θ_z na análise da secção, respectivamente. Considerou-se uma malha uniforme com 6 EFV, totalizando (i_1) 148 g.l. na análise sem θ_z e (i_2) 218 g.l. na análise com θ_z. No que respeita ao número de pontos de integração (quadratura de *Gauss-Legendre*) para o cálculo da matriz de rigidez e vector de forças externas de cada EFV (ver Eq. (2.22)), foram utilizados 4 (3) pontos nas direcções s (x) de cada sub-placa. Os resultados da GBT apresentados[27] (diagramas de tensões e distribuições tri-dimensionais de deslocamentos/tensões) são validados por comparação com os obtidos pela análise de EFC realizada no Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*)[28], recorrendo a elementos isoparamétricos do tipo S4 (4 pontos de integração de *Gauss* no plano médio). Quanto à discretização de EF no Abaqus, utilizou-se uma malha de 30 x 46 EFC (1 x 1 m) segundo as direcções longitudinal e transversal do tabuleiro (8280 g.l.).

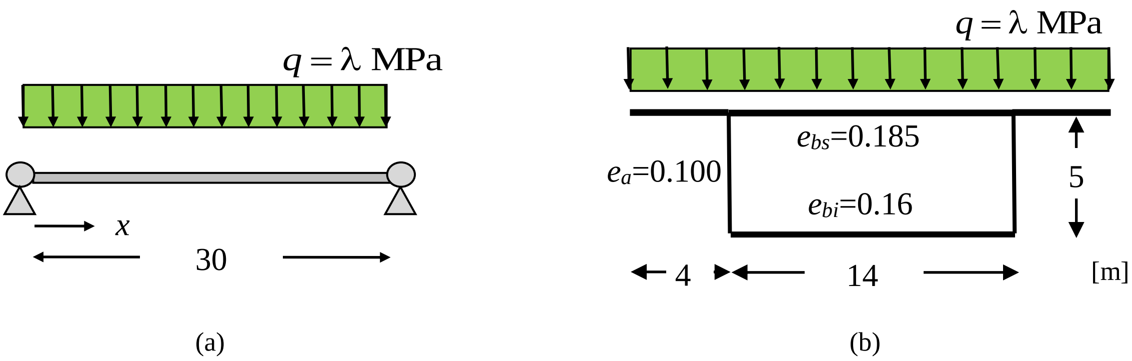


Fig. 2.20. Ponte simplesmente apoiada com secção em caixão: (a) vista geral e (b) dimensões da secção (linha média).

As Figs. 2.23(a)-(b) apresentam os diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) ao longo do banzo superior da secção de meio vão (x=15 m) e a configuração deformada do tabuleiro obtida pela GBT, respectivamente – note-se que a deformação local do banzo superior é bem mais evidente que a flexão

26 A experiência do utilizador e/ou a análise da participação modal em análises preliminares envolvendo um maior número de modos de deformação, permitem decidir quanto aos modos da GBT cuja contribuição pode ser desprezada.

27 Todos referentes a pontos localizados na superfície média da barra.

28 As tensões normais obtidas na GBT são transformadas em tensões verdadeiras de modo a serem comparáveis com os *outputs* do Abaqus.

global da viga. No que respeita à distribuição de tensões, pode-se concluir do diagrama do Abaqus que, ao contrário do previsto pela teoria clássica de vigas, existe concentração de tensões nas zonas de ligação banzo-alma, fenómeno denominado em Inglês por *shear lag* (*Zhang e Lin 2013*)– este efeito é característico de elementos constituídos por placas e submetidos a deformação por corte, sendo tanto mais relevante quanto menor a relação L/b (vão/largura do banzo) e considerando-se desprezável sempre que $L/b \geq 25$ (*Reis e Camotim 2012*). Quanto aos resultados obtidos pelas análises da GBT, conclui-se que a exclusão do g.l. de rotação de empenamento conduz a resultados qualita e quantitativamente inaceitáveis (linha azul), ao contrário dos obtidos pela outra análise (linha vermelha), a qual prevê uma distribuição de tensões altamente não linear entre as almas e ligeiramente não linear no restante domínio, à semelhança do diagrama do Abaqus. Importa ainda referir que o efeito de *shear lag*

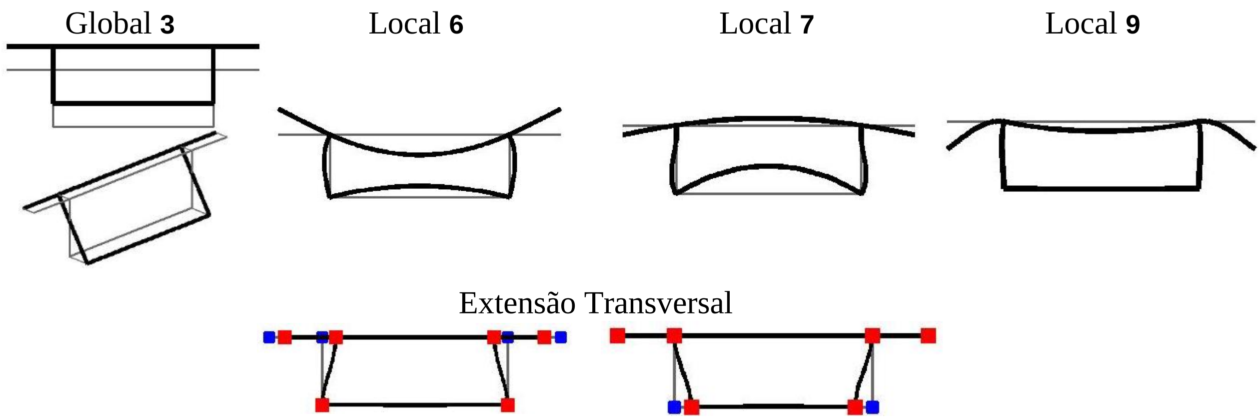


Fig. 2.21. Secção em caixão – modos global, locais e de extensão transversal mais relevantes nas análises da GBT.

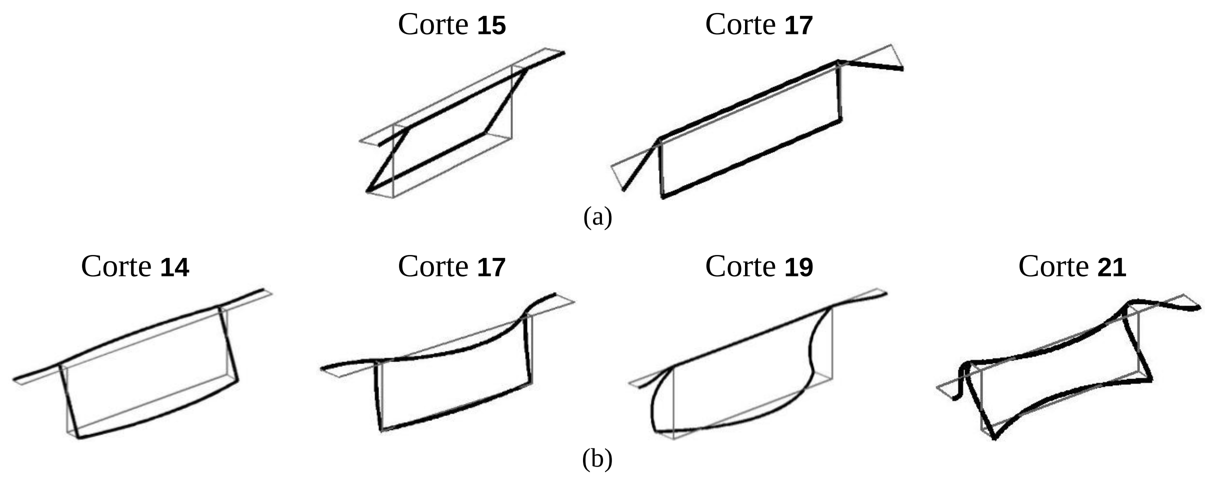
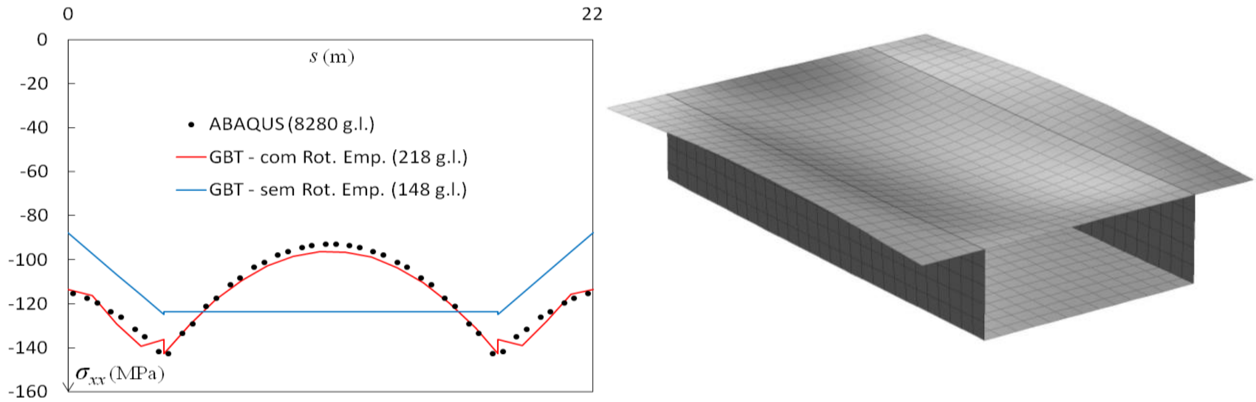


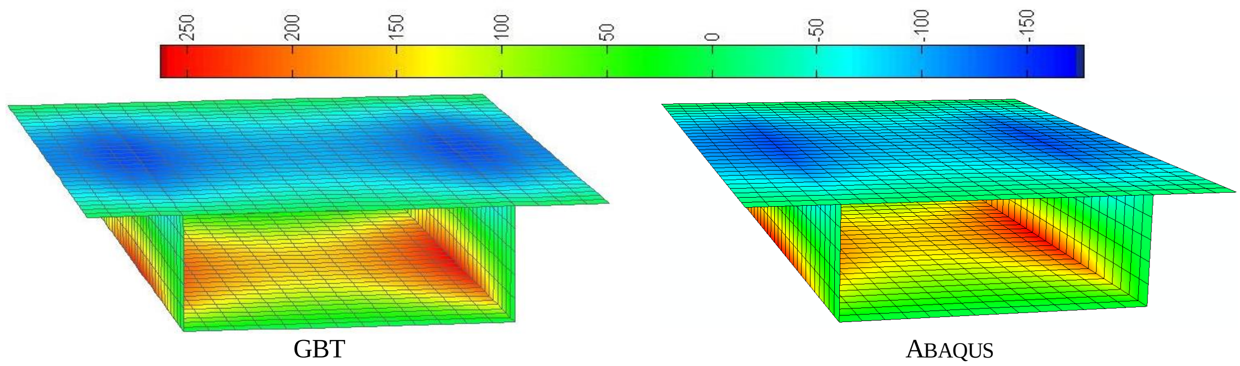
Fig. 2.22. Secção em caixão – modos de corte mais relevantes em cada análise da GBT: rotação de empenamento (θ_z) (a) não adoptada, e (b) adoptada.

(i) ocorre tanto para tensões de compressão como de tracção, e (ii) está também associado a uma concentração de empenamentos (u) nas zonas de ligação banzo-alma (*Kfistek e Bazant 1987*), o que pode ser comprovado pela observação das distribuições tri-dimensionais de tensões axiais e empenamentos apresentadas nas Figs. 2.24 – realce-se também o facto de a GBT (com θ_z) originar resultados idênticos aos do Abaqus com apenas 2.6% do número de g.l. envolvidos no modelo de EFC.

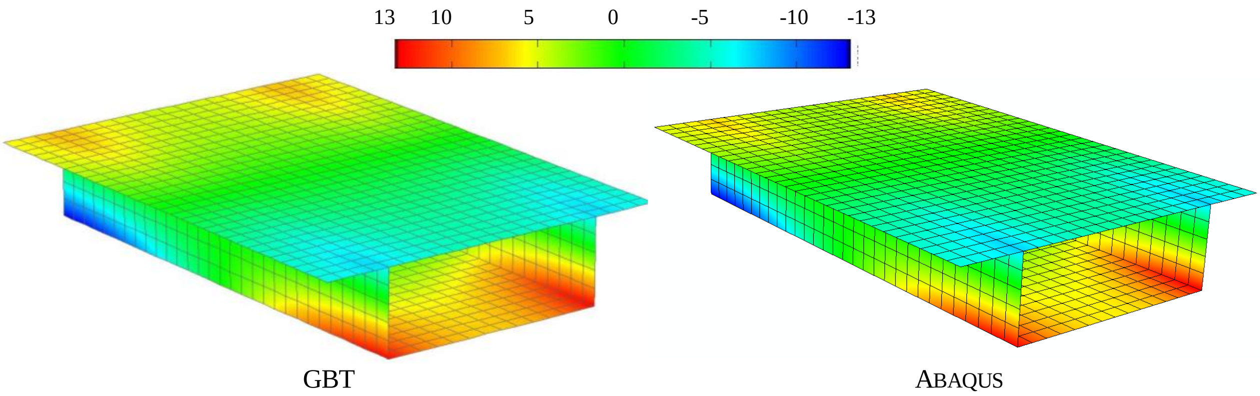


(a) (b)

Fig. 2.23. (a) Diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) ao longo do banzo superior da secção de meio vão, e (b) configuração deformada da viga obtida pela GBT.



(a)



(b)

Fig. 2.24. Distribuições tri-dimensionais do Abaqus e GBT (com rotação de empenamento): (a) tensões axiais σ_{xx} (MPa) e (b) empenamentos u (mm).

De modo a identificar a origem da não linearidade dos diagramas de tensões axiais nos banzos, recorreu-se à GBT para obter os *contours* de tensões de cada um dos modos de corte envolvidos na análise (com θ_z). Apresentam-se na Fig. 2.25 as distribuições de tensões para os 4 modos mais relevantes, indicados na Fig. 2.22(b) – note-se que (i) o modo **14** (com magnitudes muito superiores às dos restantes modos de corte) exibe tracções no banzo superior e compressões no inferior (opondo-se ao modo de flexão **3**), sendo a variação ao longo dos banzos pouco significativa, (ii) os modos **17** e **19** exibem variações de tensões significativas na direcção transversal dos banzos superior e inferior, respectivamente, e (iii) o modo **21** corresponde a uma pequena contribuição de *shear lag* "negativo" junto às secções extremas do tabuleiro, ou seja, redução das tensões de flexão nas regiões dos cantos da secção.

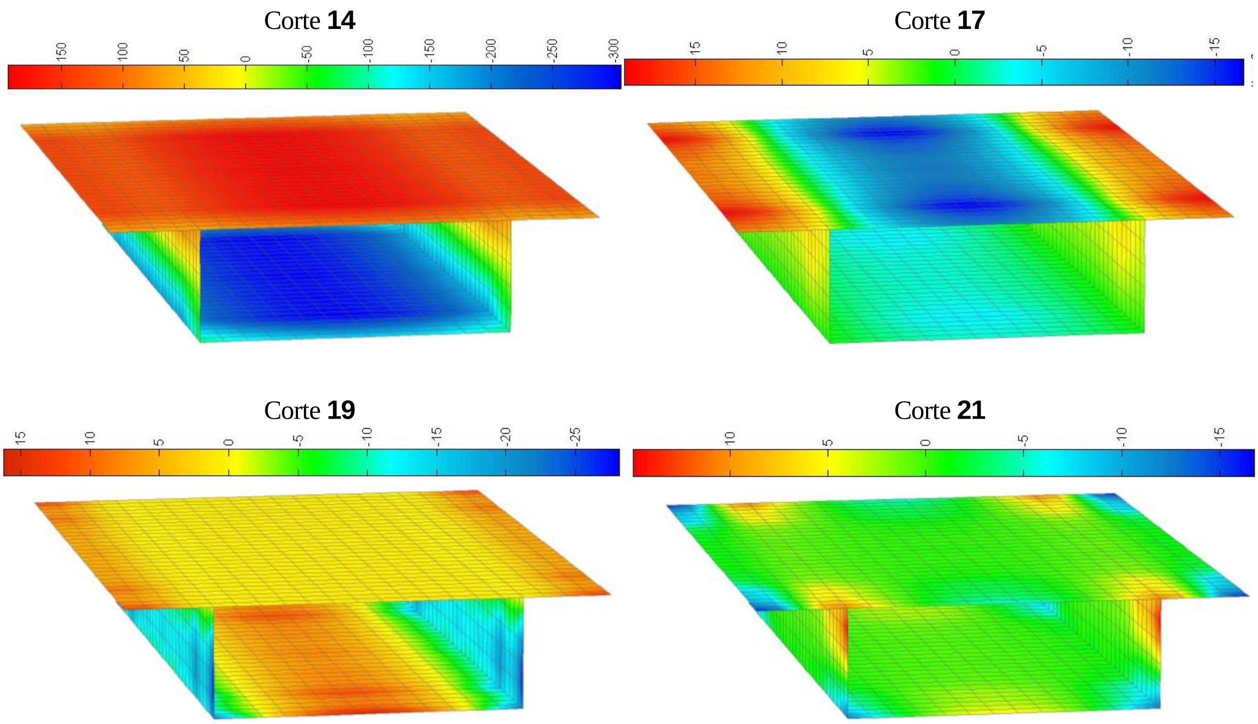


Fig. 2.25. Distribuições tri-dimensionais de tensões axiais σ_{xx} (MPa) para os modos de corte mais relevantes da GBT.

De facto, o fenómeno denominado anteriormente de *shear lag* "negativo" (*Leonard 2007*) verifica-se efectivamente na distribuição de tensões de vigas em consola. Em 1982, *Foutch e Chang* depararam-se com este efeito ao analisar uma consola RHS sujeita a uma carga uniformemente distribuída, tendo verificado que na região de ¾ do comprimento da viga junto à sua extremidade livre, as tensões de flexão nos banzos tinham distribuições com valores mínimos junto às almas e máximos nas regiões centrais. *Lee et al.* (*2002*) tentaram perceber a origem deste comportamento através da análise de consolas sujeitas a cargas concentradas, tendo concluído que (i) entre o encastramento e o ponto de aplicação da carga existe *shear lag* "positivo" (o "típico"), e (ii) desde a carga até à extremidade livre da viga existe *shear lag* negativo (e as tensões têm de ser auto-equilibradas por ser uma região com esforços nulos). De modo a comprovar este comportamento, analisou-se o tabuleiro ilustrado na Fig. 2.20(b) mas agora em consola e com uma nova discretização da malha da GBT (3 EFV em x<0.1L e 11 EFV em x≥0.1L). De facto, pode-se observar nas Figs. 2.26(a)-(b) que os diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) obtidos pelo Abaqus e GBT nas secções x=4 m (região ¼ L junto ao apoio) e x=15 m (região ¾ L junto à extremidade livre), revelam a existência de *shear lag* positivo e negativo, respectivamente. Mais uma vez se pode concluir que a exclusão do g.l. de rotação de empenamento na análise da GBT não origina resultados precisos (linha azul), ao contrário dos que resultam da adopção desse g.l. (linha vermelha). Finalmente, apresentam-se na Fig. 2.27 os *contours* de tensões σ_{xx} obtidos pela GBT (com θ_z) e pelo Abaqus. Apesar das pequenas discrepâncias quantitativas entre os diagramas das Figs. 2.26, as distribuições que resultam de ambos os modelos são muito semelhantes, sendo clara a transição entre *shear lag* positivo e negativo na vizinhança de $x = L/4$.

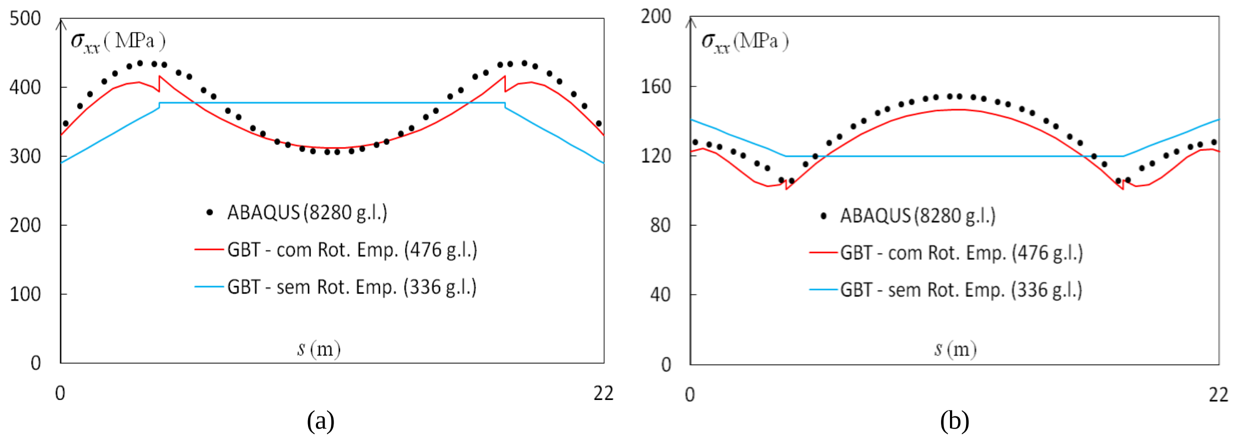


Fig. 2.26. Diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) para tabuleiro em consola, ao longo do banzo superior em: (a) x=4 m e (b) x=15 m.

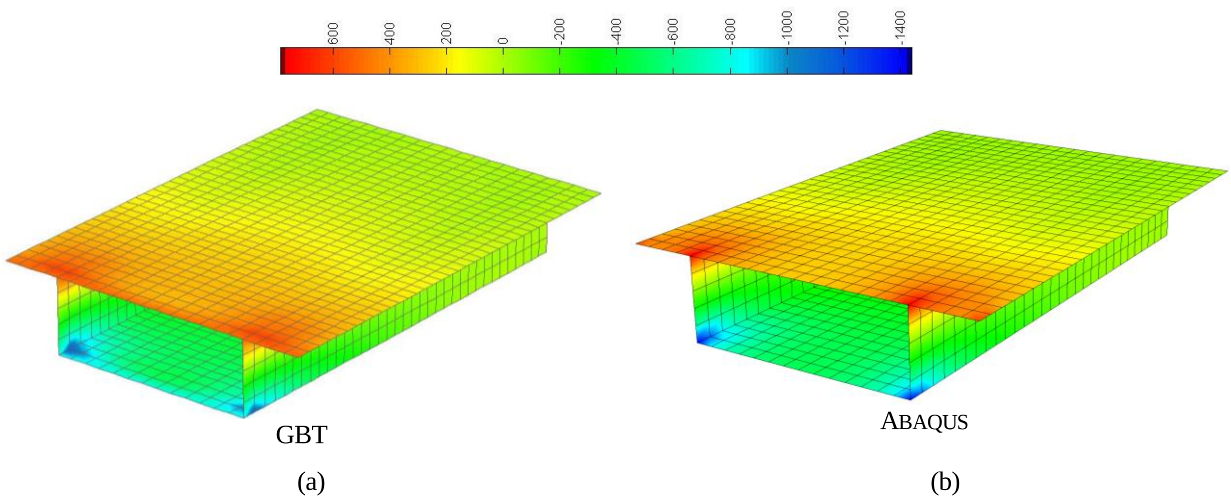


Fig. 2.27. *Contours* de tensões axiais σ_{xx} (MPa) para tabuleiro em consola: (a) GBT e (b) Abaqus.

2.5 Conclusões

Neste capítulo abordaram-se os conceitos fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) comuns a todas as formulações da GBT apresentadas nesta tese – hipóteses simplificativas, relações cinemáticas, lei constitutiva elástica e análise da secção. Seguidamente, apresentaram-se as formulações da GBT para análises lineares de 1ª ordem e de estabilidade, utilizadas na determinação de imperfeições geométricas iniciais para análises de pós-encurvadura, fornecidas como uma combinação linear dos modos de instabilidade da barra. Apesar de as formulações referidas neste capítulo não constituirem uma inovação deste trabalho, importa referir que as componentes não lineares das deformações adoptadas incluem todos os termos de membrana (relativos aos deslocamentos u, v e w). Tal corresponde à formulação mais completa da GBT existente na literatura, à semelhança da desenvolvida por *Silva* (*2013*) para materiais compósitos laminados. Relativamente à imposição das condições de fronteira em secções com empenamentos restringidos ($\zeta_{k,x} = 0$) e sujeitas a tensões de corte ($\sigma_{xs} \neq 0$), chamou-se a atenção para a possibilidade da ocorrência de *shear locking* (*Belytschko et al. 2000*) associado à incompatibilidade das condições estática e cinemática mencionadas (pois $\zeta_{k,x}=0 \Rightarrow \sigma_{xs}=0$). A opção implementada, que conduz a melhores resultados, é aquela que garante a admissibilidade cinemática, ou seja, $\zeta_{k,x}=0$ nas secções impedidas de empenar. Para além disso, verificou-se que (i) a anulação de $\zeta_{k,xx}$ nessas secções, apenas para os modos de corte, e (ii) o refinamento da malha de EF na zona afectada (solução típica), permitem melhorar a qualidade dos resultados. Estas medidas são válidas para análises elásticas ou inelásticas (capítulo 6) de 1ª ordem. Nas análises de 2ª ordem (capítulo 7) foram todas adoptadas as medidas à excepção da condição (i).

Estabeleceu-se neste trabalho uma nova definição de factor de participação modal, a qual é calculada na secção da barra que exibe o máximo deslocamento (tri-dimensional ou no plano da secção – *input*) para uma certa configuração de equilíbrio (em regime elástico ou inelástico). A contribuição de cada modo de deformação é quantificada pelo rácio entre (i) o seu deslocamento tri-dimensional máximo nessa secção e (ii) a soma de todos esses deslocamentos modais, os quais não ocorrem necessariamente no mesmo ponto. Esta definição julga-se mais adequada para caracterizar configurações deformadas em regime inelástico, pois os mecanismos de colapso envolvem frequentemente um nível elevado de deformação nas regiões de deslocamentos máximos.

Um dos aspectos inovadores deste trabalho diz respeito à análise da secção, a qual foi baseada na formulação proposta por *Silva* (*2013*) com a única diferença de poderem ser adoptados 4 ou 5 tipos de g.l. nodais em vez de apenas 3. Até ao presente trabalho, a análise da secção da GBT considerava três (d_X, d_Y, d_Z) ou quatro (d_X, d_Y, d_Z, θ_X – rotação de flexão transversal) g.l. nodais. Por isso, e de modo a aproximar com rigor os perfis não lineares de empenamentos resultantes da (i) deformação por corte (*e.g.*, efeito de *shear lag*) e/ou (ii) espalhamento de plasticidade, essas formulações requeriam um nível de discretização significativo, facto que é prejudicial à eficiência computacional dos modelos. Para além disso, a aproximação linear não garante a continuidade dos gradientes de empenamentos entre sub-placas da mesma placa. Por estes motivos, pensou-se ser necessário que os perfis de deslocamentos axiais fossem aproximados por funções não lineares em cada sub-placa. Assim, a análise da secção implementada nestre trabalho permitiu considerar um 5º g.l. nodal que corresponde a uma rotação em torno do eixo local z (ortogonal à linha média da secção), denominada rotação de empenamento (θ_z) – em cada nó, considera-se uma rotação independente por parede (direcção) convergente. Esta inovação permite aproximar cada perfil de empenamentos $u_k(s)$ através de polinómios cúbicos (em vez de funções lineares) em cada sub-placa da secção discretizada. Apresentou-se um exemplo ilustrativo para analisar as vantagens da inclusão deste novo g.l. na análise física e geometricamente linear de um tabuleiro "curto" de uma ponte em caixão, sujeito ao efeito de *shear lag* (*Zhang e Lin 2013*). Para cada caso analisado (tabuleiro simplesmente apoiado ou em consola) efectuaram-se duas análises, uma considerando o novo g.l. nodal e outra (para a mesma discretização da secção) com apenas 4 g.l. por nó. Concluiu-se que a exclusão do g.l. de rotação de empenamento conduz a distribuições de tensões qualitava e quantitativamente insatisfatórias, ao contrário das obtidas quando esse g.l. é considerado (semelhantes aos resultados do Abaqus). Concluiu-se ainda que, à semelhança do Abaqus, a GBT foi capaz de capturar (i) o *shear lag* "positivo" (tensões axiais máximas dos banzos ocorrem nas zonas de ligação às almas; tensões mínimas dos banzos ocorrem na sua região central) no tabuleiro simplesmente apoiado, bem como (ii) o *shear lag* "positivo" e "negativo" (tensões mínimas ocorrem junto às almas e máximas na região central) que têm lugar no primeiro ¼ (junto ao apoio) e últimos ¾ de consola, respectivamente.

Capítulo 3

Comportamento e Modelação do Aço

3.1 Introdução

A elevada utilização do aço como material estrutural iniciou-se a partir da segunda metade do séc. XIX (*World Steel Association 2013*), e apesar do seu elevado custo em vários países, a competitividade deste material tem vindo a aumentar bastante, sobretudo devido à (i) sua notável versatilidade – vários tipos de aço e de processos de fabrico, e (ii) sucessivos avanços científicos no conhecimento do comportamento e capacidade resistente das estruturas metálicas. Para além disso, outra das suas características fundamentais reside no facto de ser 100% reciclável sem perda de qualidade – o aço é o material mais reciclado em todo o Mundo e a sua natureza sustentável levará a que a sua procura aumente significativamente até 2050 (*World Steel Association 2013*).

A crescente procura de elementos em aço inoxidável para soluções arquitectónicas e estruturais teve início no final do século XX (*ISSF 2012*), desde o momento em que começaram a ser publicados regulamentos estruturais para o seu dimensionamento. Tudo isto ocorreu contra o facto da sua disseminação como material estrutural ter sido severamente afectada por custos de produção elevados (*e.g.*, consideravelmente superiores aos do aço carbono/macio). Contudo, desenvolvimentos recentes na engenharia dos materiais e tecnologia de fabrico (*Watanabe 1996*) têm alterado este panorama a um ritmo elevado, nomeadamente (i) fazendo do aço inoxidável um dos materiais recicláveis de maior lucro (*The Nickel Institute 2012*) e (ii) conduzindo a um interesse renovado nos sistemas estruturais em aço inoxidável por parte de arquitectos, donos de obra, projectistas e investigadores .

Existem diferenças fundamentais entre as características químicas, mecânicas e térmicas dos aços carbono e dos inoxidáveis. Enquanto que os últimos são conhecidos pela sua atraente aparência e elevada resistência à corrosão, aços carbono entram rapidamente em processo de corrosão na maioria dos ambientes exteriores – consequentemente, a sua utilização na construção exige eventual protecção (*e.g.*, pintura) e a realização de inspecções e manutenção com uma periodicidade claramente superior à requerida para o aço inoxidável. Como tal, e apesar dos elevados custos de produção, as estruturas em aço inoxidável têm um ciclo de vida longo e uma óptima relação custo-benefício. Relativamente ao comportamento mecânico de ambos os materiais, há diferenças claras que importa mencionar, nomeadamente o facto de os aços inoxidáveis (ver Fig. 3.1) (i) não apresentarem um patamar de cedência bem definido e exibirem uma relação uniaxial tensão-deformação significativamente não linear (o grau de não linearidade varia com a classe do aço e com a história de deformação[1]), e (ii) serem caracterizados por um maior endurecimento após a cedência (até níveis elevados de ductilidade), tornando-os mais adequados para elevados desempenhos anti-sísmicos (*Houska e Wilson 2008*). No que respeita ao comportamento sob elevadas temperaturas (*e.g.*, situação de incêndio), o aço inoxidável tem a vantagem de não apresentar perdas de rigidez tão elevadas como o aço carbono (*Houska e Wilson 2008*).

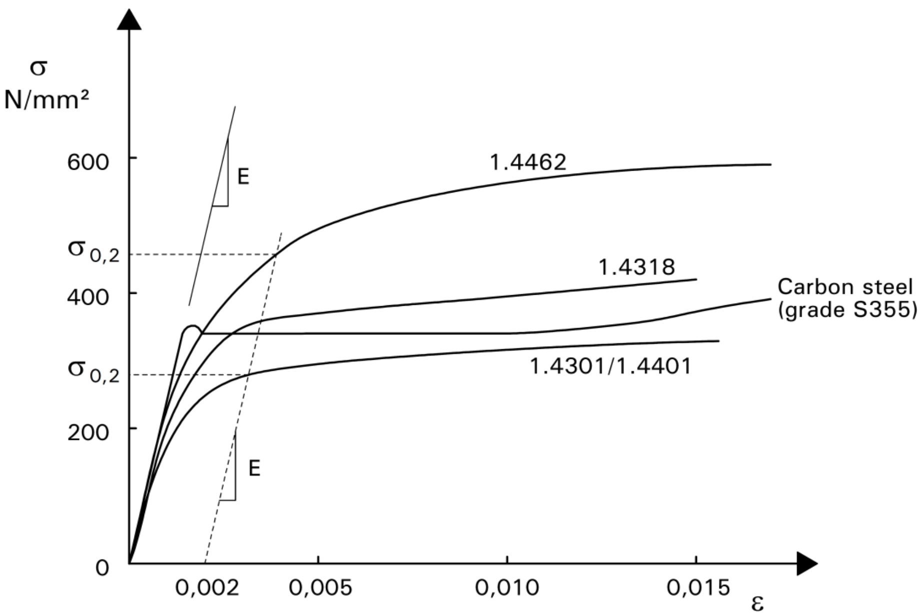


Fig. 3.1. Curvas típicas tensão-deformação dos aços carbono e inoxidável no estado recozido[2] (*Euro Inox e SCI 2007*).

1 *Strain history*, em língua inglesa. É a deformação (incluindo descargas) a que o material esteve previamente sujeito (*e.g.*, processo de enformagem a frio), podendo ou não resultar em deformações residuais.

2 *Annealed*, na designação Anglo-Saxónica.

Tendo em vista simular o comportamento de elementos e estruturas de aço, apresentam-se neste capítulo alguns modelos para simular o comportamento uniaxial do aço carbono e do aço inoxidável. Todos assumem um comportamento elástico linear, tendo-se adoptado (i) modelos bi-lineares (ver Fig. 3.2) para o aço carbono, caracterizados por endurecimento nulo (perfeitamente-plástico, $E_t = 0$) ou linear ($E_t > 0$), tal como recomendado na parte 1.5 do Eurocódigo 3 (*CEN 2006b*) para análises de elementos finitos (EF), e (ii) um modelo não linear para o aço inoxidável. Uma vez que existem várias relações não lineares propostas na literatura para simular o comportamento uniaxial do aço inoxidável, e também pelo facto deste constituir um material estrutural promissor e relativamente pouco disseminado quando comparado com o aço carbono, as restantes secções deste capítulo dedicam-se exclusivamente à modelação do aço inoxidável. Em particular, abordam-se vários aspectos como (i) a composição química, (ii) as principais classes utilizadas na construção, (iii) as aplicações estruturais, (iv) a normalização para dimensionamento e (v) o comportamento mecânico.

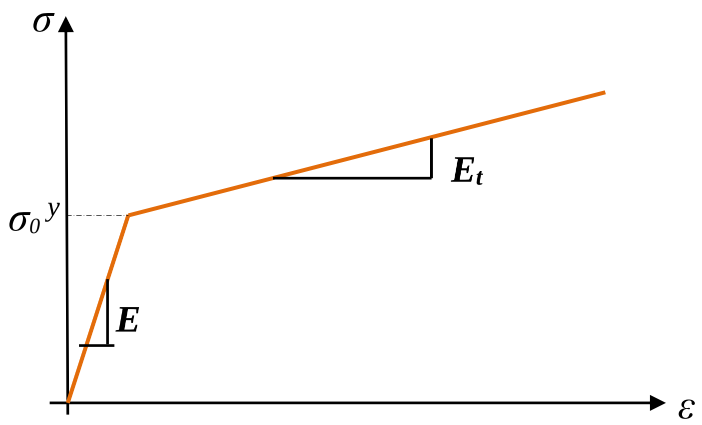


Fig. 3.2. Lei constitutiva uniaxial bi-linear.

3.2 O aço inoxidável

Aço inoxidável[3] é o termo genericamente atribuído para designar uma grande família de ligas de ferro resistentes à corrosão, contendo um teor mínimo (% de massa) de Crómio de 10.5% e um teor máximo de Carbono de 1.2% (*CEN 2005b*), limites que asseguram a formação da camada passiva auto-renovável que garante uma elevada resistência à corrosão. Outros elementos ligantes podem ser adicionados à constituição de cada aço com o fim de melhorar e obter as características desejadas como, por exemplo, a resistência a certos tipos de corrosão, a resistência mecânica, a resistência ao fogo, a soldabilidade, a formabilidade e a ductilidade. Para além do Crómio (principal responsável), elementos como o Molibdénio, o Nióbio e o Nitrogénio melhoram a resistência à corrosão (*Cunat*

3 Por simplicidade e ser frequentemente utilizado na língua Portuguesa, o termo "aço inox" será utilizado daqui em diante.

2004). O Níquel é outro elemento frequentemente presente na composição do aço inox, sendo a sua principal função assegurar a microestrutura e propriedades mecânicas desejadas – mesmo sob temperaturas criogénicas, é conseguida excelente ductilidade para níveis elevados de resistência. Apesar de não ter influência directa na formação da camada de protecção passiva, o Níquel promove a resistência à corrosão onde essa camada possa estar ausente ou destruída, *p.e.* reduzindo a taxa de corrosão (*Cunat 2004*).

Aleadas às características supracitadas, a óptima aparência estética e notáveis propriedades físicas dos aços inoxidáveis têm conduzido a um rápido crescimento[4] da sua utilização em aplicações arquitectónicas (Fig. 3.3), estruturais, nucleares e químicas. Para além disso, a taxa de crescimento anual da utilização de aço inoxidável ao longo das últimas duas décadas chega a ultrapassar a taxa de crescimento de outros materiais. Realce-se ainda que a taxa de crescimento associada à utilização na indústria da construção é ainda mais díspar, o que se deve ao rápido desenvolvimento da China, onde a cota de utilização de aço inoxidável nesse sector é superior a 20% (*Baddoo 2008*).

(a) (b)

Fig. 3.3. Aplicações arquitectónicas do aço inox: (a) ponte pedonal BP em Chicago e (b) sede da VIVO no Rio de Janeiro [5].

3.2.1 Classes

Existem diversas famílias (ou classes) de aços inox, geralmente distinguidas pelos seus principais elementos de liga, dando origem a aços (i) austeníticos, (ii) ferríticos, (iii) austenítico-ferríticos (ou duplex), (iv) martensíticos ou (v) endurecidos por precipitação (*Pauly e Helzel 2011*). As três

4 Enquanto que em 1914, a produção Mundial rondava as 100 toneladas, em 1934 apenas a produção Americana era estimada em 42 mil toneladas, e em 2011 mais de 32 milhões de toneladas foram produzidas em todo o Mundo (*The Nickel Institute 2012*).

5 Imagem disponível em *www.constructalia.com*

primeiras classes são as mais utilizadas na construção, sendo as ligas mais familiares abordadas de seguida. As Tabs. 3.1-3.3 apresentam (*CEN 2009*) as suas designações Europeia e Americana, composição química, tensão limite de proporcionalidade a 0.2% (valor mínimo $\sigma_{0.2,min}$) e tensão última (σ_u) [6]. Informação adicional acerca das propriedades e aplicações destes e outros aços inoxidáveis pode ser consultada em *CEN* (*2005b, 2009*) e *Outokumpu* (*2013*).

3.2.1.1 Austeníticos

Esta classe inclui aços ligados com Crómio (Cr) - Niquel (Ni) e a sua estrutura cristalina cúbica de faces centradas é designada em metalurgia por "austenítica". É claramente o tipo de aço inox que tem sido adoptado com maior frequência na Construção Civil. Relativamente às ligas apresentadas na Tab. 3.1, tem-se como principais características e aplicações:

EN 1.4301 (conhecido por "18/10" em utensílios domésticos) – adequado para ambientes medianamente corrosivos (no máximo), é tipicamente utilizado em interiores ou em exteriores de zonas industriais afastadas da costa.

Tab. 3.1. Composição química e propriedades mecânicas de alguns aços austeníticos.

Designações [7]			**Composição Química** (% de massa no vazamento)				$\sigma_{0.2,\,min}$	σ_u
Nº EN	Nome EN	ASTM [8]	C (máx)	Cr	Mo	Ni	(N/mm^2)	
1.4301	X5CrNi18-10	304	0.07	17.5-19.5	-	8.0-10.5	215	540-750
1.4306	X2CrNi19-11	304L	0.030	18.0-20.0	-	10.0-12.0	205	520-700
1.4401	X5CrNiMo17-12-2	316	0.07	16.5-18.5	2.00-2.50	10.0-13.0	225	530-680
1.4404	X2CrNiMo17-12-2	316L	0.030	16.5-18.5	2.00-2.50	10.0-13.0	225	530-680

EN 1.4306 – variante do EN 1.4301 com baixo teor de Carbono (C), mas teor de Níquel superior por forma a aumentar a formabilidade – utilizado quando são exigidas operações complexas de enformagem.

EN 1.4401 – contém Molibdênio (Mo), tornando este aço adequado para ambientes mediana a altamente corrosivos (*e.g.*, equipamento de processamento químico, atmosferas costeiras, proximidade

6 Ambas as tensões referem-se à direcção de laminagem e foram obtidas para aços em estado recozido. Define-se como tensão limite de proporcionalidade a 0.2%, aquela que corresponde a uma extensão plástica de 0.2%.

7 Num contexto Europeu, é fortemente recomendado que sejam utilizadas as designações EN, pois para alguns aços, um única designação ASTM (Americana) equivale a várias ligas EN.

8 ASTM significa *American Society for Testing and Materials* – as designações apresentadas nas Tabs. 3.1-3.3 foram retiradas de *Euro Inox* (*2007b*).

de estradas onde sais de degelo possam ser usados). Deve ser utilizado em elementos estruturais que requeiram um longo período de vida útil mas cuja acessibiliade para inspecção e limpeza é inexistente.
EN 1.4404 – variante de EN 1.4401 com baixo teor de Carbono, o que garante excelente soldabilidade (mesmo em chapas mais espessas).

3.2.1.2 Ferríticos

Estas ligas exibem uma microestrutura de corpo centrado (ferrítica) e contêm essencialmente Crómio. O seu teor de Níquel é muito baixo ou inexistente, facto que torna o seu custo inferior e sujeito a menores flutuações do que o dos aços austeníticos e duplex (*Baddoo 2008*). Elementos de ligação adicionais são por vezes utilizados para melhorar certas características, nomeadamente (i) Titânio e Nióbio, relativamente à soldabilidade, ou (ii) Molibdênio para a resistência à corrosão localizada. Como principais características e aplicações das ligas apresentadas na Tab. 3.2, tem-se (*Outokumpu 2013*):
EN 1.4003 – adequado para ambientes com baixa influência corrosiva, mas com a vantagem de apresentar uma baixa temperatura de transição dúctil-frágil (-40ºC), o que é favorável à sua aplicação estrutural (*e.g.*, vagões, autocarros, camiões, silos).

Tab. 3.2. Composição química e propriedades mecânicas de alguns aços ferríticos.

Designações			**Composição Química** (% de massa no vazamento)				$\sigma_{0.2,\,min}$	σ_u
Nº EN	Nome EN	ASTM / UNS [9]	C (max)	Cr	Mo	Ni	(N/mm^2)	
1.4003	X2CrNi12	- / S40977	0.030	10.5-12.5	-	0.30-1.00	280	450-650
1.4521	X2CrMoTi18-2	444	0.025	17.0-20.0	1.80-2.50	-	300	420-640

EN 1.4521 – ao contrário da liga EN 1.4003, esta liga apresenta uma temperatura de transição dúctil-frágil elevada (perto dos 0ºC), não sendo por isso recomendada para aplicações estruturais. Devido aos elevados teores de Crómio e Molibdênio, este aço tem uma alta resistência à corrosão, tornando-o numa potencial alternativa para aplicações resistentes a ácidos. Para além da presença no mercado Europeu da canalização doméstica, aquecedores de água e recuperadores de calor são outras aplicações típicas.

3.2.1.3 Austenítico-ferríticos (*duplex*)

Ligas deste tipo denominam-se habitualmente "duplex" e têm aproximadamente iguais proporções das

9 UNS significa *Unified Numbering System* (E.U.A.) e as designações apresentadas nas Tabs. 3.2 e 3.3 foram obtidas em *Outokumpu* (*2013*).

estruturas ferrítica e austenítica – combinam, por isso, níveis elevados de resistência à corrosão e mecânica. Embora estes aços tenham boa ductilidade, a maior resistência que possuem resulta em formabilidade limitada, quando comparada com a dos aços austeníticos (*Baddoo 2008*). Apresentam-se agora as principais características e aplicações das ligas referidas na Tab. 3.3:

EN 1.4462 – é a liga mais comum (ligada com Molibdênio) e a sua resistência à corrosão permite a sua utilização em estruturas *offshore* e pontes.

EN 1.4362 – apesar de não ser ligada com Molibdênio, a sua resistência à corrosão é considerada muito boa (semelhante à do aço austenítico EN 1.4401).

Tab. 3.3. Composição química e propriedades mecânicas de alguns aços duplex.

Designações			**Composição Química** (% de massa no vazamento)				$\sigma_{0.2,\,min}$	σ_u
Nº EN	Nome EN	ASTM / UNS	C (max)	Cr	Mo	Ni	(N/mm^2)	
1.4462	X2CrNiMoN22-5-3	2205/S32205	0.030	21.0-23.0	2.50-3.50	4.5-6.5	485	700-950
1.4362	X2CrNiN23-4	2304/S32304	0.030	22.0-24.0	0.10-0.60	3.5-5.5	435	650-850
1.4162	X2CrMnNiN21-5-1	- / S32101	0.040	21.0-22.0	0.10-0.80	1.35-1.70	515	700-900

EN 1.4162 – é conhecido como “lean duplex” (patenteado pela *Outokumpu* (*2013*)), uma vez que tem teores muito baixos de elementos de ligação que não o Crómio, com especial destaque para o Níquel, por comparação com os restantes duplex e austeníticos. Este facto constitui uma importante vantagem devido ao preço elevado (uma parte considerável do custo dos aços austeníticos) e bastante volátil do Níquel (*Theofanous e Gardner 2009*). Na verdade, (i) o custo do “lean duplex” é geralmente inferior ao dos austeníticos mais familiares, e (ii) a sua resistência mecânica é superior à dos ferríticos e austeníticos mais comuns (ver Tabs. 3.1-3.3), ainda garantindo soldabilidade adequada e boa resistência a vários tipos de corrosão (*Theofanous e Gardner 2009*). Pelas razões supracitadas, esta liga tem sido bastante utilizada na indústria da Construção Civil (especialmente utilizada em elementos estruturais) e o interesse nela por parte das comunidades técnica e científica tem crescido nos últimos anos.

3.2.2 Aplicações estruturais

Até aos anos 80, as aplicações de aço inoxidável na construção consistiam essencialmente em elementos secundários de edifícios, como lintéis, elementos de fixação de paredes de alvenaria, ou cantoneiras em sistemas de revestimento (*Baddoo 2008*). A procura crescente de elementos em aço inox para soluções arquitectónicas e estruturais começou no final do século XX, desde o momento em que os primeiros regulamentos de dimensionamento começaram a ser publicados (ver subsecção 3.2.3). Desde o começo do século XXI, o número de aplicações estruturais em aço inox tem aumentado significativamente - a estética, resistência à corrosão, durabilidade de longa duração e o comportamento estrutural (ou uma combinação destes factores), são requisitos que têm conduzido à preferência por este material (*Gedge 2008*). A gama de aplicações é vasta e inclui monumentos, pontes, edifícios, casas, coberturas, etc. – a Tab. 3.4 apresenta alguns exemplos (*Sommerstein 1999, Miettinen 2002, Euro Inox 2002, Baddoo 2008, Gedge 2008, Houska e Wilson 2008*), os primeiros dizem respeito a aços austeníticos e os restantes a aços duplex (maioritariamente aplicados em pontes e passadiços).

Tab. 3.4. Exemplos de aplicações estruturais do aço inoxidável.

Nome	Tipo	Local	Data	Aço
Arco *Gateway* (Fig. 3.4)	Monumento	St. Louis, Missouri, E.U.A.	1965	ASTM 304
Pirâmide do *Louvre*	Treliça	Paris, França	1989	ASTM 316
Arquivo Nacional (Fig. 3.5)	Edifício	Gatineau, Quebec, Canadá	1997	ASTM 304
Editora *Sanomatalo*	Fachada de Edifício	Helsínquia, Finlândia	1999	EN 1.4401
Villa Inox (Fig. 3.6)	Casa em Aço Leve	Tuusula, Finlândia	2000	EN 1.4301
Schubert Club Band Shell (Fig. 3.7)	Casca Treliçada	St. Paul, Minnesota, E.U.A.	2002	ASTM 316
Igreja *Saint Pio* de *Pietrelcina*	Estrutura de Apoio da Cobertura	Foggia, Itália	2004	EN 1.4404
Memorial *US Air Force*	Memorial	Washington DC, E.U.A	2006	ASTM 316L
Ponte *Aparte*	Ponte Pedonal	Estocolmo, Suécia	-	EN 1.4462
Ponte *Padre Arrupe* (Fig. 3.8)	Ponte Pedonal	Bilbau, Espanha	2000	EN 1.4362
Ponte *Millennium*	Ponte Pedonal	Iorque, Reino Unido	2001	EN 1.4462
Ponte *Likholefossen* (Fig. 3.9(a))	Ponte Pedonal	Forde, Noruega	2004	EN 1.4162
Ponte *Siena*	Ponte	Siena, Itália	2004	EN 1.4162
Ponte *Cala Galdana*	Ponte	Menorca, Espanha	2005	EN 1.4462
World Trade Center 7	Vigas de Alma Cheia	Nova Iorque, E.U.A.	2006	ASTM 2205
Ponte *Celtic Gateway*	Ponte Pedonal	Holyhead, Reino Unido	2007	EN 1.4362
Ponte *Stonecutters*	Ponte (mastros)	Hong Kong	2009	EN 1.4462
Ponte *Helix* (Fig. 3.9(b))	Ponte Pedonal	Singapura	2009	EN 1.4462

Fig. 3.4. Arco *Gateway* em *Saint Louis*, *Missouri* (E.U.A.) – aço austenítico ASTM 304.

Fig. 3.5. Arquivo Nacional do Canadá em *Gatineau* (*Quebec*) – estrutura em aço austenítico ASTM 304 [10].

Existem aplicações mais antigas, mas a primeira grande estrutura em aço inox é o arco *Gateway* em *Saint Louis* (E.U.A.) – ver Fig.3.4, concluído em 1965 e constituído por uma secção triangular variável

10 Imagens disponíveis em *www.ikoy.com*

formada por chapas de aço ASTM 304 soldadas (*Houska e Wilson 2008*). Permaneceu a estrutura em inox mais pesada do Mundo até à construção em 1997 do Arquivo Nacional do Canadá em *Gatineau* – ver Fig. 3.5. Este edifício foi projectado com base num periodo de vida útil de aproximadamente 500 anos e consiste num sistema porticado com elementos em aço ASTM 304 (*Sommerstein 1999*).

Fig. 3.6. Casa *Villa Inox* em aço leve (*Tuusula*, Finlândia) – estrutura em aço austenítico EN 1.4301 [11].

Fig. 3.7. *Schubert Club Band Shell* em *Saint Paul*, *Minnesota* (E.U.A.) – treliça em aço austenítico ASTM 316 [12].

Fig. 3.8. Ponte pedonal *Pedro Arrupe* em Bilbau – estrutura em aço duplex EN 1.4362 [13].

11 Imagens disponíveis em *www.livingsteel.org* (esquerda) e *www.constructalia.com* (direita).

12 Imagens disponíveis em *www.worldarchitecturemap.org*

A elevada resistência, ductilidade e capacidade de absorção de energia, fazem do aço inoxidável um material ideal para resistir a acções de impacto e explosões – por exemplo, paredes resistentes a explosões em plataformas *offshore* são, hoje em dia, frequentemente constituídas por chapas corrugadas em aço austenítico EN 1.4401 ou duplex EN 1.4362 (*Baddoo 2008*).

(a) (b)

Fig. 3.9. Pontes pedonais em aço dulex: (a) *Likholefossen* (Noruega) [14] – EN 1.4162, (b) *Helix* (Singapura) – EN 1.4462.

3.2.3 Normalização para dimensionamento

A construção do arco *Gateway* em *St. Louis*, *Missouri* (Fig. 3.4) despoletou muita actividade de investigação no início dos anos 60 nos E.U.A., tendo conduzido em 1968 (*Baddoo 2008*) à publicação do primeiro regulamento Americano para o dimensionamento de elementos em aço inox (*AISI 1968*), mais tarde substituído por *ASCE* (*2002*). Com base no regulamento Americano, foram também publicadas as normas Sul Africana (*SANS e SABS 1997*) e Australiana/Neozelandesa (*AS e NZS 2001*).

Em 1994, com o objectivo de dar orientação a nível Europeu para a aplicação adequada e segura do aço inox na construção, a Euro Inox publicou um manual de dimensionamento que resultou de um projecto de investigação desenvolvido pelo *The Steel Construction Institute* (SCI). Após a 1ª edição do manual, resultados de outros projectos de investigação foram incluídos nas 2ª e 3ª edições, a última publicada em 2007 (*Euro Inox e SCI 2007*) – um comentário a esse manual tem também sido publicado como um documento separado (*Euro Inox 2007a*), o qual visa fundamentar as regras desenvolvidas e inclui alguns resultados de programas experimentais.

13 Imagem disponível em *www.ura.gov.sg*

14 Imagem disponível em *www.tripadvisor.com*

Em 2006, a Parte 1.4 do Eurocódigo 3 (EN 1993-1-4) (*CEN 2006a*) foi lançada como norma Europeia suplementar para o dimensionamento de estruturas em aço inox. Ao observar a complexidade da estruturas que constam na Tab. 3.4, torna-se evidente que é possível dimensionar estruturas complexas em aço inoxidável. Contudo, o crescimento da utilização deste material em estruturas correntes como casas e edifícios de escritórios/residenciais, requer a promoção de ferramentas de cálculo que conduzam a um dimensionamento eficiente, seguro e económico. Por exemplo, é reconhecido que algumas das cláusulas da EN 1993-1-4 correspondem a meras adaptações de regras desenvolvidas para estruturas em aço carbono (*CEN 2005a*). Sendo o comportamento do aço inox significativamente não linear (ver Fig. 3.1), a consideração de uma lei constitutiva elástica perfeitamente-plástica pode seriamente comprometer o dimensionamento e tornar a estrutura pouco económica, especialmente no que respeita a elementos estruturais pouco esbeltos (*Theofanous e Gardner 2011*) – com o objectivo de promover um dimensionamento mais eficiente e económico, *Theofanous e Gardner* (*2011*) propuseram recentemente o Método da Resistência Contínua[15].

3.2.4 Assimetria e anisotropia

Existem vários trabalhos experimentais (*e.g.*, *Johansson e Olsson 2000, Rasmussen et. al. 2003, Lecce e Rasmussen 2006a*, *Becque e Rasmussen 2009*) que comprovam que o aço inox possui, quando sujeito a um carregamento estático, diferentes comportamentos à tracção e à compressão (assimetria), bem como na direcção paralela (longitudinal) e transversal à direcção de laminagem (anisotropia) – ver Fig. 3.10. A preponderância destes comportamentos depende da classe do aço, do processo produtivo (*e.g.*, laminagem/enformagem a frio amplificam esses fenómenos) e da história de deformação. Seguidamente apresentam-se alguns resultados e conclusões de vários estudos sobre o problema da assimetria e anisotropia dos aços inoxidáveis.

3.2.4.1 Assimetria

No início do século e com base nos resultados experimentais dos últimos 15 anos, *van den Berg* (*2000*) publicou valores médios das propriedades à tracção e compressão (direcção de laminagem) de aços ferríticos e austeníticos, tendo-se concluído que (i) os módulos de elasticidade à tracção e compressão sofrem pequenas alterações (maioritariamente superiores à compressão), e (ii) o limite de proporcionalidade é geralmente inferior à compressão do que à tracção.

15 *Continuous Strength Method*, na designação inglesa.

Gardner e *Nethercot* (*2004a*) efectuaram vários ensaios à compressão e à tracção de provetes de aço austenítico *EN 1.4301* retirados das faces de elementos estruturais tubulares (direcção longitudinal). Foram analisados os resultados de 16 pares de provetes, cada um associado a um elemento estrutural diferente, tendo-se concluido que (em média) o módulo de elasticidade e tensão limite de proporcionalidade a 0.2% são, respectivamente, 1% superior e 5% inferior à compressão do que à tracção.

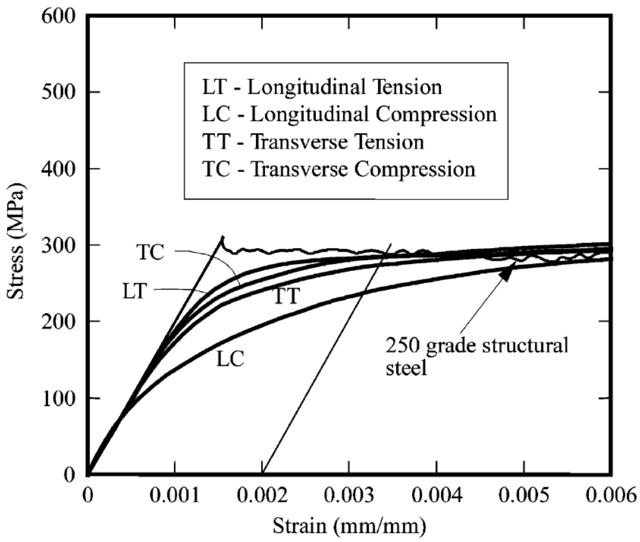


Fig. 3.10. Curvas típicas tensão-deformação para aços carbono e austeníticos (*Rasmussen et. al. 2003*)[16].

Lecce e Rasmussen (*2006a*) também concluiram que as propriedades mecânicas do aço inoxidável são dependentes do tipo de carregamento. Por exemplo, em perfis de aço ASTM 304 com secção em C-reforçado e para a direcção longitudinal, concluíram que (i) a tensão limite de proporcionalidade a 0.01% é 18.9% superior à compressão do que à tracção, e (ii) a tensão limite de proporcionalidade a 0.2% é 4.1% superior à tracção do que à compressão.

3.2.4.2 Anisotropia

Johansson e Olsson (*2000*) realizaram testes biaxiais a 3 aços inoxidáveis, nomeadamente (i) EN 1.4301 e EN 1.4436 (austeníticos), e (ii) EN 1.4462 (duplex), tendo concluído que o aço duplex exibe clara anisotropia, ao contrário dos aços austeníticos, cujo comportamento é maioritariamente isotrópico e bem aproximado através do critério de cedência de *von Mises*.

Rasmussen et al. (*2003*) investigaram experimental e numericamente a resistência à compressão de placas em aço duplex ASTM 2205. As análises numéricas permitiram estudar a influência de diferentes modelos mecânicos (leis constitutivas) no comportamento estrutural, nomeadamente (i)

16 As curvas LT, LC, TT e TC podem ter outra ordenação, em função do aço austenítico em causa e respectiva história de deformação.

IPP – isotrópico perfeitamente-plástico, (ii) ISH – isotrópico com endurecimento, e (iii) APP – anisotrópico perfeitamente-plástico. Os modelos isotrópicos foram baseados na teoria de escoamento J_2 e no comportamento à compressão na direcção de laminagem, enquanto que o modelo anisotrópico resulta do critério de cedência de *Hill* e inclui os comportamentos à tracção/compressão nas direcções paralela, transversal e diagonal à direcção de laminagem. Da comparação entre os resultados experimentais e numéricos foi concluído que (i) o modelo ISH é o que origina os melhores resultados e (ii) a modelação da anisotropia pode não ser essencial na obtenção de resultados precisos em análises que involvam carregamentos monotónicos.

Lecce e Rasmussen (*2005, 2006a,b*) efectuaram um estudo numérico e experimental relativo ao comportamento distorcional de colunas constituídas por aços austenítico e ferríticos, tendo avaliado a importância da não linearidade material e anisotropia na modelação numérica. Três modelos constitutivos foram analisados, nomeadamente (i) dois isotrópicos com e sem endurecimento, respectivamente ISH e IPP, e (ii) um anisotrópico (critério de *Hill*) até à cedência e isotrópico (com endurecimento) após a mesma. Após calibração dos modelos numéricos, concluiu-se que o efeito da anisotropia na resistência última de colunas sujeitas a carregamento estático era desprezável – mais uma vez, o modelo ISH foi aquele que originou melhores resultados. No entanto, e porque a anisotropia é afectada pela história de deformação e endurecimento do material, a sua modelação pode ser importante em elementos sujeitos a carregamento cíclico.

3.2.5 *Relação uniaxial tensão-deformação*

O primeiro trabalho dedicado ao estudo de leis constitutivas marcadamente não lineares deve-se a *Ludwik* (*1909*), o qual propôs uma expressão para o cálculo da tensão em casos de deformação elástica desprezável (K e n são constantes)

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad . \qquad (3.1)$$

Em 1943, *Ramberg* e *Osgood* (*1943*) estudaram a relação $\varepsilon - \sigma$ para materiais com uma transição gradual entre o comportamento linear e não linear (*e.g.*, ligas de aço inoxidável ou alumínio), tendo desenvolvido a equação *Ramberg-Osgood*

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K\left[\frac{\sigma}{E}\right]^n \quad , \qquad (3.2)$$

onde (i) E é o módulo de elasticidade do material, (ii) K e n são constantes que caracterizam o endurecimento do material (a determinar experimentalmente), e (iii) ε é a extensão total, dada pela soma das parcelas elástica (σ/E) e plástica (semelhante a (3.1)). Posteriormente, *Hill* (*1944*) propôs uma reformulação de (3.2) que seria mais tarde usada para modelar o comportamento do alumínio, a qual consiste em considerar $K = \varepsilon_{0.2p} /(\sigma_{0.2} /E)^n$, onde $\varepsilon_{0.2p}$ = 0.2% é a extensão plástica correspondente a $\sigma_{0.2}$, obtendo-se

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 0.002\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.2}}\right)^n \quad , \quad (3.3)$$

onde $\sigma_{0.2}$ é a tensão limite de proporcionalidade a 0.2%, e n designa-se por expoente de endurecimento, definido por

$$n = \frac{\ln(0.2/0.1)}{\ln(\sigma_{0.2}/\sigma_{0.1})} \quad , \quad (3.4)$$

em que 'ln' simboliza o logarítmo neperiano. Esta definição de n faz com que a curva teórica coincida com a experimental para as tensões limite de proporcionalidade $\sigma_{0.1}$ e $\sigma_{0.2}$ (correspondentes a deformações plásticas de 0.1% e 0.2%, respectivamente). Da análise da função (3.3), conclui-se que valores altos de n dão origem a relações σ-ε com "rápidas" mudanças de declive numa vizinhança de $\sigma_{0.2}$, enquanto que valores mais baixos dão origem a curvas mais "arredondadas" em todo o domínio.

Mirambella e Real (*2000*) propuseram o cálculo do expoente n tal que a curva teórica intersectasse a experimental no ponto de tensão $\sigma_{0.05}$ (em vez de $\sigma_{0.1}$), tendo concluído que essa expressão conduzia a melhores resultados que a proposta na norma Americana ANSI/ASCE-8-90 (*ASCE 1991*), baseada na tensão $\sigma_{0.01}$. Para além disso, esses autores mostraram (*Mirambella e Real 2000*) que a equação (3.3) sobrestima a relação σ-ε do aço austenítico EN 1.4301 para tensões superiores a $\sigma_{0.2}$, tendo proposto uma expressão que lhes permitisse obter bons resultados numéricos no cálculo de flechas em vigas, tal que

$$\varepsilon = \varepsilon_{0.2} + \frac{\sigma - \sigma_{0.2}}{E_{0.2}} + \varepsilon_{up}\left(\frac{\sigma - \sigma_{0.2}}{\sigma_u - \sigma_{0.2}}\right)^{n'} \qquad \sigma_{0.2} \leq \sigma \leq \sigma_u \quad , \quad (3.5)$$

onde (i) n' é uma constante que caracteriza o endurecimento do material, obtida por ajuste da curva analítica aos pontos experimentais de tensão última (σ_u) e a outro ponto intermédio ($\sigma_{0.2} < \sigma < \sigma_u$), (ii) ε_{up} é a extensão plástica correspondente à tensão última, (iii) $\varepsilon_{0.2}$ representa a extensão total correspondente a $\sigma_{0.2}$, e (iv) $E_{0.2}$ é o declive da curva σ-ε em $\sigma=\sigma_{0.2}$. Ao analisar as funções (3.3) e (3.5), conclui-se que ambas têm o mesmo valor e declive no ponto de transição ($\sigma=\sigma_{0.2}$), apesar da diferente curvatura.

MacDonald et al. (*2000*) fizeram uma série de ensaios a aços austeníticos, e dada a inadequabilidade da relação (3.3) para tensões superiores a $\sigma_{0.2}$, propuseram a seguinte curva para todo o domínio

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 0.002\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^{\left(i + j\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^k\right)} \quad , \quad (3.6)$$

onde as constantes *i*, *j* e *k* dependem da espessura dos provetes. Apesar de terem sido obtidos resultados muito bons, a expressão estava limitada ao aço e espessuras analisados.

Com vista a desenvolver uma relação tensão-deformação precisa até à extensão última e válida para uma vasta gama de aços inoxidáveis, *Rasmussen* (*2003*) baseou-se num vasto conjunto de resultados experimentais (essencialmente à tracção) obtidos por vários autores para aços austeníticos, ferríticos e duplex, e relativos a provetes retirados (i) das zonas planas de perfis enformados a frio e (ii) de chapas em estado recozido. *Rasmussen* constatou que a curva experimental exibe formas semelhantes nos domínios $\sigma \leq \sigma_{0.2}$ e $\sigma > \sigma_{0.2}$, tendo proposto a relação seguinte (*n* deixa de ser definido por (3.4))

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{E} + 0.002\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0.2}}\right)^n & 0 \leq \sigma \leq \sigma_{0.2} \\ \varepsilon_{0.2} + \dfrac{\sigma - \sigma_{0.2}}{E_{0.2}} + \varepsilon^*_{up}\left(\dfrac{\sigma - \sigma_{0.2}}{\sigma_u - \sigma_{0.2}}\right)^m & \sigma_{0.2} \leq \sigma \leq \sigma_u \end{cases} \quad , \quad (3.7)$$

$$n = \frac{\ln(20)}{\ln(\sigma_{0.2}/\sigma_{0.01})} \qquad E_{0.2} = \frac{E}{\left(1 + 0.002\dfrac{n}{(\sigma_{0.2}/E)}\right)}$$
$$\varepsilon_{0.2} = \frac{\sigma_{0.2}}{E} + 0.002 \qquad \varepsilon^*_{up} = \varepsilon_u - \varepsilon_{0.2} - \frac{\sigma_u}{E} \quad , \quad (3.8)$$

onde (i) ε_u é a extensão última, (ii) os parâmetros *n* e *m* caracterizam a não linearidade da curva, e (iii) ε^*_{up} representa a parcela plástica da extensão última relativamente a um referencial fictício com origem no ponto de transição entre os dois troços de (3.7) – ver Fig. 3.11(b). Note-se que a relação (3.7), à semelhança de (3.5), não é exacta no ponto (ε_u , σ_u), apesar dos erros provenientes não serem significativos como resultado da elevada ductilidade dos aços inoxidáveis (*Gardner e Nethercot 2004a*). Devido a essa característica, *Rasmussen* (*2003*) sugeriu ainda a substituição de ε^*_{up} por ε_u em (3.7).

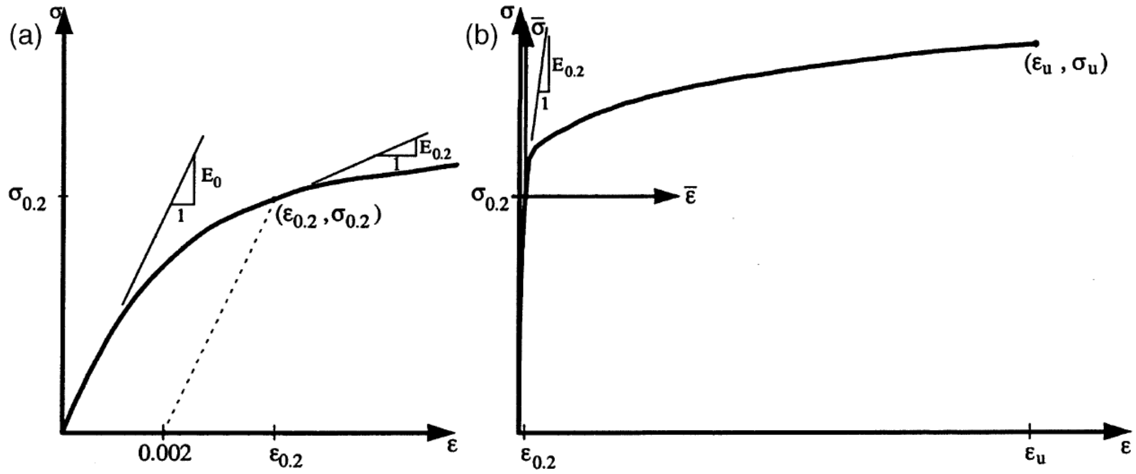


Fig. 3.11. Relação constitutiva típica (à tracção) de um aço inox: domínios (a) inicial e (b) total (*Rasmussen 2003*).

Visando descrever (3.7) somente em função de *E*, $\sigma_{0.2}$ e *n*, designados na literatura como parâmetros básicos *Ramberg-Osgood*, *Rasmussen* (*2003*) propôs expressões aproximadas que definem σ_u, ε_u e *m* em função desses parâmetros. Com base nas curvas experimentais em que se baseou e em tentativa/erro, a constante *m* foi definida por

$$m = 1 + 3.5\frac{\sigma_{0.2}}{\sigma_u} \quad . \quad (3.9)$$

Quanto aos parâmetros (ε_u , σ_u), uma vez que normalmente não é viável a sua obtenção num ensaio à compressão, as expressões propostas por *Rasmussen* (*2003*) resultaram de rectas de regressão linear ajustadas a dados experimentais à tracção, tal que

$$\frac{\sigma_{0.2}}{\sigma_u} = 0.2 + 185e \qquad \text{(aços austeníticos e duplex)} \quad , \quad (3.10)$$

$$\frac{\sigma_{0.2}}{\sigma_u} = \frac{0.2 + 185e}{1 - 0.0375(n-5)} \quad \text{(todos os aços)} \quad , \quad (3.11)$$

onde $e = \sigma_{0.2}/E$. Relativamente à determinação de ε_u, *Rasmussen* apenas relacionou essa extensão com $\sigma_{0.2}/\sigma_u$, tendo obtido por regressão linear

$$\varepsilon_u = 1 - \frac{\sigma_{0.2}}{\sigma_u} \quad , \quad (3.12)$$

expressão que não se ajustou particularmente bem a nenhuma liga. Embora as relações (3.10)-(3.12) tenham sido baseadas em resultados de ensaios à tracção, e apesar de ter sido mostrado por comparação com resultados experimentais que o modelo de *Rasmussen* subestima consideravelmente o comportamento à compressão para extensões superiores a $\varepsilon_{0.2}$ (*Quach et. al.*

2008), *Lecce e Rasmussen* (*2006b*) já utilizaram com sucesso esse modelo para estimar o comportamento estrutural de elementos comprimidos.

Importa aqui referir que *Abdella* (*2006*) propôs uma inversão bastante precisa da relação (3.7) modificada, no sentido de $\varepsilon - \sigma$ passar a incluir o ponto (ε_u , σ_u), ou seja, $\varepsilon^*_{up}=\varepsilon_u - \varepsilon_{0.2} - (\sigma_u - \sigma_{0.2}) / E_{0.2}$.

Gardner e Nethercot (*2004a*) propuseram uma nova curva para tensões superiores a $\sigma_{0.2}$, a qual se concluiu estar em excelente concordância com curvas experimentais até extensões de tracção e de compressão na ordem de 10% e 2%, respectivamente (os ensaios à compressão só foram realizados até esse nível). Devido à inexistência de um ponto de estacionariedade (ε_u , σ_u) no comportamento à compressão, a proposta de *Gardner e Nethercot* não depende do parâmetro σ_u, mas da tensão limite de proporcionalidade a 1% (σ_1), obtendo-se

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{E} + 0.002\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0.2}}\right)^{n} & , \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_{0.2} \\ \varepsilon_{0.2} + \dfrac{\sigma - \sigma_{0.2}}{E_{0.2}} + \left(0.008 - \dfrac{\sigma_1 - \sigma_{0.2}}{E_{0.2}}\right)\left(\dfrac{\sigma - \sigma_{0.2}}{\sigma_1 - \sigma_{0.2}}\right)^{n_{0.2,1}} & , \quad \sigma \geq \sigma_{0.2} \end{cases} \quad , (3.13)$$

onde n é definido por (3.8) e $n_{0.2,1}$ é um expoente a ser determinado por ajuste da curva analítica à experimental. Refira-se ainda que *Abdella* (*2007*) propôs uma inversão aproximada da relação (3.13) modificada – no 2º troço tem-se (ε_1 - $\varepsilon_{0.2}$) no lugar de 0.008, de modo que $\varepsilon - \sigma$ passe em (ε_1 , σ_1).

Mais recentemente, *Quach et al.* (*2008*) propuseram uma nova relação $\varepsilon - \sigma$ para modelar o comportamento à tracção/compressão de qualquer aço inox (austenítico, ferrítico ou duplex) até à extensão última. A relação é definida por 3 troços e apenas pelos 3 parâmetros básicos *Ramberg-Osgood* (*E*, $\sigma_{0.2}$, *n*), tendo sido comprovado por comparação com resultados experimentais (*Quach et al. 2008*) que a curva proposta (i) tem uma elevada precisão até níveis elevados de deformação e (ii) supera a qualidade da função (3.7) proposta por *Rasmussen* (*2003*) – a única até então dependente apenas desses 3 parâmetros, mas apenas precisa para o comportamento à tracção. Por estes motivos, a relação $\varepsilon - \sigma$ proposta por *Quach et al.* foi a implementada neste trabalho, tendo-se

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{E} + 0.002\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0.2}}\right)^{n} & , \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_{0.2} \\ \varepsilon_{0.2} + \dfrac{\sigma_*}{E_{0.2}} + \varepsilon_{*2p}\left(\dfrac{\sigma_*}{\sigma_{*1}}\right)^{n_2} & , \quad \sigma_{0.2} < \sigma \leq \sigma_2 \\ \dfrac{\sigma - a}{b \mp \sigma} & , \quad \sigma_2 < \sigma \leq \sigma_u \end{cases} \quad , (3.14)$$

$$\sigma_* = \sigma - \sigma_{0.2}\ , \quad \sigma_{*j} = \sigma_j - \sigma_{0.2}, \quad e = \frac{\sigma_{0.2}}{E}, \quad \varepsilon_{0.2} = 0.002 + \frac{\sigma_{0.2}}{E}$$

$$n = \frac{\ln(20)}{\ln\left(\sigma_{0.2}/\sigma_{0.01}\right)} \quad , E_{0.2} = \frac{E}{1+0.002n/e}, \quad \varepsilon_{*2p} = 0.008 + \left(\sigma_1 - \sigma_2\right)\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_{0.2}}\right)\ , \qquad (3.15)$$

$$a = \sigma_2\left(1 \pm \varepsilon_2\right) - b\varepsilon_2\ , \quad b = \frac{\sigma_u\left(1 \pm \varepsilon_u\right) - \sigma_2\left(1 \pm \varepsilon_2\right)}{\varepsilon_u - \varepsilon_2}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon\left(\sigma = \sigma_2\right)$$

onde (i) a tensão e deformação devem ser consideradas em valor absoluto para o comportamento à tracção ou compressão, (ii) o sinal superior da expressão do 3º troço é relativo ao comportamento à tracção e o sinal inferior à compressão, e (iii) σ_1 e σ_2 são as tensões limite de proporcionalidade a 1% e 2%, respectivamente, ou seja, esses valores são as respectivas extensões plásticas (as extensões totais denominam-se ε_1 e ε_2). Note-se que para garantir a continuidade da função $\varepsilon - \sigma$, a extensão ε_2 considerada nas expressões de a e b (último troço) tem de ser obtida de (3.14) para $\sigma=\sigma_2$ – esse valor não corresponde a 0.02 + σ_2/E, pois o valor de σ_2 será estimado, como se explicará em breve. A definição do expoente n é a mais utilizada na prática e faz com que a curva passe precisamente no ponto experimental da tensão limite de proporcionalidade a 0.01%.

Recorrendo à regressão linear aplicada a resultados de ensaios uniaxiais a várias ligas de aço inoxidável, no estado virgem ou provenientes de zonas planas de secções enformadas a frio, *Quach et al.* (*2008*) desenvolveram expressões aproximadas para definir todos os parâmetros de (3.14) em função de n, E e $\sigma_{0.2}$, vindo[17]

$$n_2^t = 12.255\frac{E_{0.2}^t\left(\frac{0.542}{n^t}+1.072\right)}{E^t}+1.037, \quad n_2^c = 6.399\frac{E_{0.2}^c\left(\frac{0.662}{n^c}+1.085\right)}{E^c}+1.145$$

$$\sigma_1^t = \sigma_{0.2}^t\left(\frac{0.542}{n^t}+1.072\right), \quad \sigma_1^c = \sigma_{0.2}^c\left(\frac{0.662}{n^c}+1.085\right)$$

$$, \qquad (3.16)$$

17 Segundo *Quach et al.* (*2008*), as aproximações propostas não são aplicáveis às zonas dos cantos de secções enformadas a frio – geralmente muito mais endurecidas que o resto da secção, devido ao processo de fabrico.

$$\sigma_u^t = \begin{Bmatrix} \sigma_{0.2}^t \left(\dfrac{1-0.0375\left(n^t-5\right)}{0.2+185e^t} \right), \text{ligas ferríticas} \\ \sigma_{0.2}^t \left(\dfrac{1}{0.2+185e^t} \right), \text{ligas austeníticas e duplex} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_u^t = 1 - \frac{\sigma_{0.2}^t}{\sigma_u^t}, \quad \sigma_u^c = \sigma_u^t\left(1+\varepsilon_u^t\right)^2, \quad \varepsilon_u^c = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon_u^t}$$

em que os expoentes "*t*" e "*c*" indicam se a variável em causa é relativa ao comportamento à tracção ou compressão, respectivamente. Note-se que as expressões que estimam a extensão e tensão últimas à tracção (ε^t_u , σ^t_u) são as mesmas anteriormente propostas por *Rasmussen* (*2003*) (ver (3.10)-(3.12)). Importa ainda referir que a extensão e tensão últimas à compressão (ε^c_u , σ^c_u) dependem das grandezas análogas à tracção, e a relação proposta basea-se na hipótese $(\varepsilon^c_u , \sigma^c_u)_v = (\varepsilon^t_u , \sigma^t_u)_v$, onde o índice *v* indica que a igualdade é válida para grandezas verdadeiras[18]. Tal hipótese foi fundamentada por evidências experimentais que sugerem que as relações verdadeiras $\varepsilon - \sigma$ à compressão e à tracção coincidem para extensões superiores a cerca de 2% (*Quach et al. 2008*). Por último, resta definir a aproximação para σ_2. Após substituir (ε_2 , σ_2) no 2º troço de (3.14) e resolvendo em ordem a ε_{*2p}, obtém-se

$$\varepsilon_{*2p} = \frac{\varepsilon_{*2}\, E_{0.2} - \sigma_{*2}}{E_{0.2}\left(\sigma_{*2}/\sigma_{*1}\right)^{n_2}}, \quad \varepsilon_{*2} = \varepsilon_2 - \varepsilon_{0.2} = 0.018 + \sigma_{*2}/E \quad . \quad (3.17)$$

A utilização simultânea desta expressão e da definição de ε_{*2p} indicada em (3.15), permite calcular σ_2 através da resolução numérica (*e.g.*, método de *Newon-Raphson*) da equação

$$\sigma_2 = \sigma_{0.2} + \left(\sigma_1 - \sigma_{0.2}\right) A^{1/n_2} \left[1 - \frac{\left(1/E_{0.2} - 1/E\right)\sigma_2}{B} \right]^{1/n_2}$$
$$B = 0.018 + e\left(E/E_{0.2} - 1\right), \quad A = \frac{B}{0.008 + e\left(\sigma_1/\sigma_{0.2} - 1\right)\left(1 - E/E_{0.2}\right)} \quad . \quad (3.18)$$

Por forma a não aumentar o custo computacional da análise, *Quach et al.* (*2008*) propuseram a aproximação da solução de (3.18) dada por

$$\sigma_{2a} = \frac{1 + \left(\sigma_1/\sigma_{0.2} - 1\right) A^{1/n_2}}{1 + e\left(E/E_{0.2} - 1\right)\left(\sigma_1/\sigma_{0.2} - 1\right) \dfrac{A^{1/n_2}}{B\, n_2}} \sigma_{0.2} \quad . \quad (3.19)$$

[18] *True extension* e *true stress*, em língua inglesa.

Adicionalmente, os mesmos autores propuseram a substituição de σ_2 por σ_{2a} no 2º membro da 1ª equação de (3.18), resultando numa aproximação mais precisa para σ_2, definida por

$$\sigma_2 \approx \sigma_{0.2} + \left(\sigma_1 - \sigma_{0.2}\right) A^{1/n_2} \left[1 - \frac{\left(1/E_{0.2} - 1/E\right)\sigma_{2a}}{B}\right]^{1/n_2} \quad , \quad (3.20)$$

a qual é adoptada neste trabalho e onde $E_{0.2}$, σ_1 e n_2 são determinados por (3.15)-(3.16).

Como será referido no capítulo 4 – secção 4.3, os valores do módulo de endurecimento (h) e tensão de cedência (σ^{y}) em função do parâmetro de endurecimento (κ), são conseguidos por interpolação linear de valores de uma base de dados, a qual é criada a partir de uma gama de extensões igualmente espaçadas $\varepsilon^{y}_{0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u$ – uma vez que (3.14) não permite o cálculo directo das tensões correspondentes, essas são determinadas pela relação inversa proposta por *Abdella et al.* (*2011*) e posteriormente introduzidas em (3.14) para obter as extensões da base de dados. A relação inversa proposta por *Abdella et al.* (*2011*) é definida por (tensões e deformações em valor absoluto)

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{E\varepsilon\left(1 + D\,\varepsilon_r^{Q}\right)}{1 + C\,\varepsilon_r^{P} + D\,\varepsilon_r^{Q}} & , \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{0.2} \\ \sigma_{0.2} + \dfrac{E_{0.2}\varepsilon_*\left(1 + d\,\varepsilon_{*r}^{q}\right)}{1 + c\,\varepsilon_{*r}^{p} + d\,\varepsilon_{*r}^{q}} & , \quad \varepsilon_{0.2} < \varepsilon \leq \varepsilon_2 \\ \dfrac{a + b\varepsilon}{1 \pm \varepsilon} & , \quad \varepsilon_2 < \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad , \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_{0.2}, \quad \varepsilon_* = \varepsilon - \varepsilon_{0.2}, \quad \varepsilon_{*j} = \varepsilon_j - \varepsilon_{0.2}, \quad \varepsilon_{*r} = \varepsilon_*/\varepsilon_{*1}, \quad \varepsilon_{*2r} = \varepsilon_{*2}/\varepsilon_{*1}$$

$$\varepsilon_{0.2} = 0.002 + \sigma_{0.2}/E, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{0.2} + \sigma_{*1}/E_{0.2} + \varepsilon_{*2p}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{0.2} + \sigma_{*2}/E_{0.2} + \varepsilon_{*2p}\left(\frac{\sigma_{*2}}{\sigma_{*1}}\right)^{n_2}$$

$$G_0 = \frac{0.002E}{\sigma_{0.2}}, \quad G_1 = \frac{\varepsilon_{0.2}E_{0.2}\left(n-1\right)}{\sigma_{0.2}}, \quad B_1 = \frac{G_1E_{0.2}\left(n+G_0\right)}{E}, \quad B_2 = \frac{G_1^3 n}{\left(n-1\right)^2}$$

$$\Delta = \frac{1 + \sqrt{1 + 4B_2}}{2}, \quad Q = 1 + \frac{B_1}{\Delta}, \quad P = \Delta + G_1, \quad D = \frac{\Delta}{Q - \Delta} > 0, \quad C = G_0\left(1 + D\right) \quad , \quad (3.22)$$

$$H_0 = \frac{\varepsilon_{*2p}E_{0.2}}{\sigma_{*1}}, \quad H_1 = \frac{\left(n_2 - 1\right)\left(H_0 + 1\right)}{1 + n_2H_0}, \quad H_2 = \frac{\varepsilon_{*2}E_{0.2}}{\sigma_{*2}} - 1, \quad p = 1 + H_1$$

$$A_2 = \frac{\left(n_2 - 1\right)^2\left(H_2 - H_0\right)}{\left(1 + n_2H_0\right)\left(1 + n_2H_2\right)}, \quad q = p + \frac{1}{\ln\left(\varepsilon_{*2r}\right)}\left[\ln\left(1 + A_2\right) + \ln\left(\frac{H_0}{H_2}\right)\right] > 1$$

$$d = \frac{1}{q - 1}, \quad c = H_0\left(1 + d\right)$$

onde (i) o sinal superior da expressão do 3º troço de (3.21) é relativo ao comportamento à tracção e o inferior à compressão, (ii) as expressões ε_1 e ε_2 são obtidas de (3.14) para σ_1 e σ_2, respectivamente, de modo a garantir que (3.21) coincida com essa curva nesses pontos[19], e (iii) todas as variáveis não definidas em (3.22) são calculadas através de (3.15)-(3.20). Como forma de validação, *Abdella et al.* (*2011*) compararam (3.21) com as inversões numéricas de (3.14) para as curvas experimentais obtidas por *Rasmussen* (*2003*) e *Gardner e Nethercot* (*2004a*). Os mesmos autores constataram que as maiores diferenças foram obtidas até extensões de cerca de 2% (onde ocorrem os maiores gradientes), nunca excedendo os 4% em todo o domínio.

Por último, sendo o cálculo do módulo de endurecimento (h) do material dependente do gradiente $d\varepsilon/d\sigma$, como se verá no próximo capítulo (secção 4.4), julga-se conveniente apresentar esse gradiente relativamente a (3.14), vindo

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma}=\begin{cases}\dfrac{1}{E}+0.002\,n\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_{0.2}}\right)^{n-1}\dfrac{1}{\sigma_{0.2}} & , \quad 0\le\sigma\le\sigma_{0.2}\\[2ex] \dfrac{1}{E_{0.2}}+\varepsilon_{*2p}\,n_2\left(\dfrac{\sigma_*}{\sigma_{*1}}\right)^{n_2-1}\dfrac{1}{\sigma_{*1}} & , \quad \sigma_{0.2}<\sigma\le\sigma_2\\[2ex] \dfrac{b\mp\sigma\pm(\sigma-a)}{(b\mp\sigma)^2} & , \quad \sigma_2<\sigma\le\sigma_u\end{cases}\quad , \qquad (3.23)$$

onde os sinais superiores que figuram no 3º troço dizem respeito ao comportamento à tracção, e os inferiores ao comportamento à compressão.

3.2.5.1 A tensão de cedência inicial

Como mencionado anteriormente, os aços inoxidáveis não exibem uma transição bem definida entre os regimes elástico e elasto-plástico, sendo a tensão limite de proporcionalidade a 0.2% ($\sigma_{0.2}$) habitualmente tomada como tensão de cedência em regras de dimensionamento (*e.g.*, *CEN 2006a*). No entanto, segundo *Johansson e Olsson* (*2000*) e *Wu* (*2005*)[20] não é viável tomar essa tensão em estudos numéricos para definir a cedência inicial (carregamento inicial), independentemente do modelo constitutivo adoptado. Como alternativa, esses autores propoem a utilização do limite de

19 Apesar de (3.14) garantir $\varepsilon=\varepsilon_{0.2}$ quando $\sigma=\sigma_{0.2}$, o mesmo não acontece quando $\sigma=\sigma_1$ e $\sigma=\sigma_2$. A continuidade entre troços das relações (3.14) e (3.21) foi numericamente assegurada na implementação computacional.

20 Segundo *Wu* (*2005*), o limite elástico (ou tensão de cedência) e a tensão limite de proporcionalidade dos metais são experimentalmente indistinguíveis.

proporcionalidade, o que significa que o comportamento elástico do material é assumido linear. Na verdade, vários investigadores (*e.g.*, *Ellobody e Young 2005*, *Lecce e Rasmussen 2006a*, *Becque e Rasmussen 2009*, *Hassanein 2010*) têm utilizado com sucesso essa recomendação, tendo sido por isso adoptada neste trabalho – a tensão limite de proporcionalidade a 0.01% ($\sigma_{0.01}$) é considerada como tensão de cedência inicial, valor usualmente encontrado na literatura (*e.g.*, *Lecce e Rasmussen 2006a*, *Becque e Rasmussen 2009*, *Hassanein 2010*). De acordo com (3.15), a tensão $\sigma_{0.01}$ pode ser calculada através de

$$\sigma_{0.01} = e^{\ln(\sigma_{0.2}) - \frac{\ln(20)}{n}} \quad . \quad (3.24)$$

3.3 Conclusões

Tendo em vista analisar o comportamento de elementos estruturais de aço, apresentam-se neste capítulo os modelos adoptados para simular o comportamento uniaxial do aço carbono e do aço inoxidável. Importa salientar que há diferenças evidentes entre o comportamento mecânico de ambos os materiais, tais como o facto de os aços inoxidáveis (i) não apresentarem um patamar de cedência bem definido e exibirem uma relação σ-ε significativamente não linear, e (ii) serem caracterizados por um maior endurecimento após a cedência, até níveis elevados de ductilidade (tornando-os mais adequados para desempenho anti-sísmico). Optou-se pela típica lei bi-linear para modelar o aço carbono (com ou sem endurecimento) e pela relação não linear (ε-σ) proposta por *Quach et al.* (*2008*) para simular o aço inoxidável. Esta última, (i) é válida para o comportamento à tracção/compressão até à extensão última de qualquer tipo de aço inoxidável (austenítico, ferrítico ou duplex), e (ii) depende apenas dos 3 parâmetros básicos de *Ramberg-Osgood* (E, $\sigma_{0.2}$, n). Estes autores mostraram, por comparação com resultados experimentais, que a relação por eles desenvolvida tem uma elevada precisão até níveis elevados de deformação, tendo superado a qualidade da função proposta por *Rasmussen* (*2003*), a única que até então dependia de apenas 3 parâmetros. Foi também apresentada uma óptima aproximação da função inversa $\sigma - \varepsilon$, proposta por *Abdella et al.* (*2011*), a qual foi útil na implementação do modelo de plasticidade descrito no Capítulo 4. Esta permitiu, por exemplo, a criação de uma base de dados para determinação dos valores do módulo de endurecimento e tensão de cedência em função do parâmetro de endurecimento. Como mencionado anteriormente, os aços inoxidáveis não exibem uma transição bem definida entre os regimes elástico e elasto-plástico, sendo a tensão limite de proporcionalidade a 0.2% ($\sigma_{0.2}$) habitualmente tomada como tensão de cedência em regras de dimensionamento (*e.g.*, *CEN 2006a*). No entanto, segundo *Johansson e Olsson* (*2000*) não é viável tomar essa tensão em estudos numéricos, e como alternativa propuseram a utilização do limite de proporcionalidade. Deste modo, decidiu-se assumir o comportamento elástico do aço inox como linear, e a tensão limite de proporcionalidade a 0.01% ($\sigma_{0.01}$) foi adoptada como tensão de cedência inicial – trata-se de um valor usualmente encontrado na literatura (*e.g.*, *Lecce e Rasmussen 2006a*, *Becque e Rasmussen 2009*, *Hassanein 2010*).

Capítulo 4

Teoria de Escoamento J_2

4.1 Superfície de cedência

A teoria de escoamento J_2 (*e.g., Chen e Han 1988,* Wu *2005, De Borst et al. 2012*) baseia-se no critério de cedência de *von Mises*, o qual é (i) válido para materiais isotrópicos e simétricos[1], e (ii) frequentemente adoptado para simular o comportamento de metais (ver secção 1.2 do Capítulo 1), vindo para um estado tri-dimensional de tensão

$$f(\sigma,\kappa) = F(\sigma) - \sigma^{y}(\kappa) = 0$$
$$F(\sigma) = \sqrt{-3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_{xx}-\sigma_{ss}\right)^2 + \left(\sigma_{ss}-\sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{xx}-\sigma_{zz}\right)^2\right) + 3\sigma_{xs}^2 + 3\sigma_{xz}^2 + 3\sigma_{sz}^2} \quad , \quad (4.1)$$

onde (i) f é uma função de cedência (i_1) baseada na hipótese de independência da pressão hidrostática, e (i_2) dependente do 2º invariante do tensor das tensões deviatórico, J_2, o qual está relacionado com as tensões principais de corte do tensor das tensões[2], (ii) $F(\sigma)$ é a tensão de *von Mises* e (iii) $\sigma^{y}(\kappa)$ é a tensão de cedência como função do parâmetro de endurecimento κ (escalar) – *p.e.*, obtida a partir da lei constitutiva uniaxial (ver secção 4.3)[3]. A representação de

1 Por simplicidade, daqui em diante o termo "isotrópico" será utilizado para caracterizar um material cujo comportamento seja isotrópico (independente da direcção) e também simétrico (igual à tracção e à compressão).

2 Segundo *Wu* (*2005*), a cedência inicia-se quando a energia elástica de distorção ultrapassar um valor limite.

3 As componentes de tensão e deformação que envolvam a direcção da espessura das paredes da secção (z) são consideradas nulas na GBT, hipótese subjacente na restante formulação apresentada neste capítulo.

(4.1) no espaço das tensões principais (Fig. 4.1(a)) resulta numa superfície de cedência cilíndrica de raio $\sigma^y(\kappa)\ \sqrt{2/3}$ (*Christensen 2006*), cujo interior define o domínio elástico. Importa também referir que este critério permite, para certas trajectórias de tensão, que as componentes de tensão normal (σ_{xx}, σ_{ss}, σ_{zz}) excedam a tensão de cedência sem que o material plastifique – *p.e.*, a trajectória σ indicada na Fig. 4.1(b) intersecta a linha de cedência para $\sigma_1 > \sigma^y(\kappa)$. Ao invés, basta alguma componente de corte (σ_{xs}, σ_{xz}, σ_{sz}) igualar a tensão de cedência ao corte puro[4] ($\sigma^y(\kappa)/\sqrt{3}$), para que o vector tensão intersecte a superfície de cedência $f(\sigma, \kappa)=0$.

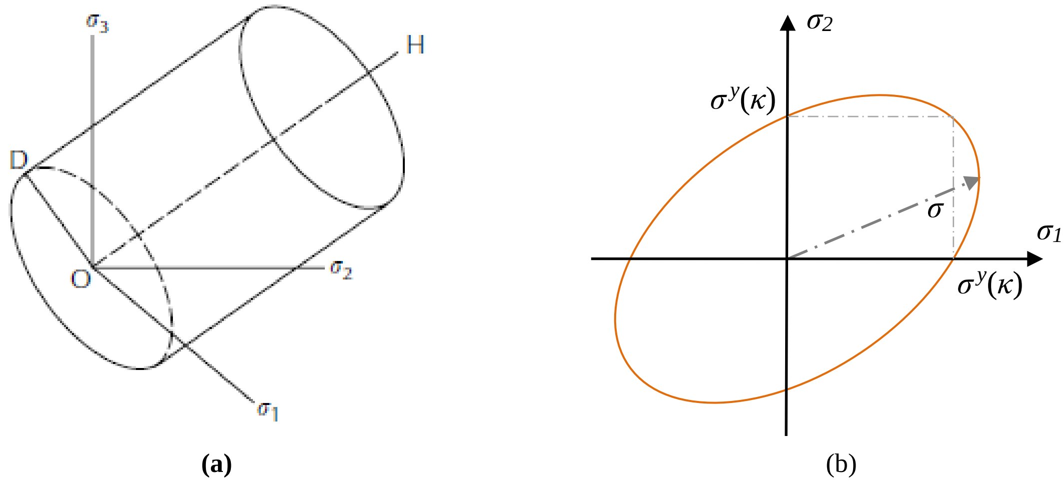


Fig. 4.1. Representação da superfície de cedência de *von Mises* no espaço das tensões principais: (a) 3D e (b) no plano σ_3=0.

4.2 Regra de escoamento

A regra de escoamento define o incremento (infinitesimal) de deformação plástica a que um ponto material genérico sobre a superfície de cedência pode estar sujeito. Uma regra frequentemente utilizada para metais (com ou sem endurecimento) é definida pela equação *Prandtl-Reuss* (*Wu 2005*)

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^e_{ij} + d\varepsilon^p_{ij}\ , \qquad d\varepsilon^p_{ij} = d\mu \left.\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{\sigma}\ , \quad d\mu \geq 0 \qquad , \quad (4.2)$$

onde (i) $d\varepsilon$, $d\varepsilon^e$ e $d\varepsilon^p$ são o vector incremento de deformação e correspondentes parcelas elástica e plástica, respectivamente, (ii) $d\mu$ é um factor (escalar) de proporcionalidade[5], (iii) f é a função de cedência, (iv) o vector σ contém os valores das componentes de tensão nesse ponto material e (v) ∂f

4 Obtida ao introduzir σ_{mn}=0 ($mn \neq xs$) em (4.1).

5 Como se poderá concluir através da formulação apresentada neste capítulo, é indiferente o valor de μ associado à superfície de cedência inicial, adoptando-se por simplicidade μ=0.

$/ \partial\sigma$ denomina-se vector gradiente, é normal à superfície de cedência em σ e aponta no sentido exterior, definido assim a direcção e sentido de $d\varepsilon^p$ – trata-se, por isso, de uma regra de escoamento associada. Apesar de ter sido validada experimentalmente por vários autores (*e.g.*, *Ohashi et al. 1975*, *Philips e Moon 1977*) para superfícies de cedência iniciais e subsequentes, e de ser frequentemente utilizada com sucesso na modelação de metais, esta regra não permite simular adequadamente o comportamento de materiais como solos ou betão (*De Borst et al. 2012*).

A análise de (4.2) permite ainda concluir que $d\varepsilon^p_{ii}=0$ se f for dada por (4.1), ou seja, o material exibe incompressibilidade plástica[6] – hipótese fundamental das teorias de escoamento aplicadas a materiais metálicos (*Wu 2005*). Por último, há que estabelecer um critério para definir se um ponto material sofre escoamento plástico quando sujeito a um incremento de deformação $\Delta\varepsilon$. Nesse sentido, considere-se um ponto genérico que no instante j (vector tensão σ_j) se localiza sobre a superfície de cedência $f(\sigma, \kappa) = 0$ ou na respectiva região elástica. Calculando $f_e = f(\sigma=\sigma_j+D^e\Delta\varepsilon, \kappa)$, onde $D^e\Delta\varepsilon$ é uma variação elástica de tensão, conclui-se que $\Delta\varepsilon$ conduz a escoamento plástico ($\Delta\mu > 0$) se e só se $f_e > 0$ – caso contrário, o incremento de deformação ocorre totalmente em regime elástico.

4.3 Matriz constitutiva elasto-plástica

Pretende-se agora derivar a relação $d\sigma$-$d\varepsilon$ num ponto (i) sobre a superfície de cedência $f(\sigma, \kappa)=0$ e (ii) sujeito a uma variação infinitesimal de deformação plástica ($d\mu>0$). Este tipo de relação é bastante útil, por exemplo na formulação de métodos que estimam as tensões e parâmetro de endurecimento em pontos sujeitos a deformação plástica (abordado na secção 4.5). Seguidamente derivam-se duas relações $d\sigma$-$d\varepsilon$ possíveis, baseadas respectivamente nas matrizes constitutivas elasto-plásticas (i) convencional ($d\sigma = D^{ep}d\varepsilon$) e (ii) consistente ($d\sigma = D^{ep*}d\varepsilon$). É reconhecido (*De Borst et al. 2012*) que a utilização de D^{ep*} em detrimento de D^{ep} num método incremental-iterativo do tipo *Newton-Raphson* (*N-R*) (determinação da matriz de rigidez tangente), permite melhorar significativamente a sua eficiência computacional (reduz o número de iterações).

6 A variação relativa de volume de um elemento infinitesimal de um corpo, com volume inicial dV_i e sujeito a deformação, é dada por $(dV_f - dV_i)/ dV_i = (1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{yy})(1+\varepsilon_{zz}) - 1 \approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{ii}$.

4.3.1 Matriz constitutiva convencional

Defina-se a equação de consistência de *Prager* (*De Borst et al. 2012*), válida para qualquer ponto nas condições supracitadas,

$$df = f\left(\sigma + d\sigma, \kappa + d\kappa\right) - f\left(\sigma, \kappa\right) = \left.\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right|_{\sigma,\kappa} d\sigma_{ij} - h\, d\mu = 0 \qquad , \quad (4.3)$$

onde h se denomina módulo de endurecimento e é definido por

$$h = -\frac{1}{d\mu}\left.\frac{\partial f}{\partial \kappa}\right|_{\sigma,\kappa} d\kappa, \quad h \geq 0 \qquad , \quad (4.4)$$

sendo nulo para materiais que não exibam endurecimento (perfeitamente-plásticos). Enquanto que (i) nesse caso (h=0), (4.3) traduz a ortogonalidade entre os vectores gradiente ($\partial f / \partial \sigma$) e incremento de tensão ($d\sigma$), ou seja, o último é tangente à superfície de cedência no ponto (σ, κ), (ii) no caso de materiais com endurecimento (h>0), $d\sigma$ é secante à superfície de cedência e aponta no sentido exterior da mesma.

Uma vez que no presente trabalho apenas se pretende considerar materiais que exibam resposta linear em regime elástico, este pressuposto está subjacente daqui em diante. Como tal, a relação σ-ε^e em regime elástico ou elasto-plástico é definida por

$$\sigma = D^e \varepsilon^e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^e_{xx} \\ \varepsilon^e_{ss} \\ \gamma^e_{xs} \end{bmatrix} = D^e\left(\varepsilon - \varepsilon^p\right) \qquad , \quad (4.5)$$

onde D^e é a matriz constitutiva elástica utilizada na GBT. Ao aplicar o operador diferencial a ambos os membros e tirando partido da regra de escoamento (4.2), obtém-se (*De Borst et al. 2012*)

$$d\sigma = D^e\left(d\varepsilon - d\varepsilon^p\right) = D^e\left(d\varepsilon - d\mu \left.\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right|_{\sigma}\right) \qquad . \quad (4.6)$$

Ao (i) multiplicar ambos os membros por $[(\partial f / \partial \sigma)|_\sigma]^T$ e (ii) aplicar (4.3), obtém-se

$$\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right|_{\sigma}\right)^T d\sigma = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right|_{\sigma}\right)^T D^e d\varepsilon - \left(\left.\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right|_{\sigma}\right)^T D^e d\mu \left.\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right|_{\sigma} = h\, d\mu \qquad , \quad (4.7)$$

a qual pode ser reescrita em ordem a $d\mu$, e a respectiva expressão inserida em (4.6) de modo a obter a relação $d\sigma$-$d\varepsilon$, obtendo-se

$$d\mu = \frac{n^T D^e d\varepsilon}{n^T D^e n + h}, \quad d\sigma = D^e d\varepsilon - D^e n\, d\mu = D^{ep} d\varepsilon, \quad D^{ep} = \left(D^e - \frac{D^e n\, n^T D^e}{n^T D^e n + h} \right)\Bigg|_{\sigma,\kappa}$$

$$n = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ss}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{xs}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2F(\sigma)} \begin{bmatrix} 2\sigma_{xx} - \sigma_{ss} \\ 2\sigma_{ss} - \sigma_{xx} \\ 6\sigma_{xs} \end{bmatrix}, \quad F(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{xx} - \sigma_{ss}\right)^2 + \sigma_{xx}^2 + \sigma_{ss}^2 \right] + 3\sigma_{xs}^2} \quad , \quad (4.8)$$

onde (i) n é o vector gradiente (particularizado para o critério de cedência de *von Mises*) e (ii) D^{ep} a matriz Jacobiana $d\sigma/d\varepsilon$ (simétrica), frequentemente designada por matriz constitutiva elasto-plástica convencional.

4.3.2 Matriz constitutiva consistente

Considere-se agora $\Delta\sigma = \sigma_j - \sigma_{j-1}$ resultante da imposição do incremento elasto-plástico $\Delta\varepsilon = \varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}$, onde o instante (i) *j-1* diz respeito à configuração de equilíbrio anteriormente determinada pela estratégia incremental-iterativa (abordada no Capítulo 5), e (ii) j diz respeito ao ponto genérico da superfície de cedência onde se pretende determinar a relação "consistente" $d\sigma$-$d\varepsilon$. Para esse efeito (*De Borst et al. 2012*), começe-se por aproximar $\Delta\sigma$ através da expressão

$$\Delta\sigma = D^e \Delta\varepsilon - \Delta\mu D^e n_j, \quad \Delta\mu = \mu_j - \mu_{j-1} \quad , \quad (4.9)$$

a qual foi baseada em (4.8) com excepção do ponto em que o vector gradiente (n_j) é calculado, o qual passa a ser (σ_j, κ_j) em vez de (σ_{j-1}, κ_{j-1}). Aplique-se agora o operador diferencial a ambos os membros da equação, vindo (note que $d\Delta\varepsilon = d\varepsilon_j$ e $d\Delta\mu = d\mu_j$)

$$d\sigma_j = d(\sigma_{j-1} + D^e \Delta\varepsilon - \Delta\mu D^e n_j)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d\sigma_j = D^e d\varepsilon_j - d\mu_j D^e n_j - \Delta\mu D^e \frac{\partial n}{\partial \sigma}\bigg|_j d\sigma_j - \Delta\mu D^e \frac{\partial n}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial(\Delta\mu)}\bigg|_j d\mu_j \quad , \quad (4.10)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d\sigma_j = H_j \left(d\varepsilon_j - d\mu_j \bar{n}_j \right)$$

onde j é um índice livre, e H_j (matriz simétrica) e $\bar{n}_j$ são dados por

$$H_j = \left(X\big|_j \right)^{-1} D^e, \quad X = I + \Delta\mu D^e \frac{\partial n}{\partial \sigma}, \quad \bar{n}_j = n_j + \Delta\mu \frac{\partial n}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \mu}\bigg|_j \quad , \quad (4.11)$$

obtendo-se para o critério de cedência de *von Mises* (ver definição de $n = [n_1, n_2, n_3]^T$ em (4.8))

$$\frac{\partial n}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_{ss}} & \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_{xs}} \\ \frac{\partial n_2}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial n_2}{\partial \sigma_{ss}} & \frac{\partial n_2}{\partial \sigma_{xs}} \\ \frac{\partial n_3}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial n_3}{\partial \sigma_{ss}} & \frac{\partial n_3}{\partial \sigma_{xs}} \end{bmatrix} = \frac{1}{F(\sigma)} \begin{bmatrix} 1-n_1^2 & -\left(1/2+n_1 n_2\right) & -n_1 n_3 \\ -\left(1/2+n_1 n_2\right) & 1-n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & 3-n_3^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{n}_j = n_j \,. \quad (4.12)$$

Por fim, ao impor em (4.10) que o incremento $d\sigma_j$ verifique a equação de consistência (4.3), obtém-se a relação $d\sigma$-$d\varepsilon$ "consistente"

$$d\sigma = \underbrace{\left(H - \frac{H\, n\, n^T H}{n^T H\, n + h} \right)\Bigg|_{\sigma_j, \kappa_j}}_{D^{ep*}} d\varepsilon \quad , \quad (4.13)$$

onde D^{ep*} é a matriz constitutiva elasto-plástica consistente (simétrica). Ao comparar esta matriz com a convencional (D^{ep}) definida em (4.8), constata-se que seriam idênticas se H=D^e. No entanto, como se pode observar em (4.11), a matriz H depende também de propriedades elasto-plásticas, facto responsável pelo aumento da eficiência computacional referido no início desta secção.

4.4 Endurecimento isotrópico

Pretende-se agora definir o parâmetro de endurecimento (escalar) κ e tensão de cedência $\sigma^y(\kappa)$ que figuram no critério de *von Mises* (4.1), através dos quais é possível calcular o módulo de endurecimento definido em (4.4). A determinação do incremento infinitesimal $d\kappa$ é frequentemente baseada em uma de duas hipóteses existentes na literatura (*De Borst et al. 2012*), denominadas (i) endurecimento por dissipação de energia[7] e (ii) endurecimento por deformação[8] , traduzindo-se respectivamente por

$$d\kappa = \sigma^T d\varepsilon^p \quad \text{ou} \quad d\kappa = \frac{\sigma^T d\varepsilon^p}{\sigma^y(\kappa)} \quad , \quad (4.14)$$

$$d\kappa = \sqrt{\frac{2}{3}\left(d\varepsilon^p\right)^T d\varepsilon^p} \quad . \quad (4.15)$$

7 *Work-hardening*, na língua inglesa.
8 *Strain-hardening*, na língua inglesa.

Estas expressões são independentes da orientação do volume infinitesimal (ponto material) em causa. Neste trabalho, optou-se por utilizar a segunda expressão de (4.14), frequentemente adoptada na modelação de materias metálicos (*De Borst et al. 2012*). Tirando partido da regra de escoamento (4.2) aplicada ao critério de *von Mises*, tem-se

$$d\kappa = \frac{d\mu}{\sigma^y(\kappa)}\sigma n = \frac{d\mu}{\sigma^y(\kappa)}F(\sigma) \quad , \quad (4.16)$$

onde n é o vector gradiente e $F(\sigma)$ está definida em (4.1). Pelo facto de $d\kappa$ se referir a um ponto sobre a superfície de cedência, tem-se $F(\sigma)=\sigma^y(\kappa)$ (ver (4.1)) e consequentemente

$$d\kappa = d\mu \quad . \quad (4.17)$$

A consideração desta relação permite simplificar a expressão do módulo de endurecimento definida em (4.4), obtendo-se

$$h = -\left.\frac{\partial f}{\partial \kappa}\right|_{\sigma,\kappa} = \left.\frac{d\sigma^y(\kappa)}{d\kappa}\right|_{\kappa} \quad . \quad (4.18)$$

Sendo $\sigma^y(\kappa)$ uma função independente do estado de tensão, a aplicação de (4.2) para o estado uniaxial $\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{ss}, \sigma_{xs}) = (\sigma, 0, 0)$ permite concluir que

$$d\varepsilon_{xx}^p = d\kappa = d\mu \quad , \quad (4.19)$$

obtendo-se para um estado de tensão genérico[9]

$$h = \left.\frac{d\sigma^y}{d\varepsilon_{xx}^p}\right|_{\varepsilon_{xx}^p=\kappa=\mu} \quad , \quad (4.20)$$

sendo $\sigma^y \equiv \sigma^y(\varepsilon^p_{xx})$ a relação uniaxial entre a tensão de cedência e a extensão plástica[10]. Uma vez que as leis uniaxiais encontradas na literatura relacionam tensão com extensão total, é conveniente derivar uma expressão equivalente a (4.20) que dependa apenas da relação $\sigma(\varepsilon)$ ou $\varepsilon(\sigma)$. Seja ε^y_0 a extensão total correspondente à tensão de cedência inicial dessa relação, o incremento de tensão de cedência num ponto genérico $\varepsilon \geq \varepsilon^y_0$ é dado por

9 Adopta-se, sem perda de generalidade, um valor inicial nulo para κ (à semelhança de μ), originando $\varepsilon^p_{xx}=\mu=\kappa$.

10 Daqui em diante, a extensão determinada num ensaio uniaxial passará a designar-se ε em vez de ε_{xx}.

Nos casos em que o comportamento à tracção e à compressão não forem exactamente iguais e, caso se pretenda aplicar este modelo, sugere-se que o mesmo seja baseado na curva à compressão pelo facto do comportamento de perfis de parede fina ser frequentemente dominado por fenómenos de instabilidade.

$$d\,\sigma^y = \left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\geq\varepsilon_0^y} d\,\varepsilon, \qquad d\,\varepsilon\big|_{\varepsilon\geq\varepsilon_0^y} = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{d\sigma^y}{E} + d\varepsilon^p \quad , \quad (4.21)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. Após simples manipulação algébrica para obter uma expressão equivalente a (4.20), tem-se

$$h = \frac{g_{\sigma-\varepsilon}}{1 - g_{\sigma-\varepsilon}/E}, \quad g_{\sigma-\varepsilon} = \left.\frac{d\,\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\geq\varepsilon_0^y} \quad , \quad (4.22)$$

onde ε é a extensão total cuja parcela plástica vale $\varepsilon^p=\kappa=\mu$, valor conhecido em qualquer instante e ponto material através dos métodos a abordar na secção 4.5. Uma vez que a relação $\varepsilon^p(\varepsilon)$ é não linear no caso geral de um material com endurecimento isotrópico arbitrário (ver (4.21)), o valor pretendido $\varepsilon(\varepsilon^p=\kappa)$ só pode ser obtido com recurso a um método numérico (*e.g.*, *N-R*). Para evitar este elevado custo computacional, a solução adoptada consiste na construção (antes do início da estratégia incremental-iterativa) de uma base de dados (matriz) que guarde, para uma vasta gama de extensões $\varepsilon^y{}_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u$ (intervalos $\Delta\varepsilon$=1x10^{-6}), os valores correspondentes da (i) tensão de cedência σ^y [11], (ii) deformação plástica ($\varepsilon^p = \varepsilon - \sigma^y/E \geq 0$) e (iii) módulo de endurecimento h – valores de $\sigma^y(\kappa)$ e $h(\kappa)$ não existentes na matriz são obtidos por interpolação linear.

O caso mais simples de endurecimento de um material traduz-se na lei bi-linear ilustrada na Fig. 3.2 do Capítulo 3, caracterizada por (i) um módulo de endurecimento constante dado por

$$h = \frac{E_t}{1 - E_t\,/\,E} \quad , \quad (4.23)$$

obtido ao igualar $g_{\sigma\text{-}\varepsilon}$ a E_t em (4.22), e (ii) uma tensão de cedência $\sigma^y(\kappa) = \sigma^y{}_0 + h\,\kappa$ (relembrar (4.18)) – este cenário dispensa a utilização da base de dados referida no parágrafo anterior.

4.5 Métodos explícitos e implícitos de integração numérica

Uma etapa fundamental em análises elasto-plásticas diz respeito à integração numérica das relações constitutivas incrementais com o objectivo de determinar as variações de tensão ($\Delta\sigma$) e do parâmetro de endurecimento ($\Delta\kappa$) em todos os pontos materiais (pontos de integração de Gauss) que sofram escoamento plástico quando sujeitos a uma variação de deformação $\Delta\varepsilon$ (condição para que ocorra deformação plástica está especificada na secção 4.2). Os métodos mais utilizados na

11 Em modelos $\sigma(\varepsilon)$ que sejam não lineares em todo o domínio, $\varepsilon^y{}_0$ deverá corresponder ao ponto da curva escolhido para aproximar o limite de proporcionalidade (tensão de cedência inicial).

literatura podem ser classificados em explícitos ou implícitos[12] – em relação aos últimos, deve-se alertar para o facto de a utilização do método de *N-R* poder causar problemas de convergência no caso de superfícies de cedência que exibam vértices e/ou gradientes de curvatura elevados (*Sloan et al. 2001*). Relativamente aos métodos explícitos, e embora tenham um domínio de aplicação muito vasto, devem ser utilizados com algum cuidado uma vez que não garantem (ao contrário dos implícitos) que a solução satisfaça a condição de cedência para uma tolerância (*TOL*) pré-definida, ou seja, que $|f| \leq TOL$. De acordo com *Sloan et al.* (*2001*), tanto a precisão como a eficiência dos métodos explicitos podem ser significativamente melhoradas ao adoptar estratégias de (i) sub-incrementação da deformação, (ii) correcção da solução final tal que $|f| \leq TOL$, e ainda (iii) controlo do erro – as duas primeiras recomendações foram implementadas neste trabalho e serão abordadas na sub-secção 4.5.4.

Os métodos de *Euler* Progressivo (explícito) e Regressivo (implícito)[13] são os mais populares em problemas elastoplásticos. Pertencem a uma família de métodos cujo objectivo é calcular a solução na configuração $t + \Delta t$ com base na solução na configuração $t + \alpha\Delta t$ ($0 \leq \alpha \leq 1$), sendo que (i) t corresponde à iminência da ocorrência de cedência (inicial ou subsequente) e (ii) Δt reflecte a imposição do incremento elasto-plástico de deformação $\Delta\varepsilon^{ep}$ ($\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{e} + \Delta\varepsilon^{ep}$, onde $\Delta\varepsilon^{e}=0$ se o incremento elástico de tensão $D^{e}\Delta\varepsilon$, imposto ao estado inicial conhecido (σ_j, κ_j), não cruzar a região elástica da superfície de cedência correspondente) – os métodos progressivo e regressivo correspondem a $\alpha=0$ e $\alpha=1$, respectivamente. No entanto, há métodos propostos na literatura que adoptam valores de α intermédios, como $\alpha=1/2$, valor usado no método da Normal Média[14]. Note-se ainda que os métodos definidos por $\alpha \geq 1/2$ são incondicionalmente estáveis[15]. Como resultado de uma avaliação cuidada por parte de vários autores, é sabido que para o critério de *von Mises* (*De Borst et al. 2012*), (i) o método de *Euler* Regressivo é especialmente preciso para incrementos de deformação maiores, enquanto que (ii) o método da Normal Média é o mais preciso de todos para menores incrementos. Estes factos conduziram à adopção destes dois métodos na realização das análises numéricas apresentadas nos capítulos 6 e 7 – a formulação dos três métodos de integração mencionados anteriormente é apresentada em 4.5.1-4.5.3. Antes

---

12 Os explícitos são baseados em variáveis conhecidas e, por isso, permitem obter as variáveis desconhecidas sem recorrer a qualquer processo iterativo. Ao invés, os métodos implícitos baseam-se em variáveis desconhecidas e envolvem a resolução numérica de um sistema de equações não lineares para cada ponto material.

13 Designados respectivamente por *Forward Euler* e *Backward Euler*, em língua inglesa

14 *Mean Normal*, em língua inglesa.

15 Um método deste tipo diz-se numericamente estável se os erros tenderem para zero ao fazer tender o incremento de deformação para zero (incondicionalmente estável se não depender do tamanho do incremento). Caso contrário, o método diz-se instável e tal resulta de erros de arredondamento.

de o fazer, convém distinguir os três cenários possíveis de ocorrência de deformação plástica num ponto caracterizado inicialmente por (σ_j, κ_j), tendo-se:

(I) $f(\sigma_j, \kappa_j)<0$ – ponto de tensão no interior (região elástica) da superfície de cedência $f(\sigma, \kappa_j)=0$;

(II) $f(\sigma_j, \kappa_j)=0$ e $n_j^T D^e \Delta\varepsilon<0$ – ponto de tensão sobre a superfície de cedência e variação elástica $D^e\Delta\varepsilon$ cruza a respectiva região elástica;

(III) $f(\sigma_j, \kappa_j)=0$ e $n_j^T D^e \Delta\varepsilon \geq 0$ – ponto de tensão sobre a superfície de cedência e variação elástica $D^e\Delta\varepsilon$ não cruza a respectiva região elástica.

Ao contrário do cenário (III), onde o incremento de deformação não tem qualquer parcela meramente elástica ($\Delta\varepsilon^e = 0$, $\Delta\varepsilon \equiv \Delta\varepsilon^{ep}$), nos cenários (I) e (II) tem-se $\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon^e+\Delta\varepsilon^{ep}$ e será útil definir qual o vector tensão (σ_C) que resulta da imposição do incremento elástico $\Delta\varepsilon^e=\beta\Delta\varepsilon$ ($0<\beta<1$), ou seja, qual o valor de β tal que $f(\sigma_C = \sigma_j + D^e\Delta\varepsilon^e, \kappa_j)=0$ – para o critério de cedência de *von Mises* tem-se

$$a\,\beta^2 + b\,\beta + c = 0, \quad \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a = \frac{1}{2}\left[A^2+B^2+C^2\right]+3D^2, \quad b = A\left(\sigma_{xx}\right)_j + B\left(\sigma_{ss}\right)_j + C\Delta\sigma_j^{xx-ss} + 6D\left(\sigma_{xs}\right)_j \quad , \qquad (4.24)$$

$$c = \left[F\left(\sigma_j\right)\right]^2 - \left[\sigma^y\left(\kappa_j\right)\right]^2, \quad \Delta\sigma_j^{xx-ss} = \left(\sigma_{xx}-\sigma_{ss}\right)_j$$

onde (i) $F(\sigma_j)$ e $\sigma^y(\kappa_j)$ são a tensão de *von Mises* e de cedência (ver (4.1)) no instante j, (ii) o sinal inferior em β (negativo) é para ser usado apenas quando $f(\sigma_j, \kappa_j) = 0$ ($c = 0$), e (iii) A-D são constantes dadas por

$$\begin{gathered} A=\left(\Delta\sigma_{xx}\right)_e, \quad B=\left(\Delta\sigma_{ss}\right)_e, \quad C=A-B, \quad D=\left(\Delta\sigma_{xs}\right)_e \\ \Delta\sigma_e = D^e\Delta\varepsilon = \left[\Delta\sigma_{xx} \quad \Delta\sigma_{ss} \quad \Delta\sigma_{xs}\right]_e^T \end{gathered} \quad . \qquad (4.25)$$

4.5.1 Método de Euler Progressivo

Com o objectivo de determinar as tensões (σ) e o parâmetro de endurecimento (κ) resultantes da imposição de um incremento de deformação ($\Delta\varepsilon$) que provoca escoamento plástico, considere-se o caso genérico ilustrado na Fig. 4.2, correspondente aos cenários (I) ou (II) anteriormente descritos. Nestes casos, um incremento elástico de tensão ($\Delta\sigma^e=D^e\Delta\varepsilon^e$) deve primeiramente ser imposto para "transferir" o ponto de tensão inicial (σ_j) até à superfície de cedência mais próxima, obtendo-se $\sigma=\sigma_C$. Posteriormente, a imposição do incremento elasto-plástico de tensão definido por este método ($\Delta\sigma^{ep}$) conduzirá à solução final (σ_{j+1}, $\kappa_{j+1}=\mu_{j+1}$). De outra perspectiva, pode-se afirmar que a variação de tensão que conduz à solução final é obtida por $\Delta\sigma = \Delta\sigma_{pre} + \Delta\sigma_{cor}$, onde $\Delta\sigma_{pre} = \Delta\sigma^e + \Delta\sigma_{c\text{-}e} = D^e\Delta\varepsilon$ é uma parcela elástica previsora, e $\Delta\sigma_{cor} = \sigma_{j+1} - \sigma_e$ constitui uma parcela correctora. Tirando partido da relação incremental (4.8), a estimativa da solução final obtida pelo método de *Euler* Progressivo é dada por

$$\begin{gathered}\sigma_{j+1} = \sigma_e + \Delta\sigma_{cor} = \sigma_e - \Delta\mu_c D^e n_c \\ \underbrace{\sigma_e = \sigma_j + D^e\Delta\varepsilon}_{\Delta\sigma_{pre}}, \quad \Delta\mu_c = \mu_{j+1} - \mu_j = \left.\left(\frac{n^T D^e \Delta\varepsilon^{ep}}{n^T D^e n + h}\right)\right|_{(\sigma_c,\kappa_j)}\end{gathered} \quad , \quad (4.26)$$

onde c é um índice livre e indica que o factor $\Delta\mu$ e o vector gradiente n são avaliados para (σ_c, κ_j) – ver Fig. 4.2. No caso de se estar perante o cenário (III), referido antes desta sub-secção, as expressões (4.26) mantêm-se válidas mas tem-se $\sigma_c \equiv \sigma_j$ e $\Delta\varepsilon \equiv \Delta\varepsilon^{ep}$.

Convém referir que para superfícies de cedência curvas (*e.g*, *von Mises*), o método de *Euler* apresentado só conduz a estimativas razoavelmente precisas (tais que a condição de cedência $f(\sigma_{j+1},\kappa_{j+1})=0$ não seja significativamente violada) se o incremento de deformação for suficientemente pequeno, condição necessária e suficiente para garantir a estabilidade numérica do método (*De Borst et al. 2012*). Com o intuito de melhorar a robustez e precisão do método, a sua implementação foi complementada com as técnicas de sub-incrementação e correcção descritas na sub-secção 4.5.4.

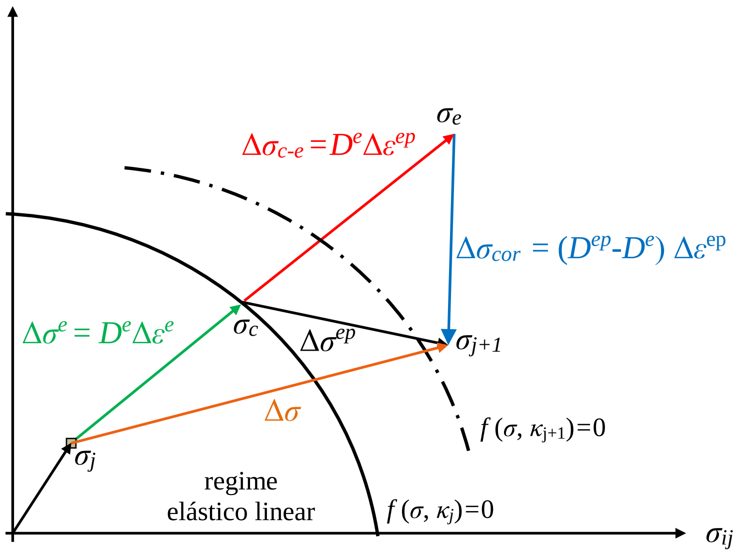


Fig. 4.2. Ilustração do método de *Euler* Progressivo (explícito).

4.5.2 Método de Euler Regressivo

Segundo *De Borst et al.* (*2012*), este método implícito é mais robusto (incondicionalmente estável) que o explícito anteriormente descrito. Relativamente à sua formulação, a relação (4.26) mantém-se válida com a seguinte diferença: todas as variáveis que eram avaliadas em (σ_c, κ_j) (grandezas conhecidas) passam a sê-lo em (σ_{j+1}, κ_{j+1}) (variáveis a determinar), obtendo-se

$$\begin{gathered}\sigma_{j+1} = \sigma_e + \Delta\sigma_{cor} = \sigma_e - \Delta\mu_{j+1} D^e n_{j+1} \\ \sigma_e = \sigma_j + D^e \Delta\varepsilon, \quad \Delta\mu_{j+1} = \mu_{j+1} - \mu_j\end{gathered} \quad , \quad (4.27)$$

onde se pode observar que o número de incógnitas (as 3 componentes de σ_{j+1} e μ_{j+1}) excede o número de equações (nº de componentes de σ_{j+1}) em uma unidade, pelo que tem de ser adicionada uma equação ao sistema. Segundo este método (ao contrário dos explícitos), essa equação permite garantir que a solução final satisfaça a condição de cedência, ou seja

$$f\left(\sigma_{j+1}, \mu_{j+1}\right) = 0, \quad \mu_{j+1} = \kappa_{j+1} \quad , \quad (4.28)$$

dando origem ao sistema de equações não-lineares

$$\left\{\begin{matrix} g\left(\sigma_{j+1}, \mu_{j+1}\right) \\ f\left(\sigma_{j+1}, \mu_{j+1}\right)\end{matrix}\right\} = 0, \quad g\left(\sigma_{j+1}, \mu_{j+1}\right) = \sigma_{j+1} - \sigma_{back}, \quad \sigma_{back} = \sigma_e - \left(\mu_{j+1} - \mu_j\right) D^e n_{j+1} \quad . \quad (4.29)$$

Para resolver este sistema, recorre-se ao método de *N-R* (ver anexo 4.A), segundo o qual a solução obtida no final da iteração *k* (σ^{k+1}_{j+1}, μ^{k+1}_{j+1}) é dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma^{k+1}_{j+1} \\ \mu^{k+1}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{k}_{j+1} \\ \mu^{k}_{j+1} \end{bmatrix} - \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial \sigma} & \dfrac{\partial g}{\partial \mu} \\ n^T & \dfrac{\partial f}{\partial \mu} \end{bmatrix}^{-1}\right|_{\left(\sigma^k_{j+1},\, \mu^k_{j+1}\right)} \begin{bmatrix} g\left(\sigma^k_{j+1}, \mu^k_{j+1}\right) \\ f\left(\sigma^k_{j+1}, \mu^k_{j+1}\right) \end{bmatrix} \quad , \quad (4.30)$$

onde os gradientes da matriz Jacobiana (4 x 4) para o critério de *von Mises* são definidos por

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = I + \left(\mu_{j+1} - \mu_j\right) D^e \frac{\partial n}{\partial \sigma}, \qquad \frac{\partial g}{\partial \mu} = D^e n, \qquad \frac{\partial f}{\partial \mu} = -h \quad , \quad (4.31)$$

sendo *I* a matriz identidade (3 x 3) e *h* o módulo de endurecimento (ver (4.22)). Como solução inicial (σ^1_{j+1}, μ^1_{j+1}), foram implementadas duas possibilidades: a solução obtida pelo (i) método de *Euler* Progressivo descrito anteriormente (adoptada na obtenção de resultados numéricos) ou (ii) Algoritmo de Retorno Radial (*Crisfield 1991*), sendo este último definido por

$$\sigma_{j+1} = \sigma_e - \Delta\mu\, D^e n_e, \quad \Delta\mu = \mu_{j+1} - \mu_j = \frac{f(\sigma_e, \kappa_j)}{n_e^{\,T} D^e n_e + h\left(\kappa_j\right)}, \quad n_e = \left.\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right|_{\sigma_e} \quad , \quad (4.32)$$

onde σ_e é dado por (4.27). Relativamente ao critério de convergência proposto para terminar o processo iterativo (4.30), tem-se[16]

$$\left\| \begin{array}{c} g\left(\sigma_{j+1}^{k+1}, \mu_{j+1}^{k+1}\right) \\ f\left(\sigma_{j+1}^{k+1}, \mu_{j+1}^{k+1}\right) \end{array} \right\|_2 \leq \varepsilon, \qquad 10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-3} \quad . \quad (4.33)$$

4.5.3 Método da Normal Média

A aplicação deste método requer uma primeira etapa que consiste em calcular, através de um dos métodos apresentados anteriormente, a solução (σ_α , $\kappa_\alpha = \mu_\alpha$) correspondente à imposição de parte do incremento de deformação. A fracção deste incremento deve ser tal que a parcela elasto-plástica original ($\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^{ep}$) seja reduzida a metade. Posteriormente, a solução final (σ_{j+1} , $\kappa_{j+1} = \mu_{j+1}$) é obtida de forma explícita com base em (σ_α , κ_α), ou seja (relembre a Eq. (4.26))

$$\begin{gathered} \sigma_{j+1} = \sigma_e + \Delta\sigma_{cor} = \sigma_e - \Delta\mu_\alpha D^e\, n_\alpha \\ \sigma_e = \sigma_j + D^e \Delta\varepsilon, \quad \Delta\mu_\alpha = \mu_{j+1} - \mu_j = \left.\left(\frac{n^T D^e \Delta\varepsilon^{ep}}{n^T D^e n + h}\right)\right|_{(\sigma_\alpha, \kappa_\alpha)} \end{gathered} \quad . \quad (4.34)$$

Importa ainda referir que a natureza explícita do método levou o autor a implementar a correcção desta solução de acordo com os algoritmos apresentados na secção seguinte.

4.5.4 Técnicas complementares – correcção e sub-incrementação

Com vista a melhorar a precisão e a eficiência dos métodos explícitos, *Sloan et al.* (*2001*) propuseram várias técnicas complementares, tendo sido implementadas a (i) sub-incrementação e (ii) correcção da solução final. Esta última deve ser aplicada sempre que a solução final (σ_{j+1}, κ_{j+1}) não satisfaça a condição de cedência para uma tolerância (*TOL*) especificada à priori, ou seja, $|f(\sigma_{j+1}, \kappa_{j+1})| > TOL$. Dos dois métodos correctivos implementados, designados Consistente e Normal, o primeiro é o que

16 No caso do critério não ser satisfeito, o processo iterativo é interrompido na verificação de pelo menos uma das seguintes condições: (i) a iteração corrente é a 10ª, (ii) $\mu^{k+1}_{j+1} < -0.001$ ou (iii) a norma apresentada em (4.33) aumenta face à iteração anterior. Neste cenário, a melhor solução entre as determinadas tal que $\mu_{j+1} > \mu_j$, será adoptada para prosseguir com a análise.

apresenta maior fiabilidade por garantir que o incremento de deformação imposto ($\Delta\varepsilon$), o qual originou a solução a corrigir, permaneça inalterado (consistente com o MEF). Por este motivo, o método Consistente é aplicado primeiro e impõe que

$$\begin{gathered}\sigma_{j+1} = \sigma_{j+1} + \delta\sigma, \quad \delta\sigma = -\delta\kappa D^e n_{j+1} \\ \kappa_{j+1} = \kappa_{j+1} + \delta\kappa, \quad \delta\kappa = \frac{f\left(\sigma_{j+1}, \kappa_{j+1}\right)}{n_{j+1}{}^T D^e n_{j+1} + h_{j+1}}\end{gathered} \quad , \quad (4.35)$$

onde (i) h_{j+1} e n_{j+1} são o módulo de endurecimento e vector gradiente avaliados em (σ_{j+1}, κ_{j+1}), e (ii) $\delta\sigma$ e $\delta\kappa$ são correcções a aplicar iterativamente até que $|f(\sigma_{j+1}, \kappa_{j+1})| \leq TOL$ seja satisfeita. Na eventualidade de surgir algum problema de convergência, o qual é identificado se a solução corrigida após alguma iteração for pior ($|f(\sigma_{j+1}, \kappa_{j+1})|$ maior) do que a solução não corrigida, o método Consistente deve ser abandonado e o processo correctivo reiniciado com base no método Normal. Este método assume que o parâmetro de endurecimento permanece inalterado ($\delta\kappa = 0$), sendo a correcção das tensões dada iterativamente por

$$\sigma_{j+1} = \sigma_{j+1} + \delta\sigma, \quad \delta\sigma = \frac{-f\left(\sigma_{j+1}, \kappa_{j+1}\right) n_{j+1}}{n_{j+1}{}^T n_{j+1}} \quad . \quad (4.36)$$

Relativamente ao critério de convergência usado em ambos os algorítmos Consistente e Normal, tem-se

$$\left| f\left(\sigma_{j+1}, \kappa_{j+1}\right) \right| \leq \varepsilon \ \min\left\{ F\left(\sigma_{j+1}\right), \sigma^y\left(\kappa_{j+1}\right) \right\}, \quad \varepsilon = 10^{-4} \text{ a } 10^{-3} \quad , \quad (4.37)$$

onde F e σ^y são as tensões de *von Mises* e de cedência, respectivamente. Segundo *Sloan et al.* (*2001*), ambos os algoritmos são robustos e eficientes (convergem tipicamente em 5 a 10 iterações)[17].

Por último, a técnica de sub-incrementação implementada consiste em (i) dividir o incremento de deformação elasto-plástico $\Delta\varepsilon^{ep}$ ($\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^{ep}$) em N sub-incrementos iguais (foi implementado N=3), (ii) calcular a solução relativa à imposição de cada sub-incremento $\Delta\varepsilon^{ep}/N$ (optou-se por corrigi-la através dos algorítmos apresentados anteriormente), e subsequentemente, (iii) utilizar a solução obtida como solução inicial do sub-incremento seguinte, até perfazer a totalidade do incremento $\Delta\varepsilon^{ep}$.

17 Se após 10 iterações completas o critério de convergência não for satisfeito, então a melhor solução, tal que $\mu_{j+1} > \mu_j$, será adoptada para prosseguir com a análise.

4.6 Conclusões

Neste capítulo apresentou-se a formulação da teoria de escoamento J_2 implementada neste trabalho, válida para um material isotrópico com endurecimento arbitrário. Entre os assuntos abordados, importa destacar a derivação da matriz constitutiva elasto-plástica. Foram apresentadas duas definições desta matriz, uma designada convencional e outra consistente. É reconhecido (*De Borst et al. 2012*) que a utilização da matriz consistente, em substituição da matriz convencional, num método incremental-iterativo do tipo *Newton-Raphson* (*N-R*) (determinação da matriz de rigidez tangente) permite melhorar significativamente a eficiência computacional (reduz o número de iterações). Relativamente aos métodos de integração numérica (ou algoritmos de retorno), os métodos explícitos de *Euler* progressivo e da Normal Média devem ser utilizados com algum cuidado, uma vez que não garantem (ao contrário dos implícitos) que a solução satisfaça a condição de cedência para uma tolerância (*TOL*) pré-definida, ou seja, que $|f| \leq TOL$. De acordo com *Sloan et al.* (*2001*), tanto a precisão como a eficiência desses métodos podem ser significativamente melhoradas ao adoptar estratégias de (i) sub-incrementação da deformação, e (ii) correcção da solução final tal que $|f| \leq TOL$ – ambas foram implementadas neste trabalho.

Capítulo 5

O Método do Comprimento de Arco Cilíndrico

5.1 Introdução

A determinação de trajectórias de equilíbrio associadas ao comportamento física e/ou geometricamente não linear de estruturas e elementos estruturais (barras) sujeitos a um carregamento externo (*e.g.*, curvas força-deslocamento) envolve a resolução de sistemas de equações algébricas não lineares através de estratégias incrementais-iterativas. Dada a importância do conhecimento da carga de colapso (última) e trajectória subsequente (pós-colapso) para o dimensionamento estrutural – ver subsecção 1.1.3 do Capítulo 1, o recurso ao método de *Newton-Raphson* (*N-R*) é totalmente desaconselhado devido à sua divergência em casos de singularidade das matrizes de rigidez ou flexibilidade (ver Anexo 4.A). Como tal, foi implementada neste trabalho uma técnica incremental-iterativa muito potente e disseminada, conhecida como Comprimento de Arco (*Arc-Length*, em língua Inglesa). Trata-se de um método baseado no de *N-R* mas com a vantagem de não divergir em singularidades e, portanto, permitir determinar trajectórias de equilíbrio de qualquer natureza – *e.g.*, fenómenos de *snap-through* ou *snap-back* (*De Borst et al. 2012*). O método foi originalmente desenvolvido por *Wempner* (*1971*) e *Riks* (*1972, 1979*), e desde então têm sido propostas várias melhorias/modificações ao mesmo (*e.g., Crisfield 1981*). Optou-se por dedicar um capítulo à apresentação detalhada da formulação implementada, porque na opinião do autor, e atendendo à complexidade do método, este não é explicado na maioria dos trabalhos de referência com a clareza e fundamentação necessárias a uma implementação computacional eficaz, robusta e eficiente.

A aplicação do método do comprimento de arco requer (à semelhança do método de *N-R*) o estabelecimento de equações de equilíbrio incremental da barra em torno de uma dada configuração deformada[1], traduzindo o seu comportamento nessa vizinhança de forma aproximada (*Silvestre 2005*). Essas equações resultam da "linearização" (termos lineares do desenvolvimento em série de *Taylor*) do sistema de equações não lineares de equilíbrio definido por

$$f^{\,\text{int}} = \lambda \bar{f} \quad , \qquad (5.1)$$

onde (i) f^{int} é o vector de forças internas do problema e (ii) $\bar{f}$ o vector de forças externas (f) para um parâmetro de carga (λ) unitário, vindo a relação incremental dada por

$$K_{tan} \Delta d = \Delta\lambda \bar{f} \quad , \qquad (5.2)$$

onde d é o vector de deslocamentos generalizados da barra (graus de liberdade (g.l.) do problema) e K_{tan} a correspondente matriz de rigidez tangente – a derivação das variáveis envolvidas em (5.1) e (5.2) será detalhadamente apresentada nos Capítulos 6 e 7.

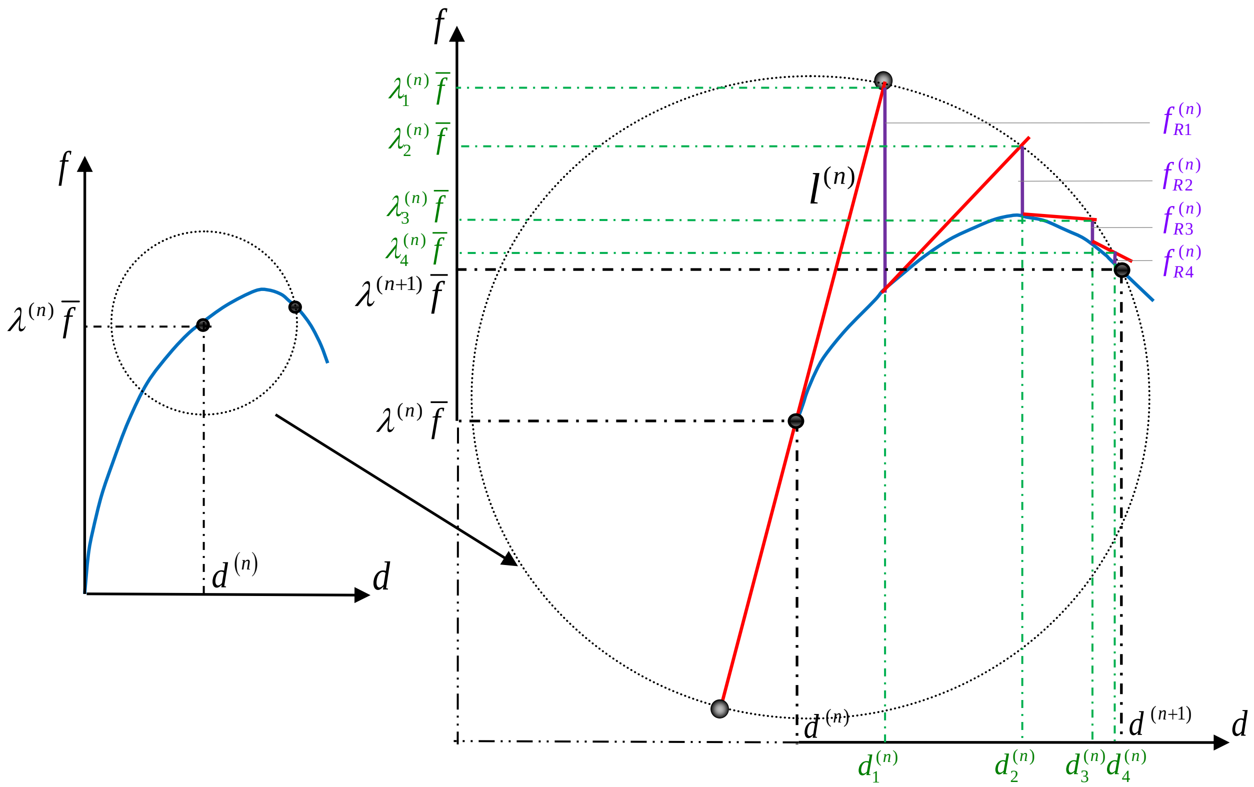


Fig. 5.1. Incremento genérico (n) do método do Comprimento de Arco (constrangimento esférico).

1 Durante o processo iterativo (antes de se obter convergência), esta configuração não está em equilíbrio com o carregamento aplicado (qualquer que seja o parâmetro de carga). No entanto, o termo "configuração de equilíbrio" poderá ser utilizado daqui em diante para referir a configuração deformada resultante de qualquer iteração.

Ao contrário do método de *N-R*, o método do Comprimento de Arco trata o parâmetro de carga em cada incremento como uma variável a determinar antes de cada iteração, através da imposição da equação de constrangimento – graficamente corresponde a uma superfície[2] aberta ou fechada que em cada incremento intersecta a trajectória de equilíbrio num ou mais pontos. A Fig. 5.1 ilustra 4 iterações de um incremento genérico (n) do método, utilizando (sem perda de generalidade) uma superfície de constrangimento esférica[3] de raio $l^{(n)}$ (comprimento de arco) centrada no ponto da trajectória ($d^{(n)}$, $\lambda^{(n)}\bar{f}$)[4]. A formulação implementada neste trabalho baseia-se na superfície de constrangimento cilíndrica proposta por *Crisfield* (*1981*), a qual é bastante popular entre a comunidade científica, especialmente em análises de elementos finitos. As secções seguintes descrevem as etapas para a determinação de ($d^{(n+1)}$, $\lambda^{(n+1)}\bar{f}$), a solução resultante do incremento genérico n.

5.2 Estratégia incremental

Definida a matriz de rigidez tangente no início do incremento n, $(K_{tan})_1^{(n)}$, a escolha do incremento de carga inicial ($\Delta\lambda_1^{(n)} = \lambda_1^{(n)} - \lambda^{(n)}$, resultante da 1ª iteração – ver Fig. 5.1) deve depender do grau de não linearidade da trajectória de equilíbrio na vizinhança de $d^{(n)}$ – enquanto que um incremento demasiado grande pode resultar em convergência lenta ou divergência, um incremento demasiado pequeno prejudica a eficiência computacional. Para além disso, a escolha do sinal desse incremento que permite acompanhar a evolução da trajectória de equilíbrio, requer a utilização de uma estratégia eficaz que detecte as singularidades (máximos e mínimos) da mesma. Os aspectos referidos integram a estratégia incremental do método, tendo sido implementadas duas alternativas neste trabalho, designadas (i) aumento do comprimento de arco (*Clarke e Hancock 1990*) e (ii) comprimento de arco constante, as quais são descritas de seguida. A sua aplicação depende do valor do incremento de carga inicial $\Delta\lambda_1^{(1)}$ (1º incremento), o qual foi considerado um *input* do *software* desenvolvido – no âmbito de análises elásticas geometricamente não lineares, *Clarke e Hancock* (*1990*) sugerem 20 a 40 % da estimativa do parâmetro de carga máximo a obter.

2 Ou linha, no caso de existir apenas uma variável independente.

3 Hiper-esférica no caso de um domínio N-dimensional (N>2).

4 No método de *Newton-Raphson* ter-se-ía para qualquer iteração $\lambda_j^{(n)} = \lambda_1^{(n)}$.

5.2.1 Aumento do comprimento de arco

Estipulado o valor do incremento de carga inicial $\Delta\lambda_1^{(1)}$, o respectivo comprimento de arco ($l^{(1)}$) e os valores dessas variáveis ($l^{(n)}$, $\Delta\lambda_1^{(n)}$) referentes aos incrementos subsequentes ($n \geq 2$) são obtidos por

$$l^{(1)} = \left| \Delta\lambda_1^{(1)} \sqrt{\left(\delta d_1^{(1)}\right)^T \left(\delta d_1^{(1)}\right)} \right|, \quad \Delta\lambda_1^{(n)} = \pm \frac{l^{(n)}}{\sqrt{\left(\delta d_1^{(n)}\right)^T \left(\delta d_1^{(n)}\right)}} \quad (n \geq 2) \qquad , \quad (5.3)$$

onde

$$\delta d_1^{(n)} = \left(K_{tan}^{-1}\right)_1^{(n)} \bar{f} \quad (n \geq 1), \qquad l^{(n)} = l^{(n-1)} \sqrt{\frac{J_d}{J_{n-1}}} \quad (n \geq 2) \qquad , \quad (5.4)$$

e (i) $\delta d_1^{(n)}$ é obtido da relação incremental (5.2) impondo $\Delta\lambda$=1, (ii) as relações (5.3) estão associadas a um constrangimento cilíndrico (*Crisfield 1981*), (iii) $(K_{tan}^{-1})_1^{(n)}$ é a inversa da matriz de rigidez tangente[5] em $d^{(n)}$, (iv) J_{n-1} é o nº de iterações realizadas até se verificar convergência no incremento (n-1) [6], e (v) J_d é o nº de iterações desejado para qualquer incremento (foram adoptados valores entre 3 e 5 na obtenção dos resultados numéricos apresentados nos Capítulos 6 e 7). Note-se que as relações (5.3) correspondem à equação de um cilindro de raio $l^{(n)}$ (valor depende do incremento, nunca da iteração) num espaço de dimensão N_{gl} + 1, onde N_{gl} é o número de g.l. do problema.

Relativamente à escolha do sinal correcto de $\Delta\lambda_1^{(n)}$, este deve ser tal que corresponda a uma evolução (e não a um retrocesso) na trajectória de equilíbrio. Uma vez que há grande interesse prático em determinar a resposta estrutural antes e após a ocorrência de singularidades (*e.g.*, ponto limite, carga última), esse sinal vai depender do ponto da trajectória onde o incremento é imposto ($d^{(n)}$). Das técnicas existentes na literatura, nem todas conduzem a um sinal correcto em certos casos particulares (*Neto et al. 2008*). Uma das opções é a atribuição do sinal do determinante da matriz tangente $(K_{tan})_1^{(n)}$, a qual peca por não fazer qualquer distinção entre a passagem por pontos limite e a passagem por pontos de bifurcação, uma vez que em ambos os casos o determinante muda de sinal. Outra alternativa corresponde à escolha do sinal do "incremento de trabalho" $\delta d_1^{(n)} \bar{f}$, a qual não é adequada para fenómenos de *snap-back* por prever uma variação positiva do parâmetro de carga no troço descendente da trajectória de equilíbrio. Por último, há uma estratégia denominada

5 Se a matriz de rigidez tangente for singular em qualquer iteração da estratégia incremental-iterativa, opta-se por realizar essa iteração com base na última matriz de rigidez utilizada na 1ª iteração de um incremento.

6 O critério de convergência utilizado é definido na secção 5.4.

"caminho secante" (*Neto et al. 2008*), a qual (i) permite ultrapassar os problemas descritos, (ii) é dependente da história de carregamento e (iii) atribui a $\Delta\lambda_1^{(n)}$ ($n \geq 2$) o mesmo sinal de

$$\left(\Delta d^{(n)}\right)^T \delta d_1^{(n)}, \quad \Delta d^{(n)} = d^{(n)} - d^{(n-1)} \quad . \tag{5.5}$$

Uma vez realizado um incremento (n-1) suficientemente pequeno para que o "sentido" de $\Delta d^{(n)}$ reflicta por completo a evolução da trajectória de equilíbrio entre pontos limite desse incremento[7], o sinal de (5.5) permitirá sempre seguir a evolução da trajectória de equilíbrio.

5.2.2 Comprimento de arco constante

Segundo esta estratégia, as relações (5.3) mantêm-se válidas mas todos os comprimentos de arco relativos aos incrementos subsequentes ($n \geq 2$) têm à partida o mesmo valor do primeiro, $l^{(1)}$. No entanto, existem várias situações em que o comprimento de arco será alterado com vista a melhorar a eficiência do método[8], nomeadamente: (i) sempre que não ocorrer convergência em menos de 7 iterações ou o parâmetro de carga no final de alguma iteração (solução da equação de constrangimento) resultar num número complexo[9], ou (ii) sempre que no final de um incremento genérico ($n \geq 2$) se verificar que o número de iterações realizadas é inferior ao número desejado ($J_n < J_d$) – neste caso, o valor atribuído aos comprimentos de arco subsequentes iguala a média entre $l^{(1)}$ e $l^{(n)}$.

5.3 Estratégia iterativa

Mesmo para carregamentos monotónicos, é sabido que há pontos materiais susceptíveis de sofrer descargas elásticas durante o processo incremental-iterativo – quer numericamente (durante o processo iterativo), quer entre estados de equilíbrio consecutivos. A determinação dessas descargas depende da estratégia iterativa adoptada, a qual pode ser (*Powell e Simons 1981*) (i) Caminho-Dependente ou (ii) Caminho-Independente, as quais se distinguém pela forma como a variação de deformação é calculada no final de cada iteração – relativamente à iteração anterior (Caminho-Dependente) ou ao ponto de partida (estado de equilíbrio) do incremento corrente (Caminho-Independente). Para um caso uni-dimensional, a diferença entre

---

7 Garantida a convergência nesse incremento, o sentido de $\Delta d^{(n)}$ é normalmente o adequado (*Neto et al. 2008*).

8 Passará a ser caracterizado por um comprimento de arco constante por sub-domínios da trajectória de equilíbrio.

9 O incremento é reiniciado e o comprimento de arco desse incremento e subsequentes reduzidos para o mesmo valor (ver sub-secções 5.3.1 e 5.3.2).

ambas as estratégias está ilustrada na Fig. 5.2, onde para um ponto material genérico, (i) A representa o estado de equilíbrio no início do incremento corrente, (ii) B corresponde ao estado de tensão obtido após a 1ª iteração desse incremento ($\Delta\varepsilon_{A\text{-}B} > 0$), e (iii) C_I-C_{II} são as soluções relativas à 2ª iteração, obtidas através das estratégias caminho-dependente (C_I) e caminho-independente (C_{II}). Como se pode observar, a primeira resulta de uma pseudo-descarga elástica (pois apenas o estado A se encontra em equilíbrio) devido ao incremento $\Delta\varepsilon_{B\text{-}C}$ ser negativo (ao invés de $\Delta\varepsilon_{A\text{-}C}$), o que torna a abordagem caminho-dependente menos robusta que a outra (*De Borst et al. 2012*) – por este motivo, e seguindo também a recomendação de *Powell e Simons* (*1981*), a estratégia caminho-independente foi implementada neste trabalho.

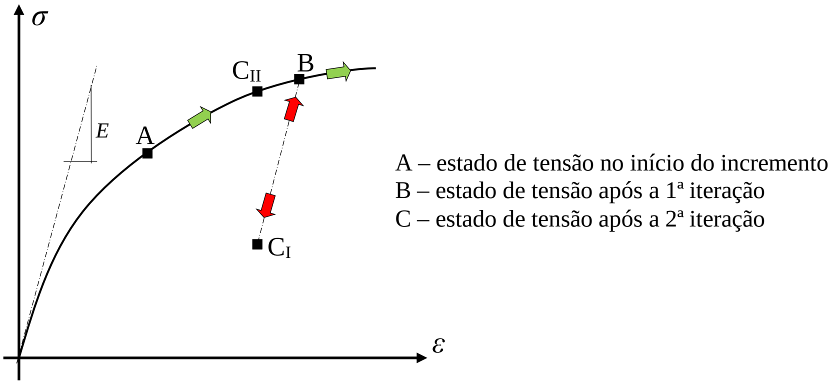


Fig. 5.2. Influência da estratégia iterativa na determinação do estado de tensão C: Caminho-Dependente (C_I) e Caminho-Independente (C_{II}).

5.3.1 Constrangimento cilíndrico

Concluída a 1ª iteração de um incremento genérico *n*, iterações subsequentes serão realizadas enquanto o critério de convergência não for verificado (ver sub-secção 5.3.2). As variáveis $d_j^{(n)}$ e $\lambda_j^{(n)}$, obtidas no final da iteração $j \geq 2$ imposta no ponto $d_{j-1}^{(n)}$ (ver Fig. 5.1), são determinadas através da equação de constrangimento referida anteriormente. Neste trabalho adoptou-se o constrangimento cilíndrico proposto por *Crisfield* (*1981*), o qual está provado ser mais robusto do que o esférico para a maioria dos problemas de análise estrutural por elementos finitos (*Clarke e Hancock 1990, De Borst et al. 2012*). Para uma iteração genérica $j \geq 2$, a equação que define os pontos de intersecção da tangente à trajectória de equilíbrio (em $d_{j-1}^{(n)}$) com a superfície cilíndrica de raio $l^{(n)}$ centrada em $d^{(n)}$, é dada por

$$\left(\Delta d_j^{(n)}\right)^T \left(\Delta d_j^{(n)}\right) = \left(l^{(n)}\right)^2 \quad , \qquad (5.6)$$

$$\begin{gathered}\Delta d_j^{(n)} = d_j^{(n)} - d^{(n)} = \Delta d_{j-1}^{(n)} + \lambda_j^{(n)} \delta d_j^{(n)} - \delta d_j^{\mathrm{int}(n)} \\ \delta d_j^{(n)} = \left(K_{\tan}^{-1}\right)_j^{(n)} \bar{f}, \quad \delta d_j^{\mathrm{int}(n)} = \left(K_{\tan}^{-1}\right)_j^{(n)} f_{j-1}^{\mathrm{int}(n)}, \quad \Delta d_1^{(n)} = d_1^{(n)} - d^{(n)} = \left(K_{\tan}^{-1}\right)_1^{(n)} \Delta\lambda_1^{(n)} \bar{f}\end{gathered} \quad , \quad (5.7)$$

onde $f_{j\text{-}1}^{\mathrm{int}(n)}$ é o vector de forças internas no final da iteração j-1, cuja definição provém da derivação da equação geral de equilíbrio (5.1). Após alguma manipulação vectorial, esta equação pode ser reescrita no formato

$$\begin{gathered} a\left(\lambda_j^{(n)}\right)^2 + b\left(\lambda_j^{(n)}\right) + c = 0 \\ a = \left(\delta d_j^{(n)}\right)^T \delta d_j^{(n)}, \quad b = 2\left[\left(\Delta d_{j-1}^{(n)}\right)^T \delta d_j^{(n)} - \left(\delta d_j^{(n)}\right)^T \delta d_j^{\mathrm{int}(n)}\right] \\ c = \left(\Delta d_{j-1}^{(n)}\right)^T \Delta d_{j-1}^{(n)} - 2\left(\Delta d_{j-1}^{(n)}\right)^T \delta d_j^{\mathrm{int}(n)} + \left(\delta d_j^{\mathrm{int}(n)}\right)^T \delta d_j^{\mathrm{int}(n)} - \left(l^{(n)}\right)^2 \end{gathered} \quad , \quad (5.8)$$

sendo as duas raízes da equação quadrática definidas por

$$\left(\lambda_j^{(n)}\right)_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \left(\lambda_j^{(n)}\right)_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad . \quad (5.9)$$

De modo a evoluir na trajectória de equilíbrio, *Hellweg e Crisfield* (*1998*) sugerem que seja escolhida a raíz que garante um menor "ângulo agudo" entre os vectores $\Delta d_j^{(n)}$ e $\Delta d_{j-1}^{(n)}$ ($j \geq 2$), ou seja, que conduz ao maior valor (se positivo) de

$$\frac{\left(\Delta d_j^{(n)}\right)^T \left(\Delta d_{j-1}^{(n)}\right)}{\left\|\Delta d_j^{(n)}\right\|_2 \ \left\|\Delta d_{j-1}^{(n)}\right\|_2} \quad , \quad (5.10)$$

vindo $\Delta d_j^{(n)}$ dado por (5.7), onde $\lambda_j^{(n)}$ toma o valor de cada raíz. No entanto, segundo esses autores esta metodologia pode não permitir captar correctamente o fenómeno de *snap-back*, principalmente se este envolver curvaturas elevadas da trajectória de equilíbrio. Com vista a solucionar este problema, *Hellweg e Crisfield* (*1998*) proposeram uma metodologia mais robusta (apesar de menos eficiente[10]) que consiste na escolha da raíz que conduz à menor norma L_2 do vector de forças residuais (ver Fig. 5.1)

$$f_{Rj}^{(n)} = \lambda_j^{(n)} \bar{f} - f_j^{\mathrm{int}(n)} \quad , \quad (5.11)$$

dado pela diferença entre os vectores de forças externas ($\lambda_j^{(n)} \bar{f}$) e internas ($f_j^{\mathrm{int}(n)}$) obtidos no final da iteração j, definidos através da Eq. (5.1). Na obtenção dos resultados numéricos apresentados nos Capítulos 6 e 7, ir-se-á recorrer à estratégia do menor "ângulo agudo" (a mais eficiente). No caso de

10 Pois exige o cálculo do vector de forças internas para cada uma das raízes.

nenhuma das soluções (5.9) conduzir a um valor positivo de (5.10), a última metodologia descrita (mais robusta) será aplicada nessa iteração.

Por último, importa alertar para o facto de as soluções (5.9) poderem ser números complexos. Nesse caso, o processo iterativo será abortado e o incremento corrente reiniciado com um comprimento de arco $l^{(n)}$ reduzido para metade (*Ritto-Corrêa e Camotim 2008*).

5.3.2 Critério de convergência

Conhecidos o parâmetro de carga $\lambda_j^{(n)}$ e o vector de deslocamentos generalizados $d_j^{(n)}$ no final da iteração j do incremento n – ver Fig. 5.1, resta estabelecer um critério de convergência para terminar o processo iterativo. O critério implementado designa-se "norma do vector de forças residuais" e é traduzido por ($j \geq 1$, $n \geq 1$)

$$\left\| f_{Rj}^{(n)} \right\|_2 \leq \max(\varepsilon \times \left\| f_{R1}^{(n)} \right\|_2, \varepsilon), \qquad \varepsilon = 10^{-4} \text{ a } 10^{-3} \quad , \tag{5.12}$$

onde $f_{Rj}^{(n)}$ é o vector de forças residuais no final da iteração j, definido em (5.11). Com vista a ultrapassar problemas de convergência lenta ou mesmo divergência, estabeleceu-se que se em algum incremento não se verificar convergência ao fim de 6 iterações, este será reiniciado com um incremento de carga inicial ($\Delta\lambda_1^{(n)}$) reduzido – a redução será de 50% caso a última iteração verifique

$$\left\| f_{Rj}^{(n)} \right\|_2 \leq 10 \times \max(\varepsilon \times \left\| f_{R1}^{(n)} \right\|_2, \varepsilon) \quad , \tag{5.13}$$

ou de 75% no caso contrário.

Capítulo 6

GBT – Análises Elasto-Plásticas de 1ª Ordem

Apresenta-se neste capítulo a formulação da GBT para análises fisicamente não lineares de 1ª ordem (sem efeitos geometricamente não lineares), baseada na teoria J_2 (critério de cedência de *von Mises*) com escoamento associado[1], e válida para perfis de parede fina (i) com secção transversal arbitrária (aberta ou total/parcialmente fechada, e ramificada ou não ramificada), (ii) constituídos por um material elasto-plástico caracterizado por (ii_1) resposta linear em regime elástico e (ii_2) um endurecimento isotrópico arbitrário (nulo, linear ou não linear), e (iii) submetidos a qualquer carregamento exterior (distribuído e/ou pontual) dependente de um único parâmetro de carga (λ). Importa relembrar que se mantêm válidos os conceitos fundamentais da GBT (hipóteses simplificativas, campo deslocamentos, lei constitutiva elástica e análise da secção) apresentados nas secções 2.1, 2.2 e 2.4 do capítulo 2.

6.1. Equação geral de equilíbrio

A formulação matemática do equilíbrio estático de um corpo composto por um material elasto-plástico é estabelecida recorrendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (*Batra 2006, De Borst et al. 2012*)

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad , \quad (6.1)$$

onde δW_{int} e δW_{ext} são os trabalhos vituais realizados pelas forces internas (tensões) e externas (cargas aplicadas), respectivamente. O termo δW_{int} é definido por

1 Na primeira abordagem do autor à formulação inelástica da GBT (*Abambres et al. 2011a*), a teoria J_2 não foi implementada. Ao invés, considerou-se que cada componente de tensão só dependia da componente de deformação homóloga através da lei uniaxial. Esta simplificação só é razoável em casos de deformação global que envolvam apenas uma componente de tensão não nula (ou muito mais preponderante que as restantes) – resultados de análises da GBT (incluindo vigas submetidas a torção não uniforme) foram validados por comparação com análises de EF de casca/viga do Abaqus baseadas na teoria J_2.

$$\delta W_{int} = \int_L \int_b \int_e \left(\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{ss} \delta\varepsilon_{ss} + \sigma_{xs} \delta\gamma_{xs} \right) dz\, ds\, dx \qquad , \quad (6.2)$$

onde (i) σ_{xx}, σ_{ss} e σ_{xs} são as componentes de tensão axial (ou longitudinal), transversal e de corte, respectivamente, e (ii) ε_{xx}, ε_{ss} e γ_{xs} são as componentes de deformação de 1ª ordem – extensão axial, extensão transversal e distorção, respectivamente, as quais podem ser obtidas através de

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \mathrm{E}_{(xx)k}\ \chi_{(xx)k}, \quad \mathrm{E}_{(xx)k} = u_k - z w_k, \qquad \chi_{(xx)k} = \zeta_{k,xx} \\ \varepsilon_{ss} &= \mathrm{E}_{(ss)k}\ \chi_{(ss)k}, \quad \mathrm{E}_{(ss)k} = v_{k,s} - z w_{k,ss}, \qquad \chi_{(ss)k} = \zeta_k \\ \gamma_{xs} &= \mathrm{E}_{(xs)k}\ \chi_{(xs)k}, \quad \mathrm{E}_{(xs)k} = u_{k,s} + v_k - 2 z w_{k,s}, \quad \chi_{(xs)k} = \zeta_{k,x} \end{aligned} \qquad , \quad (6.3)$$

correspondendo aos termos lineares[2] das componentes do tensor de *Green - Saint-Venant* (definidas pelas Eqs. (2.9) – capítulo 2). Nestas relações, (i) k satisfaz a convenção de *Einstein*, e (ii) $\mathrm{E}_{(mn)k}$ e $\chi_{(mn)k}$ (mn = xx, ss, xs) são as k-ézimas componentes (associadas ao modo de deformação k) dos tensores das deformações seccionais ($\mathrm{E}_{(mn)}$) e longitudinais ($\chi_{(mn)}$), os quais dependem respectivamente dos perfis de deslocamentos e funções de amplitude modais. Relativamente ao trabalho virtual das forças exteriores que figura na Eq. (6.1), este vem dado por

$$\delta W_{ext} = -\int_L \int_b (q_x \delta u + q_s \delta v + q_z \delta w)\ ds dx = -\int_L \int_b \left[\left(q_x u_k \right) \delta\chi_{(xs)k} + \left(q_s v_k + q_z w_k \right) \delta\chi_{(ss)k} \right] ds dx\ , \quad (6.4)$$

onde (i) q_x, q_s e q_z são as componentes locais de uma força distribuída genérica que actua na superfície média da barra[3] (ver Fig. 2.2(b) – capítulo 2), e (ii) u, v, w são as componentes do campo de deslocamentos de membrana da GBT (Eq. (2.5) – capítulo 2). A introdução de (6.2) e (6.4) em (6.1) dá origem à equação geral de equilíbrio da barra

$$\begin{aligned} &\int_L \int_b \int_e \left[\sigma_{xx} \left(\mathrm{E}_{(xx)k} \delta\chi_{(xx)k} \right) + \sigma_{ss} \left(\mathrm{E}_{(ss)k} \delta\chi_{(ss)k} \right) + \sigma_{xs} \left(\mathrm{E}_{(xs)k} \delta\chi_{(xs)k} \right) \right] dz\, ds\, dx = \\ &= \int_L \int_b \left[\left(q_x u_k \right) \delta\chi_{(xs)k} + \left(q_s v_k + q_z w_k \right) \delta\chi_{(ss)k} \right] ds dx \end{aligned} \qquad , \quad (6.5)$$

a qual é válida para qualquer (i) modelo constitutivo (*e.g.*, elástico linear/não linear, elasto-plástico com ou sem endurecimento) e (ii) deformação longitudinal virtual $\delta\chi_{(mn)k}$. Relativamente à imposição de condições de fronteira em secções com empenamentos restringidos e sujeitas a tensões de corte, associada a um fenómeno de *shear locking*, a estratégia adoptada é a mesma

2 O equilíbrio da barra é estabelecido na sua configuração indeformada.

3 A consideração de forças pontuais é conseguida mediante a imposição de condições de fronteira.

utilizada para análises lineares (admissibilidade cinemática garantida) – ver parte final da sub-secção 2.3.2 do capítulo 2.

6.2 Formulação de um elemento finito

Sabe-se (*De Borst et al. 2012*) que a determinação de configurações/estados de equilíbrio numa análise não linear requer a implementação de uma estratégia incremental-iterativa – o método do Comprimento de Arco Cilíndrico foi adoptado (ver capítulo 5). Essa estratégia requer a definição (i) da equação de equilíbrio incremental da barra e (ii) do vector de forças internas, relativos a uma configuração deformada genérica. Tendo-se recorrido a elementos finitos de viga (EFV) para aproximar o campo de deslocamentos da barra (as funções de aproximação implementadas, polinómios de *Hermite* e funções de *Lagrange*, fotam apresentadas na sub-secção 2.3.2), definem-se em seguida o vector de forças internas e equação de equilíbrio incremental elementares (relativos ao EFV genérico de comprimento L_e). Uma vez definidas essas grandezas para todos os EFV utilizados na modelação de um elemento estrutural, resta proceder à assemblagem das variáveis globais e imposição das condições de fronteira da barra (estáticas e cinemáticas) para que se possa aplicar o algorítmo incremental-iterativo. Por último, importa referir que a formulação seguinte está apresentada no Anexo 6.A no formato (matricial) adoptado para a sua implementação computacional.

6.2.1 Vector de forças internas

De modo a definir o vector de forças internas do EFV, substituam-se os termos $\delta\chi_{(mn)k}$ que figuram na equação geral de equilíbrio (6.5) ($L \equiv L_e$) pelas respectivas aproximações

$$\delta\chi_{(xx)k} = ddS^k \delta d_k\,,\ \ \delta\chi_{(ss)k} = S^k \delta d_k\,,\ \ \delta\chi_{(xs)k} = dS^k \delta d_k \quad , \qquad (6.6)$$

onde (i) k identifica o modo de deformação em causa e d_k é o correspondente vector de deslocamentos generalizados do EFV – incógnitas do problema, e (ii) S^k, dS^k e ddS^k são vectores que guardam as funções de aproximação associadas a d_k, vindo

$$S^k = \begin{Bmatrix} P\Psi_{(H\,ou\,L)} \ \text{ se } \ v_k, w_k = 0 \\ \Psi_H \ \text{ se } \ v_k, w_k \neq 0 \end{Bmatrix}, \quad dS^k = \begin{Bmatrix} \Psi_{(H\,ou\,L)} \ \text{ se } \ v_k, w_k = 0 \\ \Psi_{H,x} \ \text{ se } \ v_k, w_k \neq 0 \end{Bmatrix},$$
$$ddS^k = \begin{Bmatrix} \Psi_{(H\,ou\,L),x} \ \text{ se } \ v_k, w_k = 0 \\ \Psi_{H,xx} \ \text{ se } \ v_k, w_k \neq 0 \end{Bmatrix} \quad , \qquad (6.7)$$

onde Ψ_H e Ψ_L são os vectores (1x4) que guardam os polinómios de *Hermite* e funções de

Lagrange, respectivamente (definidos pelas Eqs. (2.18) e (2.20)). Note-se que para os modos que só exibem empenamentos (v_k, w_k = 0), uma das duas alternativas especificadas (*H* ou *L*) será adoptada. Após a introdução de (6.6) em (6.5), obtém-se

$$\delta d \; f^{\text{int}} = \delta d \; \lambda \bar{f} \quad \Leftrightarrow \quad f^{\text{int}} = \lambda \bar{f} \qquad , \quad (6.8)$$

onde (i) $\bar{f}$ corresponde ao vector de forças externas (ver Eq. (2.22)) para um parâmetro de carga (λ) unitário, e (ii) $f^{\,int}$ é o vector de forças internas para uma configuração de equilíbrio genérica (j)[4], cuja "componente" k (sub-vector 4x1 associado ao modo k) é dada por

$$\begin{gathered} f_k^{\text{int}}\Big|_j = \int_{L_e} \left\{ F_{(xx)k} \left(ddS^k \right)^T + F_{(ss)k} \left(S^k \right)^T + F_{(xs)k} \left(dS^k \right)^T \right\} dx \\ F_{(xx)k} = \int_b \int_e \mathrm{E}_{(xx)k} \, \sigma_{xx}\Big|_j dzds, \quad F_{(ss)k} = \int_b \int_e \mathrm{E}_{(ss)k} \, \sigma_{ss}\Big|_j dzds, \quad F_{(xs)k} = \int_b \int_e \mathrm{E}_{(xs)k} \, \sigma_{xs}\Big|_j dzds \end{gathered} \qquad , \quad (6.9)$$

onde k é um índice livre e as deformações seccionais $\mathrm{E}_{(\mathrm{mn})k}$ estão definidas em (6.3).

6.2.2 Equação de equilíbrio incremental

A equação de equilíbrio incremental do EFV em torno de uma certa configuração deformada (j) traduz aproximadamente o seu comportamento numa vizinhança muito próxima dessa configuração. A sua obtenção é conseguida pela "linearização" de (6.8), dada pelo respectivo desenvolvimento em série de *Taylor* limitado aos termos de 1ª ordem, traduzindo-se na relação

$$K_{\tan}\Big|_j \, \Delta d = \Delta\lambda \, \bar{f} \qquad , \quad (6.10)$$

onde (i) K_{tan} corresponde à matriz de rigidez tangente (Jacobiana, ver Anexo 4.A) na configuração em causa ("componente" i-k é sub-matriz 4x4 associada aos modos de deformação i e k), e (ii) Δd é o incremento de deslocamentos generalizados ("componente" k de cada vector da equação é um sub-vector 4x1 associado ao modo k). Segundo a definição de matriz Jacobiana, tem-se

4 Relembra-se que enquanto não se verifica convergência durante a estratégia incremental-iterativa, esta configuração não está em equilíbrio com o carregamento aplicado (qualquer que seja o parâmetro de carga).

$$K_{\tan} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^{\mathrm{int}}}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f_1^{\mathrm{int}}}{\partial d_i} & \cdots & \frac{\partial f_1^{\mathrm{int}}}{\partial d_{N_e}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i^{\mathrm{int}}}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f_i^{\mathrm{int}}}{\partial d_i} & \cdots & \frac{\partial f_i^{\mathrm{int}}}{\partial d_{N_e}} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N_e}^{\mathrm{int}}}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f_{N_e}^{\mathrm{int}}}{\partial d_i} & \cdots & \frac{\partial f_{N_e}^{\mathrm{int}}}{\partial d_{N_e}} \end{bmatrix} \quad , \quad (6.11)$$

onde (i) f_i^{int} e d_i são a *i*-ézima entrada dos vectores de forças internas ($f^{\,int}$) e de deslocamentos (d) elementares (de dimensão N_e). De acordo com (6.9), o vector de forças internas é função (implícita) dos deslocamentos d_i através das componentes de tensão σ_{mn} (mn = *xx*, *ss*, *xs*). Estas dependem das componentes de deformação ε_{mn}, as quais por sua vez são função dos deslocamentos d_i através de $\chi_{(\mathrm{mn})k}$ (ver Eqs. (6.3) e (6.6)). Como tal, a forma de obter a relação incremental (6.10) consiste na substituição das componentes de tensão que figuram em (6.8)-(6.9) pelas variações (*De Borst et al. 2012*)

$$\Delta\sigma_{mn} = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial d_i} \Delta d_i$$

$$\frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial d_i} = \left(\frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{xx}} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \chi_{(xx)k}} \frac{\partial \chi_{(xx)k}}{\partial d_i} + \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{ss}} \frac{\partial \varepsilon_{ss}}{\partial \chi_{(ss)k}} \frac{\partial \chi_{(ss)k}}{\partial d_i} + \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \gamma_{xs}} \frac{\partial \gamma_{xs}}{\partial \chi_{(xs)k}} \frac{\partial \chi_{(xs)k}}{\partial d_i} \right) \quad , \quad (6.12)$$

onde (i) σ_{mn} é uma componente genérica de tensão (σ_{xx}, σ_{ss} ou σ_{xs}), (ii) k e i são índices mudos, e os gradientes

(iii$_1$) $\partial\sigma_{mn}/\partial\varepsilon_{xx}$, $\partial\sigma_{mn}/\partial\varepsilon_{ss}$ e $\partial\sigma_{mn}/\partial\gamma_{xs}$ dependem do modelo constitutivo e da história de deformação – são definidos pelas matrizes constitutivas elástica ou elasto-plástica abordadas no cap. 4,

(iii$_2$) $\partial\varepsilon_{xx}/\partial\chi_{(xx)k}$, $\partial\varepsilon_{ss}/\partial\chi_{(ss)k}$ e $\partial\gamma_{xs}/\partial\chi_{(xs)k}$ igualam as respectivas deformações seccionais $\mathrm{E}_{(\mathrm{xx})k}$, $\mathrm{E}_{(\mathrm{ss})k}$ e $\mathrm{E}_{(\mathrm{xs})k}$ definidas em (6.3), e

(iii$_3$) $\partial\chi_{(xx)k}/\partial d_i$, $\partial\chi_{(ss)k}/\partial d_i$ e $\partial\chi_{(xs)k}/\partial d_i$ são função do tipo de aproximação adoptada para o EFV (ver relações (6.6)-(6.7)). Deste modo, a "componente" *i-k* da matriz de rigidez tangente relativa à configuração de equilíbrio *j* pode ser obtida por

$$K_{ik,\tan}\Big|_j = K_{ik,\tan}^{xx} + K_{ik,\tan}^{ss} + K_{ik,\tan}^{xs} \quad , \quad (6.13)$$

onde

$$K_{ik,\tan}^{xx}=\int_{V_e}\left\{\begin{array}{l}\left(ddS^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(xx)i}\mathrm{E}_{(xx)k}\left.\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{xx}}\right|_j\right)ddS^k+\left(ddS^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(xx)i}\mathrm{E}_{(ss)k}\left.\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{ss}}\right|_j\right)S^k+\\ \left(ddS^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(xx)i}\mathrm{E}_{(xs)k}\left.\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\gamma_{xs}}\right|_j\right)dS^k\end{array}\right\}dV_e\,, \quad (6.14)$$

$$K_{ik,\tan}^{ss}=\int_{L_e}\int_b\int_e\left\{\begin{array}{l}\left(S^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(ss)i}\,\mathrm{E}_{(xx)k}\left.\frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial\varepsilon_{xx}}\right|_j\right)ddS^k+\\ \left(S^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(ss)i}\mathrm{E}_{(ss)k}\left.\frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial\varepsilon_{ss}}\right|_j\right)S^k+\left(S^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(ss)i}\mathrm{E}_{(xs)k}\left.\frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial\gamma_{xs}}\right|_j\right)dS^k\end{array}\right\}dz\,ds\,dx\,, \quad (6.15)$$

$$K_{ik,\tan}^{xs}=\int_{V_e}\left\{\begin{array}{l}\left(dS^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(xs)i}\,\mathrm{E}_{(xx)k}\left.\frac{\partial\sigma_{xs}}{\partial\varepsilon_{xx}}\right|_j\right)ddS^k+\left(dS^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(xs)i}\,\mathrm{E}_{(ss)k}\left.\frac{\partial\sigma_{xs}}{\partial\varepsilon_{ss}}\right|_j\right)S^k+\\ \left(dS^i\right)^T\left(\mathrm{E}_{(xs)i}\,\mathrm{E}_{(xs)k}\left.\frac{\partial\sigma_{xs}}{\partial\gamma_{xs}}\right|_j\right)dS^k\end{array}\right\}dV_e\,, \quad (6.16)$$

sendo (i) V_e o volume do EFV em causa, e (ii) i e k índices/expoentes livres.

6.3 Exemplos ilustrativos

Ilustra-se nesta secção a aplicação da GBT, implementada no *software* Matlab (*Mathworks 2012*), à análise fisicamente não linear de 1ª ordem de vigas metálicas de parede fina. São apresentados e discutidos resultados da análise de seis vigas caracterizadas por diversos materiais elasto-plásticos, tipos de secção transversal e condições de fronteira, e submetidos a vários tipos de carregamento. Apresentam-se ainda dois exemplos ilustrativos complementares no Anexo 6.C (viga H à torção e viga em Hat à flexão). Os resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, diagramas de tensões, perfis de deslocamentos, *contours*[5] de tensões e configurações deformadas tri-dimensionais) são validados por comparação com os obtidos pelo *software* de EF Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*), recorrendo a modelos de elementos finitos de casca (EFC)[6]. Resultados como diagramas de participação/funções de amplitude modais, e trajectórias de equilíbrio baseadas em conjuntos de modos pré-seleccionados, permitem analisar a mecânica comportamental da barra em qualquer fase da sua resposta (elástica ou inelástica).

5 Distribuições tri-dimensionais.

6 A teoria J_2 com escoamento associado é também o modelo de plasticidade adoptado nas análises do Abaqus.

6.3.1 Caracterização

Antes de apresentar e discutir os resultados, todos os problemas abordados são previamente definidos, fazendo referência aos modos de deformação da GBT seleccionados e ilustrando as configurações dos mais relevantes em cada análise (ver 6.3.2). Importa também mencionar que (i) os elementos estruturais analisados não apresentam imperfeições iniciais (tensões residuais ou imperfeições geométricas)[7], (ii) as dimensões das secções referem-se à linha média da secção e todos os resultados dizem respeito a pontos localizados na superfície média da barra (z=0), (iii) os modelos do Abaqus são formados por malhas regulares de EFC do tipo S4 (4 pontos de integração de *Gauss* no plano médio)[8], e (iv) o *input* da lei constitutiva uniaxial (à compressão[9]) no Abaqus é expresso em termos da tensão (σ^t) e extensão plástica ($\varepsilon^{t(p)}$) verdadeiras (em valor absoluto), as quais são obtidas com base nos valores absolutos da tensão (σ^n) e extensão (ε^n) nominais por (*DS Simulia Inc. 2004*)[10]

$$\varepsilon^{t(p)} = -\ln(1-\varepsilon^n) - \frac{\sigma^t}{E} \qquad\qquad \sigma^t = \sigma^n\left(1-\varepsilon^n\right) \quad . \tag{6.17}$$

Note-se que apesar da formulação da GBT envolver tensões nominais, os *outputs* de tensões são convertidos para grandezas verdadeiras recorrendo a (6.17), permitindo assim a comparação com os valores do Abaqus. A única excepção diz respeito às tensões de *von Mises*, as quais foram calculadas com base nas componentes nominais das tensões por terem sido estas as utilizadas no modelo de plasticidade implementado.

O material considerado em todos os exemplos exibe uma lei constitutiva bi-linear (ver Fig. 3.2 no capítulo 3) caracterizada por (i) módulo de *Young* E, (ii) módulo tangente E_t, (iii) coeficiente de *Poisson* ν (considerado igual a 0.3 – valor do aço) e (iv) tensão nominal de cedência inicial σ_0^y (o módulo de distorção vale $G = E \,/\, [2(1+\nu)]$). A tab. 6.1 apresenta, para cada exemplo ilustrativo, as propriedades materiais, os números de EFC na direcção longitudinal (N_x) e ao longo da linha média da secção (N_s) do

7 Estas apenas serão introduzidas no capítulo 7, no âmbito de análises elasto-plásticas de 2ª ordem.

8 Algumas recomendações sobre o tipo de EFC e discretização a utilizar no Abaqus são apresentadas no Anexo 6.B.

9 Caso em algum caso particular o comportamento "verdadeiro" à tracção for distinto do à compressão, este último é o que se deve introduzir no modelo pelo facto de apenas se pretender estudar materiais isotrópicos e por os perfis de parede fina serem muito susceptíveis a fenómenos de instabilidade.

10 Uma tensão verdadeira é uma força por unidade de área deformada do elemento de volume infinitesimal de um corpo. A definição apresentada em (6.17) baseia-se na hipótese de incompressibilidade do material.

Tab. 6.1. Exemplos ilustrativos: propriedades materiais, nº de EFC no Abaqus, e nº de pontos de *Gauss* na GBT.

Exemplo	Propriedades Materiais			Discretização de EFC no ABAQUS		Pontos de *Gauss* na GBT		
	E (N/mm^2)	E_t (N/mm^2)	σ_0^y (N/mm^2)	N_x	N_s	s	z	x
I	200000	0	450	60	30	5	6	5
Z	200000	0 E/100 E/50	450	94	14	5	5	5
C	200000	0	450	150	40	7	5	7
C reforçado	200000	0 E/100 E/50	450	200	57	6	5	6
RHS	200000	0	450	160	36	5	5	5
LSB	200000	0	450	184	28	5	3	4

modelo do Abaqus, e a quantidade de pontos de integração de *Gauss* considerada na GBT (por direcção local s, z e x de cada sub-placa em cada EFV) – o número de pontos ao longo da espessura de cada EFC do Abaqus, iguala o valor adoptado na GBT[11]. Na tab. 6.2 apresentam-se os números de modos de deformação da GBT (G – globais, D – distorcionais, L – locais, C – corte, ET – extensão transversal, FCC – fluxo de corte celular (excepto o de torção)) utilizados em cada análise[12], bem como a quantidade de g.l. utilizados nos modelos da GBT e do Abaqus.

O primeiro exemplo numérico está ilustrado na Fig. 6.1 e corresponde a uma viga simplesmente apoiada[13] (L=1500 mm) com secção em I, constituída por um material elástico-perfeitamente plástico (ver propriedades na Tab. 6.1) e sujeita a uma carga vertical a meio vão (x=750 mm) de F=10000 λ N (λ é o parâmetro de carga). Como se pode observar na Fig. 6.1(b), a força está distribuída ao longo da alma através de cargas nodais igualmente espaçadas (F_1=833.33 λ N e F_2=1666.67 λ N). A discretização da secção na GBT consiste em 4 sub-placas por banzo e 6 na alma, o que totaliza 60 (=15×4) modos de deformação (não foi adoptado o g.l. de rotação de empenamento[14] – abordado em 2.4.4 no capítulo 2).

11 A excepção foi a viga em I, onde apenas 5 pontos foram usados no Abaqus de modo a obter um ponto na superfície média. A análise da GBT não foi corrida com apenas 5 pontos, mas certamente que os resultados não iriam diferir dos obtidos.

12 Relembra-se que a escolha da fracção de modos a adoptar em cada análise é baseada em:(i) experiência e conhecimento adquiridos, (ii) avaliação da participação modal (ver 2.4.3 – capítulo 2) em análises realizadas à priori com um maior número de modos, e/ou (iii) considerações de simetria (em função da geometria da secção e tipo de carregamento).

13 Ao longo deste capítulo, as secções encastradas não exibem qualquer deslocamento ou rotação, enquanto que as apoiadas apenas exibem empenamentos.

14 Adoptou-se este g.l. nos casos de (i) malha transversal pouco refinada, e (ii) modos de corte relevantes consideravelmente

Tab. 6.2. Quantidade de modos de deformação da GBT (por tipo) e de g.l. utilizados nos modelos da GBT e do Abaqus.

Exemplo	G	D	L	C	ET	Modos GBT (usados / total)	g.l. GBT	g.l. ABAQUS	g.l. GBT / ABAQUS (%)
I	1	0	0	14	14	29 / 60	1072	11160	9.6
Z	4	0	6	19	8	37 / 47	1149	8460	13.6
C	4	0	7	14	14	39 / 60	2057	36900	5.6
C reforçado	4	2	4	18	18	46 / 76	3222	69252	4.7
RHS	1	0	9	2	5	17 / 74	529	34452	1.5
LSB	2	2	9	21	9	43 / 93	6170	29727	20.8

No entanto, apenas 29 desses modos foram seleccionados para a análise (ver Tab. 6.2), estando as configurações dos mais relevantes representadas na Fig. 6.7. No que respeita à discretização longitudinal da GBT, utilizaram-se 18 EFV (de comprimentos iguais por troços da viga): 4 EFV em $x < 0.35L$ e também $x > 0.65L$, e 10 EFV em $0.35L \leq x \leq 0.65L$.

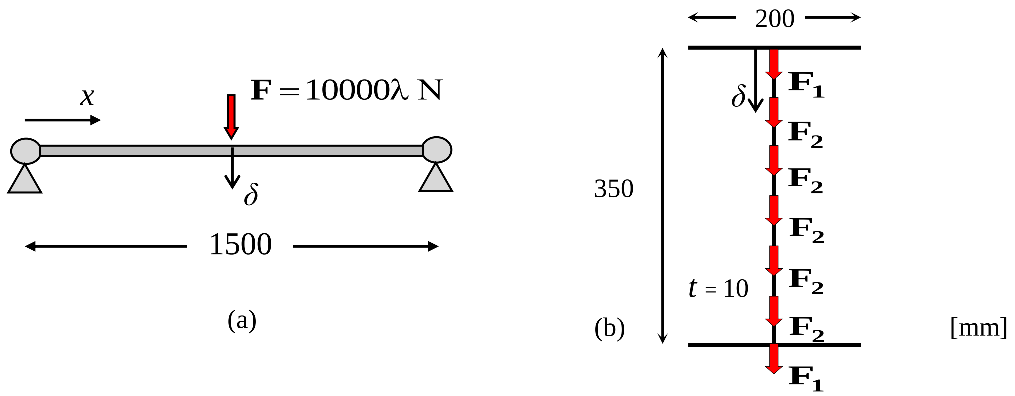
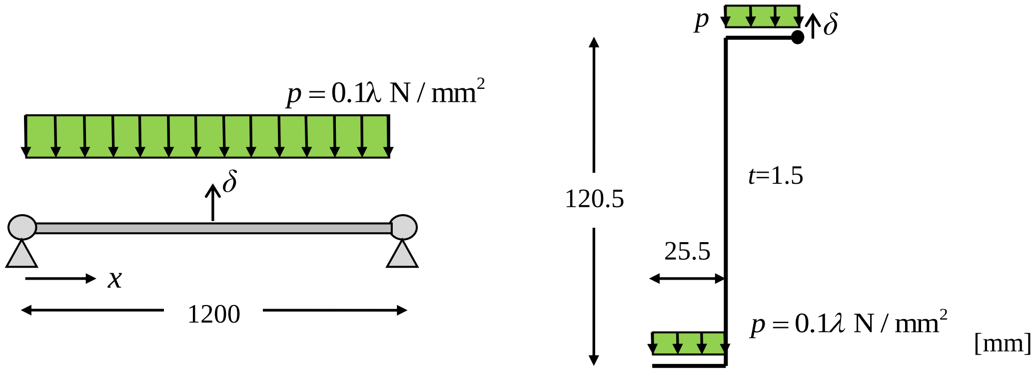


Fig. 6.1. Viga em I: (a) vista geral, e (b) carregamento e dimensões da secção.

O segundo exemplo aborda a viga simplesmente apoiada (L=1200 mm) com secção em Z ilustrada na Fig. 6.2, a qual está sujeita a uma carga uniformemente distribuída p=0.1λ N/mm^2 ao longo dos banzos, como indicado na Fig. 6.2(b). Foram efectuadas três análises de modo a avaliar a influência do endurecimento do material no comportamento da barra. Por conseguinte, adoptaram-se três leis constitutivas distintas no que respeita ao módulo tangente E_t (ver Tab. 6.1). Na GBT, a secção foi discretizada em 4 sub-placas na alma e 2 em cada banzo, o que conduziu a 47 modos de deformação (rotações de empenamento incluídas), dos quais apenas 37 foram

não lineares ao longo da linha média, desde que a eficiência (nº g.l.) da análise não ficasse comprometida. Na maioria dos casos de interesse prático, a necessidade de maior discretização da secção deve-se aos modos de extensão transversal – relembra-se que os deslocamentos transversais v são aproximados por funções lineares em cada sub-placa.

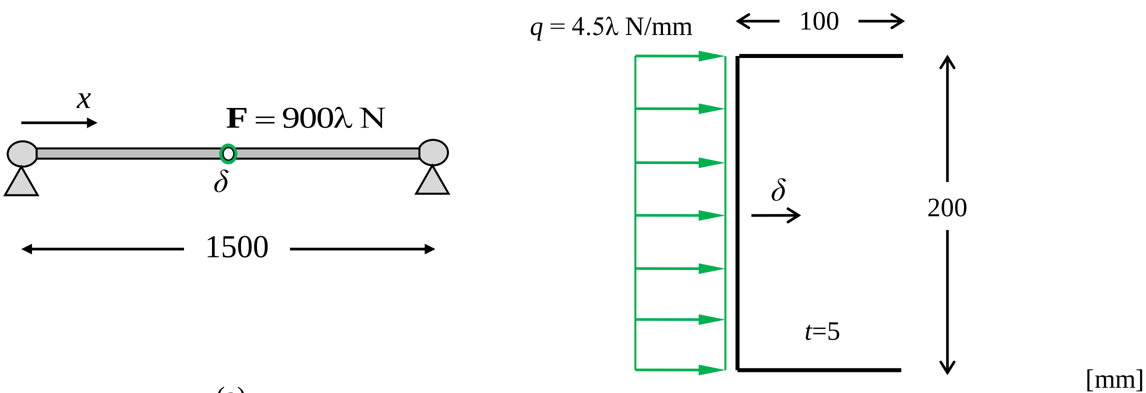
incluídos em cada análise (ver Tab. 6.2) – os mais relevantes estão representados na Fig. 6.8. Longitudinalmente, cada modelo da GBT é constituído por uma malha uniforme de 15 EFV.



(a) (b)

Fig. 6.2. Viga em Z: (a) vista geral, e (b) carregamento e dimensões da secção.

O terceiro problema diz respeito à viga simplesmente apoiada (L=1500 mm) com secção em C representada na Fig. 6.3, constituída por um material elástico-perfeitamente plástico (ver Tab. 6.1) e sujeita à acção horizontal de uma carga (q=4.5 λ N/mm) uniformemente distribuída na alma da secção de meio vão (ver Fig. 6.3(b)) – a resultante vale F=900 λ N. A discretização da secção na GBT originou 6 sub-placas na alma e 4 em cada banzo, o que conduziu a 60 modos de deformação (rotação de empenamento não utilizada). Desses modos, apenas 39 foram incluídos na análise (ver Tab. 6.2), estando as configurações dos mais relevantes apresentadas na Fig. 6.9. Quanto à discretização longitudinal do modelo da GBT, foram considerados 26 EFV com a seguinte distribuição: 7 em x<0.45L e também x>0.55L, e 12 em 0.45L≤x≤0.55L.



(a) (b)

Fig. 6.3. Viga em C: (a) vista geral, e (b) carregamento e dimensões da secção.

A quarta viga é bi-encastrada (L=1500 mm) com secção em C-reforçado, de acordo com o ilustrado na Fig. 6.4, estando sujeita a duas cargas verticais opostas (q=λN/mm) distribuídas em ambos os banzos da secção de meio vão – a resultante em cada banzo vale F=100λN. À semelhança da viga em Z, foram efectuadas três análises de modo a avaliar a influência do endurecimento do material no comportamento da barra, tendo-se adoptado três leis constitutivas distintas no que respeita ao módulo tangente E_t (ver Tab. 6.1). Na GBT, a secção foi discretizada por meio de 6 sub-placas na alma, 4 por banzo e 2 por reforço, o que conduziu a 76 modos de deformação (rotação de empenamento não considerada). Devido à contribuição diminuta de 30 desses modos, apenas os restantes 46 foram incluídos em cada análise (ver Tab. 6.2) – as configurações dos mais relevantes podem ser observadas na Fig. 6.10. Na direcção longitudinal, cada modelo da GBT inclui 36 EFV (6 em x<0.1L e x>0.9L, 6 em 0.1L≤x≤0.45L e 0.55L≤x≤0.9L, e 12 em 0.45L≤x≤0.55L).

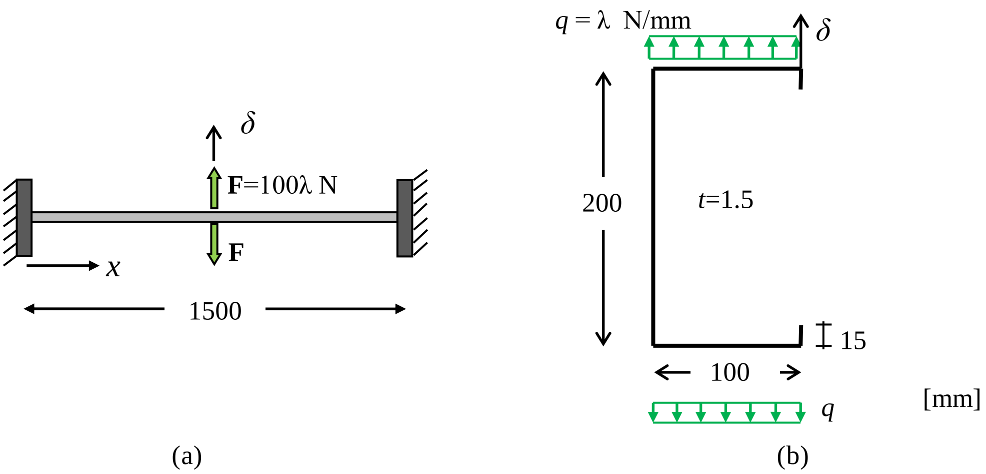


Fig. 6.4. Viga em C-reforçado: (a) vista geral, e (b) carregamento e dimensões da secção.

A quinta viga é tubular com secção RHS, constituída por um material perfeitamente plástico (ver Tab. 6.1), e encontra-se encastrada-apoiada (L=4000 mm) e sujeita a uma carga vertical uniformemente distribuída

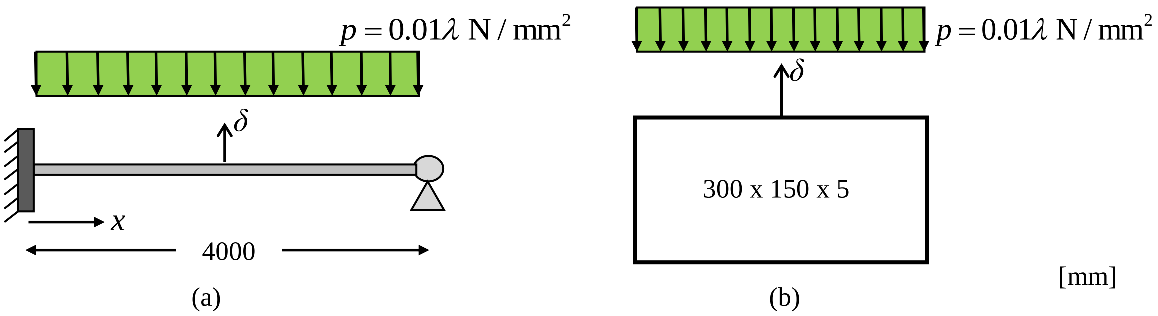


Fig. 6.5. Viga em RHS: (a) vista geral, e (b) carregamento e dimensões da secção.

(p=0.01λN/mm^2) ao longo do banzo superior, como se representa na Fig. 6.5. A discretização da secção considerada na GBT originou 4 sub-placas por banzo e 3 por alma, resultando em 74 modos de deformação (rotações de empenamento consideradas) . No entanto, devido à participação irrelvante dos restantes, apenas 17 foram incluídos na análise (ver Tab. 6.2), dos quais os mais importantes estão representados na Fig. 6.11. Quanto à discretização longitudinal do modelo da GBT, foram usados 6 EFV em $x \leq 0.15L$ e 10 em $x > 0.15L$.

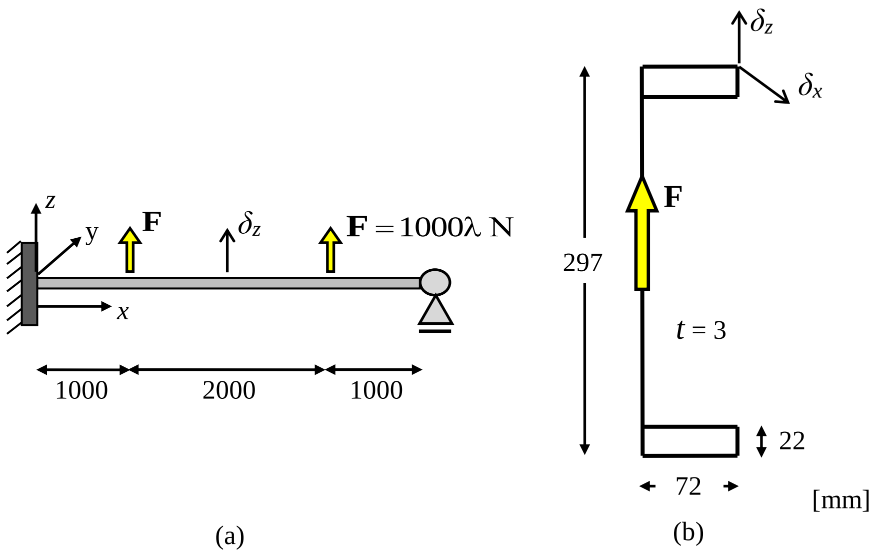


Fig. 6.6. Viga LiteSteel (LSB): (a) vista geral, e (b) carregamento e dimensões da secção.

Por último (Fig. 6.6), analisa-se uma viga LSB ("LiteSteel Beam") encastrada-apoiada (L=4000 mm), constituída por um material elástico-perfeitamente plástico (ver Tab. 6.1) e sujeita a duas forças verticais (F=1000 λ N) aplicadas a meio da alma das secções em x={L/4=1000, 3L/4=3000} mm – as cargas são excêntricas em relação ao centro de corte. Chama-se a atenção para o facto de este tipo de secção ser maioritariamente utilizado em vigas e conduzir a uma elevada eficiência estrutural quando comparada com as laminadas a quente equivalentes (*Anapayan et al. 2011*, *Anapayan e Mahendran 2012*). Na análise da GBT, a secção foi discretizada em 18 sub-placas, o que originou 93 modos de deformação (o g.l. inovador – rotação de empenamento, foi adoptado). Desses modos, apenas 43 foram incluídos na análise (ver Tab. 6.2), dos quais os mais importantes são apresentados na Fig. 6.12. No que respeita à malha de EFV adoptada na GBT, a mesma totaliza 72 EFV com a seguinte distribuição: 8 EFV em $x < 0.15L$ e também em $0.35L \leq x < 0.5L$, 16 EFV em $0.15L \leq x < 0.35L$, e 40 EFV em $x \geq 0.5L$.

6.3.2 Modos de deformação

Nas Figs. 6.7-6.12 apresentam-se as configurações no plano e os perfis axiais dos modos de deformação mais relevantes em cada análise da GBT, estando a discretização da secção representada juntamente com os modos de extensão transversal. Os modos estão identificados com o seu número após renumeração, uma vez que o grupo de modos seleccionado constitui uma fracção do total de modos (ver Tab 6.2).

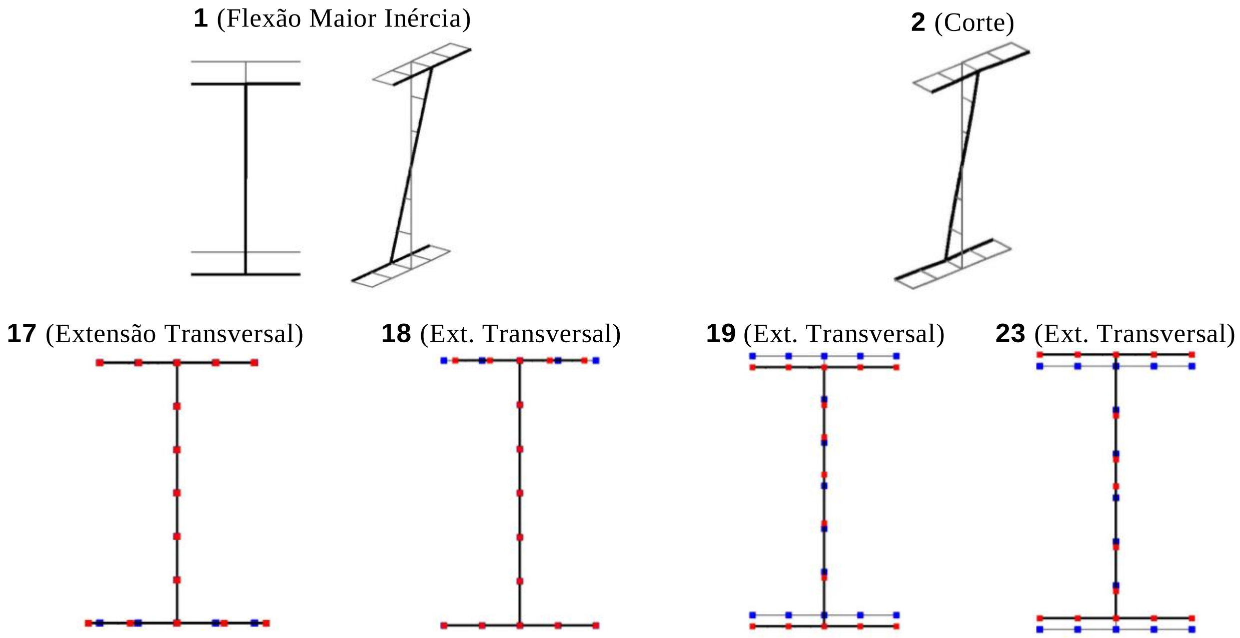


Fig. 6.7. Viga em I: configurações no plano e perfis axiais dos 6 modos de deformação da GBT mais relevantes.

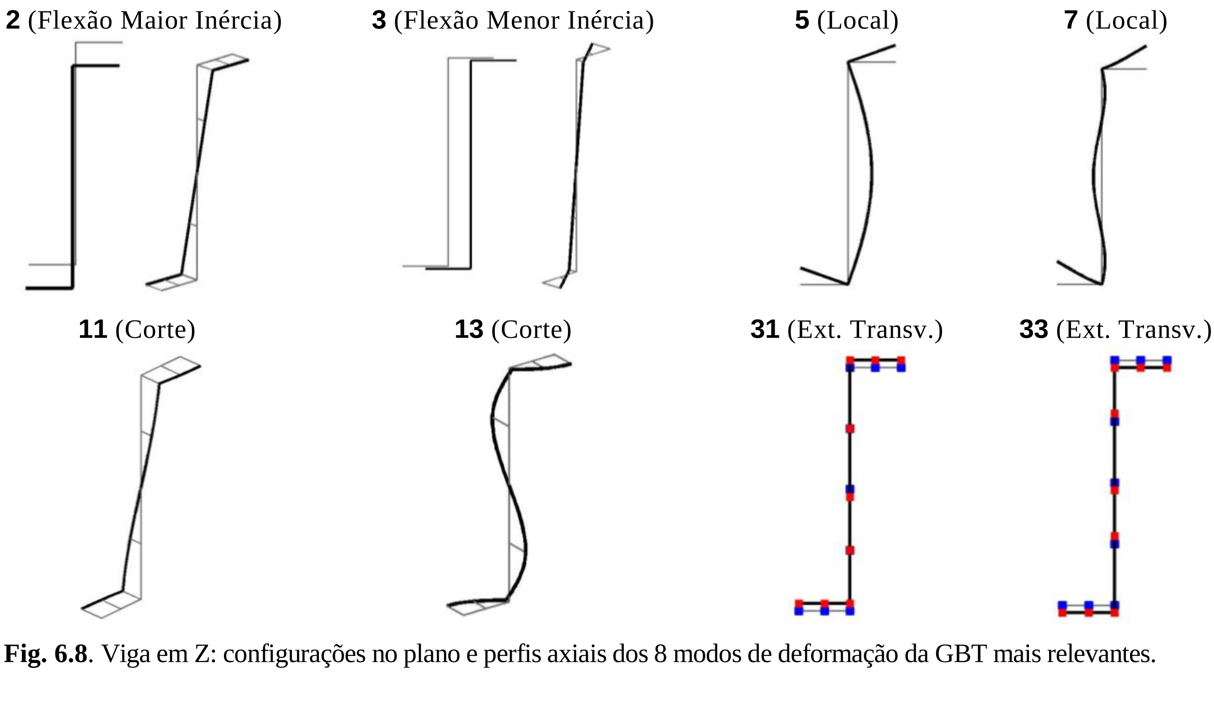


Fig. 6.8. Viga em Z: configurações no plano e perfis axiais dos 8 modos de deformação da GBT mais relevantes.

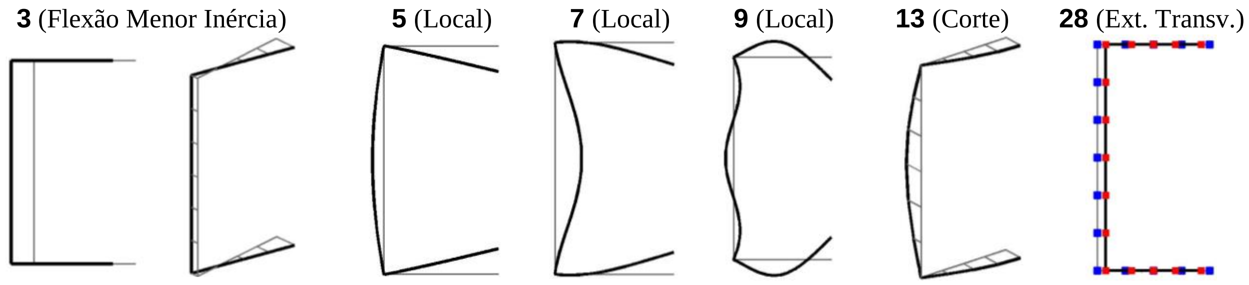


Fig. 6.9. Viga em C: configurações no plano e perfis axiais dos 6 modos de deformação da GBT mais relevantes.

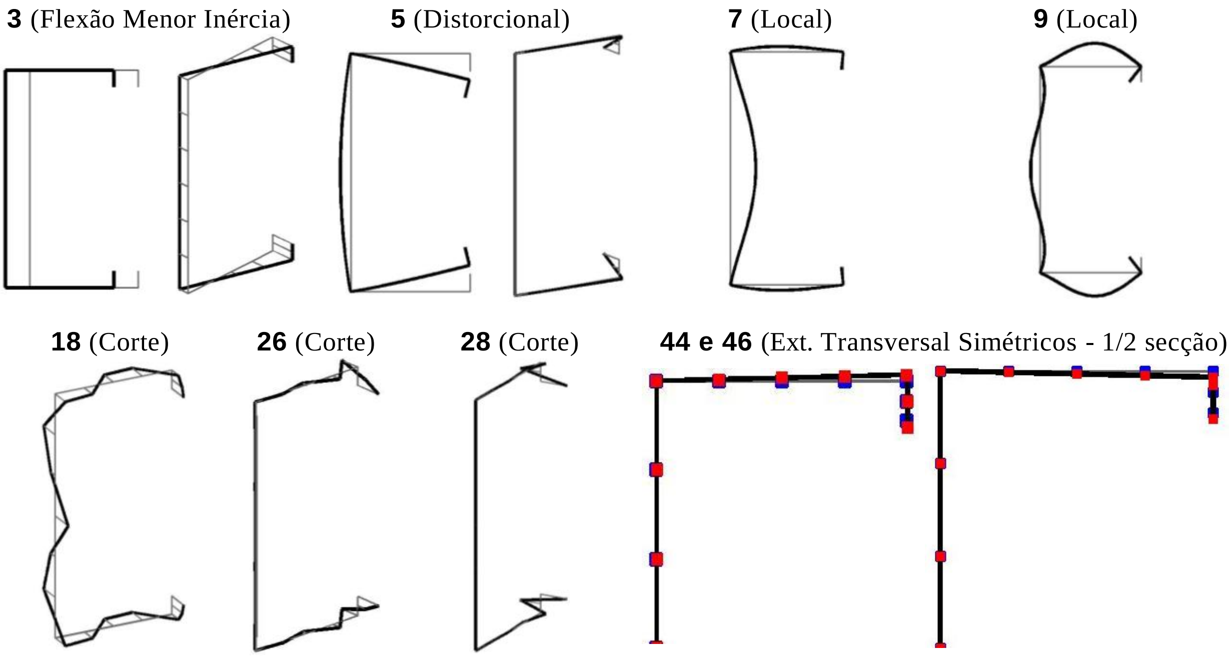


Fig. 6.10. Viga em C-reforçado: configurações no plano e perfis axiais dos 9 modos de deformação da GBT mais relevantes.

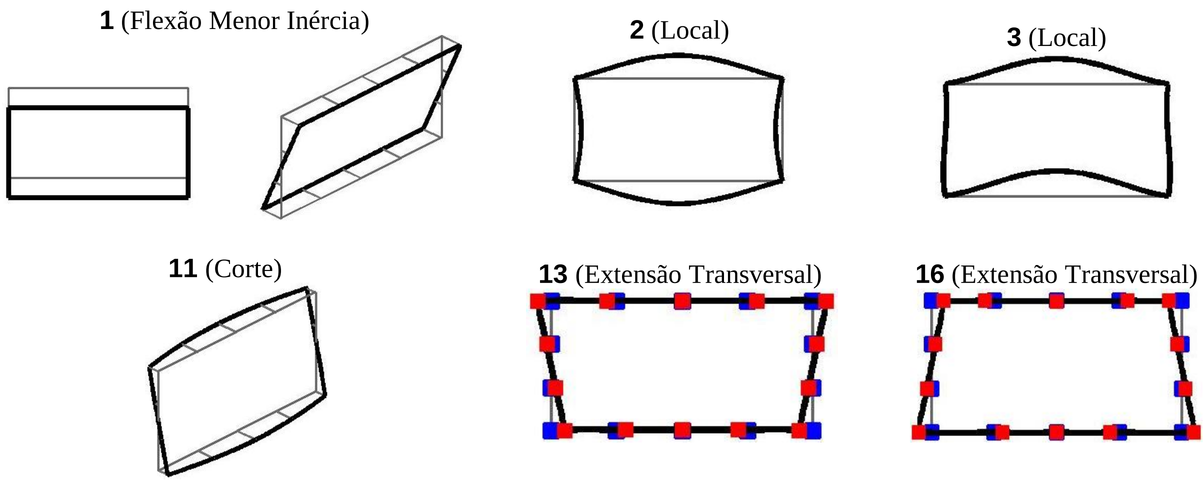


Fig. 6.11. Viga em RHS: configurações no plano e perfis axiais dos 6 modos de deformação da GBT mais relevantes.

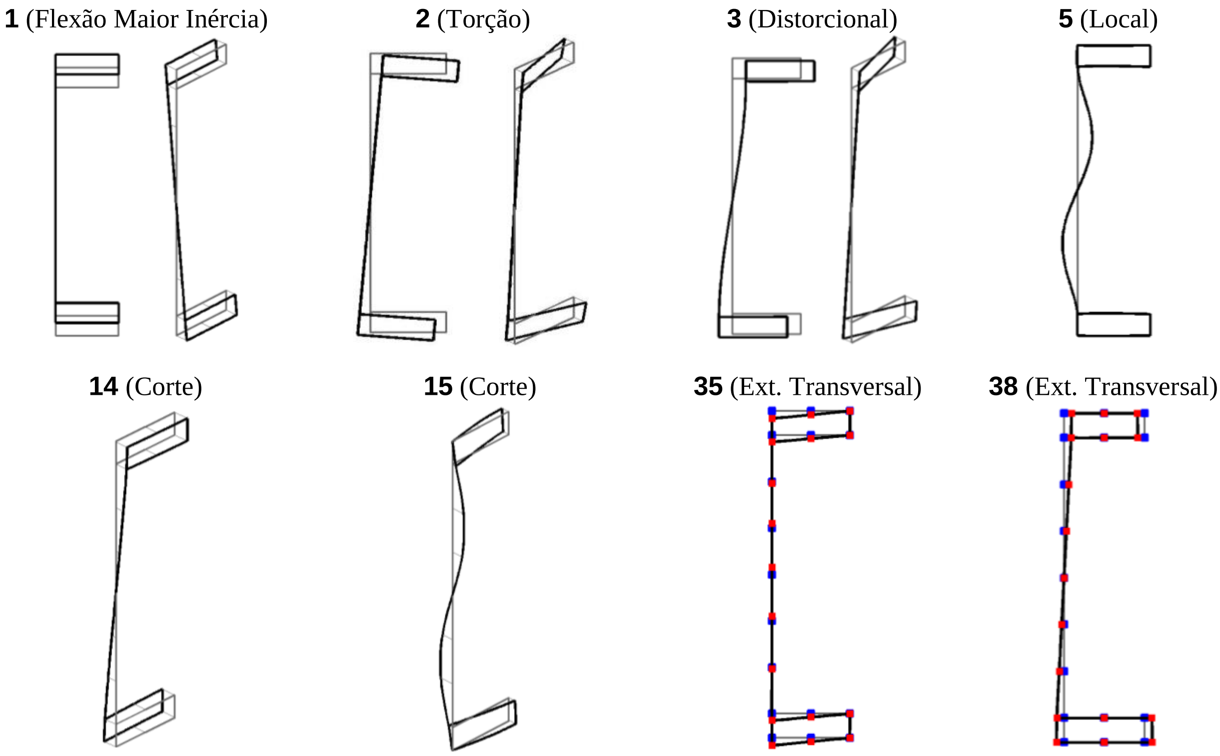


Fig. 6.12. Viga LiteSteel (LSB): configurações no plano e perfis axiais dos 8 modos de deformação da GBT mais relevantes.

6.3.3 Resultados – validação e vantagens da análise modal

Antes de apresentar os resultados relativos à validação dos modelos da GBT, importa referir que foram seleccionadas três configurações (estados) de equilíbrio em cada exemplo, estando identificados nas curvas λ vs δ pelas letras E (regime elástico), EP (regime elasto-plástico antes do *plateau*) e P (regime elasto-plástico sobre o *plateau* – colapso). A identificação destas três configurações permitirá comparar da melhor forma os resultados entre a GBT e o Abaqus em diferentes fases da trajectória de equilíbrio. Nos casos da secção em Z e C-reforçado, como serão utilizados materiais com endurecimento (ou seja, a resposta não exibirá *plateau*), os dois últimos pontos serão indicados por EP1 e EP2. Por último, é importante referir qual o algoritmo de retorno (abordado no capítulo 4) utilizado no modelo de plasticidade de cada problema abordado nesta secção – o método da Normal Média para as secções em Z e em C-reforçado, e o *Euler* Regressivo para os restantes casos.

Viga em I

A Fig. 6.13(a) exibe as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta)$ (curvas parâmetro de carga-deslocamento) obtidas através da GBT e do Abaqus, onde δ é o deslocamento vertical a meio vão (x=750 mm) do nó de ligação alma-banzo superior (ver Fig. 6.1 (b)). Observa-se que ambas as trajectórias estão virtualmente coincidentes – a diferença nunca excede 1.6%. As três configurações/estados de equilíbrio indicados sobre a curva (E, EP e P) correspondem aos seguintes valores: (i) λ_{GBT}=64.39 + λ_{ABQ}=64.00 (E), (ii) λ_{GBT}=109.57 + λ_{ABQ}=110.00 (EP) e (iii) λ_{GBT}=121.05 + λ_{ABQ}=123.00 (P). A Fig. 6.13(b) apresenta o diagrama de participação modal[15] relativo à evolução (com o evoluir da carga) da configuração deformada da secção de meio vão. Os seguintes comentários são possíveis:

(i) O modo de flexão na maior inércia (modo **1** na Fig. 6.7) domina o comportamento estrutural em toda a trajectória de equilíbrio. Até ao estado E a participação do modo **1** chega a atingir os 95 %, sendo os modos de extensão transversal responsáveis pelos restantes 5%.

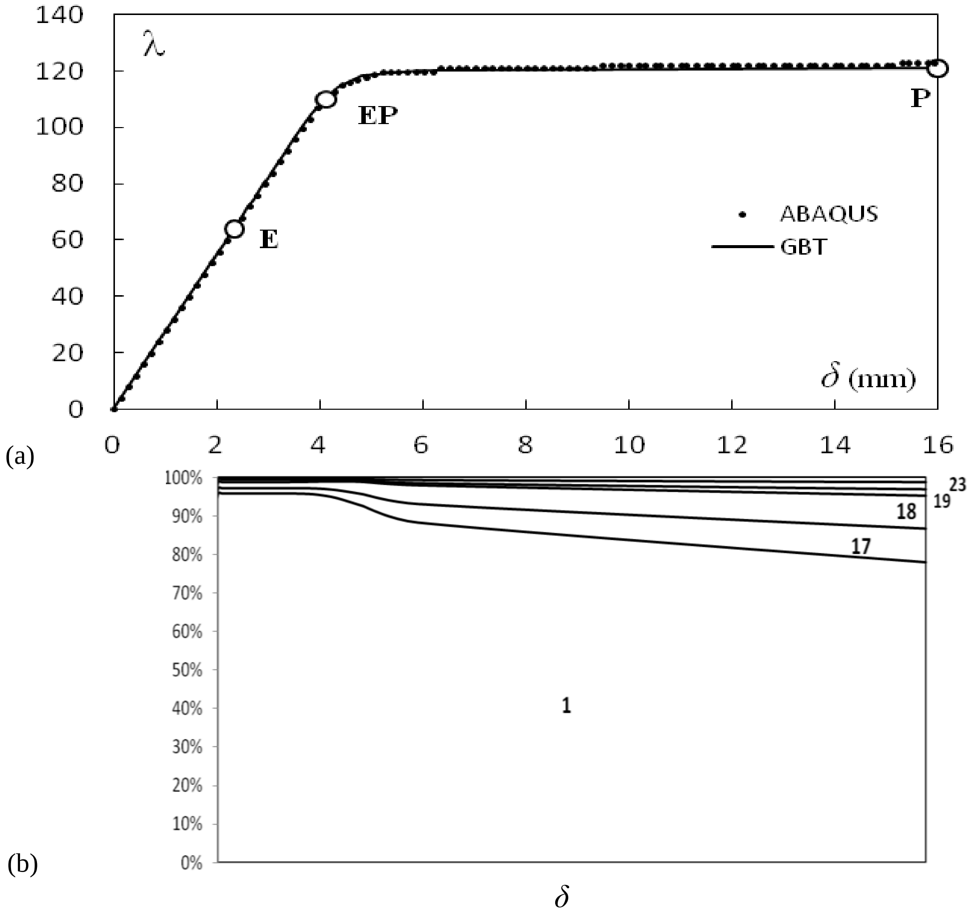


Fig. 6.13. (a) Trajectórias de equilíbrio obtidas pelo Abaqus e GBT, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

15 Este tipo de diagramas tem como referência a secção transversal "mais deformada" da barra, i.e., aquela que exibe o máximo deslocamento tri-dimensional ou no plano (*input* do programa). A contribuição de cada modo de deformação é quantificada pelo rácio entre (i) o seu deslocamento máximo tri-dimensional nessa secção e (ii) a soma de todos esses valores modais, os quais não ocorrem necessariamente no mesmo ponto (a soma de todas as participações é unitária, ou 100%) – informação detalhada sobre o conceito de participação modal é apresentada na sub-secção 2.4.3 do capítulo 2.

(ii) Entre os estados E e P, as contribuições dos modos de ET dos banzos **17** e **18** (ver Fig. 6.7) aumentam visivelmente (até 9% cada) devido ao efeito de *Poisson*, enquanto que a participação do modo **1** decresce natural e gradualmente até cerca de 78 % (os modos de ET da alma são responsáveis pelos restantes 4%). É importante chamar a atenção para o papel essencial dos modos de ET na resposta elastoplástica da barra – a sua exclusão resultaria numa sobreestimativa nítida da carga última e nem mesmo a resposta elástica seria simulada com precisão.

A Fig. 6.14(a) exibe os perfis longitudinais para os estados E, EP e P relativos ao deslocamento vertical do nó banzo superior-alma, constatando-se uma concordância perfeita entre a GBT e o Abaqus. Na Fig. 6.14(b), são mostrados os diagramas de tensões axiais σ_{xx} ao longo da alma (de baixo para cima) da secção localizada em x=696 mm, observando-se que (i) os valores da GBT e do Abaqus estão praticamente coincidentes nas configurações E e EP, e (ii) discrepâncias visíveis (10-15%) ocorrem no estado P junto aos banzos. Essas diferenças estão associadas às discrepâncias ainda mais significativas observadas relativamente às (i) tensões de corte (σ_{xs}), mas principalmente (ii) transversais (σ_{ss}), assuntos abordados em breve. Note-se ainda que o diagrama σ_{xx} na configuração E não é linear, como seria de esperar pela teoria de *Euler-Bernoulli*, estando a distribuição ligeiramente não linear (junto às ligações alma-banzo) associada ao efeito de *shear lag* (abordado em 2.4.4 – capítulo 2).

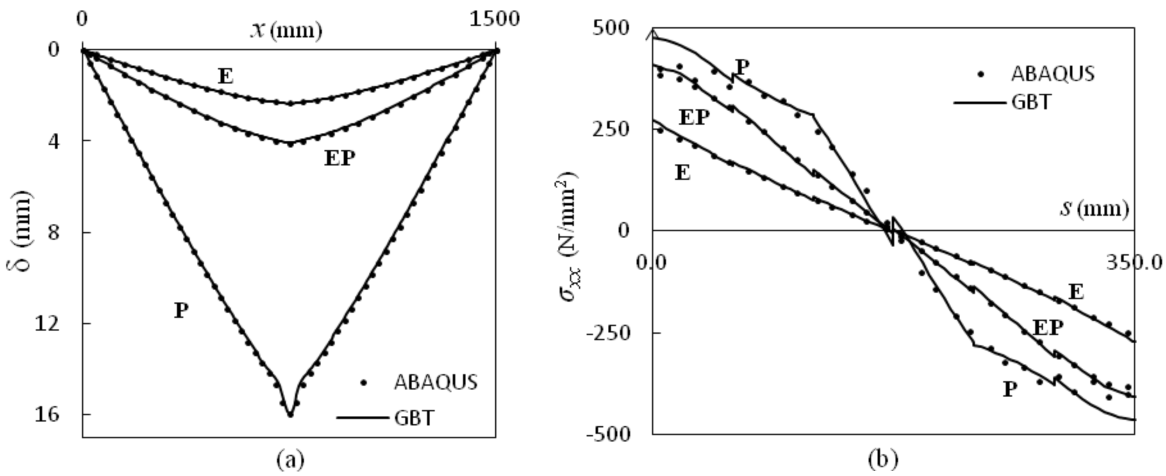


Fig. 6.14. (a) Perfis longitudinais do deslocamento vertical do nó alma-banzo superior, e (b) diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) na alma da secção em x=696 mm – configurações de equilíbrio E, EP e P.

A Fig. 6.15 mostra, na configuração E, os diagramas de tensões transversais (σ_{ss}) ao longo da alma (de baixo para cima) da secção em x=696 mm – ao contrário do previsto pela teoria clássica de vigas, esta componente de tensão exibe valores não desprezáveis. Para além disso, observam-se diferenças significativas entre os resultados da GBT e do Abaqus (o que também se aplica nos estados EP e P), as quais ocorrem pelos seguinte motivos:

(i) A variação linear dos deslocamentos $u(s)$ e $v(s)$ em cada sub-placa. Sabe-se que em regime elástico (ver Eqs. (2.6) e (2.9) no capítulo 2), σ_{ss} é função de (i$_1$) $v_{k,s}$, constante em cada sub-placa, e (i$_2$) u_k, linear em cada sub-placa.

(ii) A discretização da secção: a malha da GBT é consideravelmente menos refinada que a do Abaqus – por exemplo, a alma contém 6 sub-placas na GBT e 14 elementos no Abaqus.

Apesar das diferenças evidentes entre os diagramas σ_{ss} da Fig. 6.15, note-se que quatro dos pontos médios das linhas inclinadas da GBT (correspondendo às quatro sub-placas internas) estão muito próximos dos valores do Abaqus. A utilização de uma malha mais refinada na GBT conduziria muito provavelmente a discontinuidades menores no diagrama σ_{ss}. Contudo, foi concluído neste exemplo que essas diferenças têm um impacto pouco significativo na qualidade global dos resultados da GBT (*e.g.*, Figs. 6.13(a), 6.14(a)-(b)). Note-se que até as distribuições tri-dimensionais (ou *contours*) de tensões σ_{ss} obtidas pelo Abaqus e GBT no colapso (estado P), são qualitativamente bastante semelhantes, como se pode observar na Fig. 6.16.

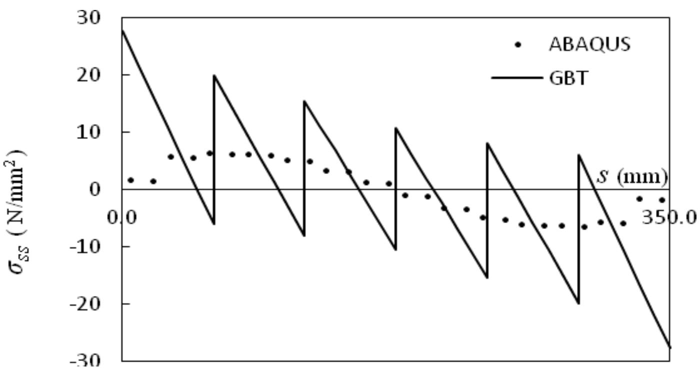


Fig. 6.15. Diagramas de tensões transversais (σ_{ss}) na alma da secção em x=696 mm (configuração E).

Os diagramas de tensões de corte σ_{xs} na alma da secção em x=696 mm, para os estados de quilíbrio E, EP e P, são apresentados nas Figs. 6.17(a)-(b). É observada uma boa concordância entre o Abaqus e a GBT, apesar das discontinuidades da aproximaçao da GBT – relembra-se que σ_{xs} depende, em regime elástico, de v_k e $u_{k,s}$ (ver (2.9)). A adopção do g.l. de rotação de empenamento (u_k seria não linear em cada sub-placa) e/ou o refinamento da malha da secção, são soluções verossímeis para o “problema”. Importa também não esquecer que problemas que envolvam plasticidade são invariavelmente caracterizados por uma interacção entre componentes de tensão, pelo que a ocorrência de singularidades numa componente particular pode “contaminar” as restantes. No entanto, apesar das diferenças observadas entre os diagramas do Abaqus e da GBT apresentados até agora, a Fig. 6.18 mostra que os correspondentes diagramas da tensão de *von Mises* (σ_{Mises}) são muito semelhantes para os 3 estados de equilíbrio E, EP e P – as diferenças nunca excedem os 4.5 %. No estado E, a tensão σ_{Mises} exibe valores

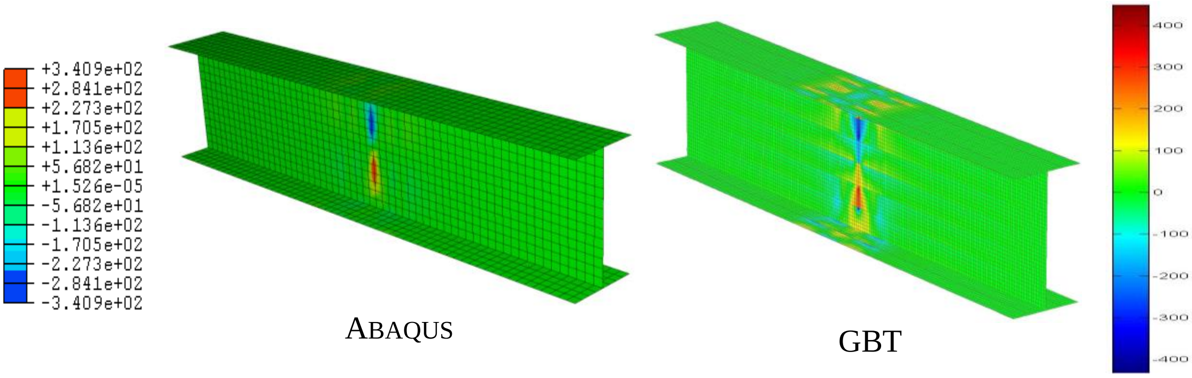


Fig. 6.16. *Contours* de tensões transversais σ_{ss} (N/mm^2) obtidos pelo Abaqus e GBT no colapso (estado P).

máximo e mínimo nos nós alma-banzo e ponto central da alma, respectivamente, o que resulta das tensões σ_{xx} serem muito mais relevantes que as restantes. À medida que a carga aumenta (evolução de E para P), as zonas afastadas da linha neutra vão cedendo sequencialmente em direcção à mesma, até que no colapso (P) a alma encontra-se totalmente plastificada ($\sigma_{Mises} = \sigma_0{}^y$).

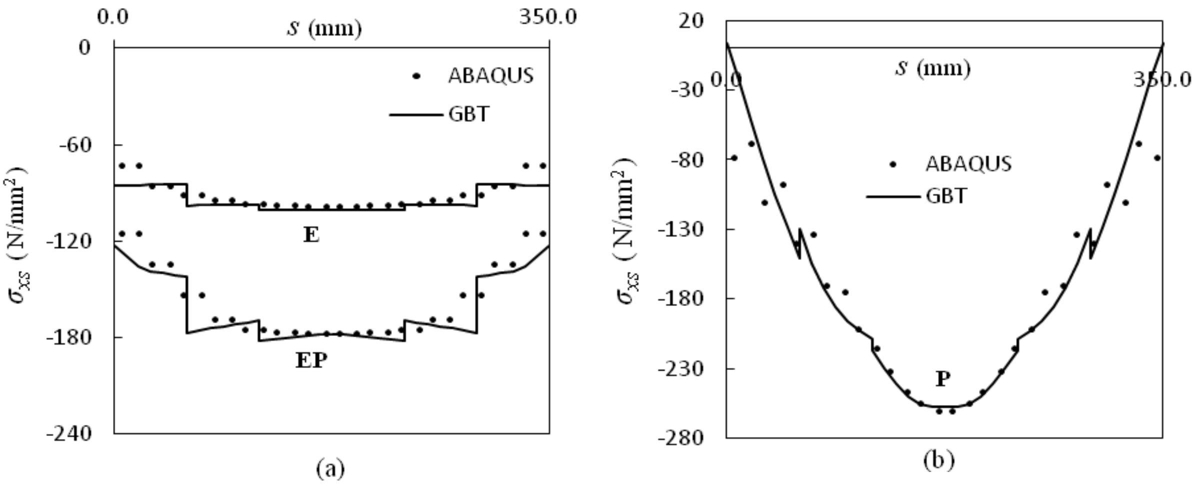


Fig. 6.17. Diagramas de tensões de corte (σ_{xs}) na alma da secção em x=696 mm – estados de equilíbrio (a) E + EP e (b) P.

As Figs. 6.19 e 6.20 ilustram os *contours* de tensões σ_{xs} e σ_{Mises} no colapso (estado P), sendo observada uma notável semelhança entre os resultados do Abaqus e da GBT. Relativamente ao *contour* σ_{Mises} da GBT, chama-se a atenção para a estreita faixa amarela que aparece na alma a meio vão, a qual é inexistente no resultado do Abaqus devido às discrepâncias entre tensões σ_{ss} discutidas anteriormente (ver Figs. 6.15 e 6.16). Para além disso, uma zona plastificada (σ_{Mises}=$\sigma_0{}^y$) a meio vão correspondente à “formação da rótula plástica” é clara nas distribuições de σ_{Mises}. Nessa zona, é possível observar que as extremidades livres dos banzos cedem primeiro que a zona central (o oposto do previsto pela teoria clássica), o que é consequência da distribuição de tensões transversais σ_{ss} – de acordo com o critério de *von Mises* (ver Eq. (4.1) e/ou Fig. 4.1(b) no capítulo 4) as tensões σ_{Mises} e σ_{ss} podem ser inversamente proporcionais.

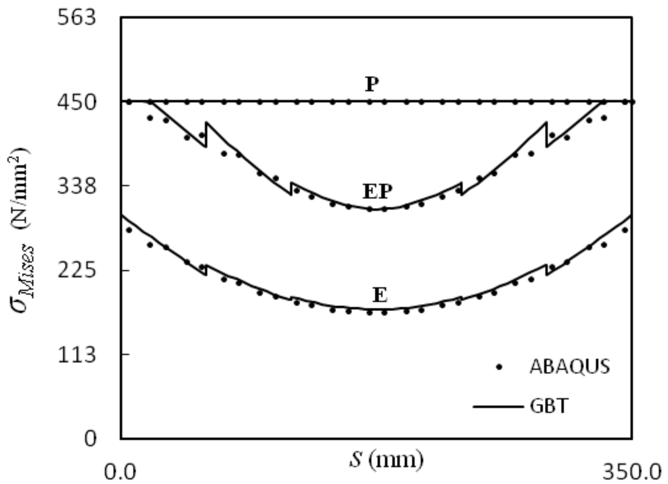


Fig. 6.18. Diagramas de tensão de *von Mises* (σ_{Mises}) na alma da secção em x=696 mm (configurações E, EP e P).

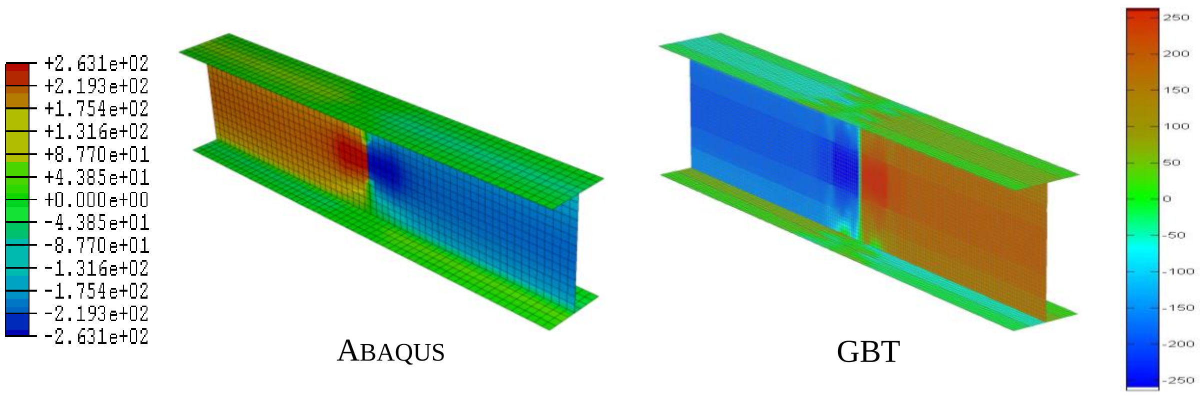


Fig. 6.19. *Contours* de tensões de corte σ_{xs} (N/mm^2) obtidos pelo Abaqus e GBT no colapso (estado P).

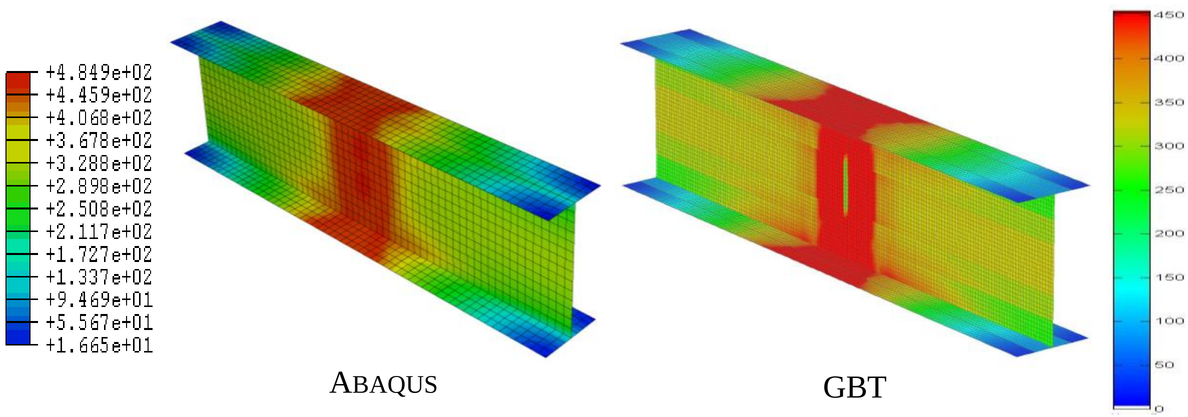


Fig. 6.20. *Contours* de tensões de *von Mises* σ_{Mises} (N/mm^2) obtidos pelo Abaqus e GBT no colapso (estado P).

Finalmente, a Fig. 6.21 mostra as configurações deformadas da viga no colapso (P). Mais uma vez, a comparação entre os *outputs* do Abaqus e da GBT é muito boa, sendo perfeitamente perceptível a ocorrência de deformação localizada nos banzos e de distorção da alma na zona totalmente plastificada de meio vão ("rótula plástica").

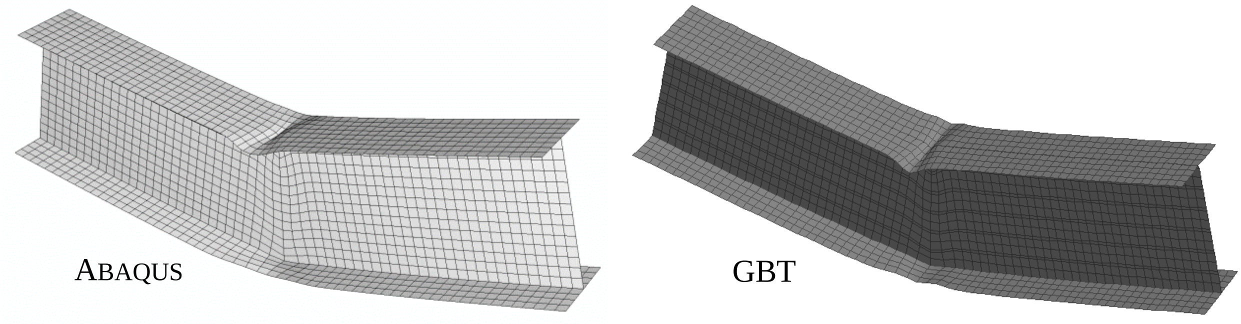


Fig. 6.21. Configuração deformada (amplificada 10x) no colapso (estado P).

Viga em Z

Apresentam-se na Fig. 6.22(a) as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta)$ do Abaqus e GBT relativas às três curvas tensão-deformação utilizadas (E_t=0, E_t=E/100 e E_t=E/50), onde δ é o deslocamento vertical a meio vão do nó de extremidade do banzo superior (ver Fig. 6.2(b)). Os parâmetros de carga correspondentes aos estados de equilíbrio (E, EP1 e EP2) indicados em cada curva são dados na Tab. 6.3 – cada conjunto de três valores de λ correspondem aproximadamente ao mesmo deslocamento δ. A Fig. 6.22(b) diz respeito a E_t=E/100 e mostra o diagrama de participação modal da GBT relativo à evolução da configuração deformada da secção de meio vão ao longo da respectiva curva $\lambda(\delta)$ – este diagrama é muito semelhante aos obtidos para E_t=0 e E_t=E/50. A observação dos resultados apresentados nas Figs. 6.22(a)-(b) permite mostrar os seguintes comentários:

(i) Há uma excelente correlação entre as curvas do Abaqus e da GBT (diferenças inferiores a 2.2%).

(ii) A análise da GBT para E_t=0 origina uma carga de cedência inicial p_y=0.233 N/mm^2, e uma carga "plástica" p_p=0.363 N/mm^2, o que resulta numa reserva de resistência inelástica p_p/p_y=1.56.

(iii) Naturalmente, as três trajectórias de equilíbrio coincidem até à cedência inicial e começam a divergir desde o início do regime elasto-plástico. Note-se que o declive de endurecimento E_t (ou módulo tangente) não é "totalmente reflectido" na resposta estrutural, pois o rácio entre os declives de $\lambda(\delta)$ em EP2 para E_t=E/50 e E_t=E/100 vale 1.59 (inferior a 100/50=2).

(iv) Ao longo da curva E_t=E/100, a configuração deformada da secção de meio vão inclui participações dos modos **2** (flexão na maior inércia), **3** (flexão na menor inércia), **5** (local) e **7** (local). Estas contribuições variam ligeiramente ao longo da trajectória de equilíbrio, nomeadamente 12.5 – 13.6% para o modo **2**, 74.5 – 76.5% para o modo **3**, 8.1 – 9.3% para o modo **5**, e 1.7 – 3.5% para o modo **7**. Claramente que os modos de flexão **2** e **3** dominam a resposta, sendo o **7** aquele que apresenta uma maior variação percentual (aumenta consideravelmente no início do regime inelástico).

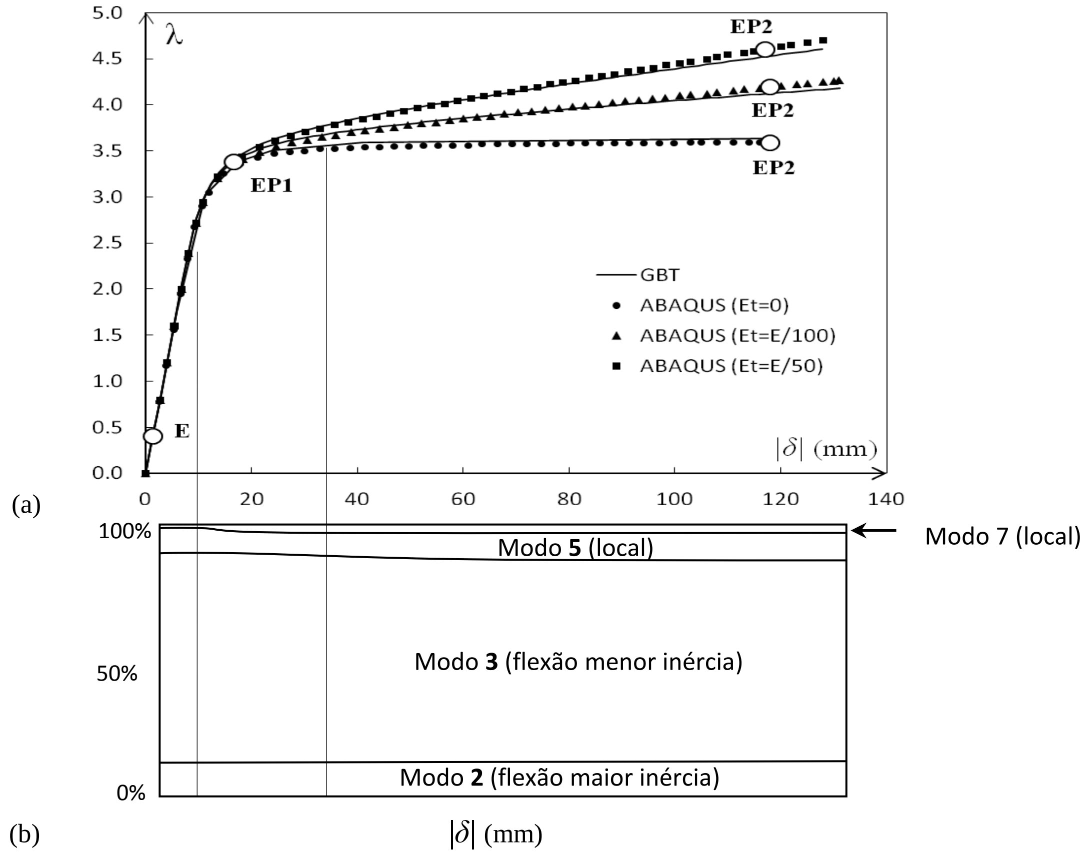


Fig. 6.22. (a) Trajectórias de equilíbrio (E_t = 0; E/100; E/50), e (b) diagrama de participação modal da GBT (E_t = E/100).

A Fig. 6.23(a) diz respeito a E_t=E/100 e aos estados EP1 e EP2, apresentando os perfis longitudinais da GBT e do Abaqus relativos ao deslocamento vertical $\delta(x)$ da extremidade do banzo superior. A Fig. 6.23(b) apresenta os perfis $\delta(x)$ relativos a EP2 e E_t={0, E/100, E/50}. Para além da concordância notável entre o Abaqus e a GBT, a observação das Figs. 6.23 permite fazer o seguinte comentário:

(i) Embora os perfis da Fig. 6.23(b) tenham a mesma amplitude (ver Fig. 6.22(a)), nota-se um decréscimo das curvaturas à medida que E_t aumenta, particularmente visível na zona de meio vão. Este comportamento deve-se ao facto de existir uma degradação de rigidez (devido à plasticidade) menos localizada para valores mais elevados de E_t – não faz sentido falar em formação de rótula plástica numa análise de 1ª ordem com $E_t \neq 0$.

Tab. 6.3. Valores dos parâmetros de carga nos estados de equilíbrio E, EP1 e EP2.

E_t	E			EP1			EP2		
	$\|\delta\|$ (mm)	λ_{GBT}	λ_{ABQ}	$\|\delta\|$ (mm)	λ_{GBT}	λ_{ABQ}	$\|\delta\|$ (mm)	λ_{GBT}	λ_{ABQ}
0		0.39	0.39		3.38	3.36		3.63	3.59
***E*/100**	1.33	0.40	0.40	17.12	3.40	3.36	117.93	4.13	4.19
***E*/50**		0.40	0.40		3.42	3.38		4.53	4.60

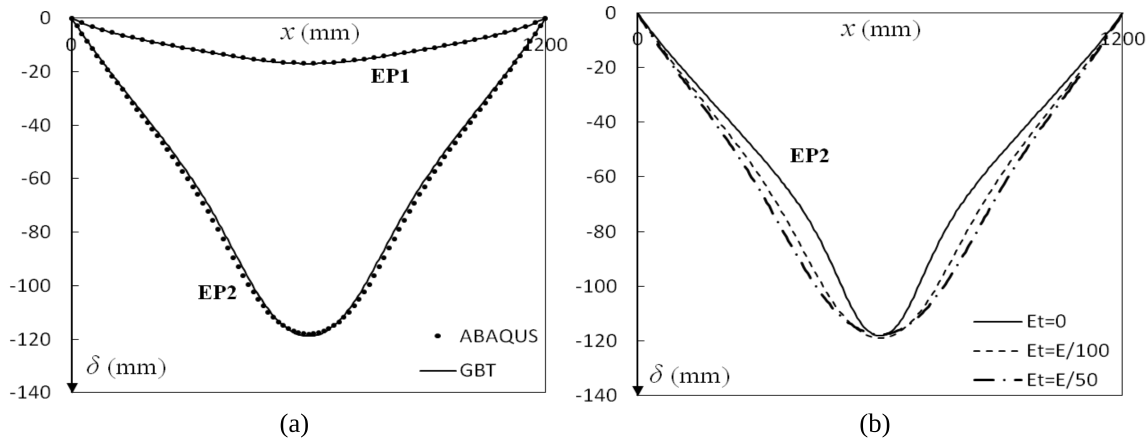


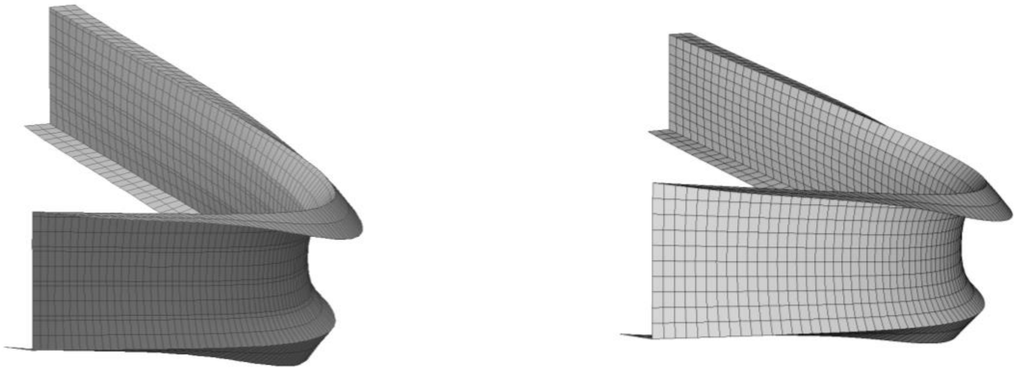
Fig. 6.23. Perfis longitudinais $\delta(x)$ para (a) Et=E/100 e estados EP1, EP2 , e (b) Et={0; E/100; E/50} e estado EP2.

A Fig. 6.24 exibe a vista tri-dimensional da deformada da viga E_t=E/50 no estado EP2. Para além da grande semelhança entre os *outputs* do Abaqus e GBT, vale a pena chamar a atenção para a ocorrência de deformação local a meio vão, envolvendo a flexão transversal da alma (curvatura simples) e as correspondentes rotações dos banzos em sentidos opostos, o que reflecte as contribuições dos modos **5** (principalmente) e **7** (ver Fig. 6.8). Para além disso, é interessante constatar que, embora a carga distribuída actue na vertical, a viga exibe um deslocamento lateral significativo, o que está em concordância com a participação dominante do modo de flexão na menor inércia (**3**). Relembra-se que este é um problema de flexão desviada em que o momento de inércia mínimo é muito inferior ao máximo (I_{II}/I_I=0.019). No contexto de uma análise global de 1ª ordem (i.e., incluindo apenas os modos **2** e **3**), o ângulo entre o momento aplicado e a linha neutra é de 74.21º (sentido oposto ao dos ponteiros do relógio), um valor elevado que indica que a linha neutra é "quase" vertical (como seria expectável).

A Fig 6.25(a) diz respeito a E_t=E/50 e aos estados E, EP1 e EP2, exibindo os diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) do Abaqus e da GBT na secção em x=597 mm. De modo a avaliar a influência do endurecimento, a Fig. 6.25(b) mostra os diagramas $\sigma_{xx}(s)$ da GBT na mesma secção para o estado EP2 e E_t={0; E/100; E/50}. Merecem destaque as seguintes observações às Figs. 6.25:

(i) Embora a comparação de resultados entre o Abaqus e a GBT seja bastante satisfatória, são evidentes as discontinuidades existentes ao longo dos diagramas da GBT para os estados EP1 e

EP2. Estas singularidades, anteriormente abordadas no 1º exemplo numérico (viga em I), resultam da aproximação linear (em cada sub-placa) dos deslocamentos transversais $v(s)$, facto que normalmente conduz a diagramas ε_{ss} discontínuos entre sub-placas. Como referido anteriormente, um refinamento da malha da GBT ao nível da secção pode resolver este tipo de discontinuidade.



GBT ABAQUS

Fig. 6.24. Configuração deformada da viga E_t=E/50 no estado de equilíbrio EP2.

(ii) A Fig. 6.25(a) permite concluir que a tensão máxima ocorre nos cantos da secção para qualquer nível de carga, o que está de acordo com a predominância do modo **3** (ver Fig. 6.22(b)). Pode-se também afirmar que a posição da linha neutra permance aproximadamente inalterada – passa pelo centro de gravidade (ponto médio da alma – ponto de simetria) e intersecta os banzos.

(iii) A Fig 6.25(b) mostra claramente que o diagrama σ_{xx} exibe uma variação mais significativa (nas regiões de maiores tensões) à medida que o endurecimento (E_t) aumenta.

Finalmente, as Figs. 6.26(a)-(b) referem-se ao estado de equilíbrio EP2 e apresentam (i) os diagramas de tensões de *von Mises* (σ_{Mises}) na secção em x=597 mm para E_t = 0; E/100; E/50, e (ii) os *contours* de σ_{Mises} da GBT para E_t = 0; E/50. Sobre as figuras mencionadas importa referir que:

(i) A correlação entre os resultados do Abaqus e da GBT pode-se considerar satisfatória, apesar de a GBT não captar os valores mínimos dos diagramas do Abaqus, os quais ocorrem nos pontos de intersecção da linha neutra com os banzos – note-se que as vizinhanças desses pontos são caracterizadas por elevados gradientes de tensões σ_{xx} (ver Fig. 6.25(a)) e chama-se a atenção para o facto das abcissas (s) das tensões do Abaqus não coincidirem com as usadas na GBT. No entanto, as diferenças entre a GBT e o Abaqus no restante domínio dos diagramas não excedem os 5%.

(ii) Um valor do módulo tangente (E_t) superior conduz a um aumento da tensão σ_{Mises} na alma da secção (ver Figs. 6.26(a)-(b)) e a um maior espalhamento de plasticidade na direcção axial da barra (ver Fig. 6.26(b)), facto que resulta do parâmetro de carga ser superior (relembrar EP2 na Fig. 6.22(a)).

(iii) A Fig. 6.26(b) também permite concluir que a cedência (σ_{Mises}=σ_0^y) tem início nos cantos da secção, espalhando-se depois para a alma e posteriormente para os banzos.

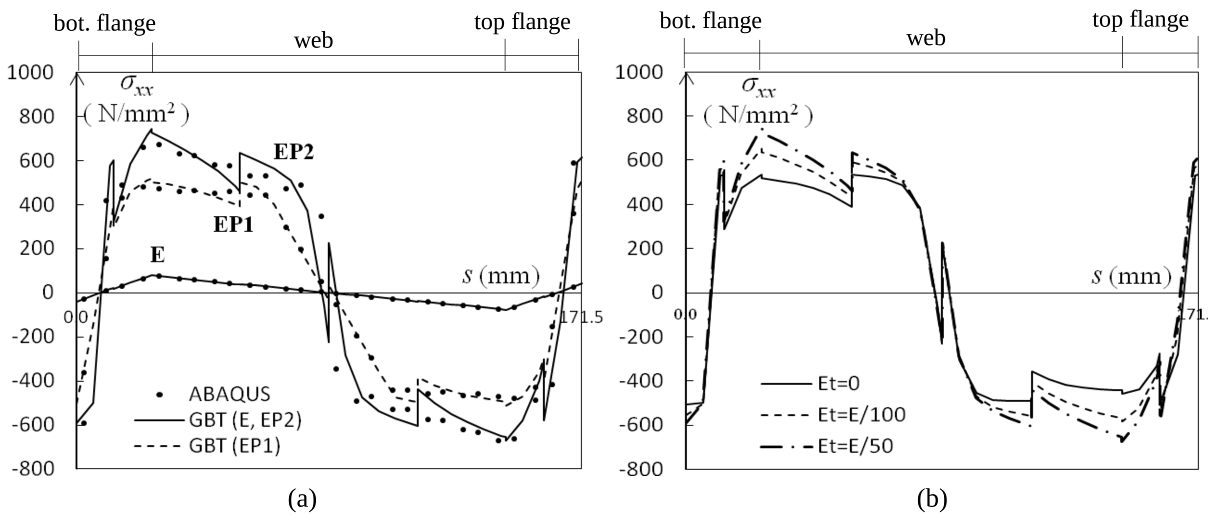


Fig. 6.25. Diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) na secção em x=597 mm: (a) estados E, EP1 e EP2 (E_t =E/50), e (b) estado EP2 (E_t=0; E/100; E/50) da GBT.

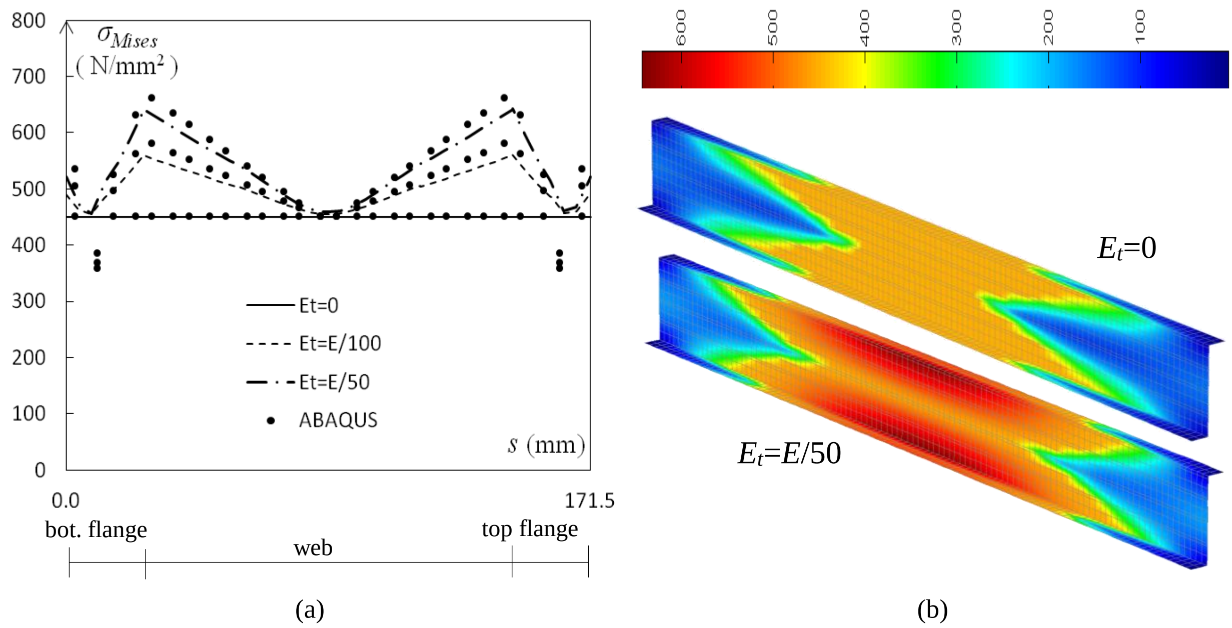


Fig. 6.26. Tensões de *von Mises* (σ_{Mises}) relativas ao estado EP2: (a) diagramas na secção em x=597 mm (E_t = 0; E/100; E/50), e (b) *contours* (N/mm^2) para E_t = 0; E/50 (GBT).

Viga em C

A Fig. 6.27(a) mostra as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta)$ do Abaqus e da GBT, onde δ é o deslocamento horizontal a meio vão do ponto central da alma (ver Fig. 6.5(b)). Por baixo da curva da GBT (Fig. 6.27(b)) representa-se o respectivo diagrama de participação modal. Após observar as figuras mencionadas concluiu-se que:

(i) As duas trajectórias de equilíbrio estão quase coincidentes e os valores de λ dos estados E, EP e P indicados são: (i_1) λ_{GBT}=8.85+λ_{ABQ}=8.85 (E), (i_2) λ_{GBT}=55.21+λ_{ABQ}=55.20 (EP) e (i_3) λ_{GBT}=58.44+λ_{ABQ}=58.40 (P).

(ii) Segundo a GBT, os parâmetros de carga associados ao início da cedência e ao colapso elasto-plástico (*plateau*) valem λ_y=26.43 (F_y=23787 N) e λ_p=58.44 (F_p=52596 N), respectivamente, o que corresponde a uma reserva de resistência inelástica dada por F_p/F_y=2.21[16].

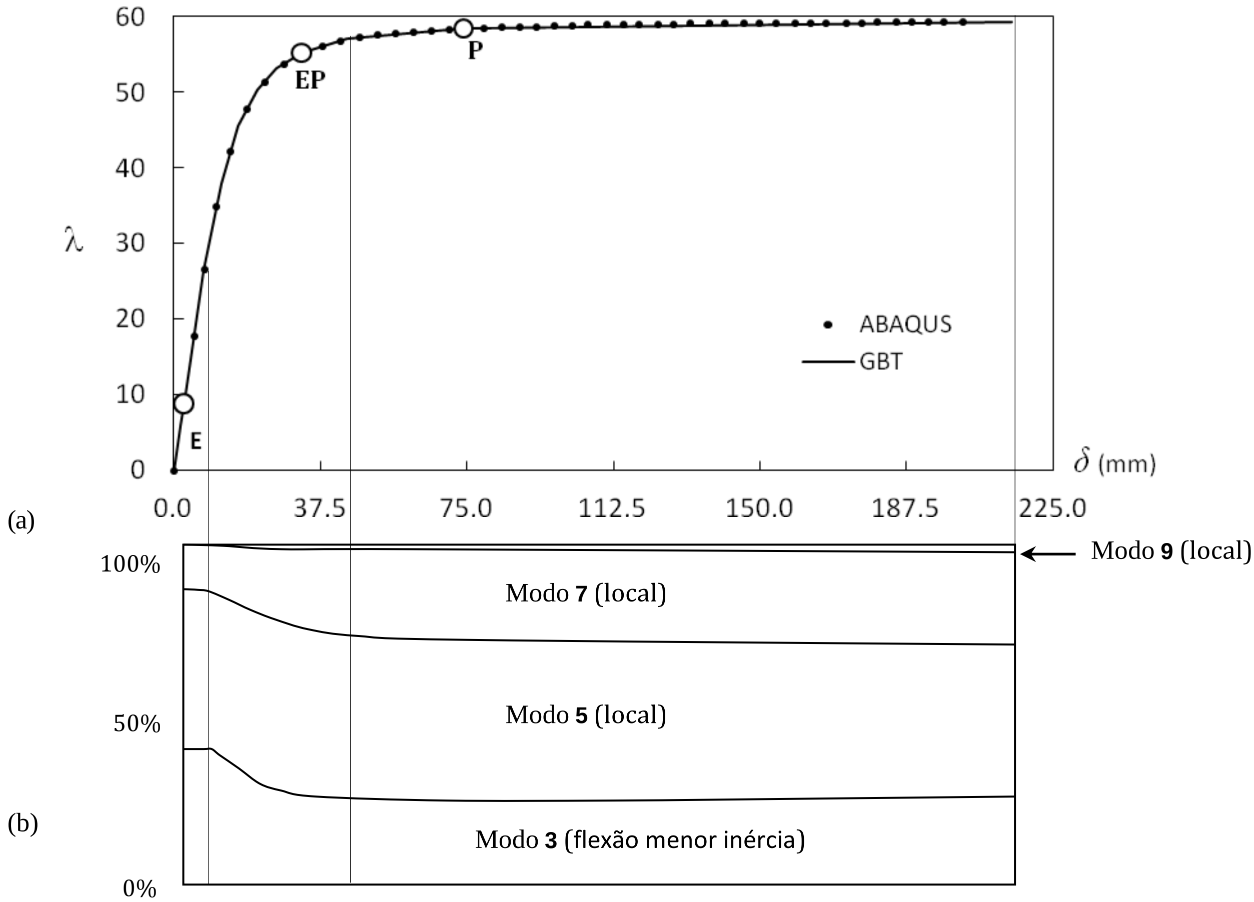


Fig. 6.27. Trajectórias de equilíbrio obtidas através do Abaqus e da GBT, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

16 Este rácio deve fornecer uma boa aproximação do factor de forma da secção se o perfil correspondente for isostático.

(iii) De acordo com o diagrama de participação modal, os modos de deformação mais relevantes (ver Fig. 6.9) são (iii$_1$) a flexão na menor inércia (modo **3:** 24.1 – 39.7%) e (iii$_2$) os modos locais **5** (41.7 – 49.3%) e **7** (13.1 – 26.2%). Note-se que o modo **5** quase não varia a sua participação com o aumento da deformação, à semelhança dos outros dois modos na fase de colapso (*plateau*).

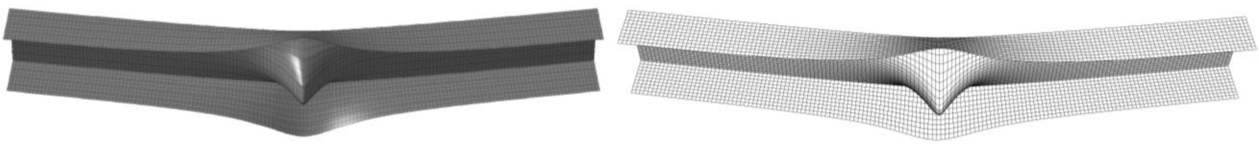
(iv) A contribuição do modo **9** é desprezável em regime elástico, atingindo 3.0% em regime elasto-plástico – a sua variação durante o colapso é, tal como para os restantes modos, diminuta.

(v) Em regime elasto-plástico, o modo **3** é gradualmente "substituído" pelo **7**. A elevada participação (78.5%) de modos locais ao longo do *plateau* é uma consequência do mecanismo de colapso apresentado na Fig. 6.28, onde é bastante evidente a ocorrência de deformação local na zona de aplicação da carga (meio vão). Repare-se na notável semelhança entre as representações do Abaqus e da GBT, apesar desta ser obtida apenas com 5.6% do número de g.l. requerido na análise de EFC.

As Figs. 6.29(a)-(b) exibem as funções de amplitude ($\zeta_k(x)$) dos modos global (**3**) e locais (**5**, **7**, **9**) anteriormente mencionados, relativas aos estados E e P, respectivamente – os valores de cada função correspondem aos deslocamentos modais máximos no plano da secção ($\sqrt{v_k^2 + w_k^2}$). O modo **9** não está incluído na Fig. 6.29(a) devido ao facto da sua contribuição no estado E ser desprezável. Os seguintes comentários às figuras são apropriados:

(i) Enquanto que em regime elástico (Fig. 6.29(a)) a amplitude do modo **3** varia cubicamente ao longo do comprimento da viga, os modos locais **5** e **7** variam muito pouco junto aos apoios mas exibem gradientes elevados a meio vão (região de aplicação da carga) – note-se a proximidade entre os valores máximos de ζ_3 e ζ_5.

(ii) Na Fig. 6.29(b) é possível constatar que a função ζ_3 é quase bi-linear e os modos locais **5**, **7** e **9** exibem uma grande variação na zona de meio vão, o que se deve à formação da rótula plástica responsável por despoletar o mecanismo de colapso. Note-se que o máximo valor de ζ_5 é agora muito superior ao de ζ_3 – este último é idêntico ao valor máximo de ζ_7, o que se traduz nas participações modais representadas na Fig. 6.27(b).



GBT ABAQUS

Fig. 6.28. Mecanismos de colapso (amplificados 3x) da viga (configuração P).

Uma vez que os deslocamentos axiais na superfície média da barra são dados por $u=u_k(s)\zeta_{k,x}(x)$, a Fig. 6.30 mostra as funções de amplitude $\zeta_{k,x}(x)$ relativas aos modos **13** (corte associado à flexão global não uniforme) e **3** (flexão na menor inércia) na configuração P. Observa-se que a variação de empenamentos é bastante acentuada na região de meio vão, zona onde o escoamento plástico atinge níveis mais significativos. Por motivos de simetria do problema, $\zeta_{k,x}$ são nulas em x=750 mm.

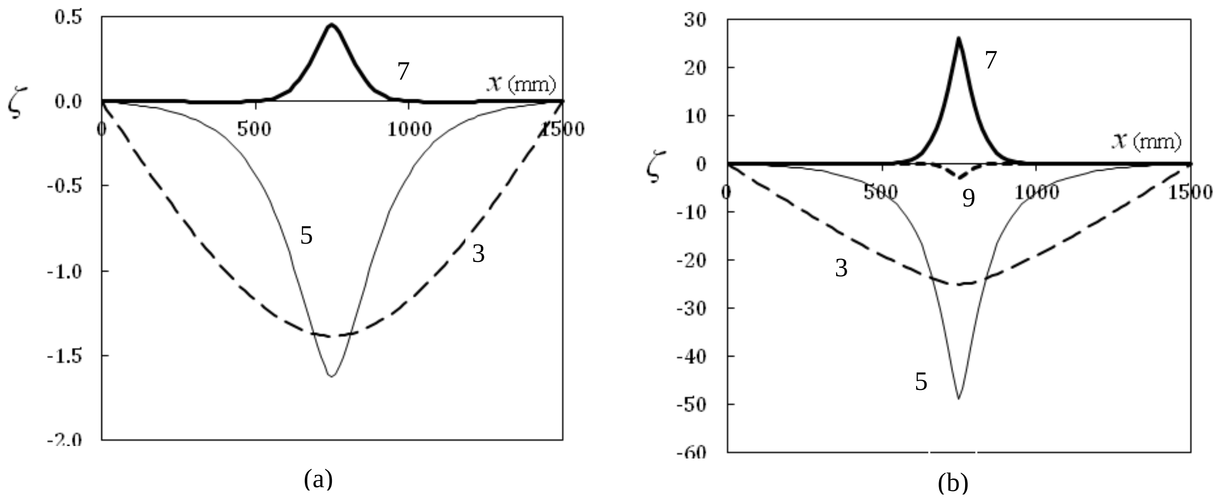


Fig. 6.29. Funções de amplitude ζ_k dos modos de flexão e locais mais relevantes: configurações (a) E e (b) P.

A variação do deslocamento δ (ver Fig. 6.3(b)) ao longo do eixo da viga para as configurações E, EP e P, está ilustrada na Fig. 6.31, onde se constata que esse deslocamento aumenta abruptamente na região de meio vão, o que se deve às participações dos modos locais **5**, **7** e **9**, como foi mostrado nas Figs. 6.29(a)-(b). Embora os perfis $\delta(x)$ possam ser determinados através de análises de EFC, a sua interpretação mecânica seria bem mais difícil (ou mesmo, impossível) sem a separação das contribuições dos modos locais e de flexão global, cuja obtenção através da GBT é simples.

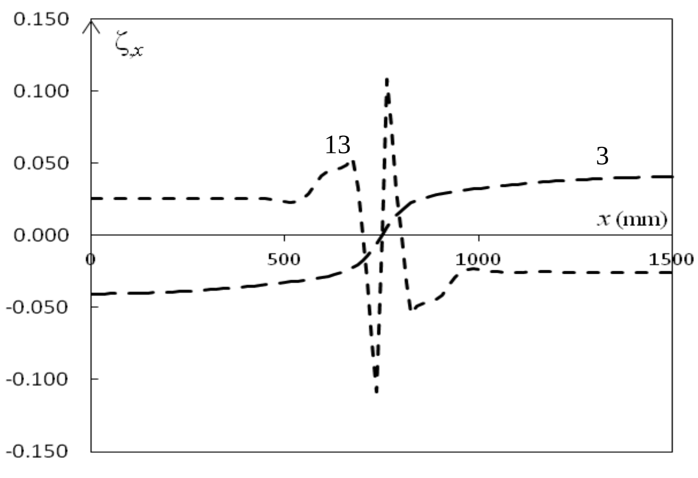


Fig. 6.30. Funções de amplitude $\zeta_{k,x}$ dos modos de flexão e de corte mais relevantes (configuração P).

As Figs. 6.32(a)-(c) apresentam diagramas de tensões da GBT na secção em x=646 mm, relativos a tensões (i) axiais (σ_{xx}) e de corte (σ_{xs}) na configuração P, e (ii) de *von Mises* (σ_{Mises}) nas configurações E, EP e P. A observação destas figuras conduz aos seguintes comentários:

(i) As tensões de corte mais elevadas ocorrem onde $\sigma_{xx}<\sigma_0^y$ (zonas dos banzos junto à alma), o que coincide com as zonas que se mantêm em regime elástico ($\sigma_{Mises}<\sigma_0^y$) no estado P.

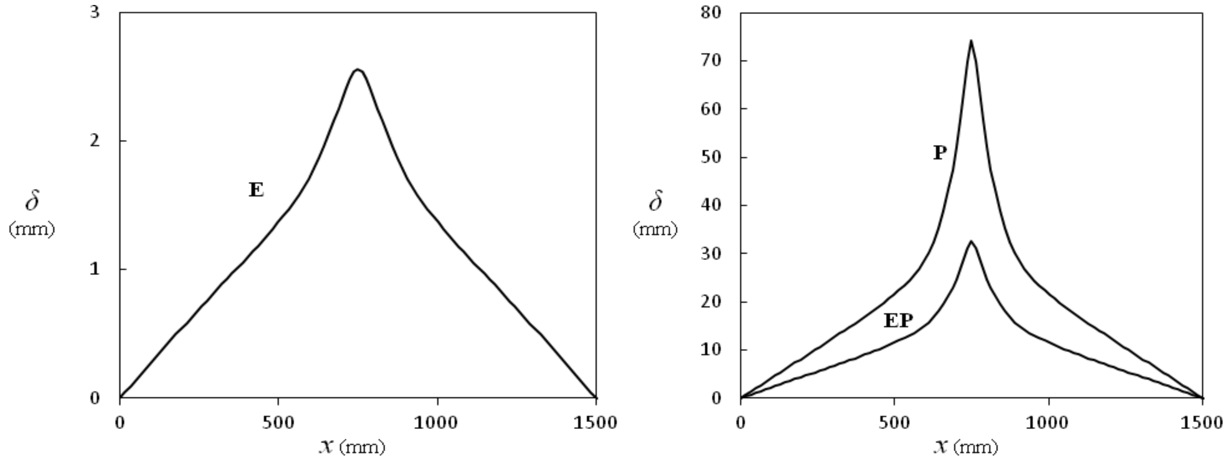


Fig. 6.31. Deslocamento horizontal do ponto médio da alma ao longo do comprimento da viga (estados E, EP e P).

(ii) O diagrama EP na Fig. 6.32(c) mostra que a cedência se inicia nas extremidades dos banzos e posteriormente se "espalha" ao longo dos mesmos em direcção à alma. No entanto, no colapso (P) toda a alma está plastificada e os banzos ainda exibem regiões elásticas (junto à alma).

(iii) As tensões de *von Mises* mínimas ocorrem sempre na intersecção da linha neutra com ambos os banzos (s≈75 and s≈325 mm – ver Figs. 6.32(a)-(c)). De forma algo surpreendente, a posição da linha neutra não depende do nível de carga, apesar da assimetria da secção em relação ao eixo principal central de inércia vertical (relembre-se que se trata de um problema de plasticidade "não clássico", i.e, inclui deformabilidade de natureza não global).

Finalmente, as Figs 6.33(a)-(b) mostram os *contours* da GBT e do Abaqus relativos às tensões transversais (σ_{ss}) e de corte (σ_{xs}) na configuração EP. Para além da notável semelhança entre os resultados das duas análises, importa chamar a atenção para o seguinte:

(i) Os valores elevados das tensões σ_{ss} na zona de meio vão são consequência dos elevados gradientes das amplitudes dos modos **13** (corte), **5** e **7** (locais) nessa zona (recordar as Figs. 6.29(b) e 6.30).

(ii) Os valores de pico de σ_{xs} em torno da secção de meio vão devem-se principalmente à participação do modo **13** (ver Fig. 6.30 e relembrar que σ_{xs} é proporcional a $\zeta_{k,x}$).

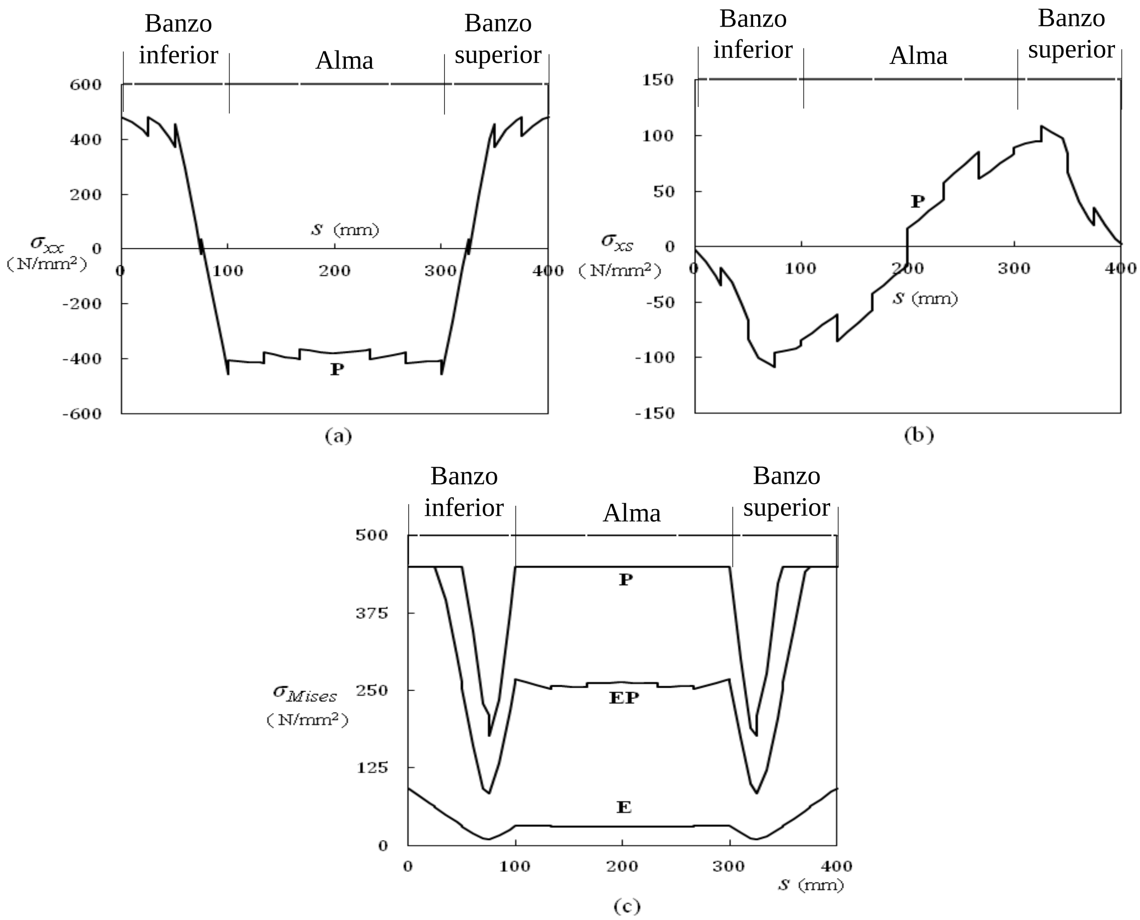


Fig. 6.32. Diagramas de tensões na seção em *x*=646 mm: (a) σ_{xx} (P), (b) σ_{xs} (P) e (c) σ_{Mises} (E, EP, P).

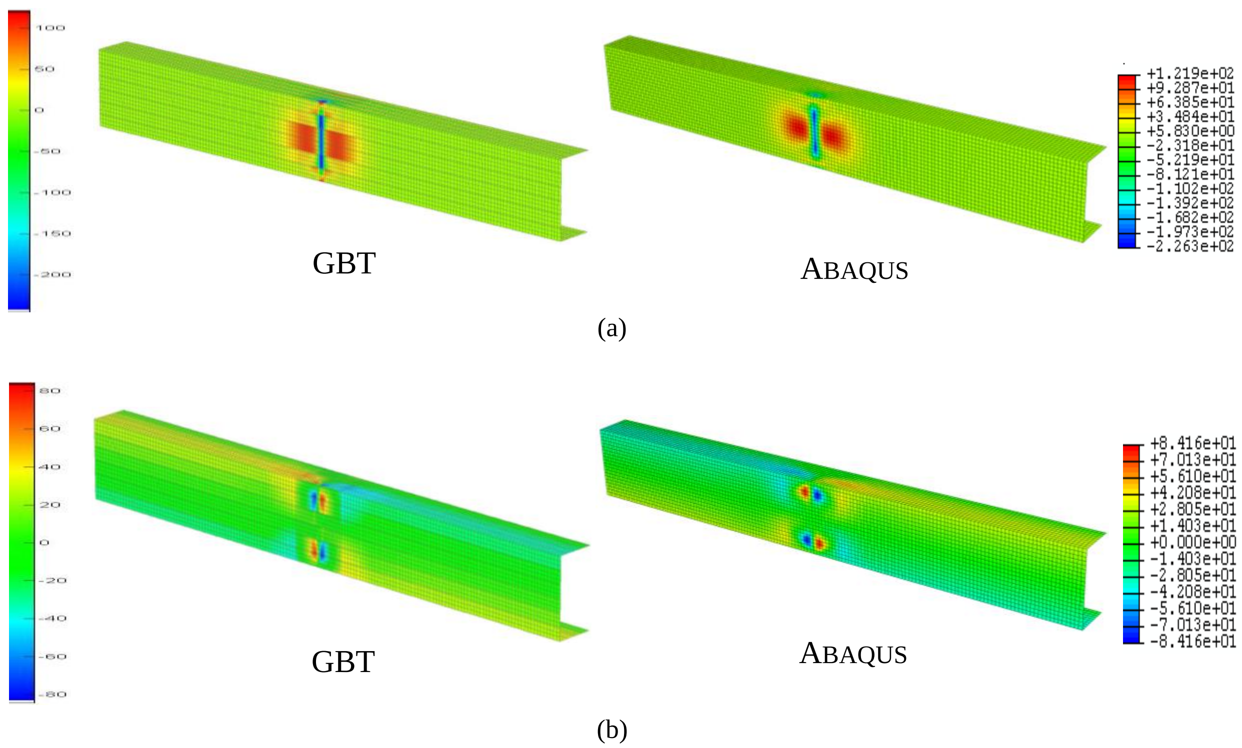


Fig. 6.33. *Contours* de tensões (a) σ_{ss} e (b) σ_{xs} (N/mm²) na configuração EP.

Viga em C-reforçado

A Fig. 6.34(a) representa as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta)$ do Abaqus e da GBT relativas a cada um dos modelos constitutivos utilizados (E_t=0, E_t=E/100 e E_t=E/50), onde δ é o deslocamento vertical a meio vão (x=750 mm) do canto banzo superior-reforço (ver Fig. 6.4(b)). Os valores de λ correspondentes aos estados de equilíbrio E, EP1 e EP2 são dados na Tab. 6.4. A Fig. 6.34(b) diz respeito a E_t=E/100 e ilustra o diagrama de participação modal da GBT relativo à evolução da configuração deformada da secção de meio vão – tal como foi concluído para a viga em Z, este diagrama é muito idêntico aos relativos a E_t=0 e E_t=E/50. A observação das Figs. mencionadas conduz aos seguintes comentários:

(i) A comparação entre a GBT e o Abaqus é excelente – as diferenças máximas são de 2.5%.

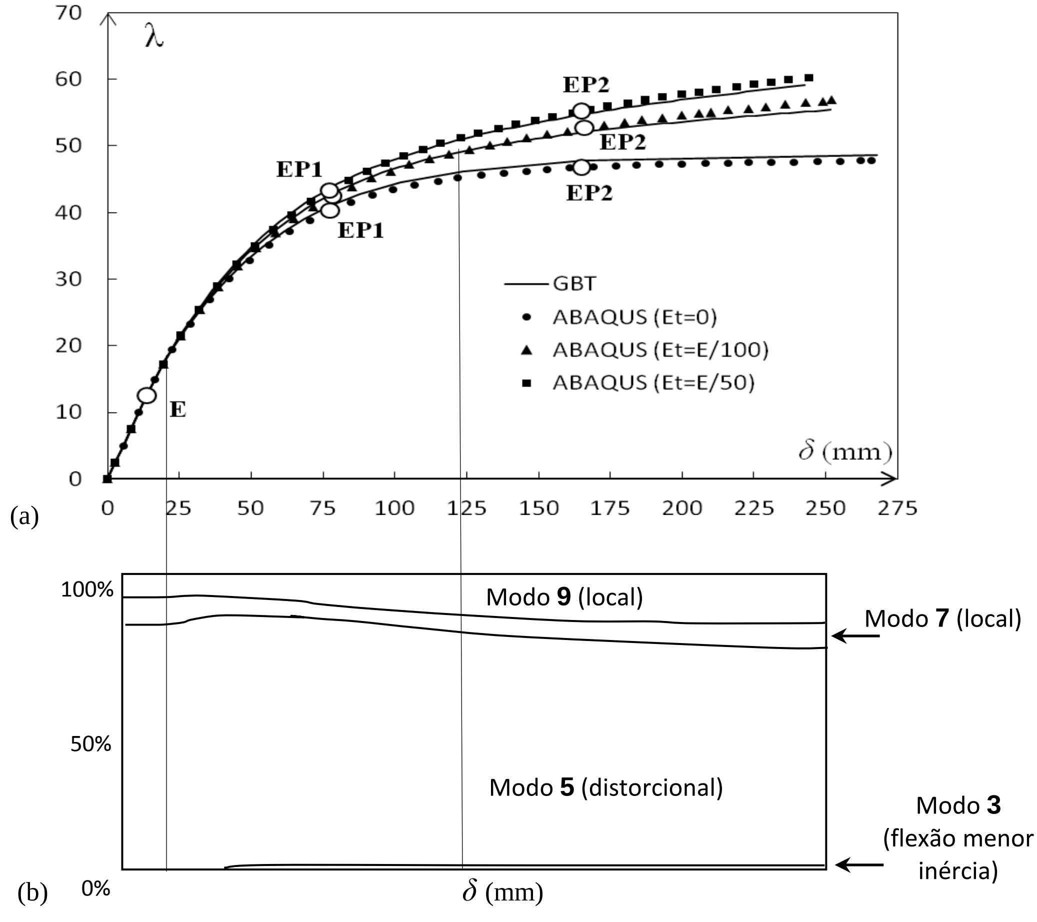


Fig. 6.34. (a) Trajectórias de equilíbrio do Abaqus e da GBT (E_t = 0; E/100; E/50), e (b) diagrama de participação modal da GBT (E_t=E/100).

(ii) Da análise da GBT para E_t=0 obtém-se uma reserva de resistência inelástica (rácio entre a carga "plástica" e de cedência) de F_p/F_y=4880/1804=2.71.

(iii) Tal como para a viga em Z, o valor de E_t não é "completamente reflectido" na resposta, pois o rácio entre os declives de $\lambda(\delta)$ em EP2 para E_t=E/50 e E_t=E/100 vale 1.46 (inferior a 2).

(iv) O padrão de deformação da barra é maioritariamente distorcional pois o modo **5** (distorcional simétrico) apresenta participações entre 74.1 e 85.5%. No entanto, existem contribuições visíveis de outros modos locais: **7** (5.2 – 9.4%) e **9** (7.0 – 16.4%). Existe também uma participação diminuta (cerca de 1.3 %) do modo **3** (flexão na menor inércia) no regime inelástico. Constata-se ainda que a participação do modo **9** aumenta consideravelmente após o estado EP1, "substituindo" parte da contribuição do modo **5**.

(v) Embora não seja visível qualquer contribuição de modos de corte ou de extensão transversal (ver Fig. 6.10) no diagrama da Fig. 6.34(b), é importante relembrar que a sua presença na análise é indispensável para obter resultados precisos. Note-se que o modo de corte **26** desempenha um papel importante independentemente do nível de endurecimento, e que os modos de corte **28** e **18** são relevantes para as análises com E_t=0 e E_t=E/50.

Tab 6.4. Valores dos parâmetros de carga nos estados de equilíbrio E, EP1 e EP2.

E_t	E			EP1			EP2		
	δ (mm)	λ_{GBT}	λ_{ABQ}	δ (mm)	λ_{GBT}	λ_{ABQ}	δ (mm)	λ_{GBT}	λ_{ABQ}
0	13.63	12.69	12.50	77.60	40.94	40.30	165.42	47.76	46.80
***E*/100**		12.49	12.50		42.80	42.50		52.09	52.70
***E*/50**		12.49	12.50		43.65	43.30		54.65	55.20

Para compreender a importância dos diferentes tipos de modos de deformação envolvidos na análise da GBT, apresentam-se na Fig. 6.35 as curvas $\lambda(\delta)$ para E_t=0 obtidas através de cinco análises com conjuntos diferentes de modos de deformação, incluindo os modos (i) **5** (distorcional), (ii) **5**+**7**+**9** (distorcional e local), (iii) **5**+**7**+**9**+**26**+**44** (distorcional, local, corte e extensão transversal), (iv) **3**+**5**+**7**+**9**+**26**+**29**+**44** (global, distorcional, local, corte e extensão transversal), e (v) os 46 modos inicialmente seleccionados. Da análise dessas trajectórias de equilíbrio concluiu-se que:

(i) A análise aproximada que apenas inclui o modo **5** conduz a uma resposta elástica bastante precisa, uma vez que para λ<10 a resposta está virtualmente coincidente com a obtida com os 46 modos. No entanto, na fase elasto-plástica o comportamento que resulta da curva aproximada é muito mais rígido – o parâmetro de carga "plástico" obtido (λ_p=66.4) é 36% superior ao "exacto" (λ_p=48.8).

(ii) A adição dos modos locais **7** e **9** (curva **5**+**7**+**9**) conduz a uma resposta linear (λ<20) "exacta" e a uma melhoria significativa na aproximação ao comportamento inelástico – o parâmetro "plástico" (λ_p=53.8) é agora apenas 10% superior ao "exacto".

(iii) A inclusão do modo de corte **26** e do modo de extenção transversal **44** (associados à deformação localizada dos reforços da secção), apesar de conduzir a uma curva $\lambda(\delta)$ quase igual à "curva **5**+**7**+**9**", influencia as distribuições de tensões e a configuração do mecanismo de colapso.

(iv) Por último, a adição (ver "curva **3**+**5**+**7**+**9**+**26**+**29**+**44**") do modo de flexão na menor inércia (**3**) e do modo de extensão transversal da alma (**29**), permite não só aproximar com precisão a resposta elástica, como também melhorar a resposta inelástica da aproximação anterior – o parâmetro "plástico" (λ_p=51.9) é agora apenas 6.3% superior ao "exacto" (λ_p=48.8).

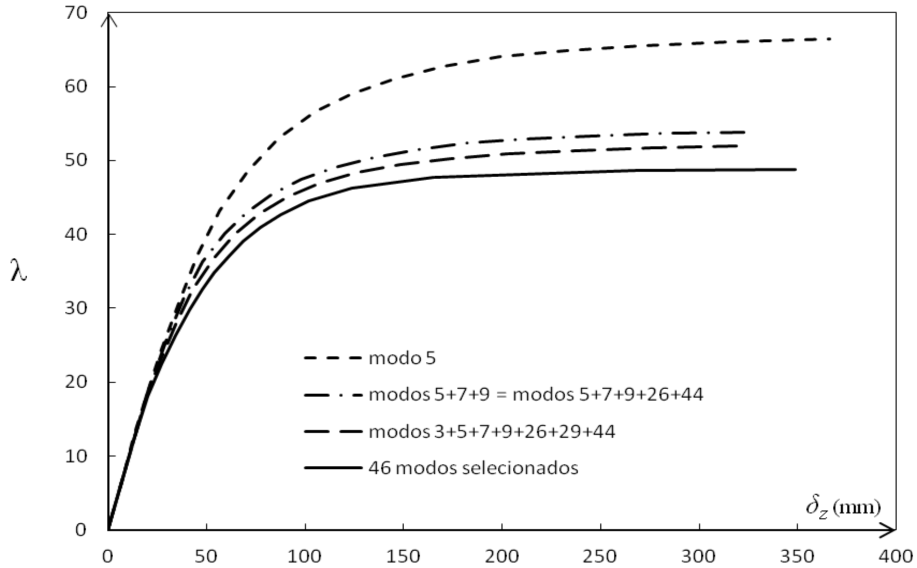


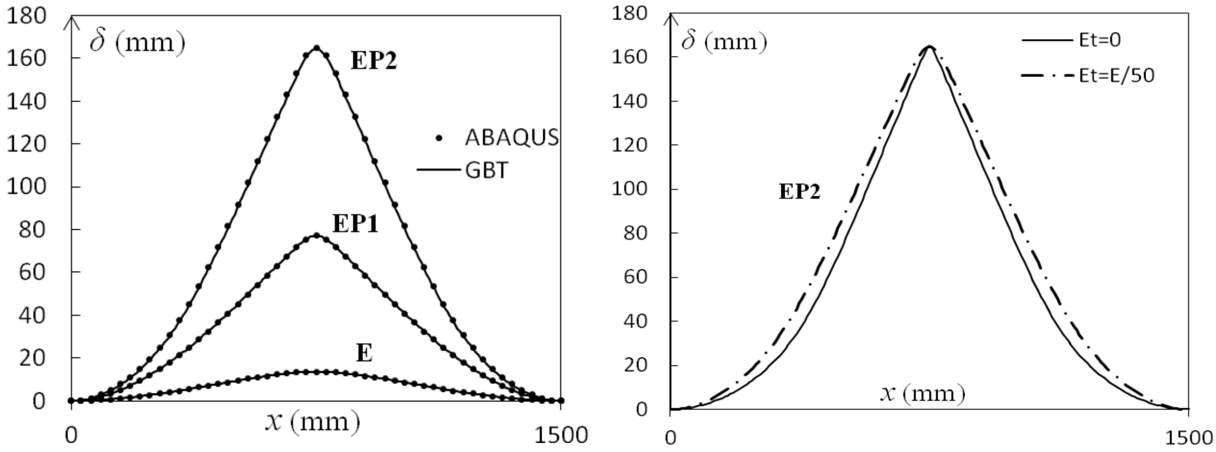
Fig. 6.35: Comparação entre trajectórias de equilíbrio da GBT obtidas com diferentes conjuntos de modos de deformação.

A Fig. 6.36(a) diz respeito à viga E_t=E/50 e exibe os perfis longitudinais $\delta(x)$ associados ao deslocamento vertical do canto banzo superior-reforço para as configurações E, EP1 e EP2. A Fig. 6.36(b) mostra os perfis $\delta(x)$ da GBT relativos ao estado EP2 das vigas E_t=0 e E_t=E/50 (perfis com amplitude idêntica – ver Fig. 6.34(a)). A observação destas figuras permite concluir que:

(i) Os resultados do Abaqus e da GBT (Fig. 6.36(a)) estão virtualmente coincidentes.

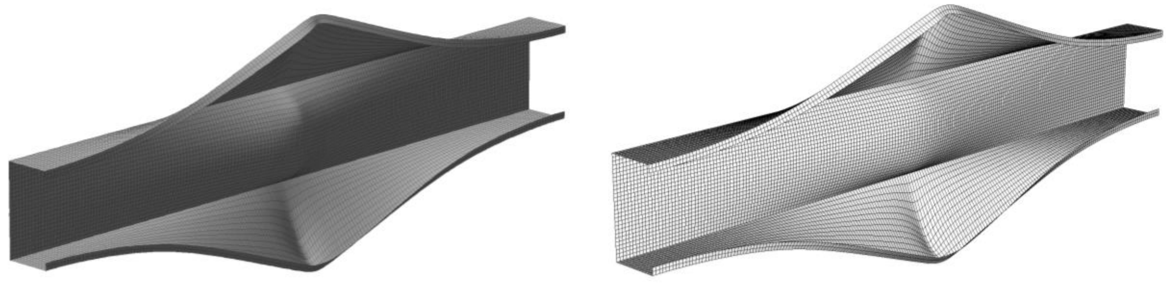
(ii) Tal como concluído para a viga em Z, as curvaturas diminuem com o aumento de E_t (ver Fig. 6.36(b)), ou seja, a degradação de rigidez causada pela cedência do material é menos localizada.

A Fig. 6.37 mostra as configurações deformadas do Abaqus e da GBT correspondentes ao estado EP2 da viga E_t=E/100 – mais uma vez a comparação é muito boa. Estas deformadas permitem confirmar o que foi concluído através do diagrama de participação modal da Fig. 6.34(b). Realmente constata-se que (i) a natureza distorcional do modo **5** é predominante e que (ii) existe uma contribuição importante do modo **9**, o qual é responsável pela flexão transversal dos banzos que se faz notar a meio vão.



(a) (b)

Fig. 6.36. Perfis longitudinais do deslocamento vertical do nó banzo superior-reforço: (a) configurações E, EP1 e EP2 da viga E_t=E/50, e (b) configurações EP2 das vigas E_t = 0; E/50.



GBT ABAQUS

Fig. 6.37. Configuração deformada EP2 da viga Et=E/100 (GBT e Abaqus).

As Figs. 6.38, 6.39 e 6.40 apresentam vários diagramas de tensões na secção em x=700 mm (perto de meio vão), nomeadamente (i) as tensões de corte σ_{xs} para a viga E_t = E/100 e estados E, EP1 e EP2, (ii) as tensões transversais σ_{ss} para E_t =E/50 e estado EP2, e (iii) as tensões axiais σ_{xx} para as vigas E_t =0; E/100 e configuração EP2. A observação destes diagramas conduz aos seguintes comentários:

(i) Existe uma correlação bastante boa entre os resultados do Abaqus e da GBT. Contudo, importa notar que nos casos com endurecimento, a GBT (i_1) não consegue prever adequadamente os valores de pico das tensões σ_{xs} e σ_{ss}, os quais ocorrem respectivamente nos nós alma-banzo e banzo-reforço (ver Figs. 6.38 e 6.39), e (i_2) conduz a discontinuidades na transição entre sub-placas – a visibilidade destas singularidades pode ser atenuada ao refinar a malha da secção. No entanto, mais uma vez se conclui que estas discrepâncias ao nível das tensões não afectam a elevada precisão dos resultados de deslocamentos da GBT.

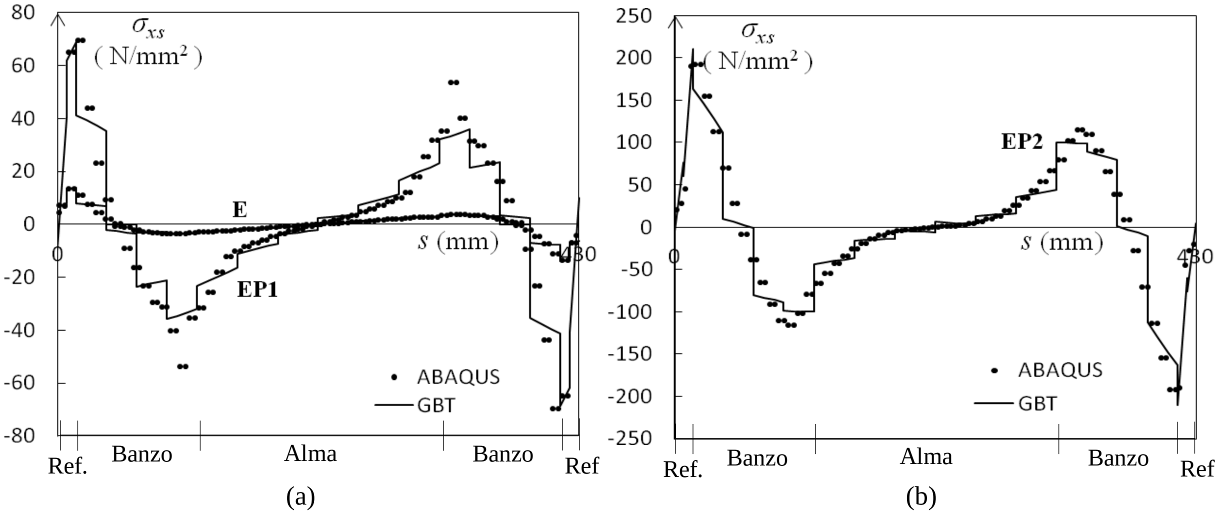


Fig. 6.38. Diagramas de tensões de corte (σ_{xs}) na secção em x=700 mm da viga E_t=E/100 (GBT e Abaqus): estados de equilíbrio (a) E e EP1, e (b) EP2.

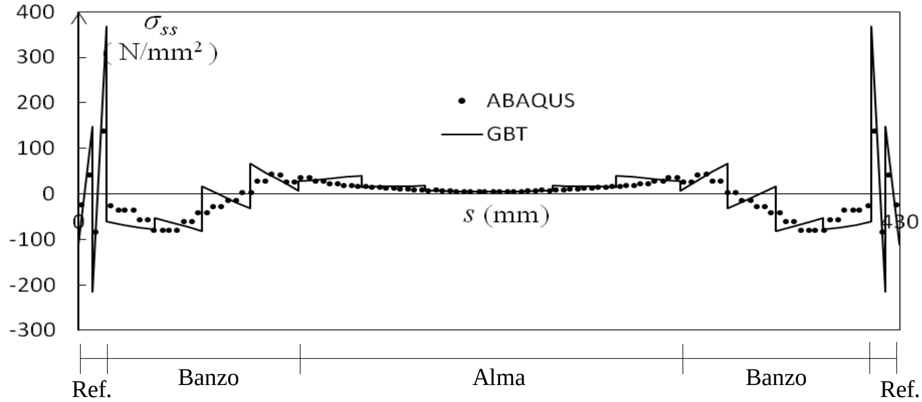


Fig. 6.39. Diagramas de tensões transversais (σ_{ss}) na secção em x=700 mm e configuração EP2 da viga E_t=E/50.

(ii) Apesar de não se tratar de um problema de flexão nem de torção, as tensões de corte e axiais apresentam magnitudes significativas, as quais estão associadas à distorção da secção e respectivo empenamento restringido nas secções extremas. Enquanto os valores máximos de σ_{xs} ocorrem nos cantos banzo-reforço, os valores de pico de σ_{xx} têm lugar nas extremidades livres dos reforços.

(iii) A presença de endurecimento (ver Fig. 6.40) conduz a um aumento significativo das tensões σ_{xx} (particularmente nos banzos), mantendo-se no entanto a localização dos pontos de tensão nula.

Por último, as Figs. 6.41(a)-(b) mostram (i) os diagramas de tensões de *von Mises* obtidos através do Abaqus e da GBT, novamente na secção em x=700 mm, para o estado de equilíbrio EP2 das vigas E_t =0; E/50, e (ii) os *contours* σ_{Mises} da GBT para a configuração de equilíbrio EP2 das vigas E_t =0; E/100. A observação destes resultados permite concluir que:

(i) Os diagramas da GBT e do Abaqus para E_t =E/50 correlacionam-se muito bem.

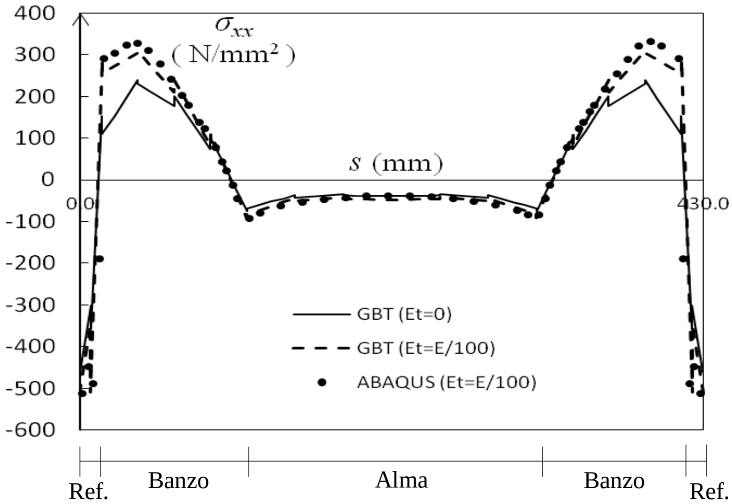


Fig. 6.40. Diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) na secção em x=700mm e configurações EP2 das vigas E_t=0; E/100.

(ii) Tal como se concluiu relativamente às tensões σ_{xx} (ver Fig. 6.40), o aumento de E_t causa um aumento claro das tensões σ_{Mises} nos reforços e zonas dos banzos nessa vizinhança. Note-se que essas partes da secção são, na zona de aplicação da carga (meio vão), as "mais endurecidas" (onde a diferença para σ_0^y=450 N/mm^2 é maior) no exemplo da Fig. 6.41(b) (E_t=E/100).

(iii) Independentemente do nível de endurecimento (ver Fig. 6.41(b)), (iii$_1$) a maioria da viga permanece em regime elástico (cor azul), e (iii$_2$) os reforços cedem ($\sigma_{Mises} \geq$ 450 N/mm^2) ao longo de todo o comprimento, excepto nas zonas adjacentes à região de maior solicitação dos banzos.

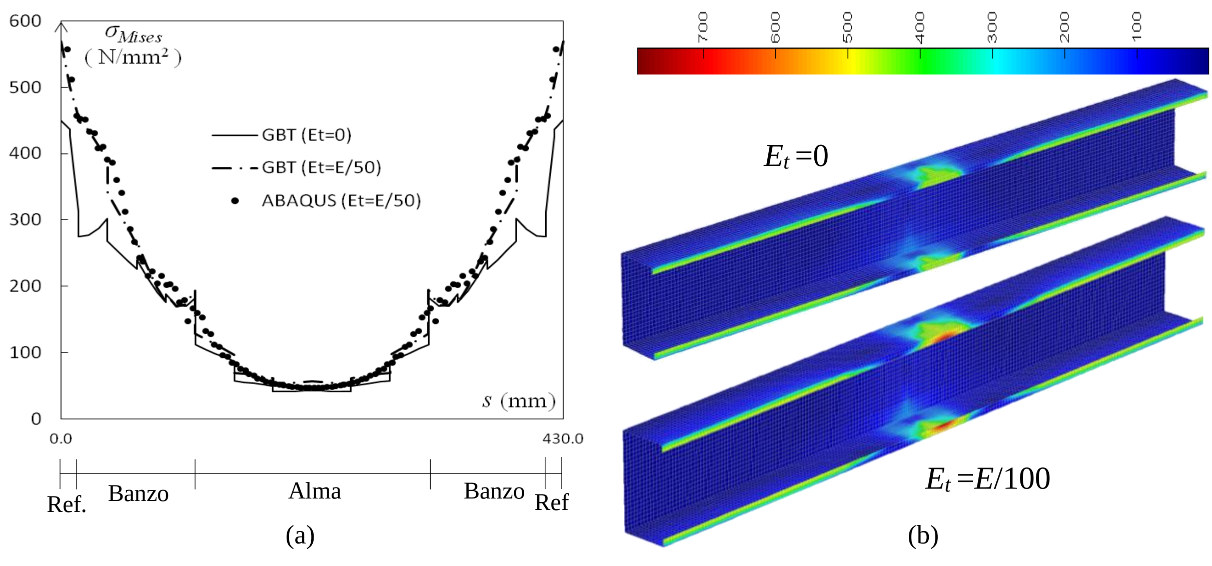


Fig. 6.41. Tensões de von Mises (σ_{Mises}) no estado EP2: (a) diagrama na secção em x=700mm para as vigas E_t=0; E/50, e (b) *contours* (N/mm^2) da GBT relativos às vigas E_t=0; E/100.

Viga RHS

Fig. 6.42(a) mostra as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta)$ obtidas através do Abaqus, GBT e teoria da rótula plástica, onde δ é o deslocamento vertical a meio vão do ponto médio do banzo superior. A Fig. 6.42(b) exibe o diagrama de participação modal da GBT. Os seguintes comentários são apropriados:

(i) As curvas do Abaqus e GBT são muito semelhantes, exibindo diferenças inferiores a 1.6%. Os valores dos parâmetros de carga nos estados E, EP e P assinalados nessas curvas são (i_1) λ_{GBT}=3.20 + λ_{ABQ}=3.20 (E), (i_2) λ_{GBT}=30.63 + λ_{ABQ}=30.50 (EP), e (i_3) λ_{GBT}=32.21 + λ_{ABQ}=31.90 (P).

(ii) De acordo com a GBT, a cedência inicial e o colapso "plástico" ocorrem quando p_y=0.197 N/mm^2 (λ_y=19.69) e p_p =0.322 N/mm^2 (λ_p=32.21), respectivamente, o que corresponde a uma reserva de resistência elasto-plástica de p_p/p_y=1.63.

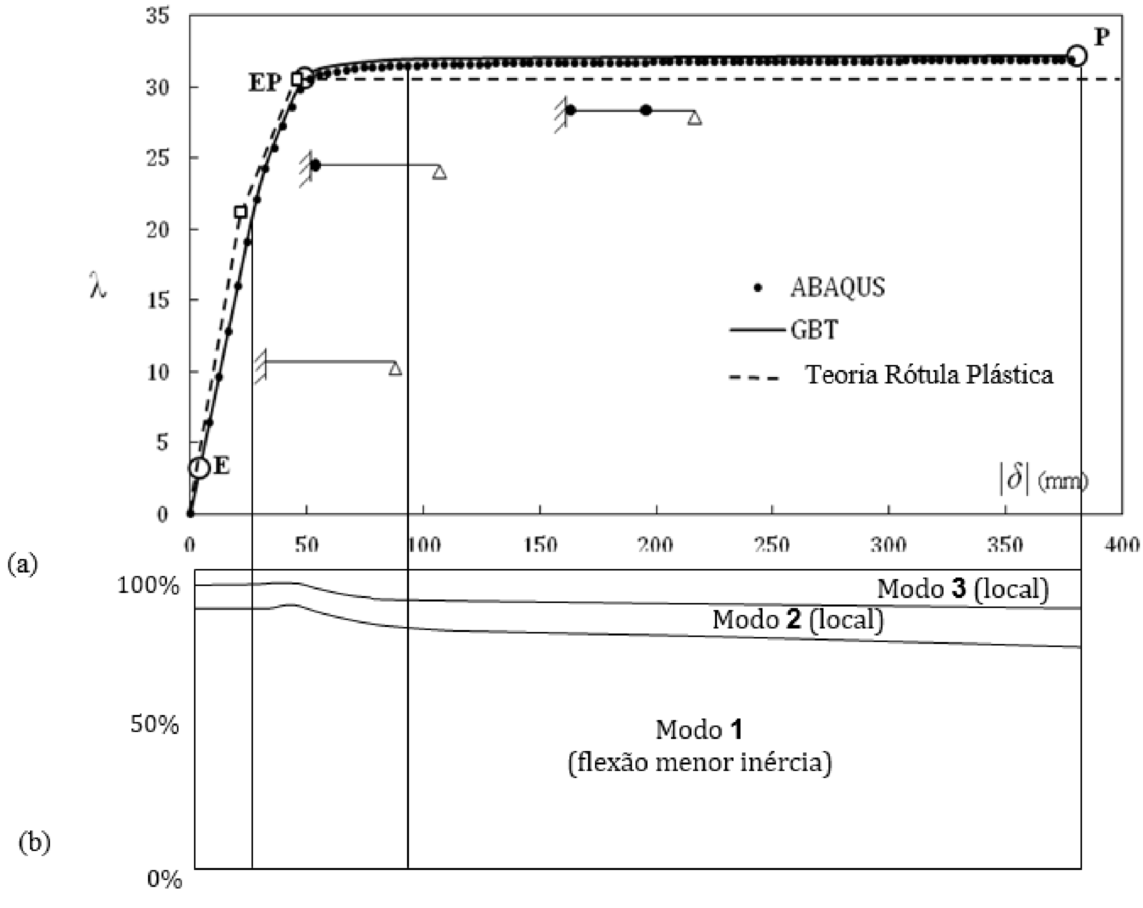


Fig. 6.42. (a) Trajectórias de equilíbrio dadas pelo Abaqus, GBT e teoria da rótula plástica, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

(iii) De acordo com a teoria (aproximada) da rótula plástica, a qual despreza o espalhamento de plasticidade e a influência das tensões σ_{xs} e σ_{ss} (apenas é considerada flexão global), (iii_1) a primeira rótula forma-se na secção encastrada (λ_1=21.09 e δ_1=21.4 mm), e (iii_2) a segunda rótula precipita o colapso e surge em x=2500 mm para λ_2=30.94 e δ_2=46.42 mm. Embora esta teoria siga a mesma tendência das curvas "exactas" (Abaqus e GBT), importa clarificar alguns aspectos:

(iii.1) Como seria de esperar, a trajectória que antecede a formação da primeira rótula[17] sobreestima a resposta "exacta" (Abaqus e GBT) devido ao facto do espalhamento de plasticidade e a flexão transversal do banzo superior serem desprezados – este último aspecto é simulado na GBT através das participações dos modos locais **2** e **3** (ver Fig. 6.11).

(iii.2) Após a formação da primeira rótula plástica, o declive da trajectória de equilíbrio decresce e torna-se inferior ao declive da curva "exacta", o que se deve ao facto de a teoria da rótula plástica sobreestimar as rotações plásticas no encastramento.

(iii.3) A formação da segunda e última rótula (perto de meio vão) conduz a um *plateau* localizado ligeiramente abaixo do "exacto", o que se deve ao facto desta teoria aproximada ter apenas em conta as tensões axiais resultantes da flexão global (σ_{xx}), i.e., despreza o efeito prejudicial das tensões de corte σ_{xs} e a influência benéfica das tensões transversais σ_{ss} – esta última prevalece neste problema, o que resulta num ligeiro aumento do limite das tensões σ_{xx} em relação à tensão de cedência.

(iv) Os modos de deformação mais relevantes são (iv$_1$) o **1** (flexão na menor inércia, 72.50 – 87.39%), (iv$_2$) o **2** (local, 7.27 – 13.06%) e (iv$_3$) o **3** (local, 4.82 – 10.58%). No início do regime inelástico, as participações dos modos **1**, **2** e **3** aumenta ligeiramente, mantém-se inalterada e decresce marginalmente, respectivamente. Subsequentemente, a participação do modo **1** decresce monotonicamente, ao contrário dos modos **2** e **3**. De modo a garantir a flexão transversal do banzo superior (onde a carga é aplicada) e restringir a do banzo inferior, os modos locais **2** e **3** apresentam sempre contribuições semelhantes.

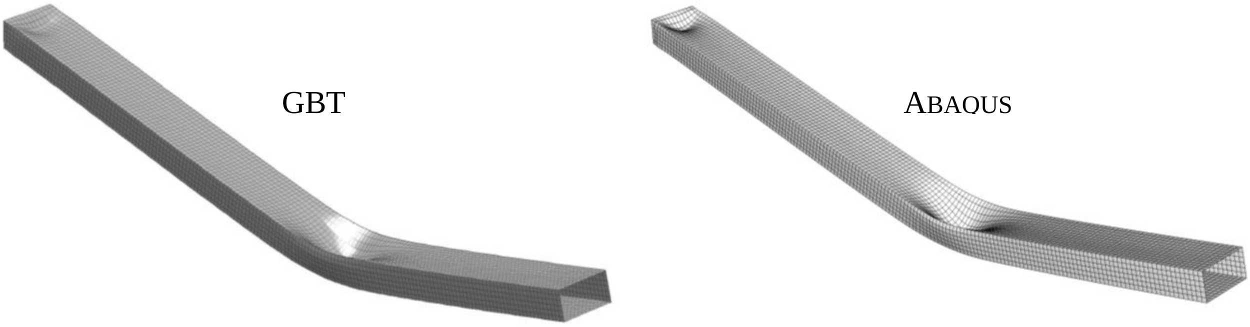
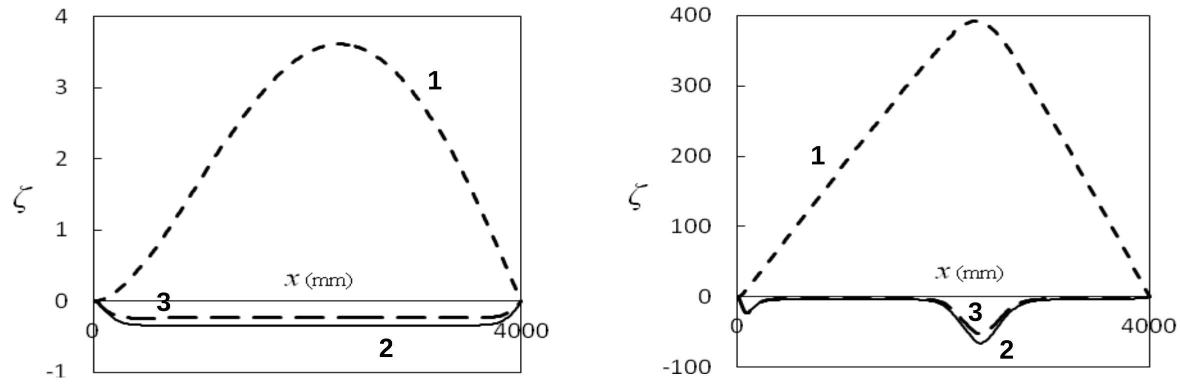


Fig. 6.43. Mecanismos de colapso (configuração P) obtidos através da GBT e do Abaqus.

17 Obtida através de uma análise elástica até se atingir um momento actuante máximo (no encastramento) que iguale o momento plástico da secção.

O mecanismo de colapso da viga (configuração P) é ilustrado na Fig. 6.43, sendo bem clara a flexão transversal do banzo superior nas zonas onde se desenvolvem as rótulas plásticas.

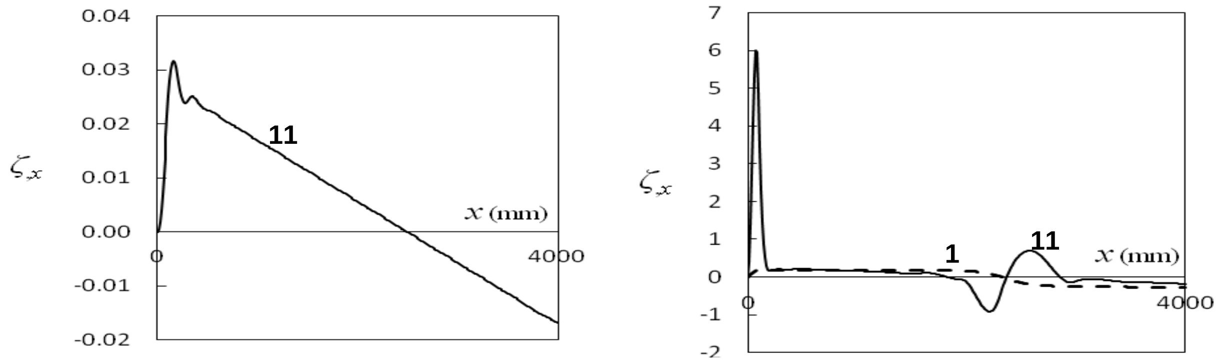
As Figs. 6.44-6.45, as quais dizem respeito às configurações E e P, exibem (i) as funções de amplitude $\zeta_k(x)$ dos modos global e locais mais relevantes, e (ii) as funções de amplitude $\zeta_{k,x}(x)$ dos modos de corte e global mais importantes[18]. A observação destas figuras conduz aos seguintes comentários:



(a) (b)

Fig. 6.44. Funções de amplitude (ζ_k) da GBT relativas aos modos global (**1**) e locais (**2**, **3**): configurações (a) E e (b) P.

(i) No estado de equilíbrio E, ζ_1 tem uma variação não linear que está em conformidade com a teoria clássica. Relativamente aos modos locais **2** e **3**, as suas amplitudes (i$_1$) variam bastante junto aos apoios ($0 \leq x \leq 350$ mm e $3650 \leq x \leq 4000$ mm), mas (i$_2$) permanecem uniformes na maior parte do vão ($350 \leq x \leq 3650$ mm). Na configuração P, ζ_1 varia de forma virtualmente linear ao longo de quase toda a extensão da viga e exibe um máximo em x=2500 mm, onde a curvatura é muito elevada e a plasticidade domina o comportamento da secção. Os modos **2** e **3** exibem agora amplitudes desprezáveis na maior parte do vão, uma vez que as suas contribuições foram "transferidas" para as regiões das rótulas plásticas ($x \leq 350$ mm, $2000 \leq x \leq 3000$ mm), tal como se observou na Fig. 6.43.



(a) (b)

Fig. 6.45. Funções de amplitude ($\zeta_{k,x}$) da GBT: modos (a) de corte (**11**) na configuração E, e (b) global (**1**) e de corte (**11**) em P.

18 As funções de amplitude $\zeta_{k,x}(x)$ fornecem uma variação qualitativa dos empenamentos de qualquer modo.

(ii) Na configuração E, a amplitude do modo de corte **11** (associado à deformação por esforço transverso) varia linearmente ao longo de quase todo o comprimento da viga, mudando de sinal em x=2500 mm. A variação abrupta junto à secção encastrada é uma consequência do fenómeno de *shear locking* que aí ocorre (abordado em 2.3.2 no capítulo 2) – a restrição dos empenamentos no encastramento ($\zeta_{11,x}$=0) força o anulamento do esforço transverso nessa secção.

(iii) No colapso (Fig. 6.45(b)), tanto o modo de corte (**11**) como o global de flexão (**1**) exibem deslocamentos axiais cuja variação é reduzida e quase linear nas zonas menos deformadas, e altamente não linear em $x \leq 350$ mm e $2000 \leq x \leq 3000$ mm, anulando-se em x=0 e x=2500 mm.

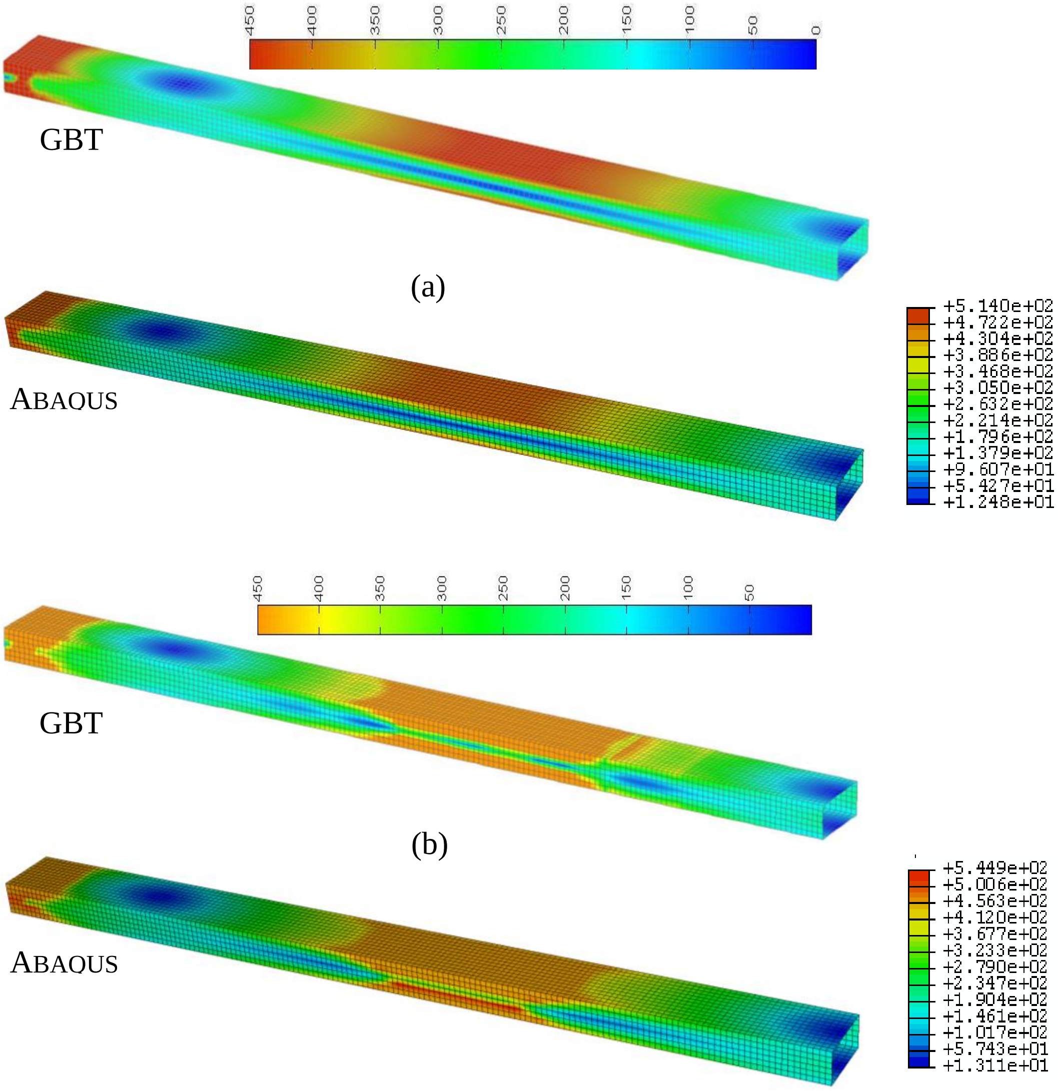


Fig. 6.46.Contours de tensões (N/mm^2) de *von Mises* (σ_{Mises}) nas configurações (a) EP e (b) P.

Finalmente, as Figs 6.46(a)-(b) apresentam os *contours* do Abaqus e da GBT relativos às tensões de *von Mises* nas configurações EP e P. Para além das semelhanças notáveis entre os *outputs* do Abaqus e da GBT, a observação destas figuras permite constatar que:

(i) Na configuração EP, é evidente a existência de uma rótula plástica no encastramento (lado esquerdo), bem como o espalhamento de plasticidade na região de maiores momentos positivos.

(ii) No colapso (P), o desenvolvimento da segunda/última rótula plástica envolve um espalhamento de plasticidade considerável ao longo do eixo da viga ($2000 < x < 3000$ mm), o qual resulta do baixo gradiente de momentos actuantes nessa zona.

(iii) Em ambas as configurações de equilíbrio, é bem visível o efeito de *shear lag* no banzo superior (fenómeno abordado no capítulo 2 – 2.4.4).

Viga LiteSteel **(*LSB*)**

As trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta_z)$ mostradas na Fig. 6.47(a), onde δ_z é o deslocamento vertical a meio vão do nó do banzo superior indicado na Fig. 6.6 (b), foram obtidas através de análises do Abaqus e da GBT. Foram efectuadas três análises através da GBT, utilizando diferentes conjuntos de modos de deformação, incluindo (i) os 43 modos finais indicados na Tab. 6.2 (anti-simétricos relativamente ao eixo de simetria horizontal), totalizando 6170 g.l., (ii) os 17 modos mais relevantes (2 globais, 2 distorcionais, 3 locais, 5 de corte e 5 de extensão transversal), incluindo todos os representados na Fig. 6.12 e envolvendo 2436 g.l., e (iii) 12 modos (o conjunto anterior sem os modos de extensão transversal), correspondendo a 1721 g.l.. Na Fig. 6.47(b) é exibido o diagrama de participação modal da GBT (análise com 43 modos[19]) relativo à evolução da configuração deformada da secção mais deformada (na vizinhança de x=3000 mm). A análise destes resultados permite afirmar que:

(i) A curva da GBT obtida com 43 modos é muito semelhante à que resultou da análise do Abaqus (diferenças inferiores a 2%). Por exemplo, os valores $\{\delta_z, \lambda\}$ correspondentes às configurações E, EP e P indicadas são (i$_1$) $\{6.5, 25.5\}_{GBT}$ + $\{6.7, 25.8\}_{ABQ}$, (i$_2$) $\{41.2, 104.1\}_{GBT}$ + $\{40.6, 102.0\}_{ABQ}$, e (i$_3$) $\{195.9, 112.4\}_{GBT}$ + $\{196.0, 111.0\}_{ABQ}$, respectivamente.

(ii) O diagrama de participação modal mostra que o comportamento da viga é dominado pelos modos **1** (flexão na maior inércia, 38.4 – 47.4%), **2** (torção, 15.9 – 38.9%) e **3** (distorcional ou distorção lateral da alma, 19.1 – 3 1.1%). Os restantes modos, nomeadamente o modo **5** (local da alma) com uma participação máxima de 2.5%, apenas emergem após a resposta elástica.

19 Os diagramas de participação modal obtidos para as três análises não diferem muito entre eles.

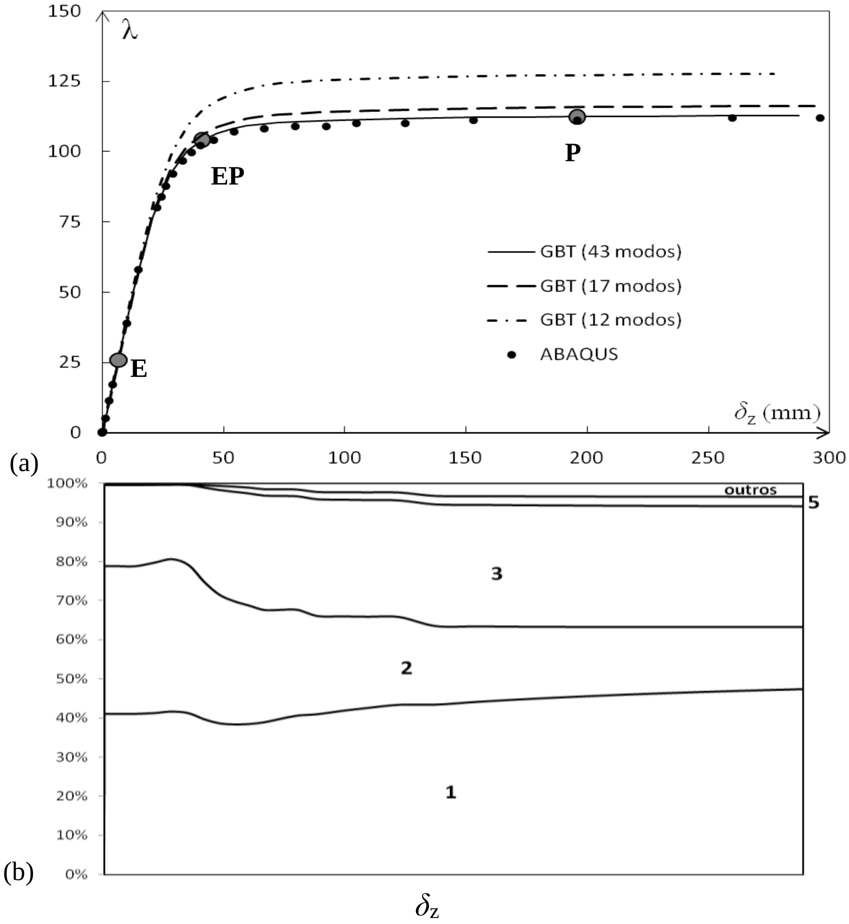


Fig. 6.47. (a) Trajectórias de equilíbrio (Abaqus + GBT) e (b) diagrama de participação modal da GBT (43 modos).

(iii) Quando apenas 17 modos de deformação são incluídos na análise da GBT (redução de cerca de 60% do número de g.l.), os resultados obtidos ainda se podem considerar satisfatórios, uma vez que a carga "plástica" (estado P) apenas sobreestima em 4.3% o valor do Abaqus.

(iv) Contudo, a exclusão dos 5 modos de extensão transversal do conjunto anterior, provoca uma redução significativa da precisão dos resultados – *e.g.*, o valor de λ no estado P é sobreestimado em 14.6%. Este resultado comprova o papel fundamental desempenhado pelos modos de extensão transversal, mesmo que a sua participação conjunta (ver Fig. 6.47(b)) seja muito pequena (consequência da definição de participação modal utilizada[20] – ver 2.4.3 no capítulo 2).

As Figs. 6.48(a)-(c) ilustram a evolução da configuração deformada da viga, expressa em termos das funções de amplitude modais $\zeta_k(x)$ relativas aos 4 modos (ver Fig. 6.12) que figuram no

20 Uma futura alteração desta definição adoptando um critério "não cinemático" (que envolva tensões ou tensões e deslocamentos), poderá resolver este inconveniente.

diagrama da Fig. 6.47(b) – estas funções de amplitude são referentes às configurações de equilíbrio E, EP e P. Pode ser observado que:

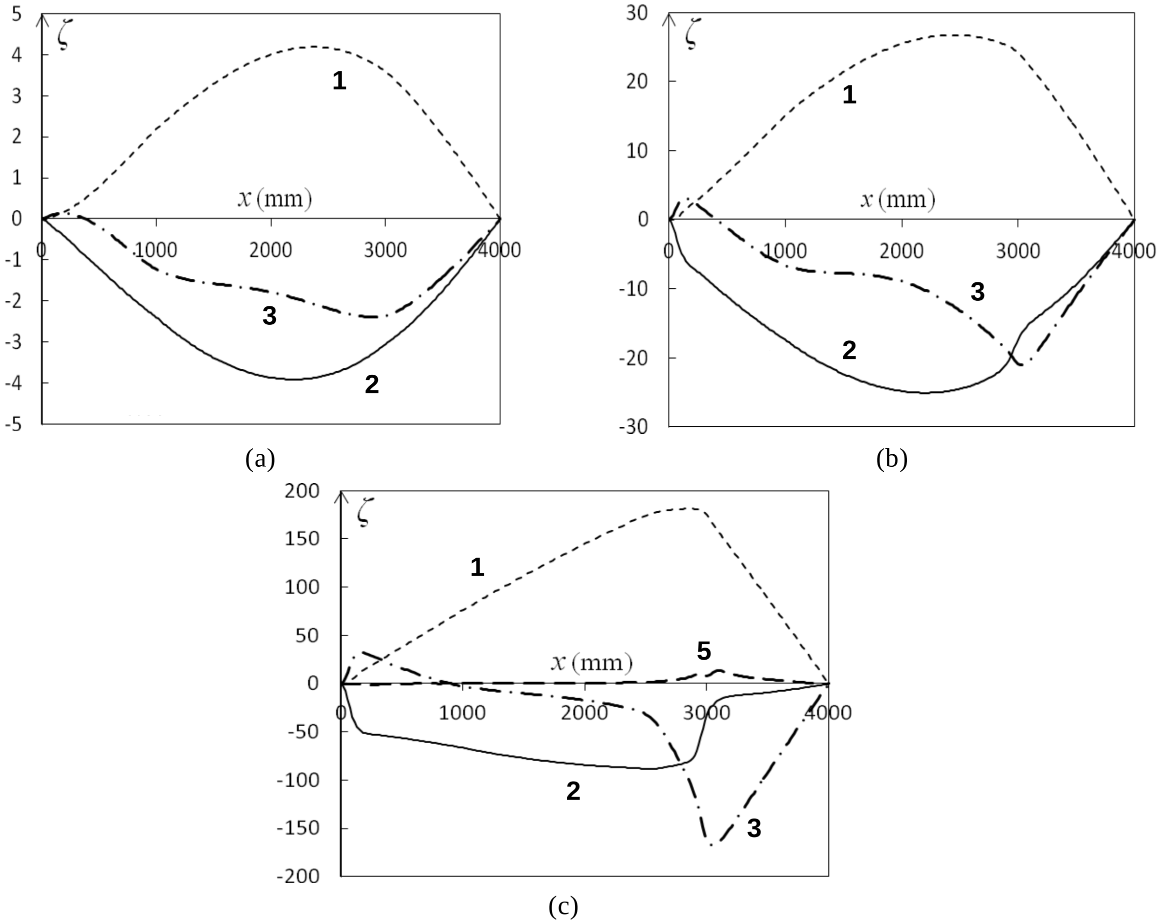


Fig. 6.48. Evolução das funções de amplitude (ζ_k) da GBT relativas aos modos **1**, **2**, **3**, **5**: configurações (a) E, (b) EP e (c) P.

(i) Nos estados E e EP apenas são visíveis as participações dos modos **1**, **2** e **3**. A contribuição do modo **5** só é perceptível no colapso (P) e é localizada na vizinhança da secção em x=3000 mm (onde uma das cargas é aplicada).

(ii) Com o aumento da carga, os valores máximos de $\zeta_k(x)$ (função proporcional às extensões transversais ε_{ss} – ver Eq. (2.11) no cap. 2) tendem a localizar-se na vizinhança de x=3000 mm, onde uma das forças é aplicada. Por outro lado, $\zeta_{k,x}$ (proporcional às distorções γ_{xs}) e $\zeta_{k,xx}$ (proporcional às extensões axiais ε_{xx}) exibem valores máximos perto das secções em x=0 (encastramento) e x=3000 mm. Note-se que estas zonas correspondem à localização das rótulas plásticas que conduzem ao mecanismo de colapso, como se pode confirmar através do (i) *contour* de tensões de *von Mises* e (ii) configuração deformada relativos ao estado P e apresentados nas Figs. 6.49(a)-(b).

Para além da semelhança notável entre os resultados do Abaqus e da GBT, chama-se a atenção para a linha de cedência e distorção que ocorrem na alma na secção em x=3000mm.

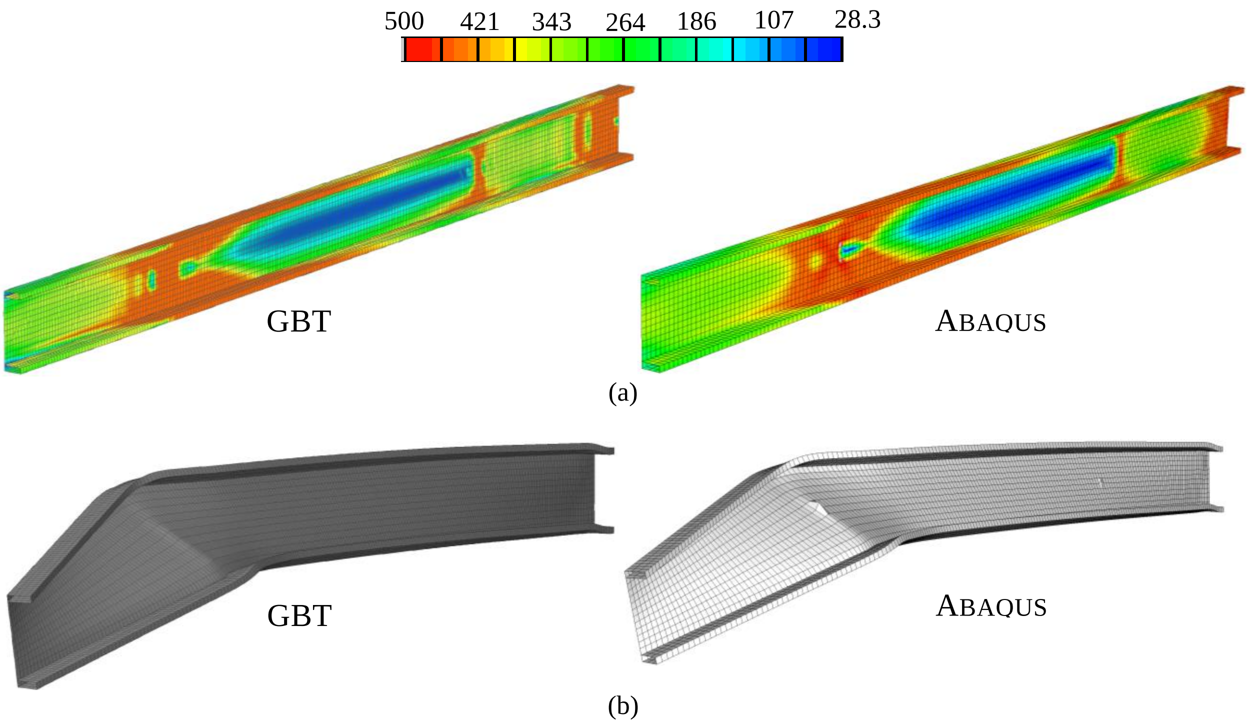


Fig. 6.49. (a) *Contours* de tensões de *von Mises* (N/mm^2) e (b) mecanismos de colapso (estado P).

Finalmente, as Figs. 6.50(a)-(b) dizem respeito ao estado EP e mostram os perfis longitudinais de deslocamentos axiais (δ_x) e transversais (δ_z) do nó do banzo superior indicado na Fig. 6.6(b) – todos os perfis da GBT correspondem a λ_{GBT}=104.1. Importa salientar o seguinte:

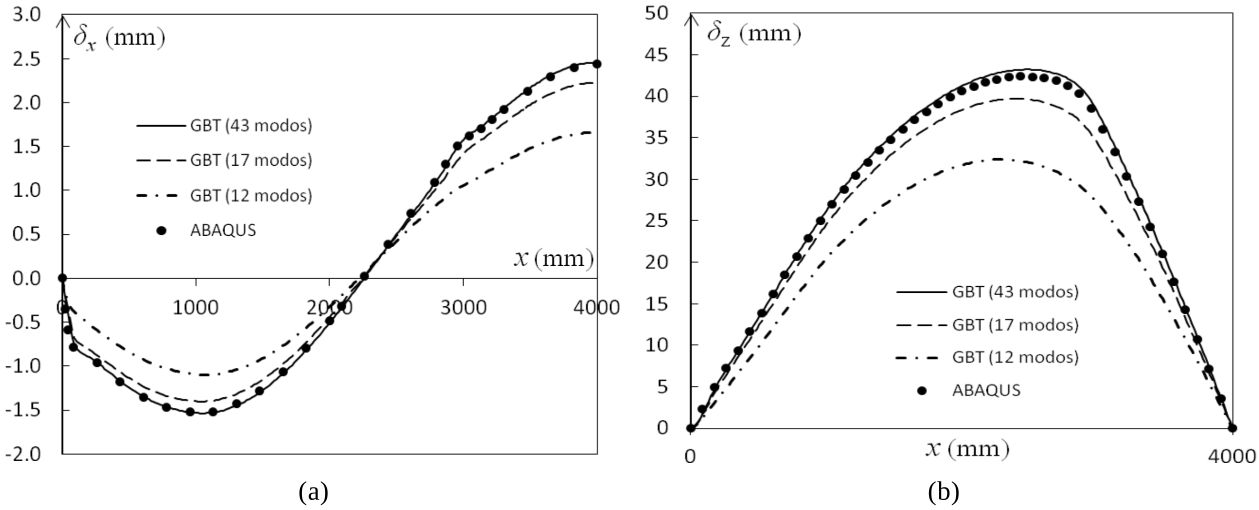


Fig. 6.50. Perfis longitudinais para o estado EP (λ_{GBT} = 104.1) e relativos ao nó do banzo superior indicado na Fig. 6.6(b): deslocamentos (a) axiais e (b) transversais.

(i) Os três perfis da GBT seguem a mesma tendência e, naturalmente, a solução aproxima-se da do Abaqus à medida que aumenta o número de modos envolvido – a utilização dos 43 modos finais conduz a resultados excelentes.

(ii) A comparação entre os perfis de deslocamentos da GBT obtidos com 17 e 12 modos, permite mais uma vez avaliar a relevância da utilização dos modos de extensão transversal.

6.3.4 Conclusões

Com o intuito de validar a formulação fisicamente não linear de 1ª ordem apresentada neste capítulo, bem como de ilustrar as suas potencialidades na análise do comportamento estrutural de perfis de parede fina, foram apresentados e discutidos nesta secção 6 exemplos ilustrativos (apresentam-se dois exemplos sumplementares, vigas com perfis H e Hat, no Anexo 6.C). Os exemplos abrangem uma vasta gama de cenários distintos, nomeadamente (i) o tipo de secção transversal (I, H, Hat, Z, C, C-reforçado, RHS e LSB), (ii) a lei constitutiva uniaxial (bi-linear com e sem endurecimento), (iii) as condições de fronteira (perfis simplesmente apoiados, encastrados-apoiados, bi-encastrados, e em consola), (iv) o tipo de carregamento (pontual, distribuída numa dimensão, e distribuída numa superficie), e (v) padrão de deformação – global (flexão, torção), distorcional, local, corte, extensão transversal. A validação da formulação e respectivo código (implementado em MATLAB – *Mathworks 2012*) foi efectuada por comparação de resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, diagramas e distribuições tri-dimensionais de tensões, perfis de deslocamentos e mecanismos de colapso) com os obtidos através do Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*), recorrendo a modelos de elementos finitos de casca. Para além da validação, a análise de resultados como diagramas de participação e funções de amplitude modais, e trajectórias de equilíbrio baseadas em conjuntos de modos pré-seleccionados, permitiram compreender a mecânica comportamental de cada perfil em qualquer fase da sua resposta (elástica ou elasto-plástica). Esta característica original da GBT pode vir a ser de grande utilidade no melhoramento/desenvolvimento de métodos de dimensionamento existentes/novos (*e.g.*, teoria das linhas de cedência (*Hiriyur e Schafer 2005*), método da resistência directa (*Schafer 2008*)). Como é reconhecido (*Ádány e Schafer 2006, Ádány et al. 2010, Casafont et al. 2011*), a comunidade científica tem dedicado bastante atenção à decomposição modal dos modos de instabilidade de barras de parede fina. Espera-se que este trabalho possa contribuir para que a comunidade científica se passe também a focar na decomposição modal dos mecanismos de colapso de barras de parede fina, e não apenas dos modos de instabilidade.

De uma forma geral, é possível afirmar que os resultados da GBT estão em óptima concordância com os obtidos através do Abaqus, o que garante a validação da formulação proposta neste capítulo. Para além disso, importa realçar que graças à natureza modal da GBT, apenas foram necessários 8.8 % (em média – ver Tab. 6.2 e Anexo 6.C) dos números de g.l. requeridos pelos modelos do Abaqus para obter aproximações de qualidade semelhante. Embora algumas discrepâncias relevantes entre resultados de tensões tenham sido detectadas e justificadas, o seu impacto na qualidade global dos resultados pode considerar-se reduzido. Para além disso, foram propostas formas de atenuar essas diferenças. Nomeadamente, a aproximação linear dos deslocamentos $v(s)$ em cada sub-placa conduz a diagramas de tensões transversais (σ_{ss}) discontínuos entre sub-placas. Uma forma de atenuar essas singularidades consiste em refinar a malha da secção, o que apesar de originar um número total de modos de deformação maior, pode não afectar o número de modos utilizado na análise – obviamente que, apesar de não ter sido implementado, uma solução do problema passa por adoptar perfis $v_k(s)$ que garantam a continuidade de $v_{k,s}(s)$ entre sub-placas, p.e. tal como foi proposto nesta tese relativamente aos perfis de empenamentos $u_k(s)$ (ver 2.4.4 no capítulo 2). Por outro lado, foi observado que, apesar das discontinuidades, os *contours* de tensões σ_{ss} são qualitativamente (e por vezes quantitativamente) semelhantes aos do Abaqus. Relativamente às tensões de corte (σ_{xs}), foram também observadas discrepâncias relacionadas com discontinuidades entre sub-placas. Estando esta componente de tensão dependente de v_k e $u_{k,s}$ em regime elástico, a adopção de perfis u_k não lineares em cada sub-placa e/ou o refinamento da malha da secção são duas soluções possíveis para o problema – não esquecer que em plasticidade existe interacção entre componentes de tensão, pelo que a ocorrência de singularidades numa particular componente pode “contaminar” as restantes. Por último, os problemas de *shear locking* a que as análises da GBT estão sujeitas sempre que existirem secções impedidas de empenar e sujeitas a tensões de corte (discutido em 2.3.2 no capítulo 2) foram geralmente bem solucionados, através (i) de um maior refinamento da zona afectada, e (ii) da imposição de $\zeta_{k,x} = 0$ (todos os modos) e $\zeta_{k,xx} = 0$ (modos de corte) nas secções encastradas.

Relativamente à interpretação modal dos resultados, importa salientar dois aspectos: (i) nos dois exemplos em que se avaliou a influência do endurecimento (linear) no comportamento estrutural, verificou-se que os diagramas de participação modal não variavam muito com o valor do módulo tangente (ou declive de endurecimento) adoptado; (ii) Importa não esquecer o papel crucial desempenhado pelos modos de corte e de extensão transversal na resposta em regime elástico ou inelástico, apesar da sua presença nos diagramas supracitados ser muitas vezes desprezável (consequência da definição de participação modal utilizada).

Tab. 6.5. Reserva de resistência elasto-plástica e participações modais de naturezas local e global no colapso.

Exemplo	**Reserva de resistência elasto-plástica** $S = \lambda_p / \lambda_y$	**Participação local-de-placa+distorcional (%)**	**Participação global (%)**
I	1.13	0	88.2 (modo **1**)
Z	1.56	12.2 (modos **5**, **7**)	87.5 (modos **2**, **3**)
H	1.60	9.4 (modo **6**)	90.4 (modo **4**)
RHS	1.63	17.9 (modos **2**, **3**)	79.8 (modo **1**)
LSB	1.93	31.9 (modos **3**, **5**)	65.9 (modos **1**, **2**)
Hat	2.01	76.4 (modos **5**, **7**, **9**)	22.1 (modo **3**)
C	2.21	75.2 (modos **5**, **7**, **9**)	24.1 (modo **3**)
C reforçado	2.71	98.9 (modos **5**, **7**, **9**)	1.0 (modo **3**)

Finalmente, a Tab. 6.5 apresenta (i) a reserva de resistência elasto-plástica (rácio entre a carga "plástica" e a de cedência) obtida em cada uma das análises (sem endurecimento), bem como (ii) a decomposição modal dos mecanismos de colapso correspondentes, i.e., as participações conjuntas dos modos de natureza global ou local. Na maioria dos casos (os perfis H e Hat do Anexo 6.C são excepções que estão perto de verificar a regra), observa-se que maiores contribuições dos modos locais estão associadas a reservas de resistência mais elevadas, enquanto o inverso se passa com os modos globais. Esta evidência tem paralelo na disparidade entre a rigidez elástica de pós-encurvadura de barras que colapsam em modos locais (rigidez elevada) ou globais (rigidez baixa). Na literatura, e quando se interpretam resultados de análises fisica e geometricamente não lineares de perfis de parede fina, constitui prática comum atribuir a reserva de resistência inelástica aos efeitos de 2ª ordem, negligenciando o facto de os efeitos fisicamente não lineares poderem desempenhar um papel semelhante.

Capítulo 7

GBT – Análises Elasto-Plásticas de 2ª Ordem

Apresenta-se neste capítulo a formulação da GBT para análises fisicamente não lineares de 2ª ordem (ou pós-encurvadura), baseada na teoria J_2 (critério de cedência de *von Mises*) com escoamento associado, e válida para perfis de parede fina (i) com secção transversal arbitrária (aberta ou total/parcialmente fechada, e ramificada ou não ramificada), (ii) exibindo quaisquer distribuições de imperfeições iniciais (tensões residuais e imperfeições geométricas), (iii) constituídos por um material elasto-plástico com resposta linear em regime elástico e endurecimento isotrópico arbitrário (nulo, linear ou não linear), e (iv) submetidos a qualquer carregamento exterior (distribuído e/ou pontual) dependente de um único parâmetro de carga (λ). Importa relembrar que se mantêm válidos os conceitos fundamentais da GBT (hipóteses simplificativas, campo deslocamentos, lei constitutiva elástica e análise da secção) apresentados nas secções 2.1, 2.2 e 2.4 do capítulo 2.

7.1. Equação geral de equilíbrio

A formulação matemática do equilíbrio estático de um corpo composto por um material elasto-plástico é mais uma vez estabelecida recorrendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (*Batra 2006, De Borst et al. 2012*), o qual estipula que

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad , \quad (7.1)$$

onde δW_{int} e δW_{ext} são os trabalhos vituais realizados pelas forças internas (tensões) e externas (cargas aplicadas), respectivamente. O termo δW_{int} é definido por

$$\delta W_{int} = \int_L \int_b \int_e \left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{ss}\delta\varepsilon_{ss} + \sigma_{xs}\delta\gamma_{xs} \right) dz\, ds\, dx \quad , \quad (7.2)$$

onde (i) σ_{xx}, σ_{ss} e σ_{xs} são as componentes de tensão axial (ou longitudinal), transversal e de corte, respectivamente, e (ii) ε_{xx}, ε_{ss} e γ_{xs} são as componentes (de 2ª ordem) do tensor de deformação de *Green – Saint-Venant*, respectivamente, extensão axial, extensão transversal e distorção, cuja definição (relações não lineares deformações-deslocamentos) é dada pelas Eqs. (2.9) do capítulo 2. Contudo, a presente formulação despreza os termos de flexão em z^2, justificado pelo facto de (i) se tratar de uma teoria aplicável apenas a perfis de parede fina (z é a direcção ortogonal a cada parede), e (ii) permitir aumentar a eficiência computacional, vindo as relações cinemáticas implementadas dadas por[1]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= u_{,x} - zw_{,xx} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{,x}\right)^2 + \left(v_{,x}\right)^2 + \left(w_{,x}\right)^2\right] - \alpha\, z\left(u_{,x}w_{,xx} + v_{,x}w_{,xs}\right) \\
\varepsilon_{ss} &= v_{,s} - zw_{,ss} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{,s}\right)^2 + \left(v_{,s}\right)^2 + \left(w_{,s}\right)^2\right] - \alpha\, z\left(u_{,s}w_{,xs} + v_{,s}w_{,ss}\right) \\
\gamma_{xs} &= u_{,s} + v_{,x} - 2zw_{,xs} + u_{,x}u_{,s} + v_{,x}v_{,s} + w_{,x}w_{,s} - \alpha\, z\left(u_{,x}w_{,xs} + u_{,s}w_{,xx} + v_{,x}w_{,ss} + v_{,s}w_{,xs}\right)
\end{aligned} \quad , \quad (7.3)$$

sendo α um factor que toma os valores 0 ou 1 (definido como *input* da análise) de modo a permitir avaliar o custo-benefício da consideração dos termos de flexão em z (acoplamento flexão/membrana), os quais nunca foram considerados em formulações anteriores da GBT (*Camotim et al. 2010a,b, Gonçalves e Camotim 2012*)[2]. Tirando partido da definição do campo de deslocamentos de membrana da GBT (Eq. (2.5) – capítulo 2), as expressões (7.3) podem ser reescritas como função das funções de amplitude modais ζ_k, vindo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \left(u_i - zw_i\right)\zeta_{i,xx} + \\
&+ \left(\frac{1}{2}u_i u_k - \alpha z u_i w_k\right)\zeta_{k,xx}\zeta_{i,xx} + \\
&+ \left(\frac{1}{2}\left(v_i v_k + w_i w_k\right) - \alpha z v_i w_{k,s}\right)\zeta_{k,x}\zeta_{i,x}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_{ss} &= \left(v_{i,s} - zw_{i,ss}\right)\zeta_i + \\
&+ \left(\frac{1}{2}u_{i,s}u_{k,s} - \alpha z u_{i,s}w_{k,s}\right)\zeta_{k,x}\zeta_{i,x} + \\
&+ \left(\frac{1}{2}\left(v_{i,s}v_{k,s} + w_{i,s}w_{k,s}\right) - \alpha z v_{i,s}w_{k,ss}\right)\zeta_k\zeta_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xs} &= \left(u_{i,s} + v_i - 2zw_{i,s}\right)\zeta_{i,x} + \\
&+ \left[u_i u_{k,s} - \alpha z\left(u_i w_{k,s} + w_i u_{k,s}\right)\right]\zeta_{k,x}\zeta_{i,xx} + \\
&+ \left[v_i v_{k,s} + w_i w_{k,s} - \alpha z\left(v_i w_{k,ss} + w_{i,s}v_{k,s}\right)\right]\zeta_k\zeta_{i,x}
\end{aligned} \quad , \quad (7.4)$$

1 É a consideração dos termos não lineares destas relações que define a não linearidade geométrica do problema – ao contrário das formulações de 1ª ordem, o equilíbrio é agora estabelecido na configuração deformada da barra.

2 A inclusão destes termos não lineares de flexão em algumas das análises apresentadas na secção 7.4, conduziu a uma alteração insignificante dos resultados, o que se deve às reduzidas (i) espessura ($e \leq 10$ mm) e/ou (ii) rotações e curvaturas dos termos de acoplamento flexão/membrana – decidiu-se, por isso, excluir esses termos em todas as análises efectuadas.

onde (i) *i* e *k* são índices mudos referentes aos modos de deformação da GBT, e (ii) se relembra que os deslocamentos são relativos à configuração indeformada da barra, i.e., sem qualquer imperfeição geométrica inicial. As deformações virtuais que figuram em (7.2) podem agora ser expressas por

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{xx} &= \left(u_i - z w_i\right)\delta\zeta_{i,xx} + \\
&+\left[u_i u_k - \alpha z\left(u_i w_k + w_i u_k\right)\right]\zeta_{k,xx}\delta\zeta_{i,xx} + \\
&+\left[\left(v_i v_k + w_i w_k\right) - \alpha z\left(v_i w_{k,s} + w_{i,s} v_k\right)\right]\zeta_{k,x}\delta\zeta_{i,x} \\
\delta\varepsilon_{ss} &= \left(v_{i,s} - z w_{i,ss}\right)\delta\zeta_i + \\
&+\left[u_{i,s} u_{k,s} - \alpha z\left(u_{i,s} w_{k,s} + w_{i,s} u_{k,s}\right)\right]\zeta_{k,x}\delta\zeta_{i,x} + \\
&+\left[\left(v_{i,s} v_{k,s} + w_{i,s} w_{k,s}\right) - \alpha z\left(v_{i,s} w_{k,ss} + w_{i,ss} v_{k,s}\right)\right]\zeta_k\delta\zeta_i \\
\delta\gamma_{xs} &= \left(u_{i,s} + v_i - 2z w_{i,s}\right)\delta\zeta_{i,x} + \\
&+\left[u_i u_{k,s} - \alpha z\left(u_i w_{k,s} + w_i u_{k,s}\right)\right]\zeta_{k,x}\delta\zeta_{i,xx} + \\
&+\left[u_{i,s} u_k - \alpha z\left(w_{i,s} u_k + u_{i,s} w_k\right)\right]\zeta_{k,xx}\delta\zeta_{i,x} + \\
&+\left[\left(v_i v_{k,s} + w_i w_{k,s}\right) - \alpha z\left(v_i w_{k,ss} + w_{i,s} v_{k,s}\right)\right]\zeta_k\delta\zeta_{i,x} + \\
&+\left[\left(v_{i,s} v_k + w_{i,s} w_k\right) - \alpha z\left(w_{i,ss} v_k + v_{i,s} w_{k,s}\right)\right]\zeta_{k,x}\delta\zeta_i
\end{aligned} \quad . \quad (7.5)$$

Relativamente ao trabalho virtual das forças externas, a sua definição não sofre qualquer alteração face à utilizada nas formulações de 1ª ordem da GBT, vindo

$$\delta W_{ext} = -\int_L\int_b \left[\left(q_x u_i\right)\delta\zeta_{i,x} + \left(q_s v_i + q_z w_i\right)\delta\zeta_i\right] ds\ dx \quad , \quad (7.6)$$

onde q_x, q_s e q_z são as componentes de uma força distribuída arbitrária actuante na superfície média da barra (ver Fig. 2.2(b) – capítulo 2) – a consideração de forças pontuais é conseguida mediante a imposição de condições de fronteira. A equação geral de equilíbrio da barra vem então dada por

$$\int_L\int_b\int_e \left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{ss}\delta\varepsilon_{ss} + \sigma_{xs}\delta\gamma_{xs}\right) dz\, ds\, dx = \int_L\int_b \left[\left(q_x u_i\right)\delta\zeta_{i,x} + \left(q_s v_i + q_z w_i\right)\delta\zeta_i\right] ds\ dx \quad , \quad (7.7)$$

válida para qualquer (i) modelo constitutivo (*e.g.*, elástico linear/não linear, elasto-plástico com ou sem endurecimento), e (ii) componente virtual das deformações ($\delta\varepsilon_{xx}$, $\delta\varepsilon_{ss}$ e $\delta\gamma_{xs}$ – dadas por (7.5)) e funções de forma ($\delta\zeta_i$ e $\delta\zeta_{i,x}$). No que respeita à imposição de condições de fronteira em secções com empenamentos restringidos e sujeitas a tensões de corte, associada a incompatibilidades estática ou cinemática, a estratégia descrita na parte final da sub-secção 2.3.2 do capítulo 2 foi parcialmente adoptada – a excepção é a imposição de $\zeta_{k,xx}$=0 aos modos de corte, condição agora desnecessária devido à não linearidade das relações (7.4). Relativamente à existência de imperfeições iniciais (tensões residuais e imperfeições geométricas), toda a formulação apresentada neste capítulo é válida para distribuições arbitrárias das mesmas, as quais definem os campos iniciais de deslocamentos, deformações e tensões a considerar no início da estratégia incremetal-iterativa (capítulo 5), ou seja, para um parâmetro de carga nulo (λ=0)[3]. Na secção 7.3 apresentam-se algumas considerações sobre a implementação e influência desses dois tipos de imperfeições.

7.2 Formulação de um elemento finito

Como referido no capítulo anterior (secção 6.2), a determinação de configurações/estados de equilíbrio numa análise não linear requer a implementação de uma estratégia incremental-iterativa (*De Borst et al. 2012*). O método do Comprimento de Arco Cilíndrico (ver capítulo 5) foi considerado, ao qual está subjacente (i) o estabelecimento da equação de equilíbrio incremental da barra, e (ii) a definição do vector de forças internas relativos a uma configuração deformada genérica. Tendo-se adoptado elementos finitos de viga (EFV) para aproximar a solução do problema (duas alternativas de aproximação foram implementadas, baseadas em polinómios de *Hermite* e funções de *Lagrange* – ver sub-secção 2.3.2 do capítulo 2), definem-se de seguida o vector de forças internas e a equação de equilíbrio incremental elementares. Uma vez definidas essas grandezas para todos os EFV de uma análise da GBT, resta proceder à assemblagem das variáveis globais e imposição das condições de fronteira da barra (estáticas e cinemáticas) para que se possa aplicar o algorítmo incremental-iterativo. Por último, importa referir que a formulação que se apresenta de seguida foi reescrita no Anexo 7.A no formato (matricial) adoptado para a sua implementação computacional.

7.2.1 Vector de forças internas

De modo a definir o vector de forças internas do EFV, substituam-se os termos ζ_m, $\zeta_{m,x}$ e $\zeta_{m,xx}$ ($m = i, k$) que figuram na equação geral de equilíbrio (7.7) ($L \equiv L_e$) pelas respectivas aproximações

$$\zeta_m = S^m d_m , \quad \zeta_{m,x} = dS^m d_m , \quad \zeta_{m,xx} = ddS^m d_m \qquad , \quad (7.8)$$

3 A forma mais correcta de introduzir a influência das imperfeições geométricas na formulação, é considerada em *Silvestre* (*2005*), apesar de para estruturas de Engenharia Civil a metodologia adoptada nesta tese conduzir a diferenças insignificantes que não afectam a qualidade dos resultados (dada a baixa magnitude dessas imperfeições).

onde (i) m é um índice/expoente livre que identifica o modo de deformação em causa, e (ii) S^m, dS^m e ddS^m são os vectores (1x4) das correspondentes funções de forma e suas derivadas para o EFV em causa (ver (6.7) – capítulo 6), sendo d_m o vector de deslocamentos (4x1) associado – incógnitas do problema. Após a introdução de (7.8) em (7.5) e (7.7), obtém-se

$$f^{\text{int}} = \lambda \overline{f} \quad , \quad (7.9)$$

onde (i) $\overline{f}$ corresponde ao vector de forças externas (ver Eq. (2.22) – capítulo 2) para um parâmetro de carga (λ) unitário, e (ii) f^{int} é o vector de forças internas para uma configuração de equilíbrio genérica (j) [4] – a sua "componente" i (sub-vector 4x1 associado ao modo de deformação i) é definida por

$$f_i^{\text{int}} = f_{i(xx)}^{\text{int}} + f_{i(ss)}^{\text{int}} + f_{i(xs)}^{\text{int}} \quad , \quad (7.10)$$

onde

$$f_{i(xx)}^{\text{int}} = \int_{L_e}\int_b\int_e \sigma_{xx} \underbrace{\left[\begin{Bmatrix} u_i - zw_i + \\ +\left[u_i u_k - \alpha z\left(u_i w_k + w_i u_k\right)\right] ddS^k d_k \end{Bmatrix} \left(ddS^i\right)^T + \atop +\left[\left(v_i v_k + w_i w_k\right) - \alpha z\left(v_i w_{k,s} + w_{i,s} v_k\right)\right] dS^k d_k \left(dS^i\right)^T \right]}_{F_{i(xx)}^{\text{int}}} dzdsdx$$

$$f_{i(ss)}^{\text{int}} = \int_{L_e}\int_b\int_e \sigma_{ss} \underbrace{\left[\begin{Bmatrix} v_{i,s} - zw_{i,ss} + \\ +\left[\left(v_{i,s} v_{k,s} + w_{i,s} w_{k,s}\right) - \alpha z\left(v_{i,s} w_{k,ss} + w_{i,ss} v_{k,s}\right)\right] S^k d_k \end{Bmatrix} \left(S^i\right)^T + \atop +\left[u_{i,s} u_{k,s} - \alpha z\left(u_{i,s} w_{k,s} + w_{i,s} u_{k,s}\right)\right] dS^k d_k \left(dS^i\right)^T \right]}_{F_{i(ss)}^{\text{int}}} dzdsdx \quad , \quad (7.11)$$

$$f_{i(xs)}^{\text{int}} = \int_{L_e}\int_b\int_e \sigma_{xs} \underbrace{\left[\begin{array}{l} \begin{Bmatrix} u_{i,s} + v_i - 2zw_{i,s} + \\ +\left[u_{i,s} u_k - \alpha z\left(w_{i,s} u_k + u_{i,s} w_k\right)\right] ddS^k d_k + \\ +\left[\left(v_i v_{k,s} + w_i w_{k,s}\right) - \alpha z\left(v_i w_{k,ss} + w_{i,s} v_{k,s}\right)\right] S^k d_k \end{Bmatrix} \left(dS^i\right)^T + \\ \\ +\left[u_i u_{k,s} - \alpha z\left(u_i w_{k,s} + w_i u_{k,s}\right)\right] dS^k d_k \left(ddS^i\right)^T + \\ +\left[\left(v_{i,s} v_k + w_{i,s} w_k\right) - \alpha z\left(w_{i,ss} v_k + v_{i,s} w_{k,s}\right)\right] dS^k d_k \left(S^i\right)^T \end{array} \right]}_{F_{i(xs)}^{\text{int}}} dzdsdx$$

4 Relembra-se que, enquanto não se verifica convergência durante a estratégia incremental-iterativa, esta configuração não está em equilíbrio com o carregamento aplicado (qualquer que seja o parâmetro de carga).

sendo (i) i um índice livre e k um índice mudo, e (ii) os deslocamentos generalizados (d_k) e componentes de tensão (σ_{xx}, σ_{ss} e σ_{xs}) avaliados na configuração de equilíbrio j.

7.2.2 Equação de equilíbrio incremental

A equação de equilíbrio incremental elementar em torno de uma certa configuração deformada, a qual traduz aproximadamente o comportamento do EFV numa vizinhança muito próxima dessa configuração, é obtida através da "linearização" (desenvolvimento em série de *Taylor* limitado aos termos de 1ª ordem) de (7.9), traduzindo-se em

$$K_{\tan}\Big|_j \, \Delta d = \Delta\lambda \, \overline{f} \qquad , \quad (7.12)$$

onde (i) $K_{\tan}$ é a matriz de rigidez tangente[5] elementar nessa configuração, e (ii) Δd é o incremento de deslocamentos generalizados ("componente" p é sub-vector 4x1 associado ao modo p). A "componente" i-p (sub-matriz 4x4 associada aos modos i e p) da matriz de rigidez é definida por

$$K_{ip,\tan} = \frac{\partial f_i^{\text{int}}}{\partial d_p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{i1}^{\text{int}}}{\partial d_{p1}} & \frac{\partial f_{i1}^{\text{int}}}{\partial d_{p2}} & \frac{\partial f_{i1}^{\text{int}}}{\partial d_{p3}} & \frac{\partial f_{i1}^{\text{int}}}{\partial d_{p4}} \\ \frac{\partial f_{i2}^{\text{int}}}{\partial d_{p1}} & \frac{\partial f_{i2}^{\text{int}}}{\partial d_{p2}} & \frac{\partial f_{i2}^{\text{int}}}{\partial d_{p3}} & \frac{\partial f_{i2}^{\text{int}}}{\partial d_{p4}} \\ \frac{\partial f_{i3}^{\text{int}}}{\partial d_{p1}} & \frac{\partial f_{i3}^{\text{int}}}{\partial d_{p2}} & \frac{\partial f_{i3}^{\text{int}}}{\partial d_{p3}} & \frac{\partial f_{i3}^{\text{int}}}{\partial d_{p4}} \\ \frac{\partial f_{i4}^{\text{int}}}{\partial d_{p1}} & \frac{\partial f_{i4}^{\text{int}}}{\partial d_{p2}} & \frac{\partial f_{i4}^{\text{int}}}{\partial d_{p3}} & \frac{\partial f_{i4}^{\text{int}}}{\partial d_{p4}} \end{bmatrix} \qquad , \quad (7.13)$$

onde (i) $f_i^{int} = [f_{i1}^{int}, f_{i2}^{int}, f_{i3}^{int}, f_{i4}^{int}]^T$ corresponde à i-ézima "componente" do vector de forças internas, e (ii) $d_p = [d_{p1}, d_{p2}, d_{p3}, d_{p4}]^T$ é o vector de deslocamentos generalizados relativo ao modo de deformação p. Recorrendo a (7.10)-(7.11), a t-ézima (t =1,...,4) coluna de $K_{ip,\tan}$ é determinada por ($mn = xx, ss, xs$)

$$\frac{\partial f_i^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} = \frac{\partial f_{i(xx)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} + \frac{\partial f_{i(ss)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} + \frac{\partial f_{i(xs)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}}$$

$$\frac{\partial f_{i(mn)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} = \int_{L_e}\int_b\int_e \left\{ \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial d_{pt}} F_{i(mn)}^{\text{int}} + \sigma_{mn} \frac{\partial F_{i(mn)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} \right\} dzdsdx \qquad , \quad (7.14)$$

5 Corresponde à matriz Jacobiana do desenvolvimento em série de *Taylor* – ver Anexo 4.A do capítulo 4.

obtendo-se após o desenvolvimento de $\partial F_{i(mn)}^{\text{int}} / \partial d_{pt}$

$$\frac{\partial f_{i(xx)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} = \int_{L_e}\int_{b}\int_{e} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial d_{pt}} F_{i(xx)}^{\text{int}} + \sigma_{xx} \left\{ \begin{array}{l} \left[u_i u_p - \alpha z \left(u_i w_p + w_i u_p \right) \right] ddS_t^{\,p} \left(ddS^{\,i} \right)^T + \\ + \left[\begin{array}{l} \left(v_i v_p + w_i w_p \right) - \\ - \alpha z \left(v_i w_{p,s} + w_{i,s} v_p \right) \end{array} \right] dS_t^{\,p} \left(dS^{\,i} \right)^T \end{array} \right\} \right\} dzdsdx \quad , \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial f_{i(ss)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} = \int_{L_e}\int_{b}\int_{e} \left\{ \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial d_{pt}} F_{i(ss)}^{\text{int}} + \sigma_{ss} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left(v_{i,s} v_{p,s} + w_{i,s} w_{p,s} \right) - \\ - \alpha z \left(v_{i,s} w_{p,ss} + w_{i,ss} v_{p,s} \right) \end{array} \right] S_t^{\,p} \left(S^{\,i} \right)^T + \\ + \left[\begin{array}{l} u_{i,s} u_{p,s} - \\ - \alpha z \left(u_{i,s} w_{p,s} + w_{i,s} u_{p,s} \right) \end{array} \right] dS_t^{\,p} \left(dS^{\,i} \right)^T \end{array} \right\} \right\} dzdsdx \quad , \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial f_{i(xs)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} = \int_{L_e}\int_{b}\int_{e} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xs}}{\partial d_{pt}} F_{i(xs)}^{\text{int}} + \sigma_{xs} \left\{ \begin{array}{l} \left[u_{i,s} u_p - \alpha z \left(w_{i,s} u_p + u_{i,s} w_p \right) \right] ddS_t^{\,p} \left(dS^{\,i} \right)^T + \\ + \left[\begin{array}{l} \left(v_i v_{p,s} + w_i w_{p,s} \right) - \\ - \alpha z \left(v_i w_{p,ss} + w_{i,s} v_{p,s} \right) \end{array} \right] S_t^{\,p} \left(dS^{\,i} \right)^T + \\ + \left[u_i u_{p,s} - \alpha z \left(u_i w_{p,s} + w_i u_{p,s} \right) \right] dS_t^{\,p} \left(ddS^{\,i} \right)^T + \\ + \left[\begin{array}{l} \left(v_{i,s} v_p + w_{i,s} w_p \right) - \\ - \alpha z \left(w_{i,ss} v_p + v_{i,s} w_{p,s} \right) \end{array} \right] dS_t^{\,p} \left(S^{\,i} \right)^T \end{array} \right\} \right\} dzdsdx \quad , \quad (7.17)$$

onde (i) i e p são índices livres e t simboliza a t-ézima componente dos vectores em causa, (ii) as tensões, gradientes de tensões e deslocamentos generalizados dizem respeito à configuração deformada (j) em que se aplica (7.12), e (iii) os gradientes de tensões $\partial\sigma_{mn} / \partial d_{pt}$ ($mn = xx$, ss, xs) são dados por

$$\frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial d_{pt}} = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{xx}} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial d_{pt}} + \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{ss}} \frac{\partial \varepsilon_{ss}}{\partial d_{pt}} + \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \gamma_{xs}} \frac{\partial \gamma_{xs}}{\partial d_{pt}} \quad , \quad (7.18)$$

sendo (iii$_1$) $\partial\sigma_{mn}/\partial\varepsilon_{xx}$, $\partial\sigma_{mn}/\partial\varepsilon_{ss}$ e $\partial\sigma_{mn}/\partial\gamma_{xs}$ dependentes do modelo constitutivo adoptado e da história de deformação[6], e (iii$_2$) $\partial\varepsilon_{xx}/\partial d_{pt}$, $\partial\varepsilon_{ss}/\partial d_{pt}$ e $\partial\gamma_{xs}/\partial d_{pt}$ definidos com base nas relações (7.4) e nas aproximações do EFV (ver (7.8)), originando

6 Estas grandezas são definidas pelas matrizes constitutivas elástica ou elasto-plástica abordadas no capítulo 4.

$$\frac{\partial\sigma_{mn}}{\partial d_{pt}} = \frac{\partial\sigma_{mn}}{\partial\varepsilon_{xx}}\left\{\begin{array}{l} \left(u_p - zw_p\right) ddS_t^{\,p} + \left(\frac{1}{2}u_k u_p - \alpha z u_k w_p\right) ddS_t^{\,p}\, ddS^{\,k} d_k + \\ + \left(\frac{1}{2}u_p u_k - \alpha z u_p w_k\right) ddS^{\,k} d_k\; ddS_t^{\,p} + \left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(v_k v_p + w_k w_p\right) - \\ -\alpha z v_k w_{p,s}\end{array}\right) dS_t^{\,p}\, dS^{\,k} d_k + \\ + \left(\frac{1}{2}\left(v_p v_k + w_p w_k\right) - \alpha z v_p w_{k,s}\right) dS^k d_k\; dS_t^{\,p} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{\partial\sigma_{mn}}{\partial\varepsilon_{ss}}\left\{\begin{array}{l} \left(v_{p,s} - zw_{p,ss}\right) S_t^{\,p} + \left(\frac{1}{2}u_{k,s}u_{p,s} - \alpha z u_{k,s} w_{p,s}\right) dS_t^{\,p}\, dS^{\,k} d_k + \\ + \left(\frac{1}{2}u_{p,s}u_{k,s} - \alpha z u_{p,s} w_{k,s}\right) dS^{\,k} d_k\; dS_t^{\,p} + \left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(v_{k,s} v_{p,s} + w_{k,s} w_{p,s}\right) - \\ -\alpha z v_{k,s} w_{p,ss}\end{array}\right) S_t^{\,p}\, S^{\,k} d_k + \\ + \left(\frac{1}{2}\left(v_{p,s} v_{k,s} + w_{p,s} w_{k,s}\right) - \alpha z v_{p,s} w_{k,ss}\right) S^{\,k} d_k\; S_t^{\,p} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{\partial\sigma_{mn}}{\partial\gamma_{xs}}\left\{\begin{array}{l} \left(u_{p,s} + v_p - 2zw_{p,s}\right) dS_t^{\,p} + \left[u_k u_{p,s} - \alpha z\left(u_k w_{p,s} + w_k u_{p,s}\right)\right] dS_t^{\,p}\, ddS^{\,k} d_k + \\ + \left[u_p u_{k,s} - \alpha z\left(u_p w_{k,s} + w_p u_{k,s}\right)\right] dS^{\,k} d_k\; ddS_t^{\,p} + \\ + \left[v_k v_{p,s} + w_k w_{p,s} - \alpha z\left(v_k w_{p,ss} + w_{k,s} v_{p,s}\right)\right] S_t^{\,p}\, dS^{\,k} d_k + \\ + \left[v_p v_{k,s} + w_p w_{k,s} - \alpha z\left(v_p w_{k,ss} + w_{p,s} v_{k,s}\right)\right] S^{\,k} d_k\; dS_t^{\,p} \end{array}\right\} \quad , \quad (7.19)$$

onde k é um índice mudo e p um índice livre, referentes a modos de deformação da GBT.

7.3 Imperfeições iniciais

As análises não lineares de barras com secção de parede fina utilizando o método dos elementos finitos de casca têm tido recentemente uma grande evolução ao nível da qualidade dos resultados obtidos. Apesar disto, a determinação numérica rigorosa do comportamento de pós-encurvadura de barras de parede fina não constitui uma tarefa simples devido à existência de múltiplos parâmetros a ter em consideração nessa análise, uns de natureza computacional (parâmetros relativos à resolução do sistema de equações não lineares) e outros de natureza experimental (parâmetros que surgem da caracterização experimental do material e das imperfeições iniciais). Se os parâmetros de natureza computacional são bem conhecidos, os de natureza experimental são bem mais difíceis de caracterizar convenientemente, sobretudo devido à falta de um conhecimento rigoroso sobre os padrões das imperfeições iniciais do elemento estrutural (imperfeições geométricas e tensões residuais). Por conseguinte, vários autores têm dedicado a sua atenção à realização de ensaios experimentais e análises numéricas com o fim de estabelecer metodologias consensuais para uma modelação eficaz e eficiente das imperfeições iniciais.

7.3.1 Imperfeições geométricas

Com base no estado da arte da modelação numérica de imperfeições geométricas, relativo ao período entre 1998 e 2012, é quase consensual que a imperfeição geométrica que mais deteriora o comportamento não linear do elemento estrutural é aquela que possui a forma do modo crítico de instabilidade. Por isso, optou-se por modelar as mesmas através da combinação linear de modos de instabilidade obtidos preliminarmente através de uma análise linear de estabilidade da GBT, sendo possível seleccionar modos de qualquer natureza (global, local e/ou distorcional). Por outro lado, também é necessário saber qual a amplitude máxima dessa imperfeição geométrica. Neste caso, as amplitudes adoptadas para cada modo baseam-se em expressões propostas na literatura, as quais são apresentadas de seguida.

Schafer e Pekoz (1998)

Até esta altura vários autores tinham medido imperfeições geométricas em vários elementos de aço enformado a frio, dividindo as medições efectuadas em duas categorias (ver Fig. 7.1): (i) tipo 1: imperfeição máxima local numa parede reforçada da secção (d_1), e (ii) tipo 2: máximo desvio da posição inicial de um banzo (d_2).

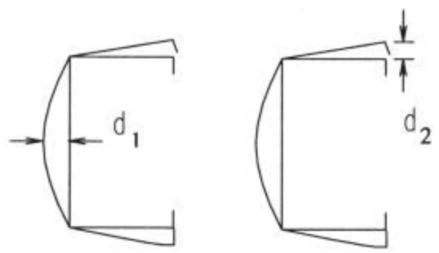


Fig. 7.1. Imperfeições geométricas: tipo 1 (d_1) e tipo 2 (d_2) (*Schafer e Pekoz 1998*).

Relativamente à distribuição longitudinal da imperfeição, *Schafer* e *Pekoz* comprovaram experimentalmente que a mesma tem natureza periódica. É sabido que a resistência de perfis de aço enformado a frio é bastante sensível a imperfeições com a forma dos modos de instabilidade, sendo os modos com menor energia os que melhor caracterizam essas imperfeições. No caso de se optar pela modelação de uma "imperfeição modal", estes autores recomendam que seja obtida pela soma de pelo menos dois modos de naturezas distintas (local, distorcional, global), tendo proposto expressões analíticas para determinar as amplitudes modais do tipo 1 e 2 (ver Fig. 7.1), válidas para espessuras inferiores a 3 mm,

$$d_1 = \begin{Bmatrix} 0.006b \\ \text{ou} \\ 6t\,e^{-2t} \end{Bmatrix}, \quad b/t < 200 \qquad\qquad d_2 = t, \quad b/t < 100 \qquad , \quad (7.20)$$

onde t e b são a espessura e largura da parede da secção em causa (em mm). Alternativamente, os mesmos autores sugerem a utilização dos valores da Tab. 7.1, provenientes do tratamento estatístico de resultados experimentais recolhidos à data. A interpretação desta tabela permite afirmar que as imperfeições máximas dos tipos 1 e 2 não excedem os valores d_1/t = 1.35 e d_2/t = 3.44 com 95% de probabilidade.

Tab. 7.1. Funções de distribuição cumulativas relativas às imperfeições dos tipos 1 e 2 (*Schafer e Pekoz 1998*).

	Type 1	Type 2
P(Δ < d)	d_1/t	d_2/t
0.25	0.14	0.64
0.50	0.34	0.94
0.75	0.66	1.55
0.95	1.35	3.44
0.99	3.87	4.47
Mean	0.50	1.29
St. dev.	0.66	1.07

Dubina e Ungureanu (2002)

Segundo estes autores, a prática corrente na modelação de imperfeições geométricas é a utilização de distribuições sinusoidais com comprimentos de onda correspondentes aos modos de instabilidade relevantes. No entanto, sendo as imperfeições reais não periódicas na direcção axial, a utilização dos deslocamentos máximos medidos experimentalmente para definir as amplitudes numéricas das imperfeições, conduz a uma subestimativa da carga de colapso. Relativamente às amplitudes do tipo 1 e 2 (ver Fig. 7.1) a considerar na simulação de imperfeições de natureza local e/ou distorcional, para além das expressões (7.20) estes autores propõem

$$d_2/t = 0.014b/t + 0.5 \qquad . \quad (7.21)$$

No que respeita às imperfeições de carácter global, estas podem ser de três tipos – torção, flexão na maior inércia ou flexão na menor inércia. Relativamente às imperfeições de flexão (distribuição sinusoidal com meio comprimento de onda), as amplitudes sugeridas são L/1000 ou L/1500 (L é o comprimento da barra) – segundo *Bjorhovde* (*1972*), a última era à data a média estatística em elementos estruturais de aço. Quanto à imperfeição por torção, a qual pode ser relevante tanto na análise de colunas (instabilidade por torção ou flexão-torção) como de vigas (instabilidade lateral por flexão-torção), sugerem-se as expressões preconizadas no código Australiano (*Standards Australia 1998*), dadas por

$$\phi_0 = \begin{cases} \left(\mathrm{N}_{\mathrm{cr,v}}\, L\right)/\left(1\times 10^3\, \mathrm{M}_{\mathrm{cr,LT}}\right), & \lambda_{\mathrm{LT}} \geq 0.6 \\ \left(\mathrm{N}_{\mathrm{cr,v}}\, L\right)/\left(1\times 10^7\, \mathrm{M}_{\mathrm{cr,LT}}\right), & \lambda_{\mathrm{LT}} < 0.6 \end{cases} \qquad \lambda_{\mathrm{LT}} = \sqrt{\mathrm{M}_y / \mathrm{M}_{\mathrm{cr,LT}}} \quad , \tag{7.22}$$

onde (i) ϕ_0 é a rotação máxima de torção da secção (em radianos), (ii) $\mathrm{N}_{\mathrm{cr,v}}$ é a carga de instabilidade elástica por flexão na menor inércia (coluna bi-articulada), (iii) $\mathrm{M}_{\mathrm{cr,LT}}$ é o momento elástico de instabilidade lateral por flexão-torção[7], e (iv) M_y é o momento de cedência (secções de classe 3 ou 4) ou plástico (secções de classe 1 ou 2) da secção.

Young e Yan (2002a, b)

O objectivo destes trabalhos foi desenvolver dois modelos numéricos através do Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*) que permitissem investigar a resistência de colunas bi-encastradas em aço enformado a frio com secção em (i) C (*Young e Yan 2002a*) e (ii) C-reforçado (*Young e Yan 2002b*). Cada modelo inclui imperfeições geométricas e tensões residuais e foi validado por comparação de resultados com os obtidos experimentalmente para uma vasta gama de colunas (curtas a longas). Todos os elementos analisados exibiam uma imperfeição com a forma do modo crítico de instabilidade (local ou global). Na fase de calibração do modelo foram testadas várias amplitudes, sendo o valor de 0.25t (t é a espessura da secção) aquele que originou melhores resultados. Para ambas as séries de perfis testadas, concluiu-se que os rácios médios entre as cargas últimas experimental e numérica valem (i) 0.93 e 1.00 (coeficiente de variação (CV) de 0.076 e 0.080) para a secção em C, e (ii) 0.97 e 0.99 (CV de 0.051 e 0.057) para a secção em C-reforçado – neste caso verificou-se ainda que os índices de fiabilidade das resistências numéricas (2.62 e 2.68) ultrapassam o valor mínimo de 2.5 recomendado pelo *American Iron and Steel Institute* (AISI). Constatou-se também que os modos de colapso observados experimentalmente – local, distorcional, flexão na menor inércia e flexão-torção, estão em boa concordância com os previstos numericamente.

7 Conservativamente (originando maior amplitude de imperfeição), o cálculo implementado assume uma distribuição de momento uniforme e condições de apoio do tipo forquilha.

Gardner e Nethercot (2004b)

Este trabalho apresenta uma forma consistente de abordar a modelação numérica de elementos tubulares em aço inoxidável sujeitos a compressão e/ou flexão. Segundo *Gardner* e *Nethercot*, a distribuição de imperfeições geométricas deve ser definida pela sobreposição das configurações dos modos de instabilidade local e global de menor energia. Relativamente à amplitude do modo local (ω_0), os autores propôem a utilização do modelo de *Dawson* e *Walker* (*1972*)[8]

$$\omega_0 = \gamma\, t\, \sigma_{0.2} / \sigma_{cr} \quad , \quad (7.23)$$

onde (i) t é a espessura da parede do elemento onde a imperfeição é máxima, (ii) $\sigma_{0.2}$ é a tensão limite de proporcionalidade à compressão a 0.2%, (iii) σ_{cr} é a tensão crítica local do perfil à compressão uniforme, e (iv) γ é uma constante que deve ser obtida através da recta de regressão que melhor se ajusta aos resultados experimentais. Relativamente ao valor de γ, (i) *Dawson* e *Walker* observaram que γ=0.2 permite obter resultados razoáveis para placas simplesmente apoiadas e secções quadradas, (ii) *Gardner* e *Nethercot* propõem γ=0.023 para qualquer coluna em aço inox com secção quadrada (SHS) ou rectangular (RHS)[9] e (iii) *Cruise e Gardner* (*2006*) consideram que o valor adequado de γ para qualquer elemento em aço inoxidável deve pertencer ao intervalo [0.012, 0.111]. Refira-se ainda que *Dawson* e *Walker* mostraram que a expressão

$$\omega_0 = \gamma\, t \sqrt{\sigma_{0.2} / \sigma_{cr}} \quad , \quad (7.24)$$

não se adequava a perfis enformados a frio em aço carbono nem a perfis tubulares em aço inoxidável. Quanto à amplitude da imperfeição global, *Gardner* e *Nethercot* concluíram, após um estudo paramétrico, que o valor L/2000 é aquele que origina melhores resultados – as cargas últimas numérica e experimental de colunas simplesmente apoiadas foram comparadas, tendo-se obtido um rácio médio de 1.00 (CV de 0.07).

Definida a forma de modelação das imperfeições geométricas de elementos tubulares em aço inox, os autores efectuaram um estudo numérico e experimental sobre o comportamento e capacidade resistente

8 Foi concluído por outros autores, através de ensaios experimentais de perfis de aço carbono com secções em C-reforçado e em *Hat*, que a expressão (7.23) garante uma melhor aproximação do comportamento estrutural do que ω_0 = {0.1; 0.5; 1}t.

9 As imperfeições medidas experimentalmente são referentes à zona central (¾ do comprimento) de cada coluna, pois as imperfeições elevadas observadas nas extremidades resultam da distorção provocada pelo corte do perfil (gera tensões residuais de flexão), não sendo por isso representativas do tipo de imperfeição observada.

de uma vasta gama de elementos (*e.g.*, colunas, vigas-coluna) com secções SHS e RHS, tendo concluído que (i) em média, a carga última numérica não difere mais que 3% da "real" e apresenta um baixo desvio padrão, e (ii) as trajectórias carga-deslocamento e modos de colapso numéricos estão em boa concordância com os obtidos experimentalmente.

Lecce e Rasmussen (2006b)

Ensaios experimentais de colunas em aço inox enformado a frio com secção em C-reforçado, envolvendo modos de colapso distorcionais, foram utilizados para calibrar um modelo de EF para análises de pós-encurvadura. Foram comparados resultados experimentais e numéricos, os últimos baseados numa imperfeição geométrica com a forma do 1º modo de instabilidade distorcional com amplitude de 12% da espessura da secção (média da imperfeição medida a meio vão na ligação banzo-reforço), tendo-se obtido rácio médio entre a carga última numérica e experimental de 0.98 (CV de 0.023). Posteriormente foi efectuado um estudo paramétrico com base nesse modelo mas considerando uma nova amplitude para a imperfeição, dada pela Eq. (7.24) com γ=0.3. Essa expressão não forneceu bons resultados em vários casos de perfis enformados a frio em aço carbono e inoxidável. No entanto, segundo *Lecce* e *Rasmussen*, a mesma expressão já tinha sido utilizada com sucesso em análises de perfis enformados a frio em aço carbono com comportamento distorcional.

Camotim et al. (2006)

Num estudo sobre interacção modal local-distorcional no comportamento de pós-encurvadura em regime elástico de colunas com secção em C-reforçado, os autores efectuaram uma análise de sensibilidade às imperfeições geométricas. Estas foram simuladas com base na GBT, sendo a sua distribuição dada pela combinação linear dos modos local e distorcional da GBT com menor energia (nos 5 e 7), i.e., os modos com maior participação nos modos de instabilidade críticos dessa natureza. O campo de deslocamentos de membrana correspondente à imperfeição proposta vem dado por

$$\begin{aligned} u &= u_5(s)\,\zeta_{5,x}(x) + u_7(s)\,\zeta_{7,x}(x) \\ v &= v_5(s)\,\zeta_5(x) + v_7(s)\,\zeta_7(x) \\ w &= w_5(s)\,\zeta_5(x) + w_7(s)\,\zeta_7(x) \end{aligned} \quad , \quad (7.25)$$

onde

$$w_5(s)_{,\max} = 1, \quad w_7(s)_{,\max} = 1 \quad , \quad (7.26)$$

$$\zeta_5(x) = \bar{\zeta}_5(x)\, d_0 sen\theta, \quad \zeta_7(x) = \bar{\zeta}_7(x)\, d_0 cos\theta$$
$$\bar{\zeta}_5(x)_{,\max} = \bar{\zeta}_7(x)_{,\max} = 1 \qquad , \quad (7.27)$$

e 0º≤θ≤360º permite definir a contribuição de cada modo na imperfeição (*e.g.*, θ=90º => modo local puro, θ=0º => modo distorcional puro), sendo d_0 o máximo deslocamento transversal de flexão (*w*) proveniente de um modo puro – d_0 e θ constituem *inputs* do modelo numérico. Do estudo efectuado, concluiu-se que (i) quando a componente local das imperfeições iniciais é muito maior que a sua congénere distorcional (θ≈90º ou θ≈270º), a trajectória de equilíbrio da coluna exibe um fenómeno de instabilidade por *snap-through* mais ou menos perceptível, e (ii) as imperfeições distorcionais puras (θ=0º ou θ=180º) são as mais prejudiciais à resistência da coluna.

Ashraf et al. (2006b)

Estes autores propuseram linhas orientadoras para a modelação numérica de colunas curtas em aço inox e utilizaram-nas para analisar as 136 colunas anteriormente ensaiadas experimentalmente, envolvendo diversos (i) tipos de secção transversal (L, C, C-reforçado, I, SHS, RHS) e (ii) processos de fabrico (quinagem, enformagem a frio e soldadura). Relativamente às imperfeições geométricas, estas foram modeladas com a forma do modo crítico de instabilidade e uma amplitude dada por (7.23) (γ=0.023). Foi concluído que o modelo numérico proposto é eficaz, uma vez que foi obtido um rácio médio entre as cargas últimas numérica e experimental igual a 1.01 (CV de 0.08).

Seo et al. (2008)

Este estudo pretendeu investigar numericamente a influência das imperfeições iniciais na capacidade resistente de vigas *LiteSteel* que colapsam por encurvadura lateral. Foram medidas imperfeições geométricas de natureza global e local em vários perfis, tendo-se concluido que (i) as imperfeições globais são dominantes em relação às locais (estas não excedem as tolerâncias de fabrico), e (ii) os valores máximos das globais são inferiores a 50% do valor limite *L*/1000 recomendado no regulamento Australiano (*Standards Australia 1998*). As análises numéricas efectuadas incluiram apenas imperfeições com a forma do 1º modo de instabilidade global e uma amplitude de *L*/1000, tendo conduzido a estimativas precisas da capacidade resistente das vigas.

Theofanous e Gardner (2009)

Este artigo analisa o comportamento à compressão de elementos tubulares SHS e RHS em aço inoxidável. Foram realizados 8 ensaios experimentais a colunas curtas e 12 a colunas médias a longas, os quais foram utilizados para validar modelos numéricos de EF. Relativamente à modelação das imperfeições geométricas, estas tomam a forma do modo de instabilidade crítico (local) no caso das colunas curtas, e da soma dos modos de instabilidade críticos local e global no caso das colunas médias e longas. No caso da imperfeição local, foram avaliados os resultados para diferentes amplitudes, nomeadamene (i) a imperfeição máxima medida, (ii) t/10 (t é a espessura da secção), (iii) t/100 e (iv) a expressão (7.23) com γ=0.023. Relativamente à imperfeição global, foram consideradas amplitudes de L/500, L/1000, L/1500 e L/2000. Avaliando os resultados obtidos, concluiu-se que as amplitudes locais t/100 e a dada por (7.23) conduzem aos melhores resultados – para as colunas curtas obtiveram-se rácios médios entre as cargas últimas numérica e experimental de 1.00 e 1.01 (CV=0.03), respectivamente. Relativamente às colunas médias a longas, a amplitude global de L/1500 forneceu os melhores resultados, tendo-se obtido um rácio médio entre cargas últimas de 0.99 (CV=0.05).

Zeinoddini e Schafer (2011)

Foi realizado um programa experimental com o intuito de medir imperfeições globais[10] numa vasta gama de perfis de aço enformado a frio com secção em C-reforçado (maioritariamente com 2400 mm de comprimento). Foram efectuadas medições (deslocamento de flexão e rotação de torção) em 7 fábricas de produção (metalomecânica), tendo-se obtido percentis 95% associados às imperfeições de flexão (em torno da menor e maior inércias) e torção de L/845, L/1472 e 2.07º, respectivamente.

Bonada et al. (2012)

Este trabalho avalia três métodos de determinação das imperfeições geométricas a utilizar em análises numéricas de perfis de aço enformado a frio. Em particular, estudam-se colunas com secção em *Rack* e modos de colapso distorcionais e/ou globais. Pelo carácter inovador e qualidade dos resultados obtidos, há um método que importa destacar, o qual consiste na combinação linear de vários modos de instabilidade cujas amplitudes são determinadas com base na GBT (recorrendo ao conceito de participação modal) e em valores recomendados na literatura. Por exemplo, faz-se referência aos valores do Eurocódigo 3, parte 1-5 (*CEN 2006b*), relativos às imperfeições do tipo 1 e 2 (ver Fig. 7.1), respectivamente b/200 e b/50 (b é a largura da parede em causa). Os modelos numéricos que adoptaram esta metodologia conduziram a (i) um rácio médio entre as cargas últimas numérica e experimental de 1.024 (CV=0.031), e (ii) modos de colapso idênticos aos experimentais.

10 As imperfeições fornecidas apenas contabilizam a influência do processo de fabrico, desprezando as que possam resultar do armanezamento, entrega e/ou montagem dos perfis, as quais são predominantemente locais.

7.3.2 Tensões residuais

Denominam-se "tensões residuais" as tensões que existem num elemento estrutural livre de qualquer carregamento (λ=0). Estas são tensões auto-equilibradas, induzidas maioritariamente durante o processo de fabrico através de deformação plástica (principalmente em secções enformadas a frio) e/ou arrefecimento diferencial (principalmente em secções laminadas a quente ou soldadas). A existência destas tensões pode resultar em cedência e perda de rigidez prematuras do elemento estrutural quando submetido a um carregamento, facto que pode deteriorar significativamente a sua capacidade resistente. No caso geral, essas tensões (longitudinais (σ_{xx}) e/ou transversais (σ_{ss})) variam ao longo da espessura da parede do perfil e podem-se dividir numa componente de membrana e noutra de flexão, ou seja, com resultante normal não nula e nula, respectivamente. Nas secções de aço laminadas a quente ou soldadas, tem-se observado que apenas as tensões axiais de membrana têm magnitude significativa (as de flexão são geralmente desprezáveis). As secções de aço enformadas a frio exibem tensões residuais de membrana normalmente baixas relativamente às de flexão, as quais apresentam valores significativos (*Moen et al. 2008*, *Gardner e Cruise 2009*)[11]. Medições da variação de tensões residuais ao longo da espessura (*Key e Hancock 1993*), bem como modelos analíticos e de EF (*Rondal 1987*, *Quach et al. 2004*, *Moen et al. 2008*), comprovaram a existência de uma componente de flexão não linear na espessura[12]. A distribuição axial das tensões residuais (ao longo do comprimento do perfil) não é constante e varia numa reduzida extensão junto às secções extremas da barra (livres de tensões residuais). Apesar dessa variação ser frequentemente desprezada na literatura sem afectar a boa correlação entre os resultados numéricos e experimentais, a sua correcta modelação pode ser relevante nos casos em que o colapso do perfil ocorra junto a alguma das suas extremidades.

A forma mais rigorosa e eficiente de simular a influência das tensões residuais e endurecimento variável como resultado do processo de fabrico (*e.g*, zonas dos cantos das secções enformadas a frio – ver sub-secção 1.1.1 do capítulo 1), consiste em (i) introduzir no modelo a lei σ-ε do material virgem (i.e., das chapas antes de serem soldadas/quinadas, ou das folhas para enformagem a frio antes de serem enroladas em bobine) e (ii) considerar em cada ponto de integração as tensões e parâmetro de endurecimento residuais, ou seja, existentes no perfil após o seu fabrico. No entanto, e apesar dessas variáveis já terem sido estimadas por modelos analíticos (*e.g.*, *Moen et al. 2008*) ou analítico-numéricos

11 No caso de vigas LiteSteel, ensaios experimentais evidenciaram a presença de ambos os tipos de tensões devido ao processo de fabrico combinar enformagem a frio com soldadura por resistência eléctrica (*Anapayan e Mahendran 2012*).

12 A medição dessa variação torna-se inviável para espessuras abaixo de um certo limite, razão pela qual as medições de tensões residuais em secções enformadas a frio são maioritariamente efectuadas nas faces das suas paredes.

(*e.g., Quach et al. 2004, 2006*) no caso de perfis enformados a frio, a estratégia de modelação descrita tem sido raramente utilizada em análises de pós-encurvadura. Importa referir que os métodos analítico-numéricos, apesar de mais versáteis do que os analíticos, (i) requerem o conhecimento sobre simulação por EF do processo de fabrico, e (ii) prejudicam fortemente a eficiência computacional.

A estratégia usualmente adoptada na literatura (*e.g., Sully e Hancock 1996, Young e Ellobody 2005, Ellobody e Young 2005, Ashraf et al. 2006b, Theofanous e Gardner 2009*) para modelar o efeito das tensões residuais e endurecimento variável consiste (i) na consideração de uma curva uniaxial σ-ε por zona da secção com endurecimento distinto, determinada com base no ensaio de provetes cortados do perfil após o seu fabrico, e (ii) na introdução no modelo da distribuição de tensões residuais de membrana, obtida experimentalmente ou através de modelos analíticos propostos (*e.g.,* secções SHS: *Key e Hancock 1993, Wang et al. 2012a*; secções H: *Wang et al. 2012b*; secções *LiteSteel Beam*: *Anapayan et al. 2011*; cantoneiras: *Liu e Hui 2010*; secções em aço inoxidável: *Gardner e Nethercot 2004b, Ashraf et al. 2006b, Gardner e Cruise 2009*) – a influência das tensões residuais de flexão está implícita e aproximadamente contabilizada na(s) curva(s) σ-ε, como se explica de seguida. Após o corte de um provete longitudinal de qualquer zona de um perfil, constata-se (regra geral) que esse provete sofre flexão longitudinal, podendo também esticar ou encolher em função da presença de tensões de membrana antes do corte. Em perfis de parede fina, a curvatura longitudinal referida verifica-se sobretudo em secções enformadas a frio, ocorrendo devido à libertação elástica de tensões residuais longitudinais (σ_{xx}) de flexão cujo momento iguala o momento residual existente antes do corte. No que respeita à existência de tensões transversais (σ_{ss}) de flexão em perfis enformados a frio, *Key e Hancock* (*1993*) concluíram para perfis tubulares (sem tratamento térmico após enformagem) que essas tensões resultam da soma de um diagrama linear (*bending*, em língua inglesa) com outro não linear (*layering*, em língua inglesa), respectivamente associados a momentos residuais não nulo e nulo. Contudo, enquanto que (i) as tensões longitudinais de flexão de um eventual momento residual libertado voltam a ser aproximadamente reintroduzidas durante o ensaio uniaxial do provete (*Ashraf et al. 2006b, Cruise e Gardner 2008a*) pois este é planificado pela máquina, (ii) as tensões transversais de flexão libertadas dificilmente são recuperadas[13]. Resumidamente, pode-se dizer que a relação σ-ε resultante do ensaio de um provete longitudinal traduz o comportamento "médio" do material nessa zona da secção, tendo em conta (i) o nível de endurecimento e (ii) a influência das tensões residuais longitudinais de flexão, mas (iii) desprezando as tensões residuais de membrana e, eventualmente, a componente linear das tensões residuais transversais de flexão – estas deverão ser modeladas explicitamente. Por fim, importa referir

13 Eventuamente poderá dar-se o caso de alguns autores "planificarem" os provetes dos cantos de secções enformadas a frio, de modo a repor o ângulo inicial que caracteriza cada canto, recuperando assim as tensões transversais libertadas.

que não foi objectivo desta tese analisar a influência das tensões iniciais, pelo que a sua modelação explícita foi assumida nula em todos os exemplos ilustrativos.

7.4 Exemplos ilustrativos

Nesta secção ilustra-se a aplicação da GBT, implementada no *software* Matlab (*Mathworks 2012*), à análise fisicamente não linear de 2ª ordem (pós-encurvadura) de perfis metálicos de parede fina geometricamente imperfeitos (i.e., com deslocamentos/deformações iniciais)[14]. São apresentados 7 exemplos ilustrativos onde se analisam perfis submetidos a vários tipos de carregamento e caracterizados por diversos materiais, tipos de secção transversal e condições de fronteira. A validação da formulação/código da GBT é conseguida por comparação de resultados (trajectórias de equilíbrio, diagramas/*contours*[15] de tensões, perfis de deslocamentos e mecanismos de colapso) com os obtidos através do *software* Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*), recorrendo a modelos de elementos finitos de casca (EFC)[16]. Para além da validação, será também efectuada uma análise modal do comportamento estrutural de cada barra, através da discussão de resultados como diagramas de participação/funções de amplitude modais e trajectórias de equilíbrio baseadas em conjuntos de modos pré-seleccionados.

7.4.1 Caracterização

Antes de apresentar e discutir os resultados, todos os problemas abordados são previamente definidos, fazendo referência aos modos de deformação da GBT seleccionados e ilustrando as configurações dos mais relevantes em cada análise (ver 7.4.1). Importa também mencionar que (i) as dimensões das secções referem-se à linha média e todos os resultados dizem respeito a pontos localizados na superfície média da barra (z=0), (ii) os modelos do Abaqus são formados por malhas regulares de EFC do tipo S4 (4 pontos de integração de *Gauss* no plano médio)[17], e (iii) o *input* da lei constitutiva uniaxial (à compressão[18]) no Abaqus tem de ser expresso em termos da tensão (σ^{t}) e extensão plástica ($\varepsilon^{t(p)}$) verdadeiras (em valor absoluto), as quais são obtidas com base nos valores absolutos da tensão (σ^{n}) e

14 Relembra-se que não foi objectivo deste trabalho modelar o efeito das tensões residuais, pelo que estas foram assumidas nulas em todos os exemplos ilustrativos.

15 Distribuições tri-dimensionais.

16 A teoria J_2 com escoamento associado é também o modelo de plasticidade adoptado nas análises do Abaqus.

17 Algumas recomendações sobre o tipo de EFC e discretização a utilizar no Abaqus são apresentadas no Anexo 6.B.

18 Caso em algum caso particular o comportamento "verdadeiro" à tracção for distinto do à compressão, este último é o que se deve introduzir no modelo pelo facto de apenas se pretender estudar materiais isotrópicos e por os perfis de parede fina serem muito susceptíveis a fenómenos de instabilidade.

extensão (ε^n) nominais através das expressões (6.17) (capítulo 6). Note-se que apesar da formulação da GBT envolver tensões nominais, os *outputs* de tensões normais foram convertidos para grandezas verdadeiras recorrendo a (6.17), permitindo assim a comparação com os valores do Abaqus. No entanto, as tensões de *von Mises* obtidas pela GBT foram calculadas com base nas componentes nominais das tensões devido ao facto destas terem sido utilizadas no modelo de plasticidade implementado.

Tab. 7.2. Exemplos Ilustrativos: propriedades materiais.

Exemplo	***E*** **(GPa)**	***E*$_t$** **(GPa)**	ν	σ_0^y **(N/mm²)**	$\sigma_{0.2}$ **(N/mm²)**	***n***
Coluna em I	200	0	0.3	460	-	-
Coluna curta SHS	E^c = 198.2 E^t = 198.8	-	0.3	390.3	$\sigma_{0.2}{}^c$ = 560 $\sigma_{0.2}{}^t$ = 586	n^c = 8.3 n^t = 9.0
Coluna longa SHS	E^c = 197.2 E^t = 199.9	-	0.3	347.3	$\sigma_{0.2}{}^c$ = 657 $\sigma_{0.2}{}^t$ = 679	n^c = 4.7 n^t = 6.5
Viga em I	210	E/100	0.3	235	-	-
Coluna em C-reforçado	200	0	0.3	450	-	-
Coluna em Cantoneira	E^c = 208 E^t = 195	-	0.3	220	$\sigma_{0.2}{}^c$ = 328 $\sigma_{0.2}{}^t$ = 328	n^c = 7.5 n^t = 7
Coluna em IBT (modelos PP & BL)	205	E/50	0.3	290	-	-
Coluna em IBT (modelo NL)	E^c = 205 E^t = 208	-	0.3	289.5	$\sigma_{0.2}{}^c$ = 515 $\sigma_{0.2}{}^t$ = 560	n^c = 5.2 n^t = 6.9

Os exemplos numéricos consideram três tipos de lei constitutiva uniaxial, nomeadamente (i) elástica – perfeitamente plástica (PP), (ii) bi-linear com endurecimento linear (BL), e (iii) não linear (NL). As PP e BL (ver Fig. 3.2 no capítulo 3) são caracterizadas pelo módulo de *Young* (E), módulo tangente (E_t), coeficiente de *Poisson* (ν = 0.3 – valor do aço)[19] e tensão nominal de cedência inicial σ_0^y. As leis NL, utilizadas para modelar o comportamento de várias ligas de aço inoxidável, são função (ver sub-secção 3.2.5 do capítulo 3) dos três parâmetros básicos de *Ramberg-Osgood* – E (módulo de *Young*), $\sigma_{0.2}$ (tensão limite de proporcionalidade a 0.2%) e n (coeficiente de endurecimento). Todas estas propriedades estão definidas na Tab. 7.2.

19 O módulo de distorção $G = E / [2(1+\nu)]$.

A Tab. 7.3 apresenta, para cada exemplo, (i) os números de sub-placas e EF utilizados na GBT e Abaqus (na direcção longitudinal (N_x) e ao longo da linha média da secção (N_s)), (ii) a quantidade de pontos de integração de *Gauss* considerada na GBT (por direcção local *s*, *z* e *x* de cada sub-placa em cada EFV)[20], e (iii) o número de graus de liberdade (g.l.) envolvido em cada modelo numérico.

O primeiro exemplo numérico corresponde a uma coluna bi-encastrada[21] (L=1500 mm) com secção em I (ver Fig. 7.2), sujeita a compressão uniforme através de cargas (F=10000 λ N) uniformemente distribuídas (q=30.30 N/mm) ao longo da linha média das secções extremas. O perfil é constituído por um material elastico-perfeitamente plástico cujas propriedades estão indicadas na Tab. 7.2. A análise da secção da GBT (g.l. de rotação de empenamento considerado) conduziu a 117 modos de deformação, mas apenas 59 foram incluídos na análise (ver Tab. 7.4) – as configurações no plano e perfis axiais dos mais relevantes estão apresentadas na Fig. 7.13. Relativamente à imperfeição geométrica (ilustrada na Fig. 7.3), esta tem a forma do modo de instabilidade crítico (local) e uma amplitude (máximo deslocamento no plano da secção) de 0.5 mm (25% da espessura da secção) – a sua configuração foi obtida através de análises lineares de estabilidade do Abaqus e da GBT ($\lambda_{cr,\mathrm{ABQ}}$=9.90 e $\lambda_{cr,\mathrm{GBT}}$=9.82).

Os dois problemas seguintes foram retirados de *Theofanous e Gardner* (*2009*), os quais investigaram numerica/experimentalmente o comportamento de colunas SHS enformadas a frio e em aço inox lean duplex (EN 1.4162)[22]. No segundo problema analisa-se uma coluna curta[23] (L=400 mm) bi-encastrada, indicada como 100×100×4 – SC1 em *Theofanous e Gardner* (*2009*), a qual está sujeita a uma carga de extremidade F=1022000 λ N uniformemente distribuída (q=2618.63 N/mm) na secção (ver Fig. 7.4). Ambas as secções estão totalmente encastradas, à excepção do empenamento global da secção carregada – no Abaqus, estas restrições foram impostas aos nós de referência das chapas rígidas modeladas nas extremidades da coluna. As propriedades materiais (experimentais, retiradas de *Theofanous e Gardner 2009*) e curva tensão-deformação implementada estão definidas na Tab. 7.2 e Fig. 7.5. A análise da secção da GBT (rotações de empenamento incluídas como g.l.) conduziu a 204 modos de deformação, mas apenas 28 modos foram seleccionados para a análise (ver Tab. 7.4) – as configurações no plano e perfis axiais dos mais relevantes estão apresentados na Fig. 7.14. Quanto à imperfeição geométrica, esta tem a forma do primeiro modo de instabilidade local simétrico (λ_b=1.8368) e uma amplitude igual a $t/100$=0.0393 mm.

20 O número de pontos na espessura de cada EFC do Abaqus é igual ao adoptado na GBT.

21 As condições de fronteira foram impostas nos nós de referência de chapas rígidas modeladas nas secções extremas da barra.

22 Na sub-secção 3.2.1 do capítulo 3 apresentam-se as características das principais ligas de aço inox aplicadas na construção.

23 Mas comprida o suficiente para exibir padrões de tensões residuais e imperfeições geométricas bem definidos.

Tab. 7.3. Exemplos Ilustrativos: Discretizações de EF, e números de pontos de *Gauss* e de g.l. utilizados.

Exemplo	**Malha GBT**		**Malha ABAQUS**		**Pontos de *Gauss* (GBT)**			**Número de g.l.**		
	EFV	**Sub Placas**	**EFC N_x**	**EFC N_s**	***s***	***z***	***x***	**GBT**	**ABQ**	**GBT/ABQ (%)**
Coluna em I	22 (malha simétrica) 8: $x < 0.4L$ 3: $0.4L \leq x < 0.5L$	22	100	22	4	3	4	2537	13708	18.5
Coluna curta SHS	16 (malha uniforme)	40	50	48	3	3	3	865	14401	6.0
Coluna longa SHS	48 (malha simétrica) 3: $x < 0.03L$ 18: $0.03L \leq x < 0.47L$ 3: $0.47L \leq x < 0.50L$	24	150	24	3	3	3	3909	21747	18.0
Viga em I	68 6: $x < 0.04L$ 25: $0.04L \leq x < 0.45L$ 12: $0.45L \leq x < 0.55L$ 25: $x \geq 0.55L$	39	360	39	2	5	3	18659	86280	21.6
Coluna em C-reforçado	86 (malha uniforme)	42	244	42	2	3	3	13527	62953	21.5
Coluna em Cantoneira	64 (malha simétrica) 16: $x < 0.3L$ 16: $0.3L \leq x \leq 0.5L$	28	140	28	2	5	3	9125	24361	37.5
Coluna em IBT	66 (malha simétrica) 18: $x < 0.35L$ 15: $0.35L \leq x \leq 0.5L$	34	80	62	4	5	3	7391	29651	24.9

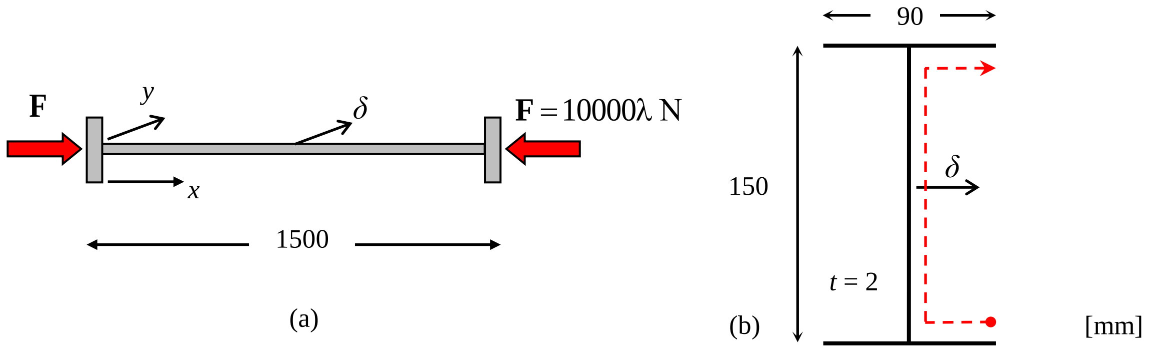


Fig. 7.2. Coluna em I: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção.

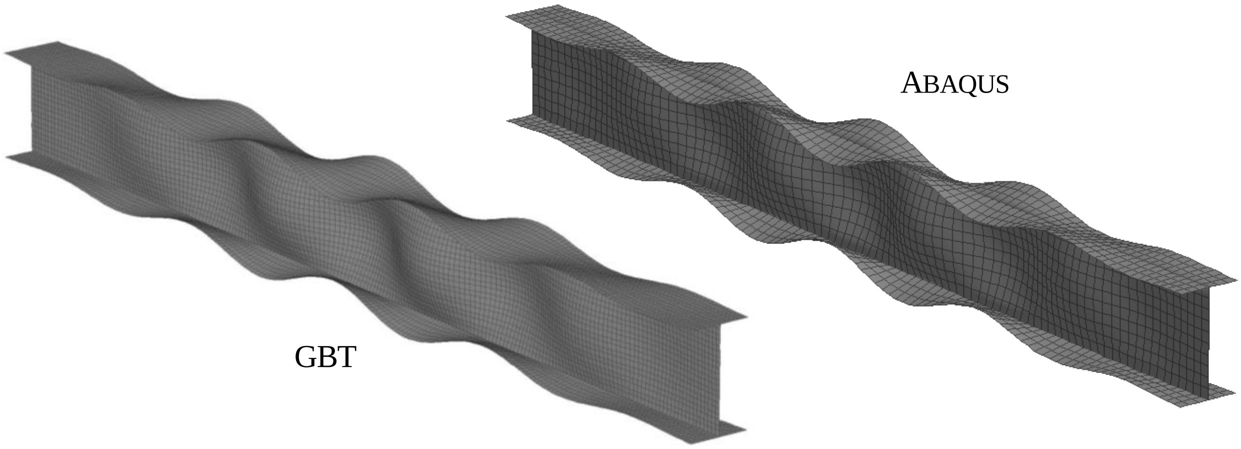


Fig. 7.3. Configuração (amplificada 50 ×) da imperfeição geométrica (modo de instabilidade crítico).

O terceiro problema aborda uma coluna longa (L=1999 mm) simplesmente apoiada em aço inox, indicada como 80×80x4-2000 em *Theofanous e Gardner* (*2009*), a qual está sujeita a uma carga de compressão F=361900 λ N uniformemente distribuída na secção de extremidade (q=1194.4 N/mm), como se representa na Fig. 7.6. As propriedades materiais (experimentais, retiradas de *Theofanous e Gardner 2009*) e curva tensão-deformação implementada estão definidas na Tab. 7.2 e Fig. 7.5. Os apoios são cilíndricos, restringindo todos os g.l. excepto (i) a rotação em torno da menor inércia em ambas as secções (em torno do eixo z na Fig. 7.6(a))[24], e (ii) o empenamento global da secção carregada – no Abaqus, estas restrições foram impostas aos nós de referência de chapas rígidas de extremidade. A análise da secção da GBT (rotações de empenamento incluídas como g.l.) conduziu a 124 modos de deformação, apesar da análise apenas ter incluído 41 modos (ver Tab. 7.4) – as configurações dos mais relevantes estão representadas na Fig. 7.15. A imperfeição inicial da coluna resulta da combinação linear do primeiro modo de instabilidade local (simétrico, $\lambda_{b,loc}$=5.76) com o primeiro modo global de flexão (crítico, $\lambda_{b,glob}$=1.43), os quais apresentam aplitudes de 0.033 mm (obtida do modelo de *Dawson e Walker* (*Theofanous e Gardner 2009*)) e L/1000=1.999 mm, respectivamente.

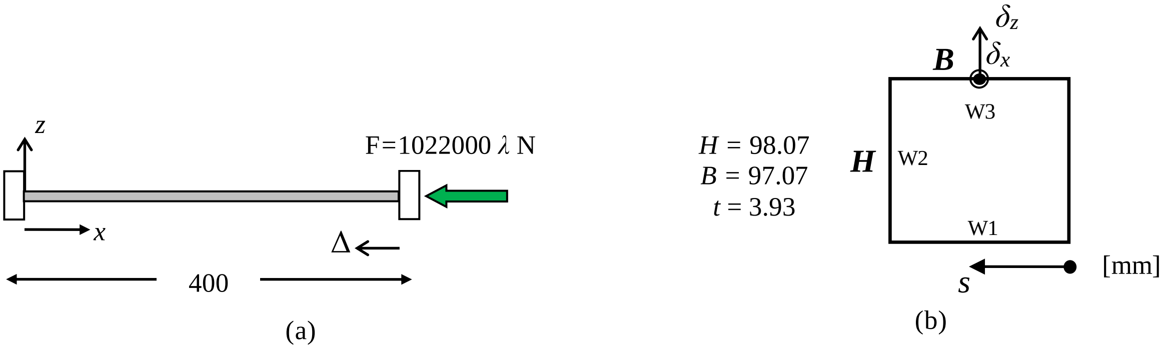


Fig. 7.4. Coluna curta SHS: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção.

24 Apesar de ser nominalmente uma secção SHS, a medição experimental das suas dimensões (*Theofanous e Gardner* (*2009*)) revelou que se trata de uma secção RHS ($H \neq B$ na Fig. 7.6(b)).

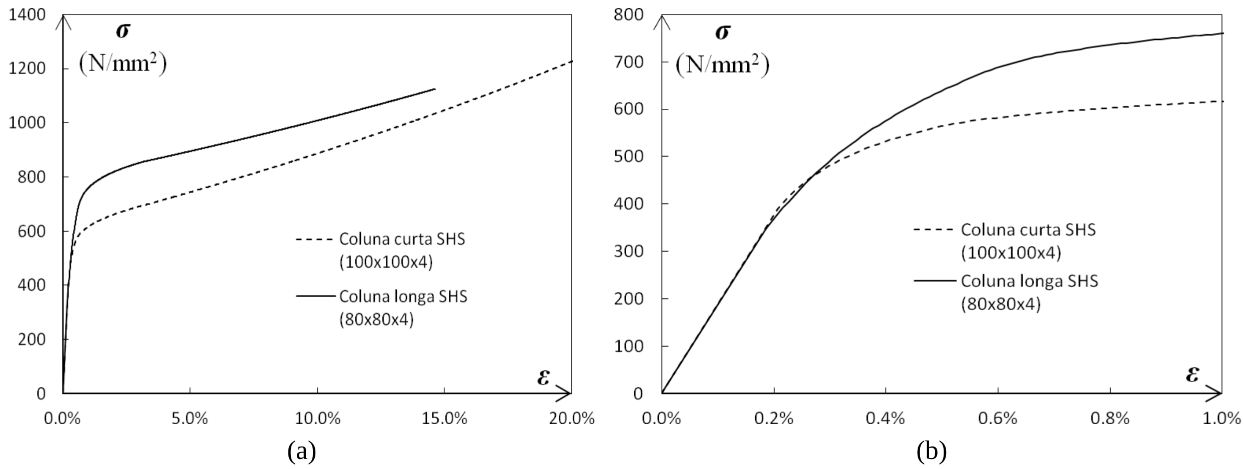


Fig. 7.5. Colunas SHS: curva σ-ε à compressão do aço inox *Lean Duplex* – domínios de deformação (a) total e (b) inicial.

O quarto problema envolve uma viga (L=2850 mm) encastrada-apoiada[25] com secção em I, a qual está sujeita a uma carga concentrada (p = 2λ/3 N/mm^2 – resultante F=7125 λ N) ao longo de 142.5 mm d região central do banzo superior, como se ilustra na Fig. 7.7. A viga é constituída por um material bi-linear com as propriedades apresentadas na Tab. 7.2, e apresenta uma imperfeição geométrica com a forma do modo de instabilidade crítico (flexão-torção – λ_{cr}=3.10) e uma amplitude de 3.02 mm. A análise da secção da GBT (rotações de empenamento incluídas como g.l.) conduziu a 202 modos de deformação, apesar da análise apenas ter incluído 137 modos (ver Tab. 7.4) – os mais relevantes estão representados na Fig. 7.16.

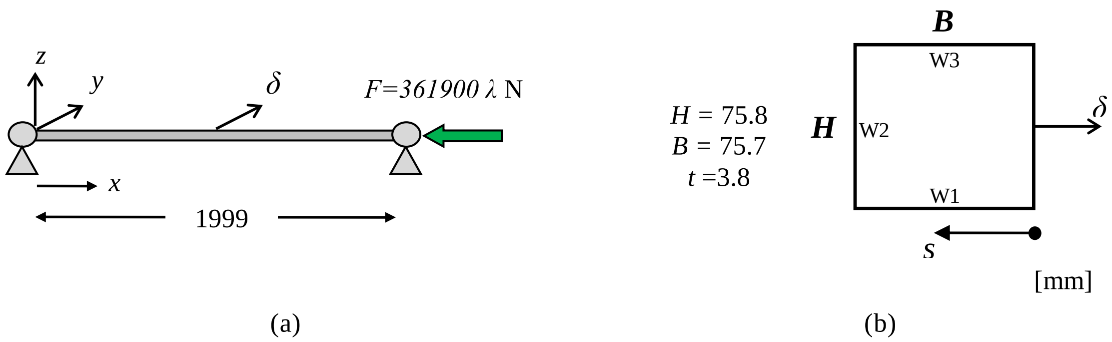


Fig. 7.6. Coluna longa SHS: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção.

A quinta análise diz respeito a uma coluna bi-encastrada com secção em C-reforçado (L=2200 mm), submetrida a uma carga axial (F=1000 λ N) uniformemente distribuída na secção extrema (q=2.78 λ N/mm) – ver Fig. 7.8. A barra é constituída por um material perfeitamente plástico com as propriedades apresentadas na Tab. 7.2, e exibe uma imperfeição com a forma do modo

25 Quando nada referido em contrário, as condições de fronteira “encastrada” e “apoiada” envolvem restrição total (i) de todos os g.l., e (ii) de todos os g.l. excepto empenamentos, respectivamente.

de instabilidade crítico (λ_{cr}=125.14) e uma amplitude de 2.06 mm (b_f/50, onde b_f é a largura do banzo). A configuração do modo é predominantemente distorcional com 3 semi-ondas, apesar de existir uma pequena contribuição do primeiro modo local simétrico da GBT. A análise da secção da GBT (rotações de empenamento incluídas como g.l.) conduziu a 219 modos de deformação, mas apenas 79 modos foram seleccionados para a análise (ver Tab. 7.4) – os mais relevantes são apresentados na Fig. 7.17.

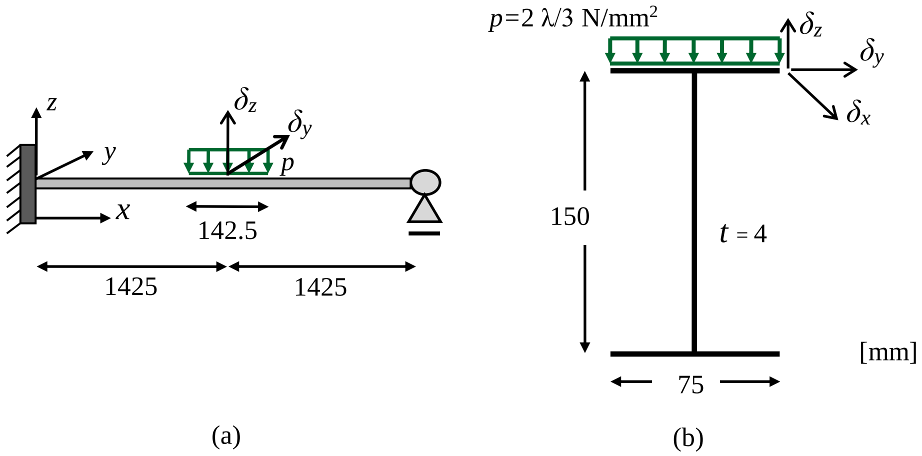


Fig. 7.7. Viga em I: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção.

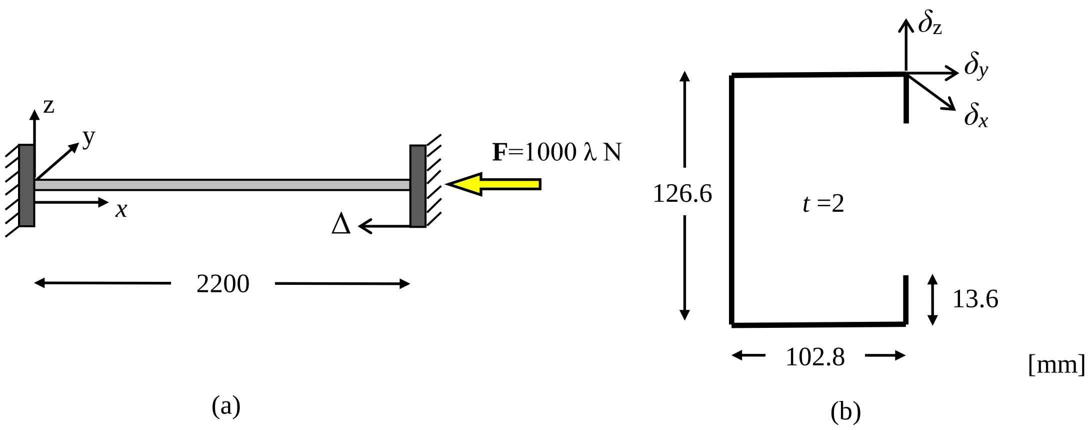


Fig. 7.8. Coluna em C-reforçado: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção.

O penúltimo problema aborda uma coluna bi-encastrada (L=1500 mm) com secção em cantoneira de abas iguais (ver Fig. 7.9), produzida de uma liga ferrítica (EN 1.4003) de aço inoxidável cujas propriedades (retiradas de *Becque e Rasmussen 2009*) e curva tensão-deformação estão definidas na Tab. 7.2 e Fig. 7.10. A coluna encontra-se submetida a compressão através de uma carga axial F=10^5 λ N uniformemente distribuída na secção extrema (q=333.33 λ N/mm). De modo a avaliar a influência dos efeitos fisica e/ou geometricamente não lineares na resposta estrutural, foram realizadas três análises: elasto-plástica de 1ª ordem, elástica de 2ª ordem e elasto-plástica de 2ª ordem. Nas duas últimas, a coluna é considerada imperfeita de acordo com a forma do modo de instabilidade crítico (flexão-torção, mas predominantemente torção – λ_{cr}=11.14) com 5.40 mm de amplitude. A análise da secção da GBT (g.l. de rotação de empenamento incluído) definiu 146 modos de deformação, apesar de apenas 72 terem sido utilizados na análise inelástica de 2ª ordem (a mais complexa) (ver Tab. 7.4) – as configurações dos mais importantes são apresentadas na Fig. 7.18.

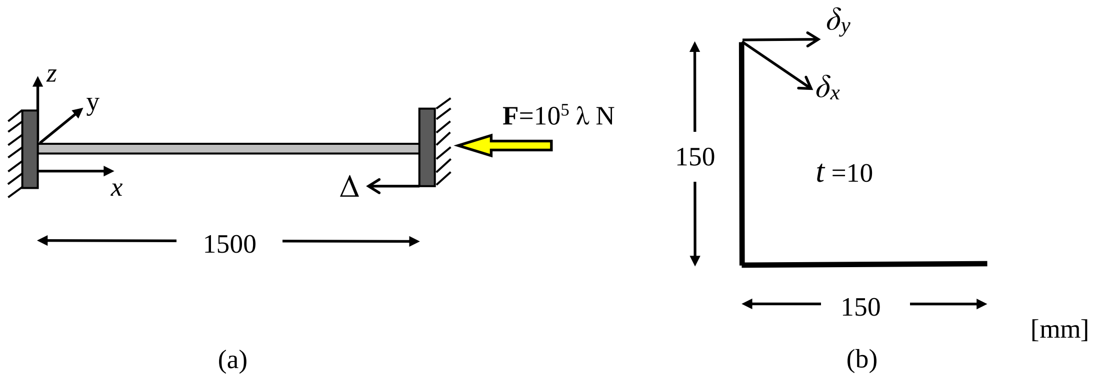


Fig. 7.9. Coluna em cantoneira: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção.

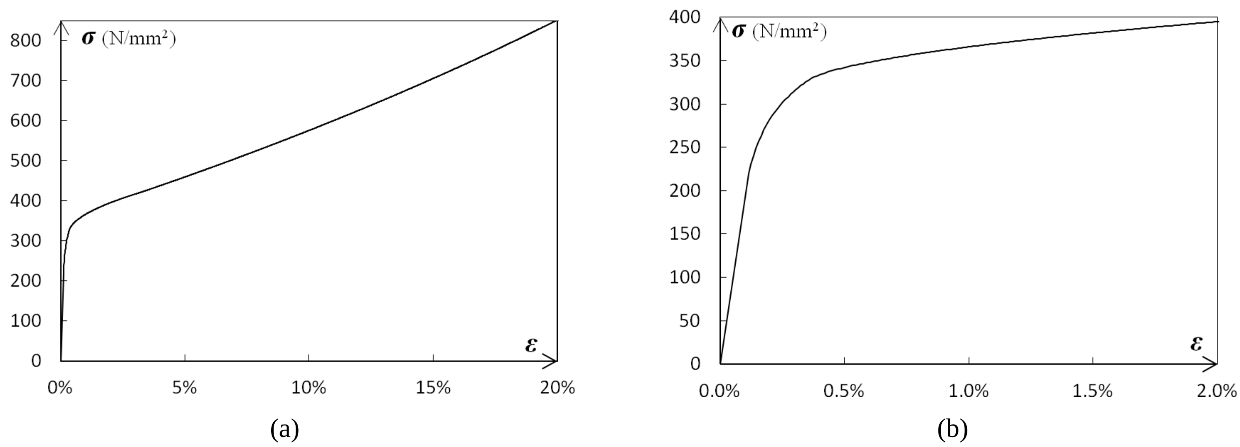


Fig. 7.10. Coluna em cantoneira: curva σ-ε à compressão do aço inox ferrítico – domínios de deformação (a) total e (b) inicial.

Finalmente, o último conjunto de resultados diz respeito à coluna simplesmente apoiada (L=1200 mm) com secção em I de banzos tubulares (IBT) que está ilustrada na Fig. 7.11, a qual está sujeita a compressão uniforme por meio de uma força F=100x10^3 λ N que se encontra uniformemente distribuída (q = 183.8 λ N/mm) na secção de extremidade. Para além do empenamento global da secção carregada, os apoios (esféricos) também permitem rotações globais e locais[26] de flexão. De modo a avaliar o impacto do endurecimento do material no comportamento e capacidade resistente da coluna, foram efectuadas análises para três modelos materiais diferentes, nomeadamente perfeitamente-plástico (PP), bi-linear (BL) e não linear

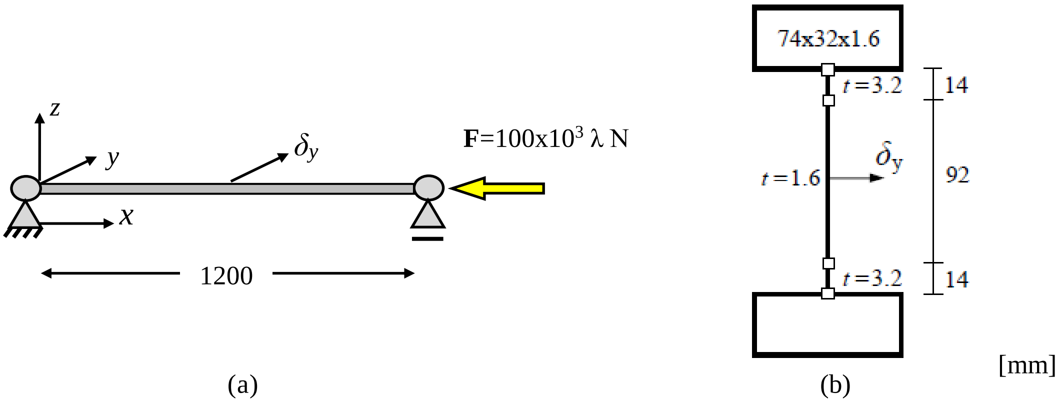


Fig 7.11. Coluna em IBT: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção.

(NL), caracterizados pela mesma tensão de cedência – as suas propriedades estão especificadas na Tab. 7.2 e a Fig. 7.12 ilustra as respectivas curvas σ-ε. Da análise da secção da GBT (não foram consideradas rotações de empenamento como g.l.) resultaram 132 modos de deformação, mas apenas 56 foram incluídos na análise (ver Tab. 7.4) – as configurações dos mais importantes são apresentadas na Fig. 7.19. Quanto às imperfeições geométricas, resultam da combinação entre o primeiro modo de instabilidade global (flexão) com amplitude de 1.2 mm (L/1000), e um modo local com 13 semi-ondas e 1.18 mm de amplitude.

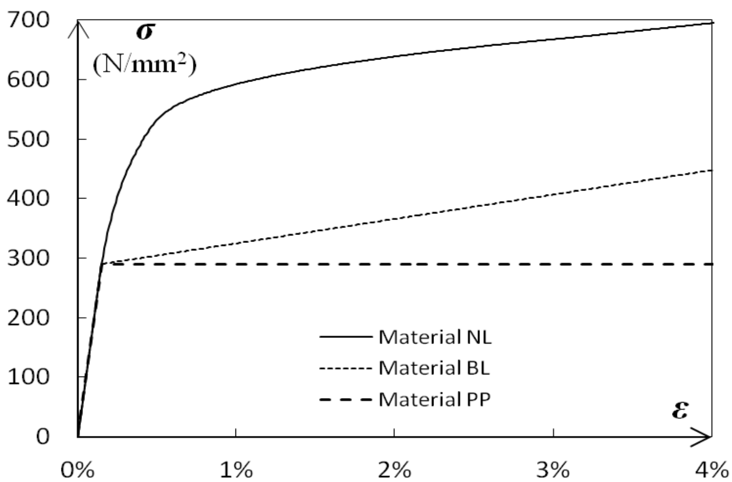


Fig. 7.12. Modelos materiais para a coluna em IBT (curvas tensão-deformação).

26 Flexão longitudinal das paredes, resultante de modos locais e/ou de extensão transversal.

7.4.2 Modos de deformação

A Tab. 7.4 apresenta o número de modos de deformação da GBT utilizado em cada análise (G – globais, D – distorcionais, L – locais, C – corte, ET – extensão transversal, FCC – fluxo de corte celular, excepto o de torção). Nas Figs. 7.13-7.19 apresentam-se as configurações no plano e os perfis axiais dos modos de deformação mais relevantes, estando a discretização da secção representada juntamente com os modos de extensão transversal. Note-se que os modos estão identificados com o número correspondente após renumeração, uma vez que o grupo de modos incluído em cada análise constitui uma fracção do número total de modos. Sobre a sua selecção, alguns comentários são apropriados:

(i) Com base no tipo de deformação principal prevista para a barra, a qual é fortemente dependente das características do carregamento e das imperfeições geométricas, a selecção dos modos globais (maioritariamente), distorcionais e locais a incluir na análise é bastante fácil. Por exemplo, é óbvio que a análise da coluna em I tenha necessariamente de incluir os modos **1** (extensão axial) e **5** (o mais importante na definição da imperfeição geométrica) – ver Fig. 7.13. De forma semelhante (ver Figs. 7.14-7.19), cada análise envolve um conjunto mínimo de modos: (i_1) coluna curta SHS – modos **1** (extensão axial) e **2** (local), (i_2) coluna longa SHS – modos **1** (extensão axial), **2** (flexão na menor inércia) e **3** (local), (i_3) viga em I – modos **2** (flexão na maior inércia), **3** (flexão na menor inércia), **4** (torção) e **8**+**9** (modos locais dos banzos), (i_4) coluna em C-reforçado – modos **1** (extensão axial), **2** (flexão na menor inércia[27]), **3** (distorção simétrico) e **4**+**5** (modos locais simétricos da alma), (i_5) coluna em cantoneira – modos **1** (entensão axial), **2** (flexão na maior inércia), **3** (flexão na menor inércia[28]) e **4** (torção), e (i_6) coluna IBT – modos **1** (extensão axial), **2** (flexão na menor inércia) e **5** (modo local da alma).

(ii) A selecção dos modos de corte e de extensão transversal (e também alguns locais), maioritariamente essenciais para capturar “efeitos de ordem superior” resultantes da não linearidade material e/ou geométrica pronunciada, é muito menos trivial. Esta escolha deve resultar da combinação de (ii_1) “bom senso” estrutural, excluindo modos que exibam energias de deformação excessivamente elevadas (*e.g.*, modos locais com múltipla

27 Para contabilizar a deslocamento na horizontal do centro de rigidez da secção que resulta da redistribuição de tensões axiais associadas à deformação distorcional e local (e.g., *Young e Rasmussen 1999*).

28 Para contabilizar a deslocamento do centro de rigidez na direcção do eixo de maior inércia (eixo de simetria), o qual resulta (i) da redistribuição de tensões axiais associada à torção (*Dinis et al. 2012*), e (ii) do espalhamento de plasticidade.

curvatura numa só parede), (ii$_2$) considerações de simetria, de acordo com o carregamento e geometria da secção, e (ii$_3$) experiência adquirida pelo utilizador – *e.g.*, modos de corte (com baixa energia de deformação) associados à flexão global são facilmente identificados.

Tab. 7.4. Exemplos ilustrativos: Número de modos de deformação da GBT (por tipo).

Exemplo	**G**	**D**	**L**	**C**	**ET**	**FCC** (excluindo torção)	**Modos GBT (usados / total)**
Coluna em I	4	0	9	28	18	0	59 / 117
Coluna curta SHS	1	0	6	11	10	0	28 / 204
Coluna longa SHS	2	0	2	25	12	0	41 / 124
Viga em I	4	0	13	81	39	0	137 / 202
Coluna em C-reforçado	2	1	6	47	23	0	79 / 219
Coluna em Cantoneira	4	0	15	25	28	0	72 / 146
Coluna em IBT	2	1	15	20	17	1	56 / 132

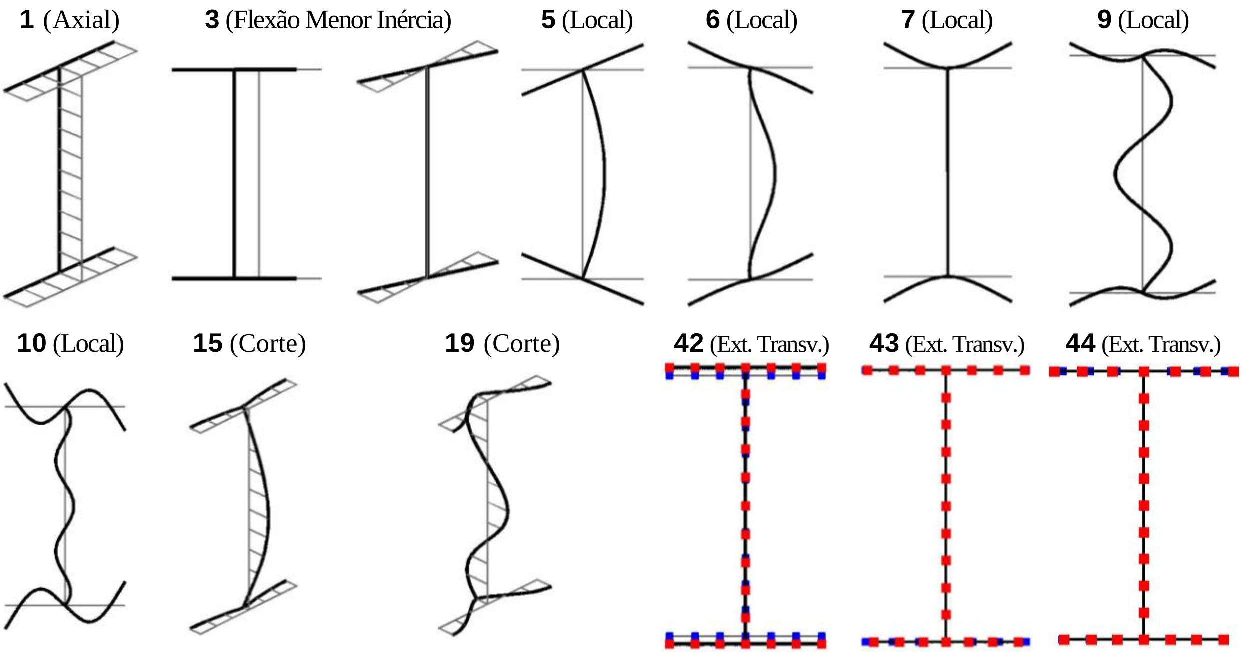


Fig. 7.13. Coluna em I: configurações no plano e perfis axiais dos 12 modos de deformação da GBT mais relevantes.

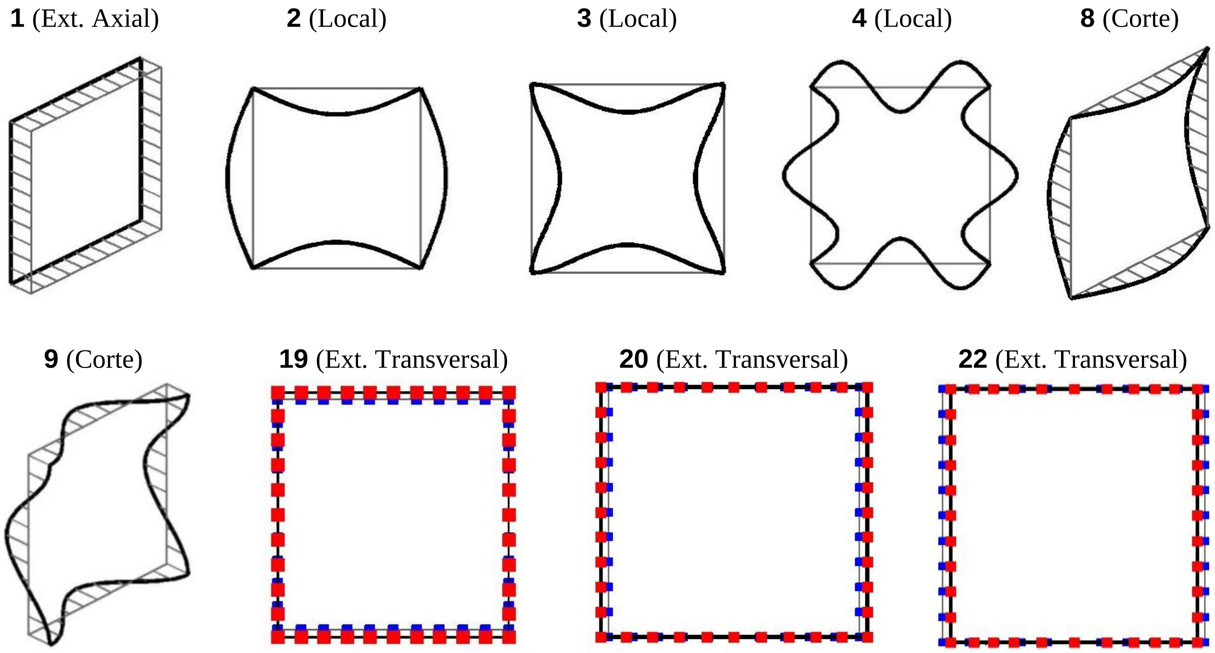


Fig. 7.14. Coluna curta SHS: configurações no plano e perfis axiais dos 9 modos de deformação da GBT mais relevantes.

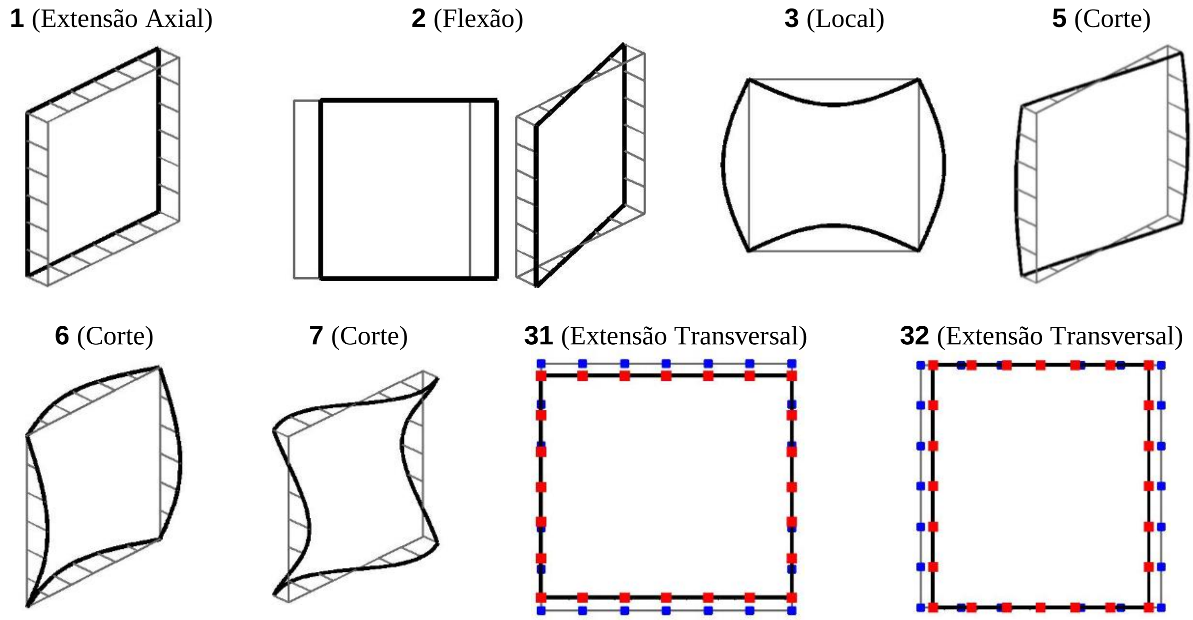


Fig. 7.15. Coluna longa SHS: configurações no plano e perfis axiais dos 8 modos de deformação da GBT mais relevantes.

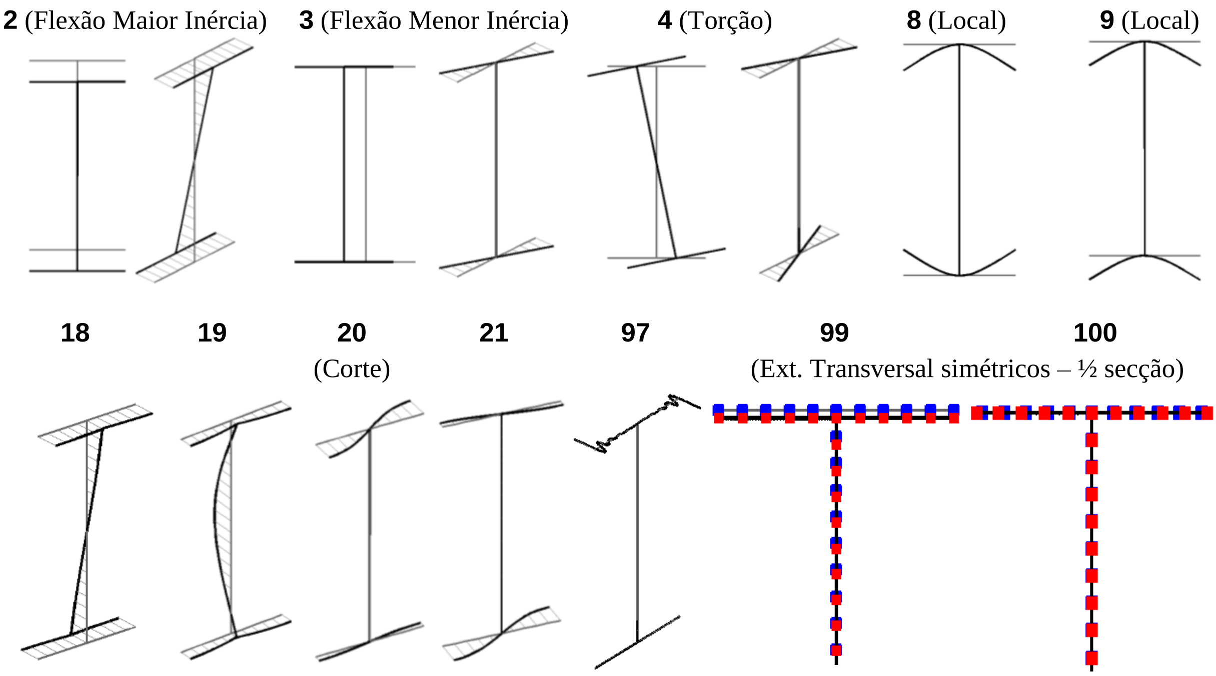


Fig. 7.16. Viga em I: configurações no plano e perfis axiais dos 12 modos de deformação da GBT mais relevantes.

Por exemplo, a selecção dos modos utilizados em cada um dos exemplos ilustrativos obdeceu aos seguintes critérios[29]: (ii_1) coluna curta SHS – modos bi-simétricos com baixa energia de deformação, (ii_2) coluna longa SHS – modos simétricos relativamente ao eixo de simetria horizontal, (ii_3) viga em I – quase todos os modos, uma vez que não foi encontrado qualquer critério de selecção à *priori* (apenas modos locais de elevada ordem foram imediatamente excluídos), (ii_4) coluna em C-reforçado – todos os modos de corte e de extensão transversal simétricos, (ii_5) cantoneira – alguns modos locais de baixa ordem, mas todos os modos de extensão transversal e a maioria dos de corte simétricos, e (ii_6) coluna IBT – maioritariamente modos simétricos em relação ao eixo de simetria horizontal.

(iii) Claro que é sempre possível adoptar uma "abordagem segura" na selecção dos modos de deformação, a qual consiste em incluir na análise todos os que não sejam claramente irrelevantes e, posteriormente, remover em futuras análises aqueles que se constatou terem uma contribuição diminuta na evolução da configuração deformada da barra.

29 Na primeira análise (coluna em I) não houve uma selecção de modos baseada num critério particular, apesar da simetria do problema fazer com que apenas os modos simétricos em relação ao eixo de simetria horizontal sejam relevantes.

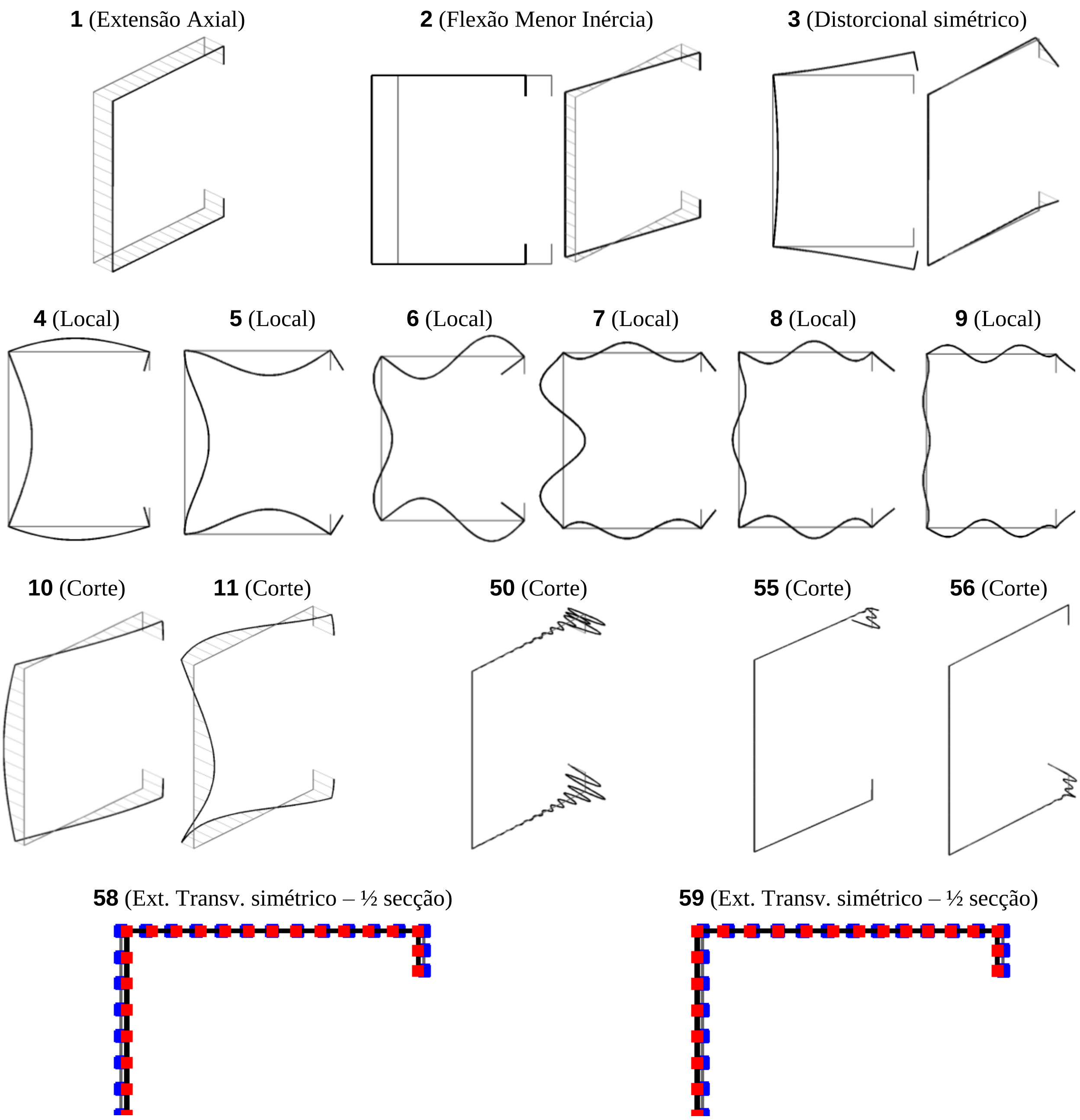


Fig. 7.17. Coluna em C-reforçado: configurações no plano e perfis axiais dos 16 modos da GBT mais relevantes.

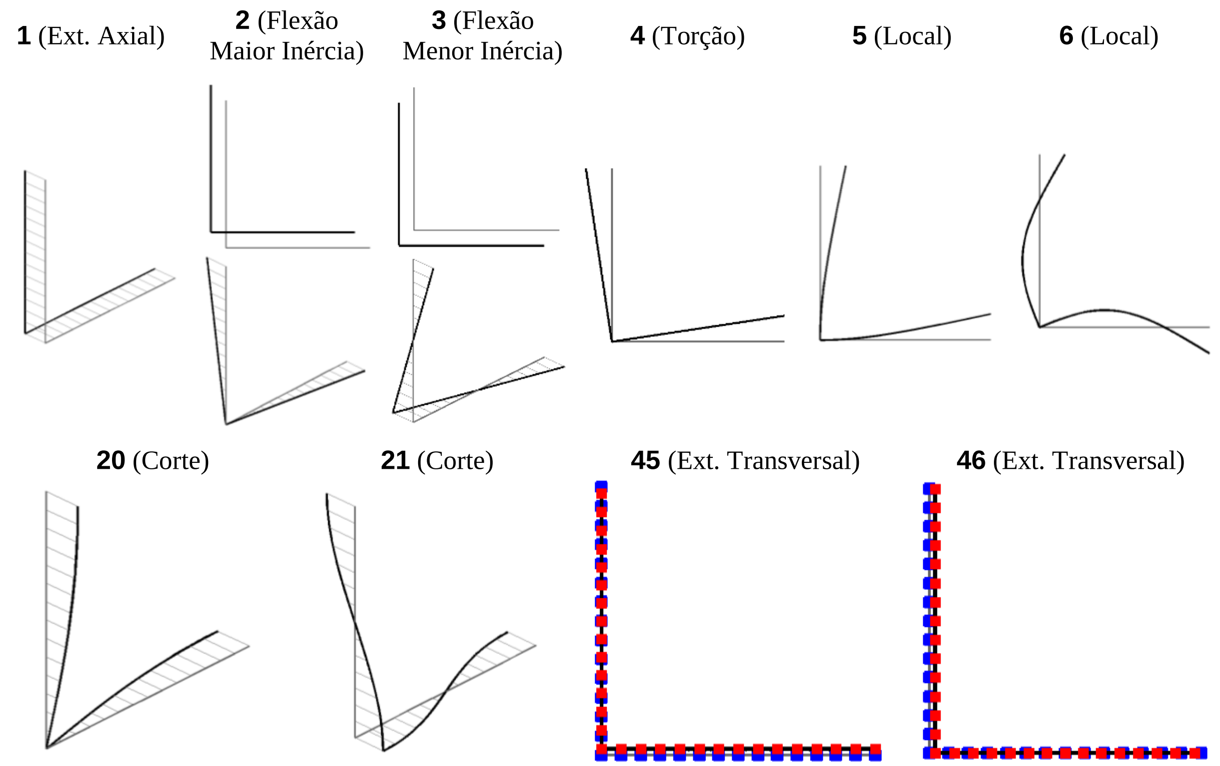


Fig. 7.18. Coluna em cantoneira: configurações no plano e perfis axiais dos 10 modos de deformação da GBT mais relevantes.

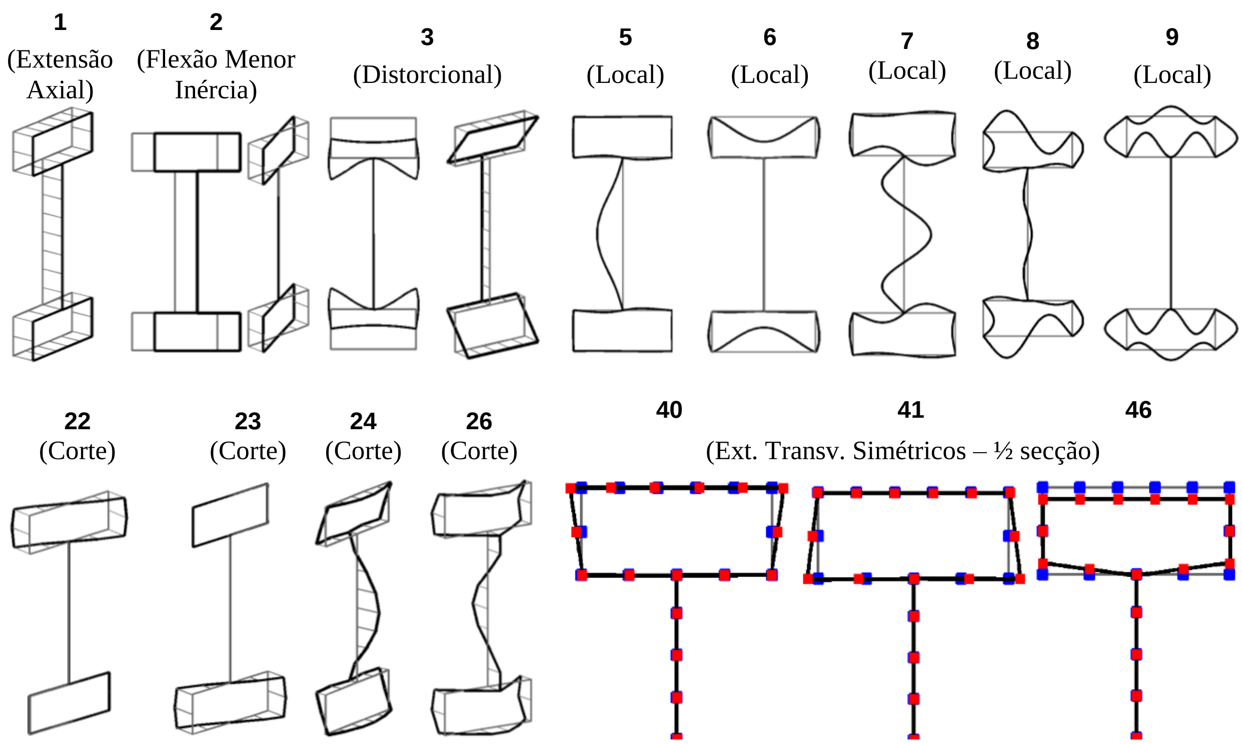


Fig. 7.19. Coluna em IBT: configurações no plano e perfis axiais dos 15 modos de deformação da GBT mais relevantes.

7.4.3 Resultados – validação e vantagens da análise modal

Antes de apresentar os resultados dos vários exemplos numéricos importa referir que três configurações (estados) de equilíbrio foram seleccionadas nas respectivas curvas λ vs δ de modo a comparar valores da GBT e do Abaqus em diferentes fases da trajectória de equilíbrio. Estas três configurações são identificadas por BP (before peak – trajectória ascendente), P (peak – carga última) e AP (after peak – trajectória descendente). Cada uma corresponde a deslocamentos semelhantes do Abaqus e da GBT. Por último, importa referir que (i) o efeito de endurecimento dos cantos da secção (*e.g.*, secções enformadas a frio) foi desprezado, (ii) o algorítmo de retorno da Normal Média foi utilizado no modelo de plasticidade dos primeiros três exemplos ilustrativos e (iii) o algorítmo de Euler Regressivo foi adoptado nos últimos quatro exemplos ilustrativos.

Coluna em I

A Fig. 7.20(a) mostra as trajectórias de equilíbrio da GBT e do Abaqus $\lambda(\delta)$, bem como a resposta elástica obtida pelo Abaqus, onde δ é o deslocamento horizontal do ponto médio da alma a meio vão (ver Fig. 7.2). Observa-se que ambas as curvas elasto-plásticas estão em óptima concordância, não diferindo mais que 1.8% . Para além disso, note-se que a resposta elasto-plástica diverge bastante da elástica a partir de $\lambda \approx 15$. Na trajectória elasto-plástica, δ aumenta monotonicamente até estados avançados de pós-colapso, enquanto que na trajectória elástica ocorre um aumento de rigidez seguido de uma inversão do sentido do incremento de deslocamento e de uma perda de rigidez, os quais resultam do aparecimento do modo de flexão na menor inércia no sentido oposto ao inicial. Devido à deformação local (e.g., ver modo **5** na Fig. 7.13), existe uma redistribuição de tensões axiais com maior concentração no lado da secção em que os banzos “fecham”[30]. Este facto induz um deslocamento horizontal do centro de rigidez para essa zona e, consequentemente, cria uma excentricidade de carga que conduz à flexão da barra. Para os três estados de equilíbrio identificados nas trajectórias de equilíbrio tem-se: (i) $\lambda_{GBT} = 9.03$

30 À semelhança da assimetria do comportamento de pós-encurvadura distorcional de colunas em C-reforçado – mais rígido se os banzos “fecharem” do que se “abrirem” (*Silvestre 2005*).

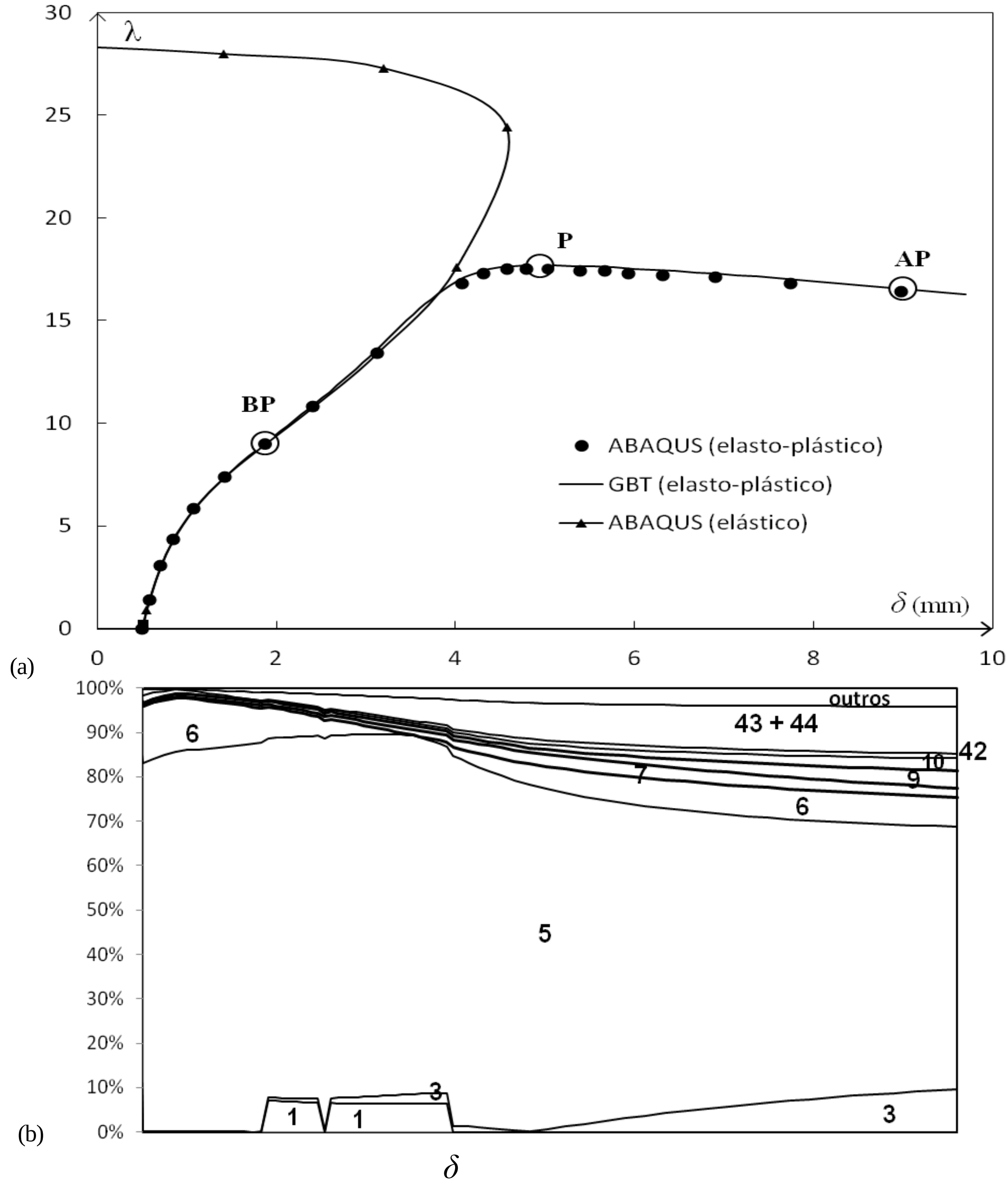


Fig. 7.20. (a) Trajectórias de equilíbrio do Abaqus e da GBT, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

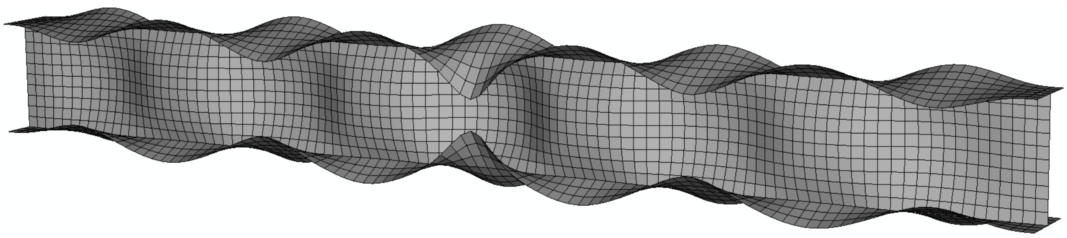
+ λ_{ABQ} = 8.98 (BP), (ii) λ_{GBT} = 17.68 + λ_{ABQ} = 17.50 (P), e (iii) λ_{GBT} = 16.55 + λ_{ABQ} = 16.40 (AP). A flexão na menor inércia (modo **3**) também emerge no comportamento elasto-plástico, como denuncia o diagrama de participação modal[31] da Fig. 7.20(b), relativo à evolução da configuração da secção mais deformada ao longo de $\lambda(\delta)$. Sobre as figuras referidas, importa fazer os seguintes comentários:

31 Este tipo de diagramas tem como referência a secção transversal "mais deformada" da barra, i.e., aquela que exibe o máximo deslocamento tri-dimensional ou no plano (*input* do programa). A contribuição de cada modo de deformação é quantificada pelo rácio entre (i) o seu deslocamento máximo tri-dimensional nessa secção e (ii) a soma de todos esses

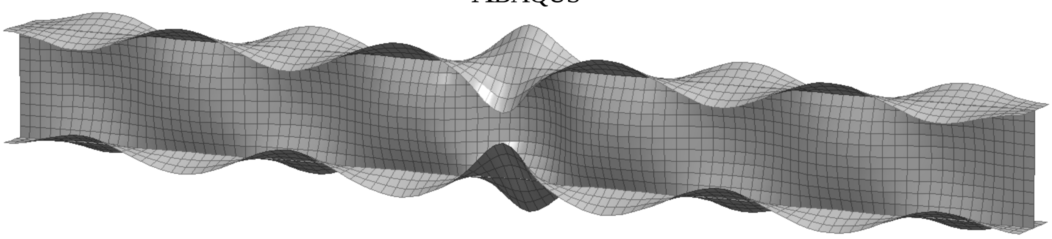
(i) O modo local mais influente na imperfeição geométrica (modo **5**, 59.1 – 88.2 %) domina claramente o comportamento da barra para qualquer nível de carga, apesar de a sua participação decrescer na trajectória descendente como consequência do crescimento dos restantes modos (excepto o **1**).

(ii) O modo **1** (extensão axial, 0.0 – 7.2 %) apresenta uma contribuição irregular ao longo da curva, surgindo apenas entre os estados BP e P com participação praticamente constante. Esta irregularidade deve-se ao facto de a secção mais deformada da barra (em que se baseia o cálculo da participação modal) corresponder, na maioria das configurações de equilíbrio, à secção de meio vão, a qual por razões de simetria do carregamento (ver Fig. 7.2(a)) apresenta empenamentos nulos.

(iii) Relativamente aos modos local **6** (0.0 – 13.0 %) e de extensão transversal **43**+**44** (0.0 – 10.6%), repare-se que enquanto a contribuição dos últimos é estritamente crescente, o primeiro começa por apresentar valores decrescentes até perto da carga última, e depois crescentes até um valor que se manterá aproximadamente constante ao longo de estados avançados de pós-colapso.



ABAQUS



GBT

Fig. 7.21. Configuração deformada no colapso (amplificada 5 x) – estado AP.

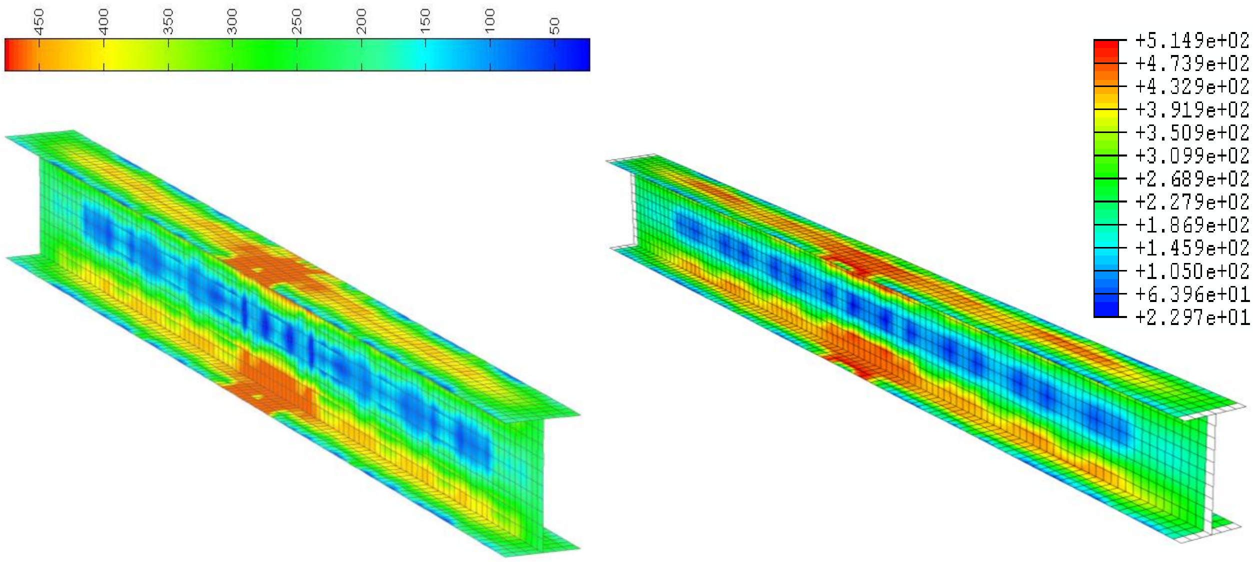
(iv) A contribuição do modo **3** (flexão na menor inércia, 0.0 – 9.7 %) apenas se torna relevante na trajectória descendente, onde a sua participação cresce com o aumento do nível de deformação devido à excentricidade de carga resultante da cedência material, não simétrica em relação ao eixo de simetria vertical. Como se verá adiante, a zona de meio vão e a parte da secção correspondente

valores modais, os quais não ocorrem necessariamente no mesmo ponto (a soma de todas as participações é unitária, ou 100%) – informação detalhada sobre o conceito de participação modal é apresentada na sub-secção 2.4.3 do capítulo 2.

ao "fecho" dos banzos são aquelas que mais plastificam, conduzindo a um deslocamento do centro de rigidez para a região oposta (no sentido inverso ao verificado na resposta elástica).

(v) A diferença entre as cargas última e crítica de instabilidade (λ_u / λ_{cr}=1.77) revela uma reserva de resistência pós-crítica significativa, como seria de esperar num modo de colapso local e pela ocorrência tardia da cedência inicial (λ≈15 vs. λ_{cr}=9.90). A influência dos efeitos de 2ª ordem pode ser avaliada pelo facto de a carga última ser cerca de 57.6 % da carga plástica $P_y = A\sigma_0^y$.

A Fig. 7.21 mostra as configurações deformadas (amplificadas 5 x) da GBT e do Abaqus durante o colapso da coluna (estado AP), sendo possível observar que as maiores deformações ocorrem claramente na região de meio vão, o que se deve à emergência do modo de flexão na menor inércia (apesar de este ainda não ser muito visível nesta fase). Este facto pode ser confirmado através dos respectivos *contours* de tensões de *von Mises* apresentados na Fig. 7.22, os quais também permitem confirmar que a zona de meio vão do lado do "fecho" dos banzos é a mais plastificada. Importa também chamar a atenção para as semelhanças notáveis entre os resultados do Abaqus e da GBT.



(a) (b)

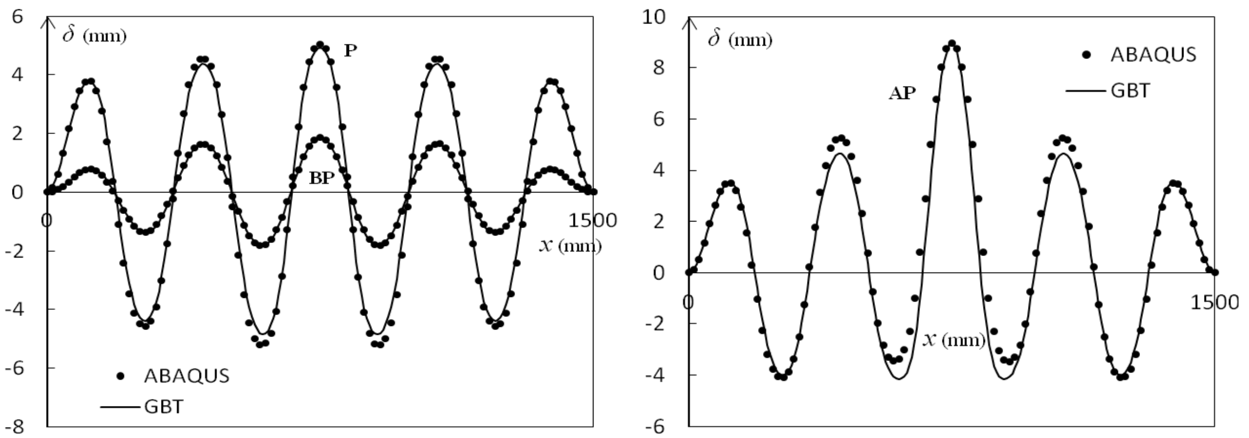
Fig 7.22. *Contours* de tensões de *von Mises* (N/mm^2) na configuração de equilíbrio AP.

As Figs. 7.23(a)-(b) dizem respeito às configurações BP, P e AP, e comparam os perfis longitudinais relativos ao deslocamento lateral indicado na Fig. 7.2(b). As seguintes conclusões são apropriadas:

(i) A comparação entre os resultados do Abaqus e da GBT é excelente no estado BP e razoavelmente boa nos restantes.

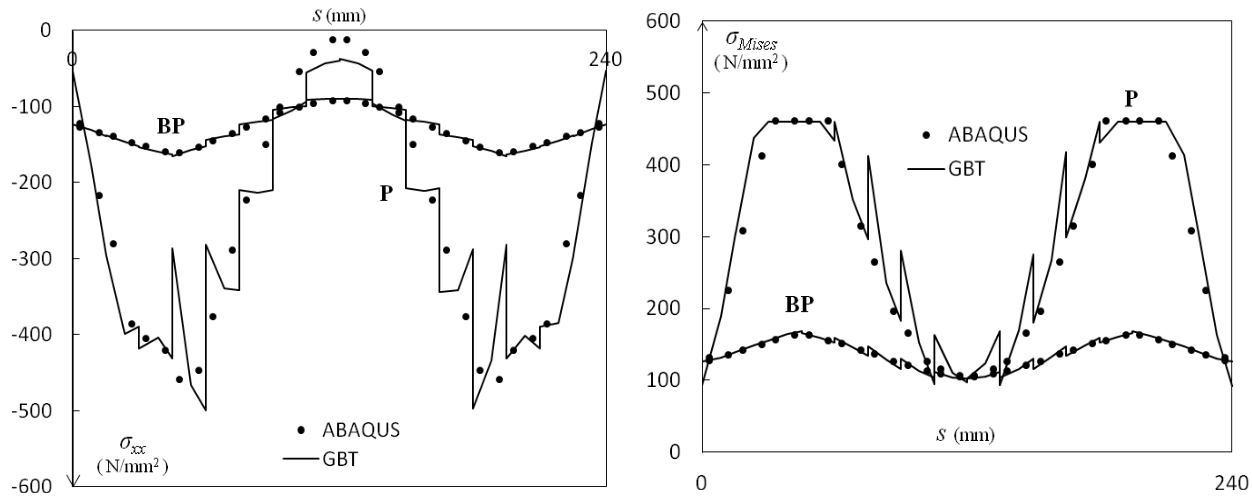
(ii) A diferença entre as amplitudes positivas e negativas no perfil AP reflecte a presence do modo de flexão na menor inércia, o qual causa deslocamentos δ positivos.

As Figs. 7.24(a)-(b) dizem respeito às configurações BP e P e ilustram os diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) e de *von Mises* (σ_{Mises}) ao longo do contorno da secção de meio vão (x=750 mm) indicado a vermelho na Fig. 7.2(b). Apesar da comparação entre a GBT e o Abaqus ser excelente no estado BP, os diagramas da GBT exibem discontinuidades consideráveis no estado P, as quais resultam (como já referido na discussão de resultados do capítulo 6) da aproximação das tensões transversais σ_{ss} (ver Fig. 7.25). Na verdade, uma vez que a aproximação dos deslocamentos transversais v é linear em cada sub-placa, não há garantia de continuidade das extensões transversais ($v_{,s}$ mais precisamente – extensão de 1ª ordem) entre sub-placas – contudo, note-se que os valores σ_{ss} do Abaqus e da GBT são bastante semelhantes nos pontos médios das sub-placas.



(a) (b)

Fig. 7.23. Perfis longitudinais do deslocamento horizontal do ponto médio da alma: estados (a) BP, P e (b) AP.



(a) (b)

Fig. 7.24. Diagramas de tensões (a) axiais (σ_{xx}) e (b) de *von Mises* (σ_{Mises}) na secção de meio vão (estados BP + P).

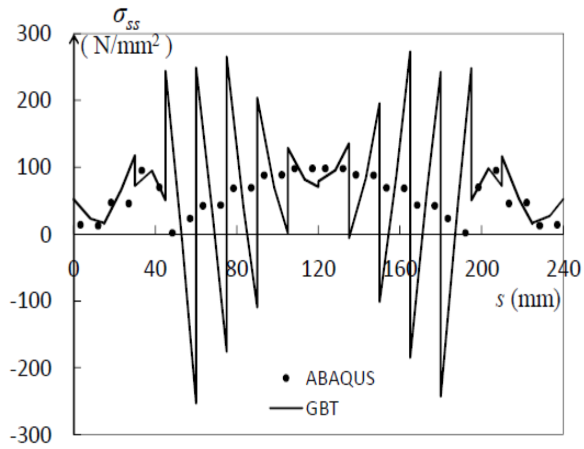


Fig. 7.25. Diagramas de tensões transversais (σ_{ss}) na secção de meio vão (estado P).

Por último, apresentam-se nas Figs. 7.26(a)-(b) as funções de amplitude ($\zeta_{k,x}$) nos estados BP e AP dos dois modos de corte mais relevantes na análise. Observa-se o seguinte:

(i) Devido à simetria do problema, todas as funções são anti-simétricas em relação ao eixo vertical que cruza a secção de meio vão.

(ii) Ambos os modos têm uma variação altamente não linear e apresentam padrões de semi-ondas idênticos (zeros da função coincidem) em todo o comprimento da coluna, excepto na vizinhança das secções encastradas para o estado BP.

(iii) No estado BP observa-se uma variação crescente das amplitudes desde as secções extremas até à região de meio vão. No estado AP, esse comportamento já não se verifica, apesar dos empenamentos máximos ocorrerem na mesma região. Devido à elevada perda de rigidez (efeitos de 2ª ordem e plasticidade) que se concentra a meio vão, a diferença de amplitudes para as regiões adjacentes é agora muitíssimo superior do que na configuração BP.

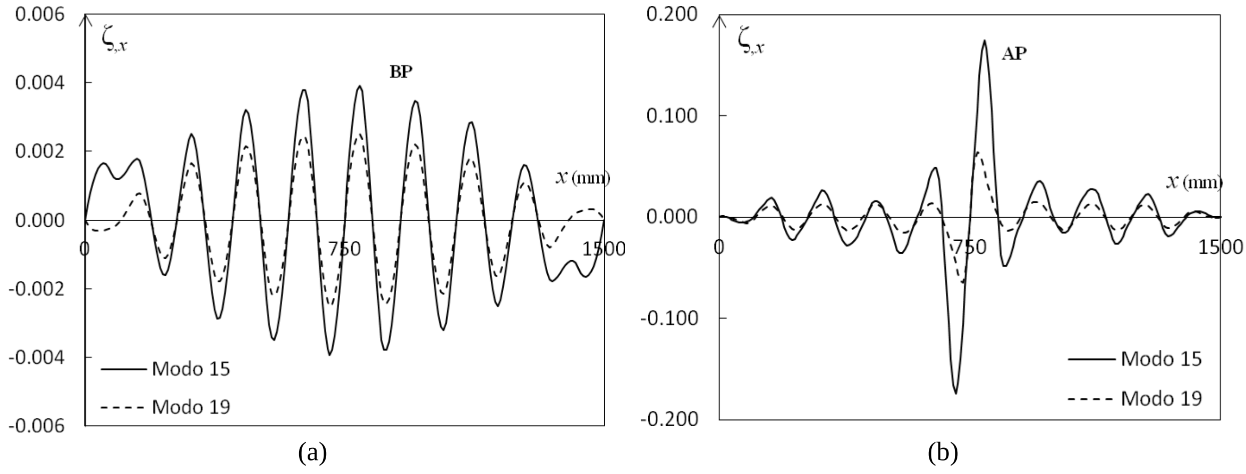


Fig 7.26. Funções de amplitude $\zeta_{k,x}$ dos modos de corte mais relevantes: estados de equilíbrio (a) BP e (b) AP.

Coluna curta SHS

A Fig. 7.27(a) mostra as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\Delta)$ do Abaqus e da GBT, onde Δ é o encurtamento axial da coluna (ver Fig. 7.4(a)). Os valores dos parâmetros de carga

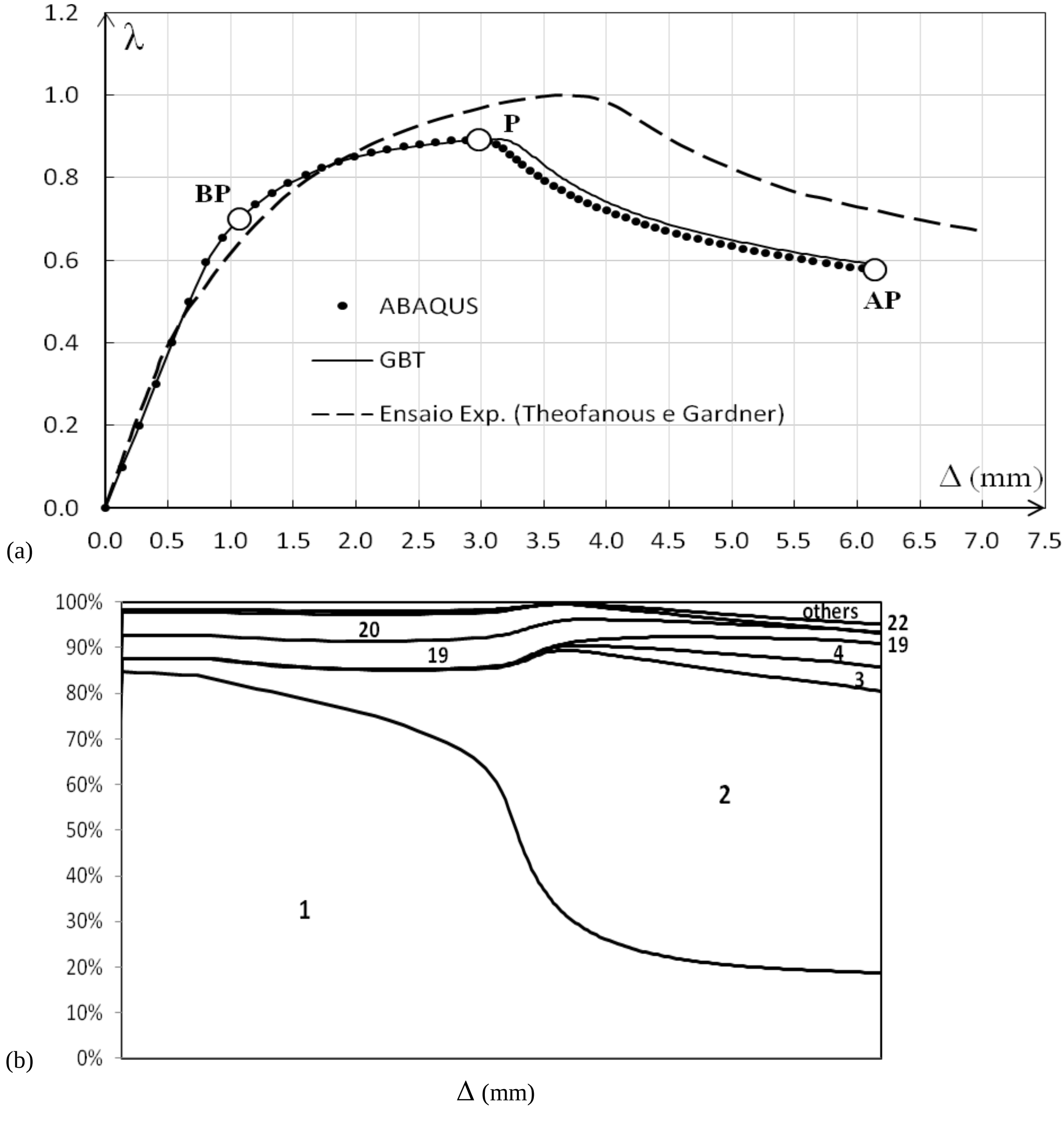


Fig. 7.27. (a) Trajectórias de equilíbrio numéricas e experimental, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

correspondentes aos estados de equilíbrio indicados são: (i) λ_{GBT}=0.701 + λ_{ABQ}=0.701 (BP), (ii) λ_{GBT}=0.893 + λ_{ABQ}=0.893 (P), e (iii) λ_{GBT}=0.590 + λ_{ABQ}=0.577 (AP). A Fig. 7.27(b) ilustra o diagrama de participação modal da GBT relativo à evolução (com o aumento de Δ) da configuração deformada da secção de meio vão. A observação destes resultados conduz às seguintes conclusões:

(i) A concordância entre as trajectórias da GBT e do Abaqus é excelente até à carga última, e muito boa na fase subsequente – a diferença máxima de 4.9% surge logo no início da trajectória descendente.

(ii) A carga última da GBT e deslocamento correspondente valem $F_{u.GBT}$=912646 N (λ_u=0.893) e $\Delta_{u.GBT}$=3.13 mm, valores que comparam razoavelmente com os valores experimentais publicados em *Theofanous e Gardner* (*2009*): $F_{u.exp}$=102000 N ($\lambda_{u.exp}$=1.000) e $\Delta_{u.test}$=3.63 mm – ver curva experimental na Fig. 7.27(a). As diferenças entre a curva experimental e as restantes, indicam que os modelos numéricos devem ser melhorados. Os resultados numéricos obtidos por *Theofanous e Gardner* (*2009*) sugerem que a simulação dos efeitos de endurecimento dos cantos da secção conduzirá a uma aproximação bem mais precisa (mesmo que a influência das tensões residuais de membrana seja desprezada).

(iii) A falta de resistência de pós-encurvadura ($\lambda_u < \lambda_b$=1.837) é apenas uma consequência lógica da esbelteza reduzida da coluna, o que faz com que a cedência permatura (λ_y=0.586, onde F_y=A σ_0^y) impeça que a carga última da coluna se aproxime da carga crítica.

(iv) Segundo *Theofanous e Gardner* (*2009*), a coluna colapsou num modo local após um nível considerável de defomação plástica, facto que está totalmente de acordo com as configurações obtidas pela GBT e pelo Abaqus no estado AP – ver Fig. 7.28.

(v) O diagrama de participação modal da GBT da Fig. 7.27(b) mostra claramente a presença de dois tipos de comportamento: (i) um global que envolve predominantemente deformações axiais (de pré-encurvadura) resultantes do modo **1**, e (ii) outro que corresponde à emergência e crescimento gradual de deformações locais, maioritariamente devido à contribuição do modo **2** (ver Fig. 7.14) – note-se que este modo se torna muito mais dominante ("ultrapassando" o modo **1**) na fase de pós-colapso.

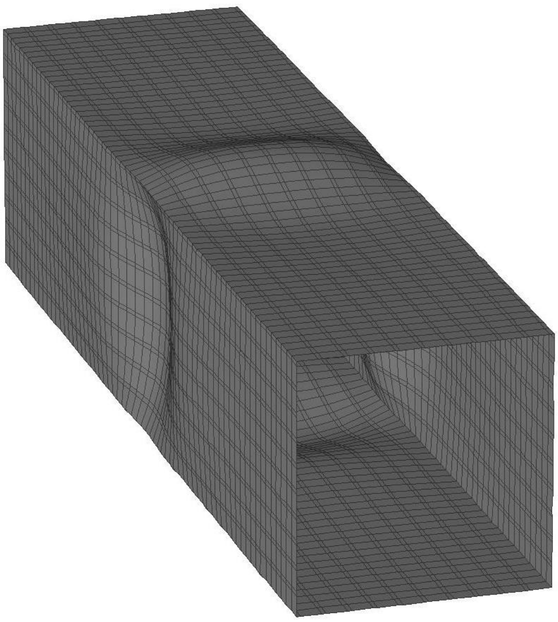
(vi) Apesar do domínio do modo **1** (com contribuições que variam entre 84.7% e 58.6%), há contribuições de quatro modos na trajectória de equilíbrio ascendente ($\Delta \leq \Delta_u$=3.13 mm). O modo **2**, cuja relevância é parcialmente (junto com a plasticidade) responsável pela não linearidade da trajectória de equilíbrio, tem uma participação que atinge os 27.1% no colapso (P). Os modos de extensão transversal **19** e **20**, cuja presença está intrinsecamente ligada à dos modos **1** (devido ao efeito de *Poisson*) e **2**, exibem participações crescentes até 6% cada. Deve notar-se que, apesar dos modos de extensão transversal **19** e **20** terem contribuições relativamente pequenas, a sua exclusão da análise conduziria a uma perda considerável de precisão dos resultados, levando a um comportamento mais rígido devido ao facto da deformação local passar a estar "artificialmente restringida".

(vii) Na trajectória descendente ($\Delta \geq \Delta_u$=3.13 mm), as participações dos modos **1** e **19**+**20** decrescem substancialmente devido à formação de um mecanismo de colapso localizado (ver Fig. 7.28) que se caracteriza pelo aumento do escoamento plástico na zona de meio vão ("concentração" de deformação local), e pela existência de descargas elásticas nas regiões adjecentes. Realmente, a contribuição do modo **2** aumenta significativamente (27.1 - 64.5%) e surgem os modos locais **3** e **4**.

As Figs. 7.29(b)-(d) dizem respeito aos estados de equilíbrio BP, P e AP, e apresentam os perfis longitudinais de deslocamentos axiais ($\delta_X(x)$) e verticais ($\delta_Z(x)$) do ponto médio da parede superior da secção (ver Fig. 7.4(b)). Concluiu-se que:

(i) Todos os perfis da GBT estão praticamente coincidentes com os do Abaqus – as maiores diferenças ocorrem em $\delta_X(x)$ no estado P.

(ii) Enquanto que $\delta_X(x)$ é linear em BP (ver Fig. 7.29(b)), no estado P exibe uma ligeira não linearidade perto das secções extremas da coluna. No estado AP, por outro lado, $\delta_X(x)$ corresponde a três segmentos "quase lineares", dois com declive semelhante (regiões laterais da coluna) e um terceiro muito mais inclinado (região central) – este traduz a perda de rigidez axial daquela zona, resultado da deformação plástica associada à participação crescente dos modos locais na fase de pós-colapso (ver Fig. 7.27(b)).



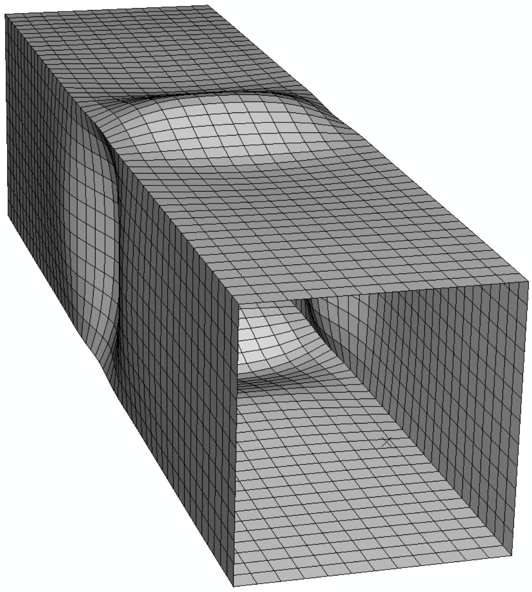


Fig. 7.28. Configurações deformadas do Abaqus e da GBT na fase de pós-colapso (estado AP).

(iii) No que respeita aos perfis $\delta_z(x)$, o número de semi-ondas passa de três (na imperfeição inicial – Fig. 7.29(a)) para cinco (estados BP e P – Fig. 7.29(c)). No entanto, em AP as três semi-ondas "regressam" (agora muito mais desiguais) devido a uma combinação de (iii$_1$) deformação plástica concentrada a meio vão, e (iii$_2$) descargas elásticas nas restantes zonas da coluna. Repare-se também que a amplitude máxima ocorre sempre a meio vão e, nessa zona, a curvatura aumenta à medida que a carga progride – ver Figs. 7.29(a), (c) e (d).

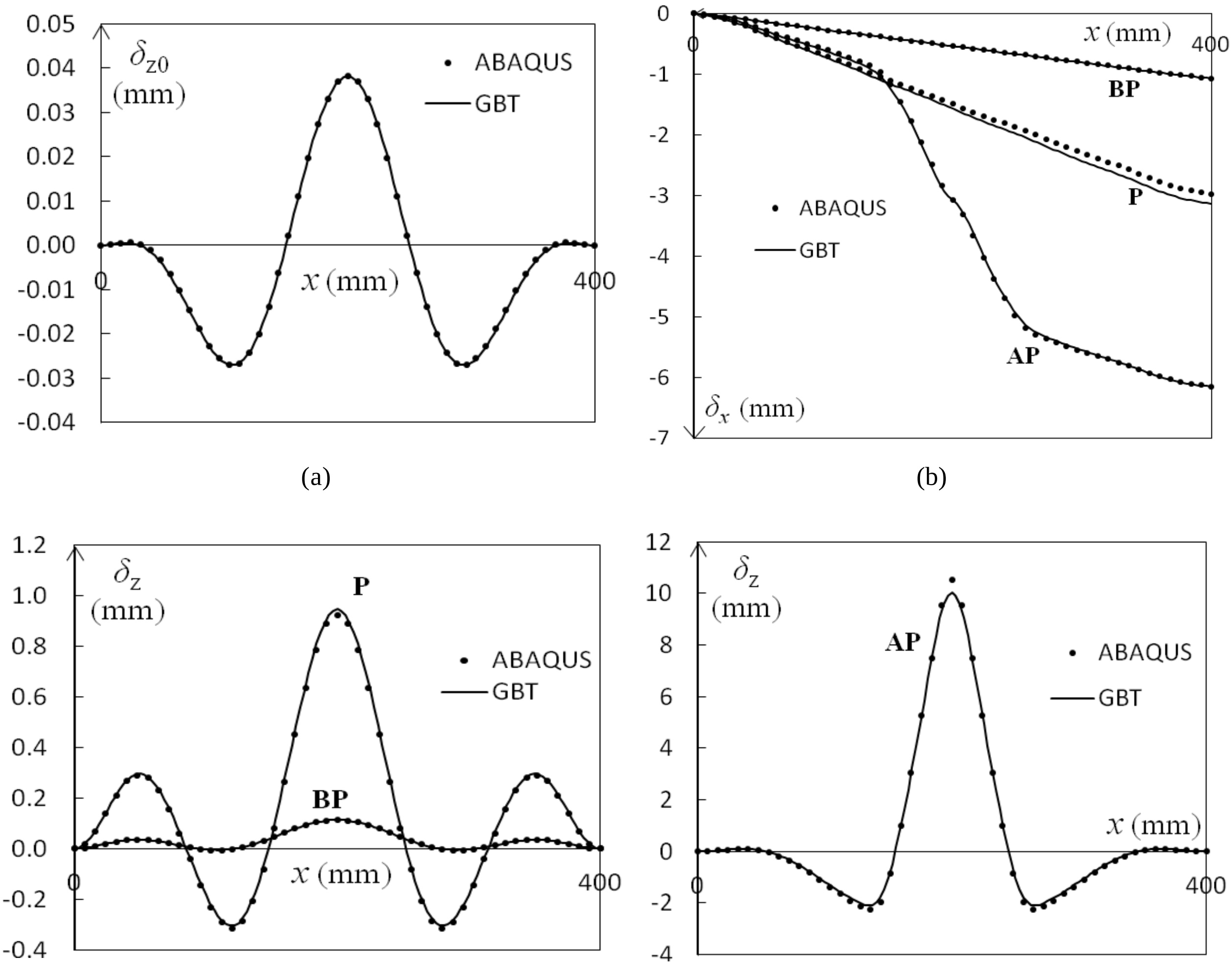


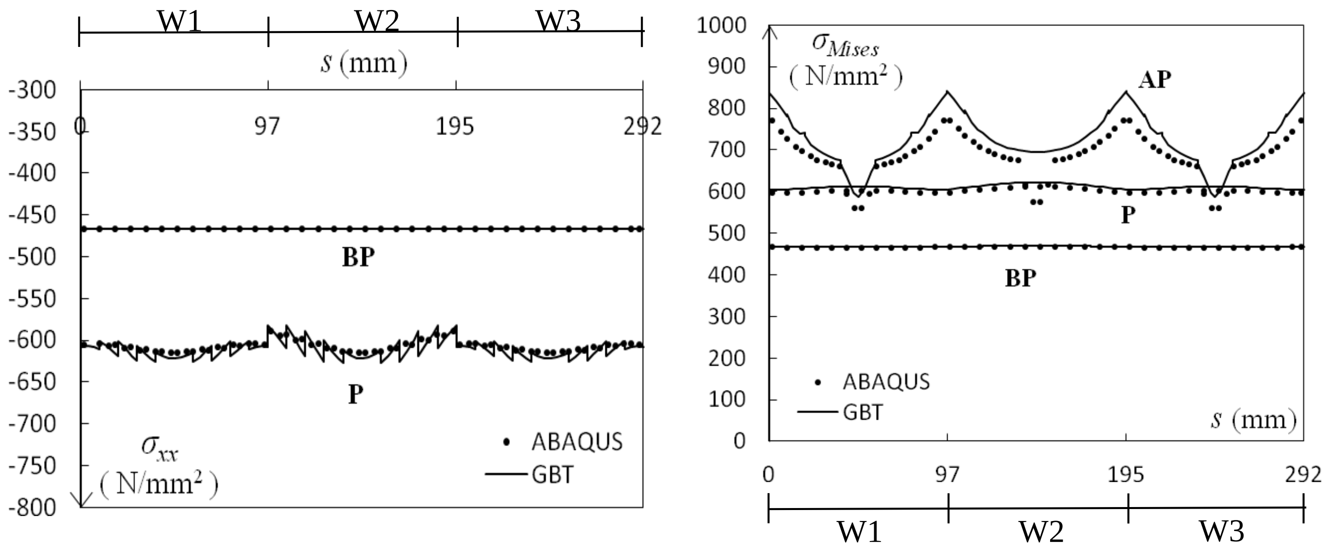
Fig. 7.29. Perfis longitudinais de deslocamentos axiais e verticais do ponto médio do banzo superior: (a) δ_{z0} (x) (imperfeição inicial), (b) δ_x (x) em BP, P e AP, (c) δ_z (x) em BP e P, e (d) δ_z (x) em AP.

As Figs. 7.30(a)-(b) mostram os diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) nos estados BP e P, e de *von Mises* (σ_{Mises}) em BP, P e AP, na secção de meio vão (x=198 mm) e ao longo da coordenada *s* das paredes W1, W2 e W3 indicadas na Fig. 7.4(b). A sua obervação permite concluir que:

(i) Todos os diagramas são simétricos e, em todos os estados de equilíbrio, a secção está plastificada ($\sigma_{Mises} > \sigma_0^y$=390.33 N/mm^2) – ver Fig. 7.30(b).

(ii) Os diagramas da GBT e do Abaqus apresentam uma concordância muito boa nos estados BP e P – os diagramas são uniformes em BP e ligeiramente não lineares em P. Os diagramas de *von Mises* são muito semelhantes aos valores absolutos dos diagramas de tensões axiais, o que indica que as tensões de corte e de extensão transversal são irrelevantes a meio vão. As pequenas discontinuidades entre sub-placas nos diagramas σ_{xx} da GBT em P são o resultado das singularidades características das distribuições de extensões transversais (relembra-se o leitor que os deslocamentos v são lineares em cada sub-placa).

(iii) No estado AP, os diagramas σ_{Mises} do Abaqus e da GBT apresentam uma concordância qualitativamente bastante boa, excepto na redução pronunciada de tensão que ocorre a meio da parede W2. Contudo, existem diferenças quantitativas visíveis, em particular nos cantos da secção. Para além do facto do parâmetro de carga da GBT ser 2.3% superior ao do Abaqus em AP, outra causa possível para as diferenças reside na falta de modos relevantes na análise (relembra-se que apenas 28 de 204 modos foram incluídos).



(a) (b)

Fig. 7.30. Diagramas de tensão na secção de meio vão: (a) σ_{xx} nos estados BP e P, e (b) σ_{Mises} nas configurações BP, P e AP.

(iv) Em AP, observa-se que as tensões de *von Mises* tendem a concentrar-se nos cantos da secção, o que se deve à pronunciada deformação local na região de meio vão (ver Fig. 7.28). Note-se a existência de uma distribuição não linear típica das tensões axiais no comportamento de pós-encurvadura de placas, na qual se baseia o conceito de largura efectiva utilizado em todos os regulamentos de estruturas metálicas.

As Figs. 7.31(a)-(b) mostram os *contours* de tensões de *von Mises* da GBT e do Abaqus nos estados P e AP. Para além da semelhança consistente entre pares de resultados, importa notar que toda a superfície média da coluna se encontra plastificada no estado P (σ_0^y=390.33 N/mm^2), e que as menores tensões ocorrem na vizinhança das secções extremas. Quando se evolui do estado P para AP (trajectória de equilíbrio descendente – $\lambda_{AP} < \lambda_P$), deve notar-se que:

(i) Aproximadamente 2/3 da superfície da coluna sofreu descargas elásticas (região a azul claro na Fig. 7.31(b)), *i.e.*, as tensões de *von Mises* apresentam valores inferiores.

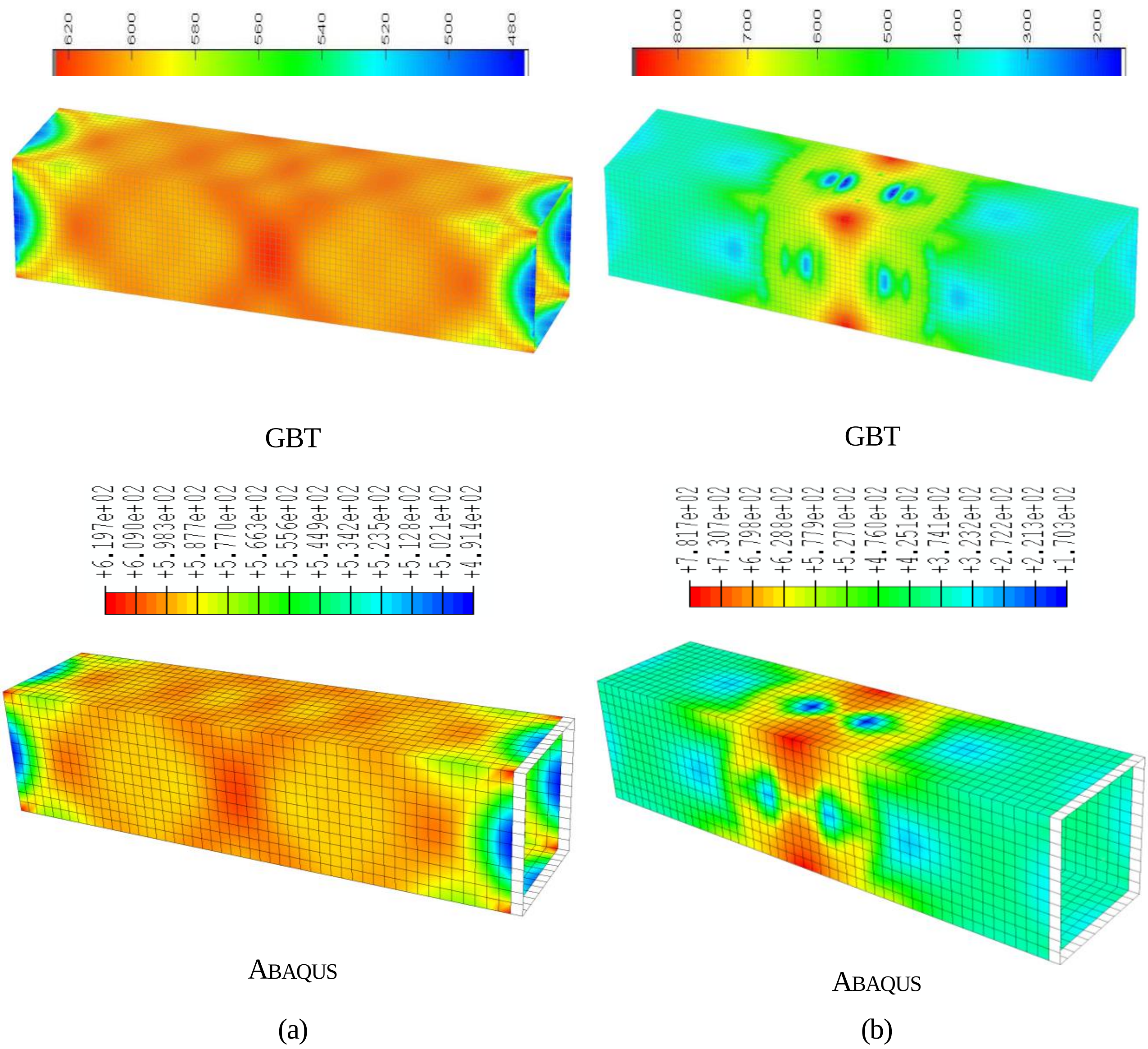


Fig. 7.31. *Contours* de tensões (N/mm^2) de *von Mises* nos estados (a) P e (b) AP.

(ii) Cerca de 1/3 da superfície da coluna (junto à secção de meio vão) sofreu deformação plástica adicional, claramente visível nas regiões dos cantos (assinalada a cor encarnada na Fig. 7.31(b)). Contudo, algumas zonas da região central também sofreram descargas elásticas (zonas a azul claro e escuro na Fig. 7.31(b)).

Por último, as Figs. 7.32(a)-(b) mostram os *contours* de tensões de corte na metade esquerda ($x \leq 0.5L$) da parede W3 indicada na Fig. 7.4(b), para os estados P e AP – estas distribuições de tensões

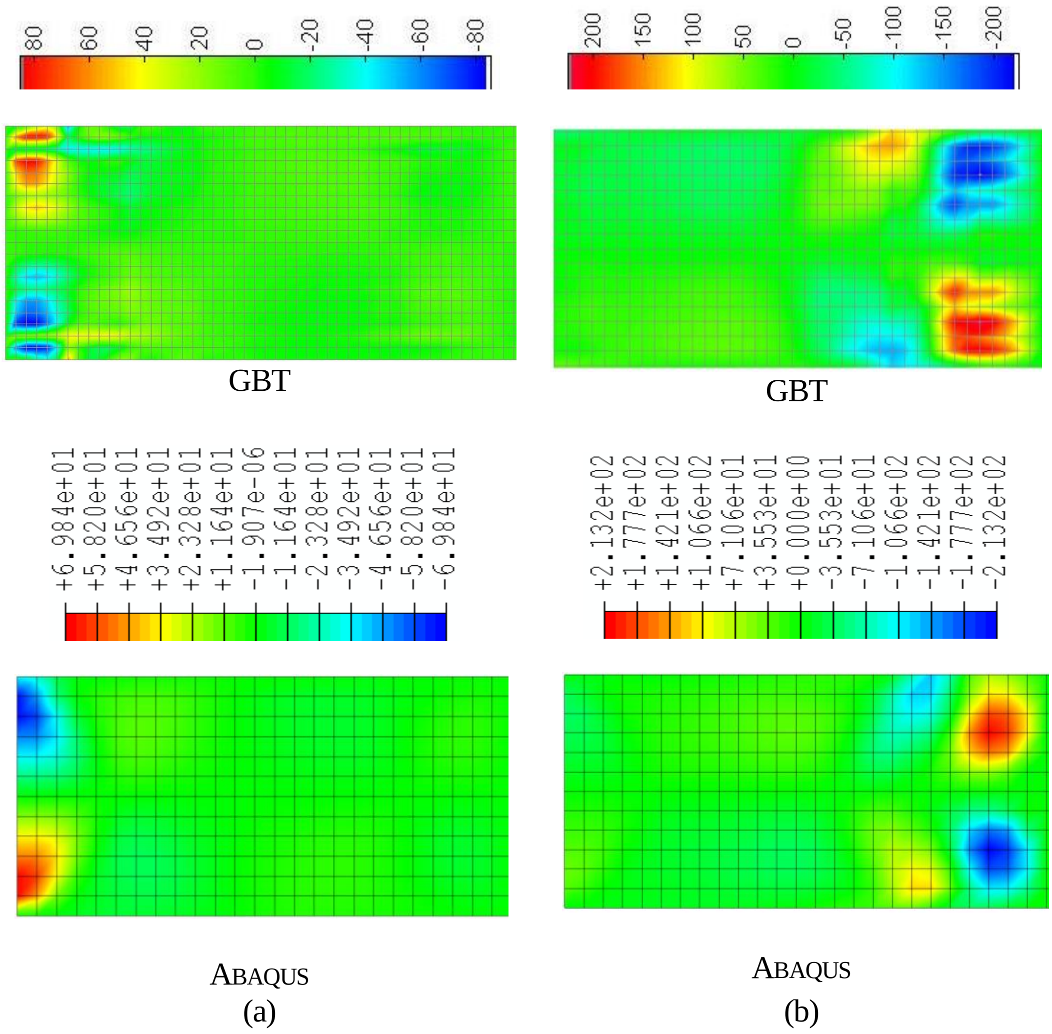


Fig. 7.32. *Contours* de tensões (N/mm^2) de corte (σ_{xs}) na parede W3 da metade esquerda da coluna: estados (a) P e (b) AP.

são assimétricas em relação à secção de meio vão. Mais uma vez, os pares de resultados do Abaqus e da GBT apresentam semelhanças qualitativas muito boas, apesar dos *contours* da GBT serem mais irregulares. Possíveis causas destas irregularidades poderão ser (i) as discontinuidades das tensões transversais entre sub-placas (discutido anteriormente), e/ou (ii) a falta de modos de corte relevantes (apenas 11 em 83 foram seleccionados para a análise). Para além disso, constata-se que as tensões de corte desempenham um papel mais importante no estado AP do que em P – enquanto que no último os valores máximos de σ_{xs} ocorrem junto às secções extremas, em AP "deslocam-se" para a região de meio vão (onde tem lugar a formação do mecanismo de colapso).

Coluna longa SHS

A Fig. 7.33(a) exibe as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta)$ do Abaqus e da GBT, onde δ é o deslocamento horizontal a meio vão do ponto indicado na Fig. 7.6(b). Os valores dos

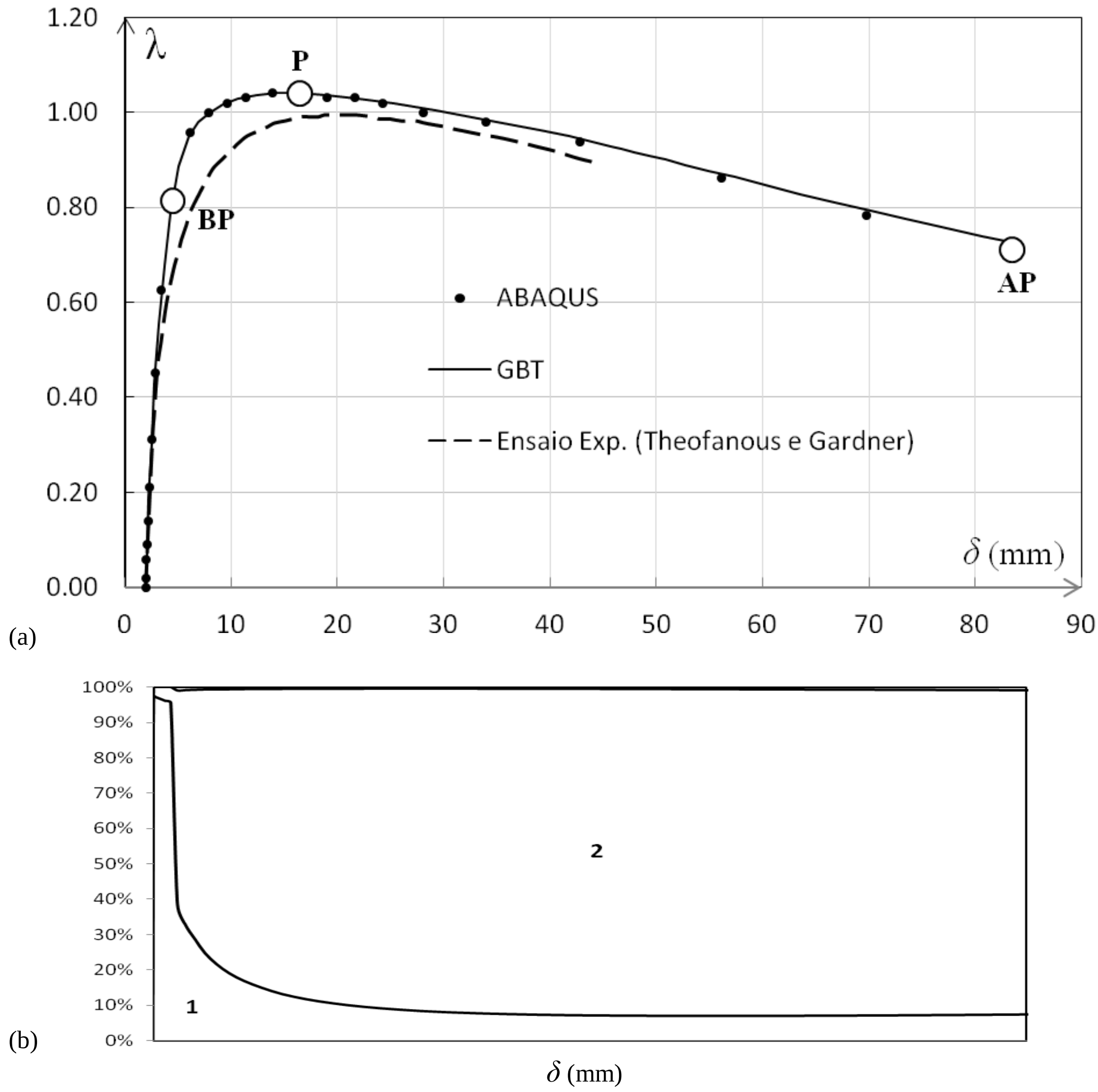


Fig. 7.33. (a) Trajectórias de equilíbrio numéricas e experimental, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

parâmetros de carga relativos aos estados de equilíbrio indicados são: (i) λ_{GBT}=0.79 + λ_{ABQ}=0.81 (BP), (ii) λ_{GBT}=1.04 + λ_{ABQ}=1.04 (P), e (iii) λ_{GBT}=0.72 + λ_{ABQ}=0.71 (AP). A Fig.

7.33(b) mostra o diagrama de participação modal da GBT relativo à evolução da configuração deformada da secção de meio vão. A observação destes resultados permite concluir que:

(i) A comparação entre as curvas da GBT e do Abaqus é excelente – máxima diferença de 1.5%.

(ii) Os valores "últimos" (estado P) da GBT são $F_{u.GBT}$=376376 N (λ_u=1.04) e $\delta_{u.GBT}$ = 16.45 mm, os quais não diferem muito (especialmente a carga) dos valores experimentais obtidos por *Theofanous e Gardner* (*2009*): $F_{u.exp}$=361900 N ($\lambda_{u.exp}$ =1.00) e $\delta_{u.exp}$ =20 mm – ver a curva experimental na Fig. 7.33(a). A proximidade entre os resultados experimentais e numéricos permite depreender que a exclusão dos efeitos do endurecimento dos cantos e das tensões residuais de membrana não afecta tão significativamente a qualidade dos resultados numéricos como no caso da coluna curta (ver Fig. 7.27(a)).

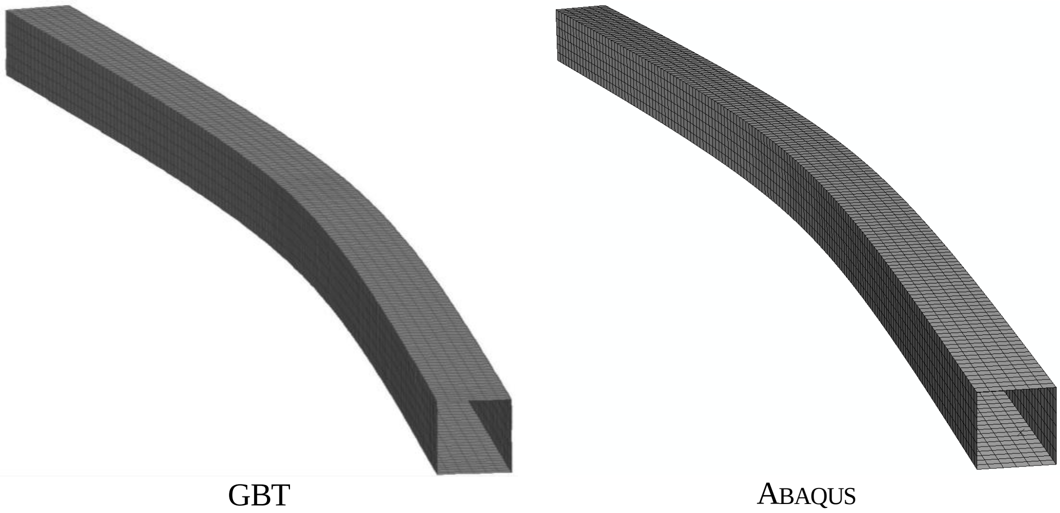


Fig. 7.34. Configuração deformada da coluna durante o colapso (estado AP).

(iii) A ausência de resistência pós-crítica ($\lambda_u < \lambda_{b.glob}$=1.43) resulta do facto da cedência inicial ocorrer consideravelmente abaixo da carga crítica (λ_y=1.11, onde F_y =A σ_0^y).

(iv) *Theofanous e Gardner* (*2009*) observaram que a coluna colapsou num modo global, o que está de acordo com a configuração deformada no estado AP obtida pela GBT e pelo Abaqus – ver Fig. 7.34.

(v) O diagrama de participação modal mostra claramente que a deformação global domina o comportamento da coluna, devido às participações quase exclusivas dos modos **1** (extensão axial) e **2** (flexão na menor inércia[32]).

32 A designação de "menor inércia" provém do facto das dimensões (altura e largura) medidas da secção SHS diferirem ligeiramente (H=75.8 mm, B=75.7 mm).

(vi) A participação inicial dominante (97.4%) do modo **1** decresce de forma bastante abrupta perto do estado BP, e rapidamente alcança um *plateau* de cerca de 7.0 % que se prolonga ao longo da fase de pós-colapso. Naturalmente, a contribuição do modo **2** segue o percurso inverso, i.e., cresce subitamente perto do estado BP e alcança um patamar de 92.4% na trajectória de equilíbrio descendente.

(vii) Apesar da sua presença na imperfeição geométrica inicial, a participação do modo **3** (local – ver Fig. 7.15) é diminuta em toda a trajectória de equilíbrio. Esta evidência está de acordo com o facto de não existirem deformações locais visíveis antes da configuração AP – ver Fig. 7.34 (apenas para níveis de deformação superiores).

A Fig. 7.35(b) mostra os perfis longitudinais do deslocamento lateral a meia altura da secção (ver Fig. 7.6(b)) para os estados P e AP – as análises do Abaqus e da GBT originam resultados quase coincidentes. A flexão por encurvadura local resultante da imperfeição geométrica (visível na Fig. 7.35(a)) não é visível nos estados de equilíbrio P e AP, por estar completamente ocultada pela flexão global (facto concluído anteriormente, através do diagrama da Fig. 7.33(b)).

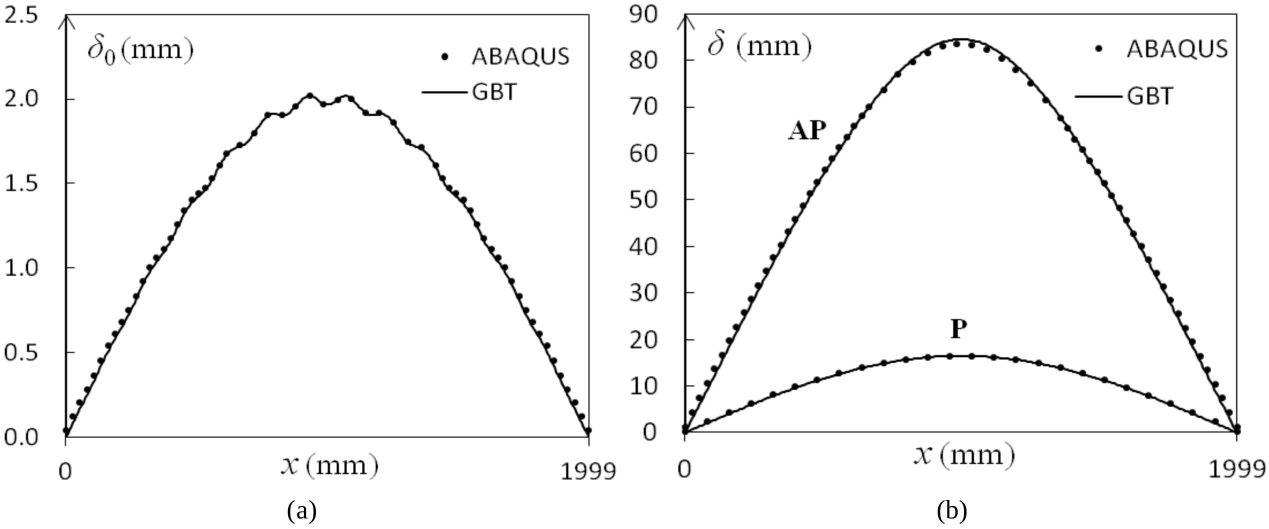
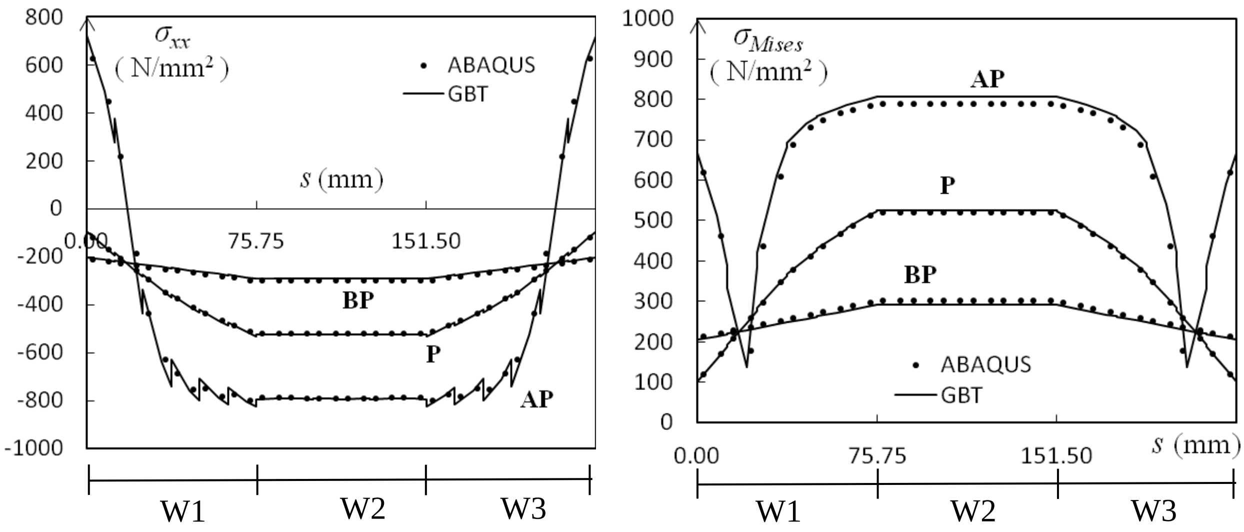


Fig. 7.35. Perfis longitudinais do deslocamento lateral a meia altura da secção: (a) imperfeição inicial, e (b) estados P e AP.

As Figs. 7.36(a)-(b) mostram os diagramas de tensões axiais (σ_{xx}) e de *von Mises* (σ_{Mises}) ao longo das paredes da secção de meio vão (x=999.5 mm) indicadas na Fig. 7.6(b), e para as configurações BP, P e AP. Os seguintes comentários são apropriados:

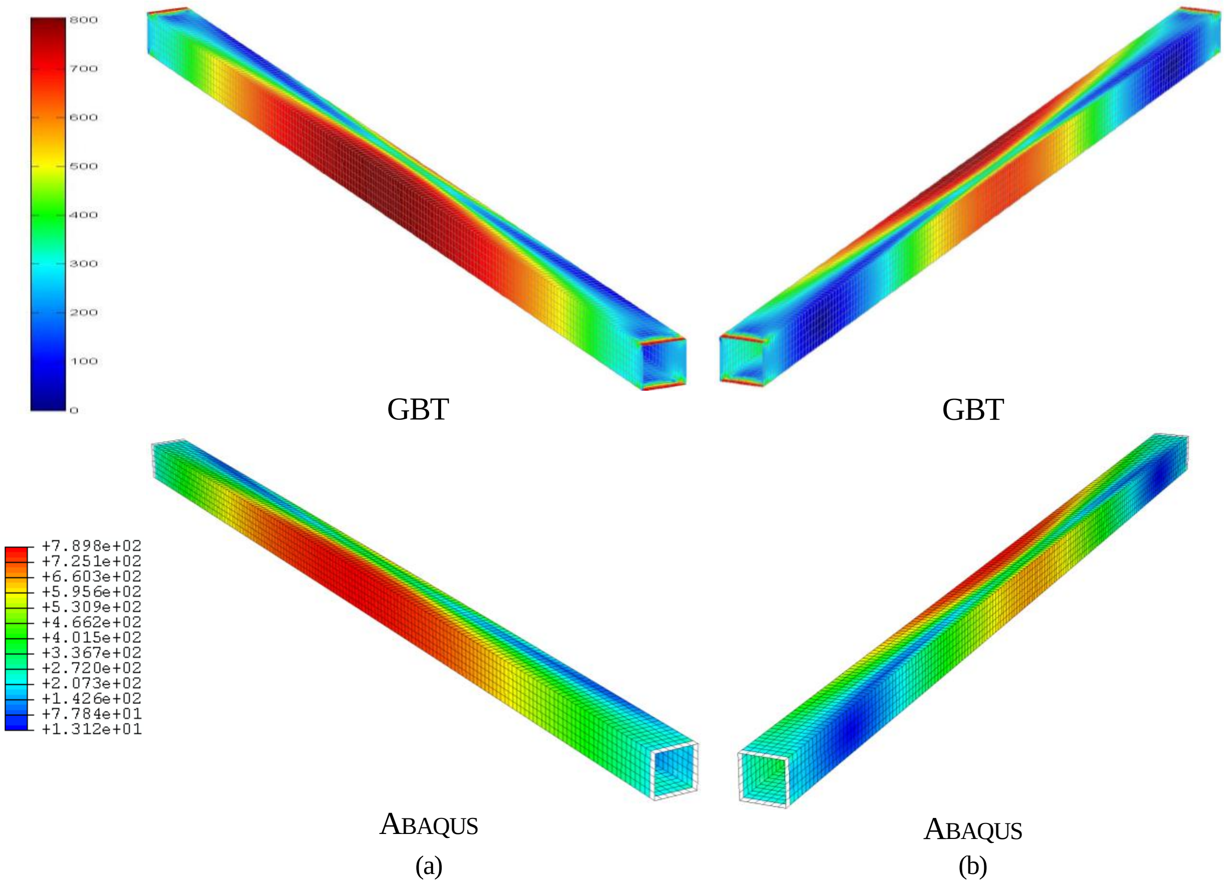
(i) Os diagramas da GBT e do Abaqus (simétricos) apresentam semelhanças notáveis.

(ii) Os valores das tensões de *von Mises* para os estados BP e P são muito semelhantes aos valores absolutos dos diagramas de tensões axiais correspondentes, o que implica que as tensões de corte e transversais são desprezáveis na secção de meio vão – o mesmo se pode concluir para o estado AP, mas apenas nas zonas da secção que exibem os valores mais elevados das tensões σ_{xx}.



(a) (b)

Fig. 7.36. Diagramas de tensões na secção de meio vão para os estados BP, P e AP: (a) σ_{xx} e (b) σ_{Mises}.



(a) (b)

Fig. 7.37. *Contours* de tensões (N/mm^2) de *von Mises* na configuração AP: lado da coluna sob (a) compressão e (b) tracção.

(iii) A Fig. 7.36(a) mostra (como esperado) que a influência da flexão global nos diagramas de tensões aumenta à medida que a deformação evolui de BP para AP. Por exemplo, a linha neutra apenas intersecta a secção em AP. Nesse estado, alguns pontos encontram-se plastificados à tracção (ver Fig. 7.36(b) e relembrar que σ_0^y=347.34 N/mm^2).

(iv) No estado BP, a secção de meio vão ainda não sofreu qualquer escoamento plástico ($\sigma_{\mathrm{Mises}} \leq \sigma_0^y$) e, por isso, os diagramas de tensões são lineares ou uniformes em cada parede. Em P e AP, a não linearidade do aço *lean duplex* é evidenciada nas zonas endurecidas ($\sigma_{\mathrm{Mises}} > \sigma_0^y$) das paredes W1 e W3.

As Figs. 7.37(a)-(b) mostram os *contours* de tensões de *von Mises* nas zonas comprimida (esquerda) e traccionada (direita), no estado de equilíbrio AP. É possível observar uma óptima comparação entre os resultados do Abaqus e da GBT. Conclui-se que:

(i) A zona à tracção também sofre escoamento plástico, tal como foi mencionado anteriormente (ver Fig. 7.36(b)).

(ii) Note-se que as regiões da coluna que exibem menores tensões (assinaladas a cor azul) correspondem à vizinhança da superfície neutra da barra. Essas regiões tendem a afastar-se do plano de simetria longitudinal da coluna à medida que se aproxima do meio vão, facto que é uma consequência directa do aumento da excentricidade de carga (nula nas secções extremas e máxima a meio vão).

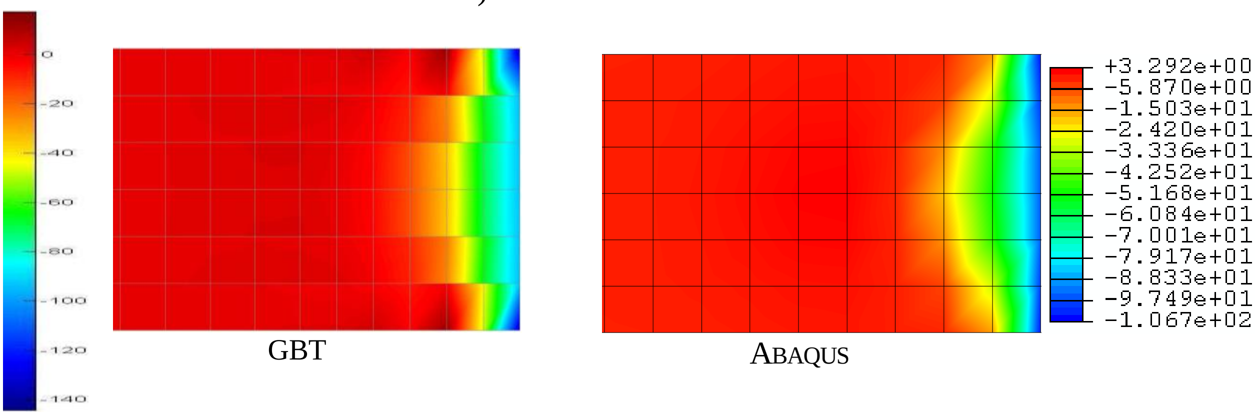


Fig. 7.38. *Contours* de tensões (N/mm^2) transversais (σ_{ss}) no colapso – estado P (alma da secção na vizinhança de x=L).

A Fig. 7.38 exibe os contours de tensões transversais do Abaqus e da GBT no estado de equilíbrio P e na vizinhança das secções extremas (a altura do *plot* corresponde à alma da secção SHS) – as restantes zonas da coluna ao longo do seu comprimento apresentam tensões nulas. Também se constata que os resultados da GBT são mais irregulares do que os do Abaqus, o que se deve às discontinuidades das extensões transversais entre sub-placas (relembra-se que a GBT aproxima linearmente os deslocamentos *v* em cada sub-placa). Mesmo assim, observa-se uma semelhança qualitativa bastante satisfatória entre as duas distribuições.

Viga em I

A Fig. 7.39(a) apresenta as curvas $\lambda(|\delta_y|)$ do Abaqus e da GBT, onde δ_y é o deslocamento lateral a meio vão do ponto do banzo superior indicado na Fig. 7.7(b). A Fig. 7.39(b) exibe o correspondente diagrama de participação modal da GBT, e a Fig. 7.40 ilustra o mecanismo de colapso da viga (estado de equilíbrio AP). Estes resultados conduzem aos seguintes comentários:

(i) As trajectórias do Abaqus e da GBT estão em muito boa concordância – a diferença máxima não excede os 4.8% e ocorre num estado avançado de pós-colapso (AP).

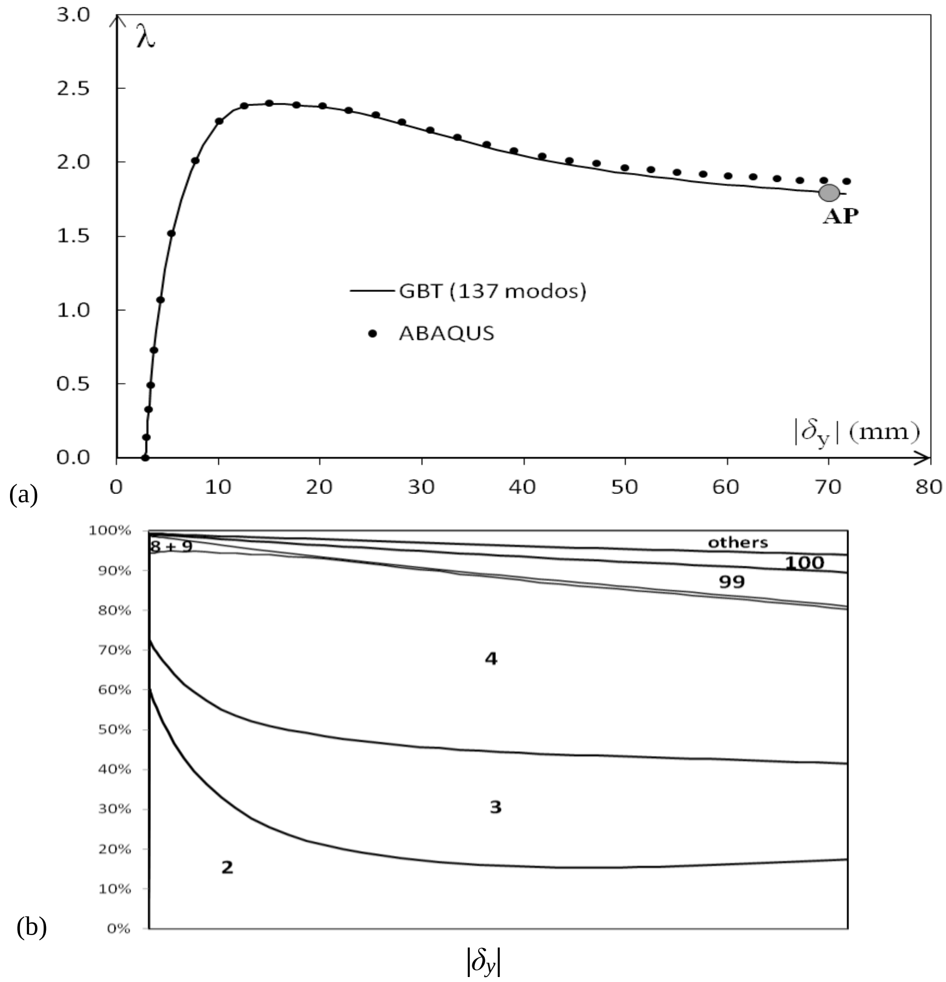


Fig. 7.39. (a) Trajectórias de equilíbrio e (b) diagrama de participação modal da GBT.

(ii) A deformação global domina claramente o comportamento da viga, nomeadamente através das contribuições dos modos **2** (flexão na maior inércia – 15.4-60.7%), **3** (flexão na menor inércia – 12.0-28.7%) e **4** (torção – 21.6-44.9%). Relativamente aos modos de extensão transversal **99** (da alma) e **100** (dos banzos), a sua participação conjunta cresce gradualmente ao longo da trajectória de equilíbrio, atingindo 13% no troço descendente – a exclusão destes dois modos da análise "enrigeceria" consideravelmente o comportamento da viga, pois os deslocamentos significativos das paredes da secção no seu plano (ver Fig. 7.40) ficariam restringidos. Finalmente, os modos **8** e **9** associados à flexão transversal do banzo carregado/superior (ver Fig. 7.16 – note-se que os modos se opõem no banzo inferior), apenas exibem contribuições relevantes até à carga última (a sua participação conjunta máxima vale 4.3%).

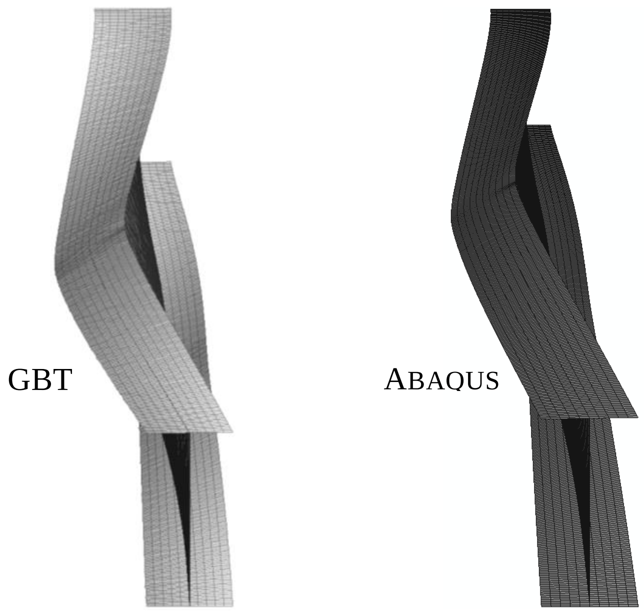


Fig. 7.40. Configurações deformadas no colapso (estado de equilíbrio AP).

(iii) O comportamento global predominante e a cedência inicial (na superfície média da viga) para $\lambda \approx 2.0$ (λ_{cr}=3.10) explicam a ausência de resistência pós-crítica ($\lambda_u / \lambda_{cr} = 0.774$).

(iv) Para além da grande semelhança entre os mecanismos de colapso da GBT e do Abaqus (Fig. 7.40), importa chamar a atenção para (iv_1) a formação de uma linha de cedência no banzo superior da secção mais "deformada" (perto da zona de aplicação da carga), e (iv_2) o empenamento significativo do banzo superior no apoio simples (ao invés do banzo inferior) – os perfis axiais dos modos **3** e **4** adicionam-se no banzo superior e opõem-se no banzo inferior (ver Fig. 7.16).

A Fig. 7.41 exibe as trajectórias de equilíbrio do Abaqus e da GBT correspondentes ao deslocamento vertical (δ_z) a meio vão do nó do banzo superior indicado na Fig. 7.7(b). Efectuaram-se três análises na GBT, as quais diferem no conjunto de modos de deformação adoptado: (i) análise com 137 inicialmente seleccionados (ver Tab. 7.4), correspondendo a 18659 g.l., (ii) análise com os 43 modos de deformação mais relevantes (4 globais, 3 locais, 15 de corte e 21 de extensão transversal), incluindo todos os representados na Fig. 7.16 e envolvendo 5837 g.l., e (iii) análise com 50 modos (6762 g.l.), incluindo todos os modos de extensão transversal e apenas 4 globais, 2 locais e 5 de corte (os mais relevantes do conjunto dos 43 modos). A comparação entre as várias curvas $\lambda(-\delta_z)$ conduz aos seguintes comentários:

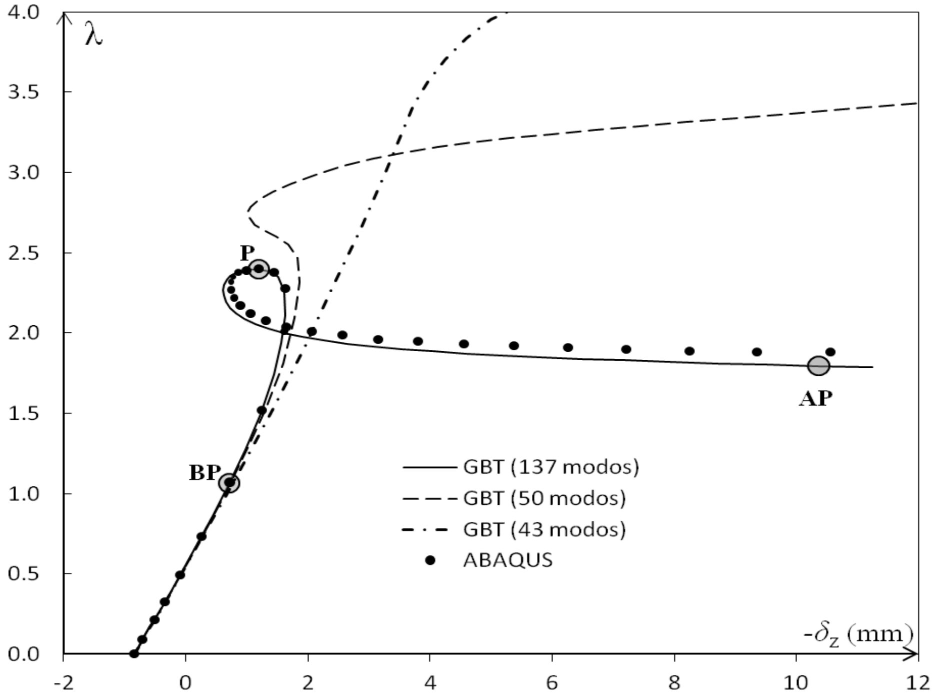


Fig. 7.41. Trajectórias de equilíbrio $\lambda(-\delta_z)$ do Abaqus e da GBT (três conjuntos de modos de deformação).

(i) Existe uma semelhança bastante boa entre os resultados do Abaqus e da GBT (137 modos) – a diferença máxima é de 4.9 %. Os valores $\{\delta_z, \lambda\}$ correspondentes aos estados de equilíbrio indicados são $\{0.71, 1.06\}_{GBT}$ + $\{0.72, 1.07\}_{ABQ}$ (BP), $\{1.19, 2.40\}_{GBT}$ + $\{1.20, 2.40\}_{ABQ}$ (P), e $\{10.36, 1.79\}_{GBT}$ + $\{10.55, 1.88\}_{ABQ}$ (AP).

(ii) A "troca" (aumento/redução) entre as participações dos modos **4** (torção) e **2** (flexão na maior inércia) antes da carga última (ver Fig. 7.39(b)) é responsável pelo aumento de rigidez e subsequente "loop" ("snap-back" seguido de inversão da variação de deslocamento) observados.

(iii) A relevância dos modos de extensão transversal pode ser confirmada pela melhoria notável (embora ainda pouco precisa) da curva da GBT obtida com 50 modos, em comparação com a determinada através de 43 modos – note-se a formação incompleta do "loop", conseguindo recuperar a formação de "snap-back" na trajectória de equilíbrio.

Finalmente, a Fig. 7.42 exibe os perfis longitudinais de deslocamentos axiais e verticais do nó do banzo superior indicado na Fig. 7.7(b), relativamente aos estados (i) BP, P (Fig. 7.42(a)), e (ii) AP (Fig. 7.42(b)) (os perfis P da GBT dizem respeito a λ_{GBT}=2.40). Os seguintes comentários são oportunos:

(i) Existe uma excelente concordância entre os resultados do Abaqus e da GBT (137 modos).

(ii) Os maiores deslocamentos verticais ocorrem a meio vão e estão associados à existência de elevados gradientes nessa zona, os quais estão associados à formação de uma linha de cedência no banzo superior (ver Fig. 7.40).

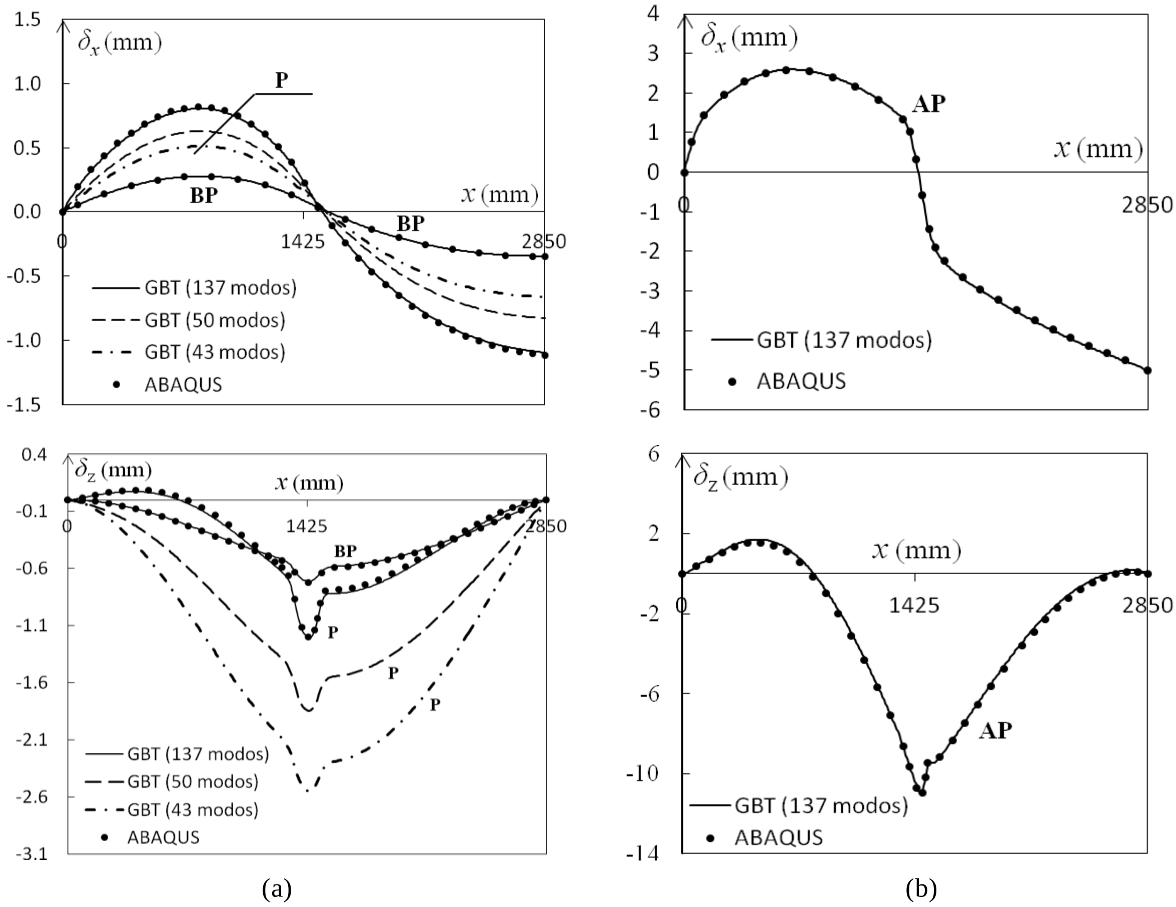


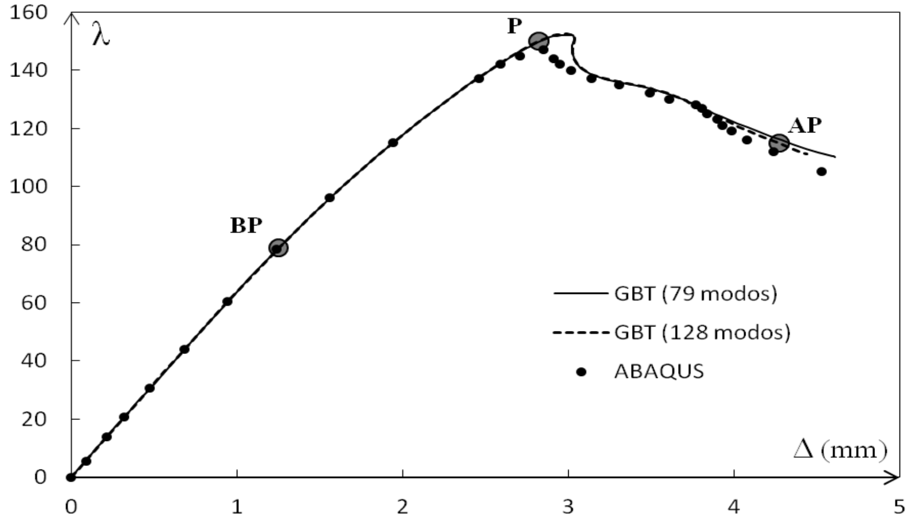
Fig. 7.42. Perfis longitudinais de deslocamentos δx e δz do nó do banzo superior indicado na Fig. 7.7(b): estados de equilíbrio (a) BP, P e (b) AP.

(iii) Quando se evolui do estado BP até ao AP, os deslocamentos transversais no quarto de vão à esquerda ($x < 0.25L$) mudam de sinal, o que resulta da prevalência das deformações por torção em detrimento das deformações por flexão na maior inércia.

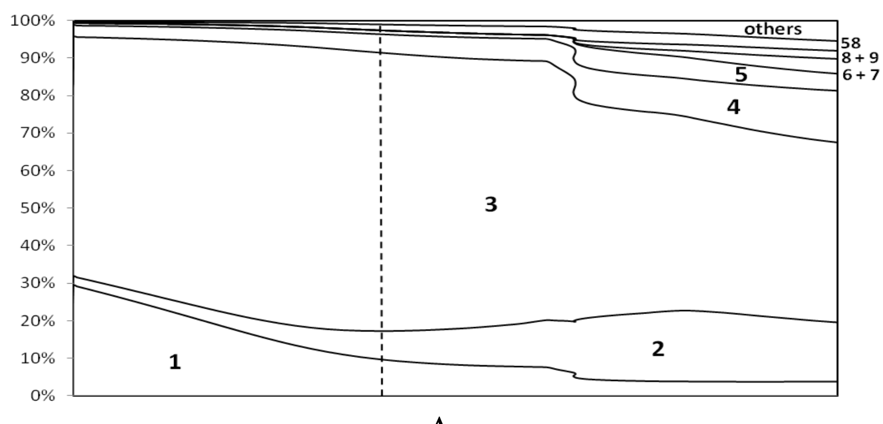
(iv) O aumento do número de modos de deformação permite melhorar os resultados obtidos. Note-se que, apesar das grandes diferenças quantitativas, os perfis da GBT obtidos com menos modos (43 e 50) são qualitativamente semelhantes ao "exacto" (137 modos).

Coluna em C-reforçado

A Fig. 7.43(a) mostra as curvas $\lambda(\Delta)$ do Abaqus e da GBT, onde Δ é o encurtamento axial da coluna. Foram efectuadas duas análises da GBT. Uma análise incluiu os 128 modos inicialmente seleccionados (4 globais, 1 distorcional, 7 locais, todos os de corte e 27 de extensão transversal – maioritariamente simétricos), totalizando 21941 g.l.. A outra análise da GBT incluiu os 79 modos especificados na Tab. 7.4 (13527 g.l.), nomeadamente os modos simétricos mais relevantes do grupo dos 128 seleccionados para a análise anterior e todos os modos de corte e de extensão transversal associados à concentração de deformações nos reforços. A Fig. 7.43(b) exibe o diagrama de participação modal da GBT (79 modos). A análise destes resultados origina os seguintes comentários:



(a)



(b)

Fig. 7.43. (a) Trajectórias de equilíbrio, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

(i) Existe uma boa correlação entre as curvas da GBT (128 modos) e do Abaqus. Por exemplo, as cargas últimas diferem apenas 3.7 % ($\lambda_{u\,,\,GBT}$=152.37 e $\lambda_{u\,,ABQ}$=147.00), e os pares {Δ, λ} relativos aos estados de equilíbrio BP, P e AP têm os seguintes valores: $\{1.25, 78.83\}_{GBT}$ + $\{1.24, 78.40\}_{ABQ}$ (BP), $\{2.82, 149.89\}_{GBT}$ + $\{2.85, 147.00\}_{ABQ}$ (P), e $\{4.27, 114.89\}_{GBT}$ + $\{4.24, 112.00\}_{ABQ}$ (AP).

(ii) As trajectórias da GBT obtidas com 128 e 79 modos de deformação coincidem virtualmente para a maioria dos níveis de carga – apenas ocorrem pequenas diferenças em estados avançados de pós-colapso. Esta comparação indica que os 49 modos adicionais podem ser removidos sem comprometer a qualidade global dos resultados.

(iii) A Fig. 7.43(b) mostra claramente que os modos **1** (extensão axial – 3.8-29.4%), **2** (flexão na menor inércia – 2.3-18.9%), **3** (distorcional simétrico – 47.9-74.7%), **4** (local – 3.1-13.8%) e **5** (local – 0.7-5.8%) dominam o comportamento da coluna em qualquer configuração. A evidência da deformação distorcional resulta do facto de o modo crítico ser distorcional e a respectiva carga ser bastante inferior à primeira carga de instabilidade local ($\lambda_{cr,dist}$=125.14 vs $\lambda_{b,loc}$=158.61).

(iv) A participação do modo de flexão na menor inércia (modo **2**) aumenta visivelmente antes de se atingir a carga última e torna-se ainda mais relevante na trajectória descendente. Isto deve-se à excentricidade de carga resultante do deslocamento do centro de rigidez em direcção à alma, o qual está associado à redistribuição de tensões axiais causada pela deformação local e/ou distorcional. Para além disso, a cedência do material das zonas dos reforços também contribui para a referida excentricidade (e.g., a cedência da superfície média da barra inicia-se sensivelmente a partir da linha a traço interrompido na Fig. 7.43(b)).

(v) Após o início da cedência (linha a traço interrompido na Fig. 7.43(b)), as contribuições crescentes dos modos **2** (flexão na menor inércia) e **4-9** (locais) substituem gradualmente a participação do modo **3** (distorcional simétrico) – o mecanismo de colapso ilustrado na Fig. 7.44 permite constatar a ocorrência de deformação local da alma na região de meio vão.

As Figs. 7.45(a)-(c) ilustram a evolução da configuração deformada da coluna, expressa através das funções de amplitude ζ_k dos modos **2**, **3**, **4** e **5** nos estados BP, P e AP. Pode-se observar que:

(i) Uma vez que as deformações locais/distorcionais e a cedência do material reduzem bastante a rigidez à flexão da zona de meio vão, forma-se um mecanismo de “charneira plástica” caracterizado por deslocamentos e curvaturas elevados.

(ii) O número de semi-ondas locais aumenta desde o estado BP até ao estado AP. No estado P a contribuição do modo **4** é igualmente relevante nas zonas central ou laterais da coluna, enquanto no estado AP ocorre um aumento do número de semi-ondas a meio vão (com amplitudes elevadas) e uma redução das amplitudes das semi-ondas "laterais" – fenómeno típico de um mecanismo de colapso (escoamento plástico adicional na zona de "charneira plástica" e descargas elásticas em regiões adjacentes).

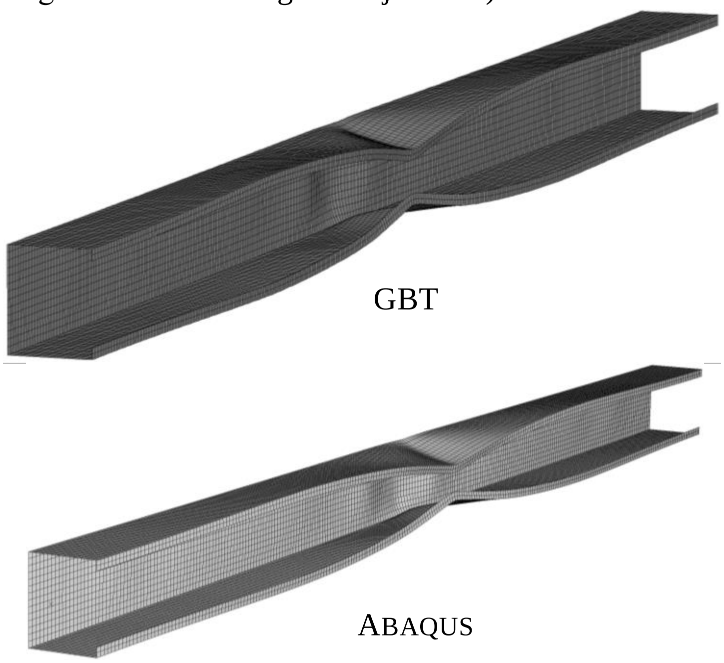


Fig. 7.44. Mecanismo de colapso da coluna (estado de equilíbrio AP).

Por último, as Figs. 7.46(a)-(b) e 7.47(a)-(b) exibem perfis longitudinais de deslocamentos verticais, laterais e axiais do nó do banzo superior indicado na Fig. 7.8(b), nos estados BP, P e AP. Os perfis da GBT com 128 modos foram obtidos para valores idênticos dos parâmetros de carga utilizados para os perfis com 79 modos. Os seguintes comentários são apropriados:

(i) Os perfis da GBT com 128 e 79 modos são praticamente coincidentes, com uma pequena excepção: no estado AP (Fig. 7.47 (b)), os perfis axiais diferem até 2%. Consequentemente, a análise da GBT com 79 modos deve ser vista como "exacta" para este caso particular.

(ii) Os perfis de deslocamentos axiais são aqueles em que a comparação entre a GBT e o Abaqus é melhor. Nos restantes casos, a aproximação da GBT exibe um comportamento mais rígido para os estados P e AP, particularmente na região de meio vão (a mais deformada) – o refinamento da malha de EFV e/ou a inclusão de modos de extensão transversal adicionais são soluções possíveis para este "problema"[33].

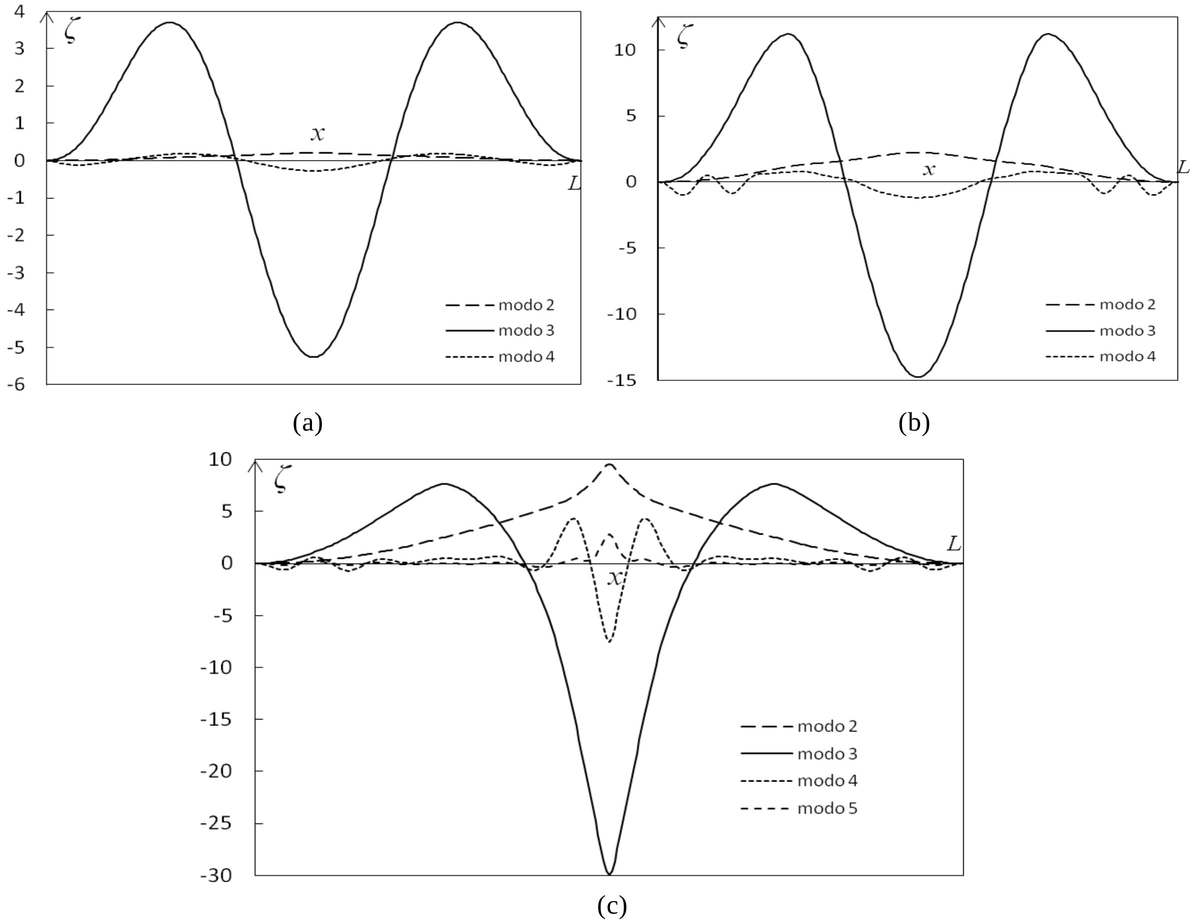
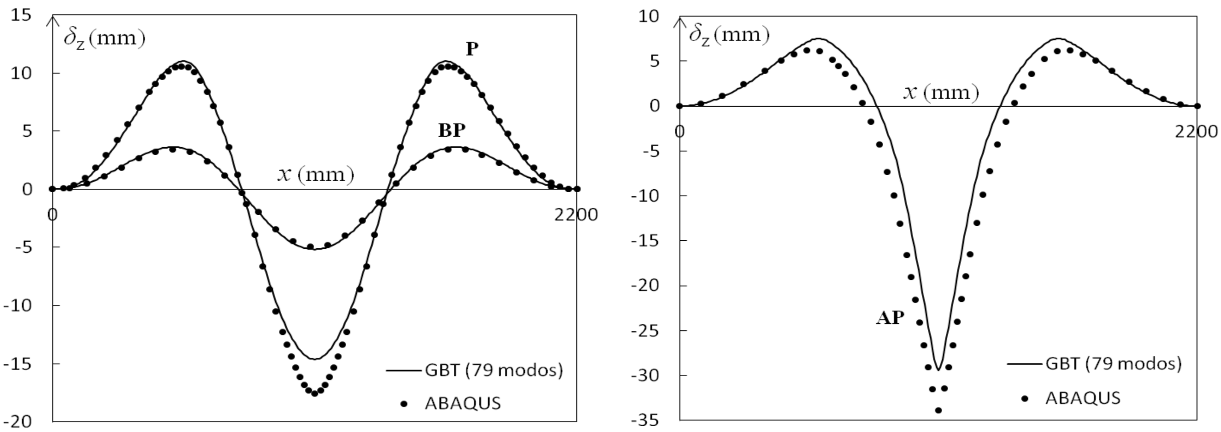


Fig. 7.45. Evolução das funções de amplitude modais (ζ_k) dos modos **2**, **3**, **4** e **5**: estados de equilíbrio (a) BP, (b) P e (c) AP.

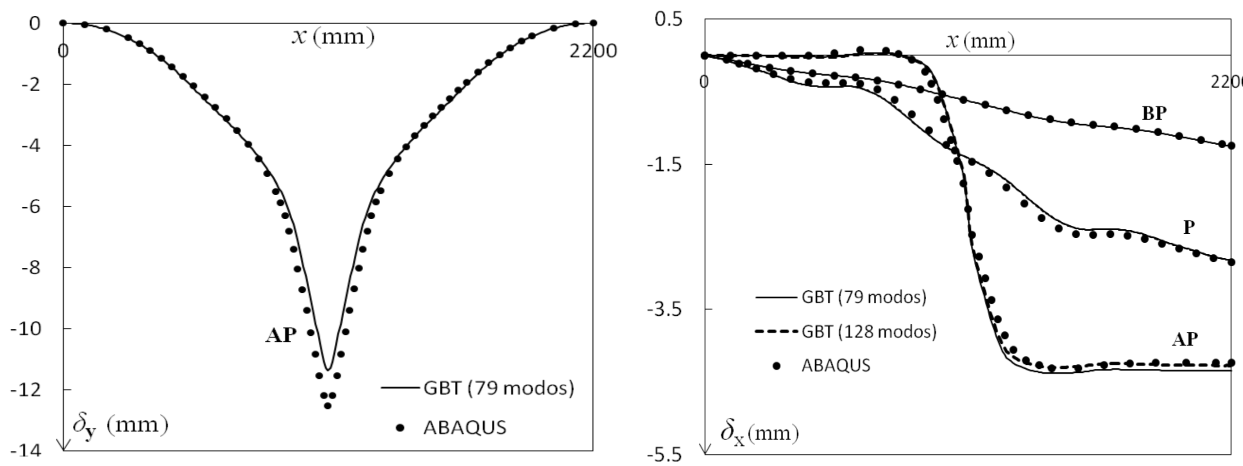
(iii) Os perfis de deslocamentos verticais indicam que, no colapso (entre P e AP), existe uma redução dos deslocamentos positivos e um aumento dos deslocamentos positivos, e respectivas curvaturas. Esta característica é típica da ocorrência de um mecanismo de colapso localizado, estando a redução referida associada à existência de descargas elásticas nas zonas de amplitudes positivas. Note-se que os perfis de deslocamentos axiais da Fig. 7.47(b) são também afectados através do aumento do seu declive na zona de meio vão (perda de rigidez) e redução nas restantes zonas.

33 Embora sem um impacto relevante na precisão dos resultados de deslocamentos da GBT, a consideração de mais modos de extensão transversal e/ou de uma maior discretização dos banzos e reforços, pode melhorar a quailidade dos resultados de tensões da GBT.



(a) (b)

Fig. 7.46. Perfis longitudinais de deslocamentos verticais (δ_z) no nó do banzo superior indicado na Fig. 7.8(b): estados de equilíbrio (a) BP, P e (b) AP.



(a) (b)

Fig. 7.47. Perfis longitudinais de deslocamentos no nó do banzo superior indicado na Fig. 7.8(b): (a) laterais (δ_y) no estado AP, e (b) axiais (δ_x) em BP, P e AP.

Coluna em Cantoneira

As trajectórias de equilíbrio $\lambda(\Delta)$ apresentadas na Fig. 7.48, onde Δ é o encurtamento axial da coluna, correspondem a três tipos de análises[34]: materialmente não lineares (MNA), geometricamente não lineares com imperfeição (GNIA), e geometrica/materialmente não lineares com imperfeição (GMNIA). Relativamente à análise MNA da GBT (1ª ordem), apenas 12 modos (1 global, 1 local, 4 de corte e 6 de extensão transversal – 1523 g.l.) foram necessários para obter uma aproximação precisa da curva $\lambda(\Delta)$. A análise GNIA (elástica de 2ª ordem) da GBT foi efectuada com os 72 modos indicados na Tab. 7.4, correspondendo a 9125 g.l.. Finalmente, duas análises GMNIA (elasto-

34 Adoptaram-se estas siglas, pois quis-se manter a designação Anglo-Saxónica "Geometrically and Materially Non-Linear Imperfect Analysis – GMNIA", utilizada frequentemente na literatura.

plásticas de 2ª ordem) da GBT foram realizadas, (i) uma com os 72 modos mencionados e (ii) outra com os 47 modos mais relevantes desse conjunto (4 globais, 7 locais, 8 de corte e todos os de extensão transversal – 5941 g.l.), incluindo os ilustrados na Fig. 7.18. Relativamente às análises GMNIA, a Fig. 7.49(a) compara as curvas do Abaqus e da GBT, a Fig. 7.49(b) exibe o correspondente diagrama de participação modal da GBT (determinado com 72 modos), e a Fig. 7.50 exibe o mecanismo de colapso da coluna. Da observação destes resultados é possível concluir que:

(i) A comparação entre as curvas da GBT e do Abaqus é muito boa – *e.g.*, a máxima diferença entre as curvas GMNIA é igual a 1.5%. Como esperado, a resposta estrutural obtida através da análise MNA assemelha-se qualitativamente à curva tensão-deformação do material (ver Fig. 7.10(b)).

(ii) Os resultados GNIA evidenciam uma resistência pós-crítica significativa, facto que é algo surpreendente a julgar pela natureza global (flexão-torção) do modo de instabilidade crítico (λ_{cr}=11.14) e da imperfeição geométrica. Esta característica peculiar, recentemente investigada por *Dinis et al.* (*2012*), resulta (ii$_1$) da semelhança mecânica entre as deformações locais e por torção numa cantoneira e (ii$_2$) do facto de o empenamento secundário estar restringido nas secções extremas da barra.

(iii) Após a separação entre as curvas GMNIA e GNIA (a cedência inicia-se para $\lambda_y \approx 6.15$), o espalhamento de plasticidade conduz rapidamente ao estado limite último da coluna (λ_u=6.79).

(iv) Os valores $\{\Delta, \lambda\}$ das análises GMNIA da GBT (72 modos) e do Abaqus para os estados de equilíbrio indicados na Fig. 7.49(a) são: $\{0.92, 3.74\}_{GBT}$ + $\{0.93, 3.79\}_{ABQ}$ (BP), $\{2.14, 6.88\}_{GBT}$ ($\lambda_{u,GBT}$=6.89) + $\{2.11, 6.79\}_{ABQ}$ (P), e $\{14.18, 6.08\}_{GBT}$ + $\{14.00, 6.08\}_{ABQ}$ (AP).

(v) O diagrama de participação modal mostra que o comportamento da coluna é dominado pelas contribuições dos modos **1** (extensão axial – 4.0-19.9%), **3** (flexão na menor inércia – 1.8-17.7%) e **4** (torção – 55.8-81.1%) – a presença de flexão na menor inércia resulta da excentricidade de carga causada pelo deslocamento do centro de rigidez (*Dinis et al. 2012*). Já a participação do modo **2** (flexão na maior inércia), o qual contribui para a configuração do modo de instabilidade crítico (imperfeição geométrica), permanece bastante pequena ao longo de toda a trajectória. Por último, refira-se que grandes deslocamentos de corpo rígido no plano da secção, como os exibidos na zona central do mecanismo de colapso (ver Fig. 7.50), envolvem sempre extensões transversais relevantes, o que justifica as participações dos modos **45** (0.6-7.4%) e **46** (0.6-7.5%) – ver Fig. 7.18.

(vi) Durante o colapso, a participação dominante do modo de torção (**4**) é parcial e gradualmente substituída pelas contribuições crescentes dos modos de flexão na menor inércia (**3**) e de extensão transversal (**45-46**).

(vii) A análise elasto-plástica de pós-encurvadura da GBT (GMNIA) com 47 modos, origina uma trajectória de equilíbrio praticamente coincidente com a do Abaqus até muito perto da carga última. Esta é sobreestimada em 3.9 %, o que faz com que a aproximação da fase descendente da resposta esteja também sobreestimada – a diferença máxima é de 5.7%.

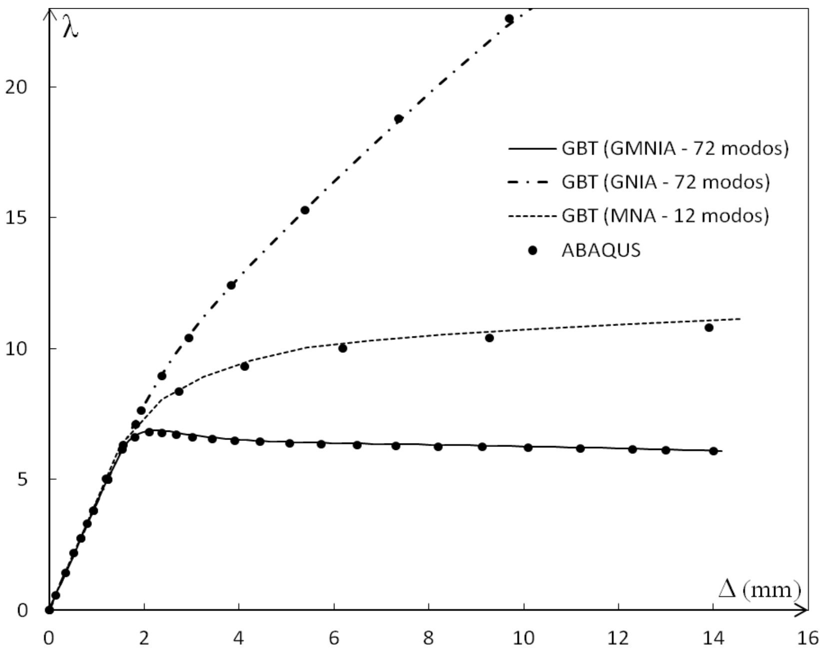


Fig. 7.48. Trajectórias de equilíbrio do Abaqus e da GBT para análises: elásto-plástica de 1ª ordem (MNA), elástica de 2ª ordem (GNIA) e elasto-plástica de 2ª ordem (GMNIA).

As Figs. 7.51(a)-(b) mostram os perfis longitudinais de deslocamentos axiais e laterais (análise GMNIA) relativamente ao nó de extremidade de uma das abas (ver Fig. 7.9(b)), e para os estados BP, P e AP – os perfis P da GBT dizem respeito a λ_{GBT}=6.88. A observação desses resultados permite concluir que:

(i) Todos os perfis da GBT (72 modos) e do Abaqus exibem uma excelente concordância, com excepção dos perfis axiais no estado AP. No entanto, estes últimos são qualitativamente semelhantes e exibem valores muito próximos nas zonas central e de extremidade da barra. Importa ainda mencionar que os perfis da GBT exibem importantes contribuições dos modos de corte **20-21**, os quais estão associados aos modos de flexão na maior/menor inércia **2-3**.

(ii) Os perfis de deslocamentos laterais exibem uma semi-onda interior (zona central da barra) e dois ¼ de onda exteriores, resultantes da imperfeição geométrica imposta. Ao contrário dos estados BP e P, onde a onda interior exibe uma forma bastante sinusoidal, o estado AP é caracterizado por uma semi-onda "achatada" na região central da coluna. Tal deve-se ao desenvolvimento de um mecanismo de colapso por torção nessa região, despoletado pelo aparecimento de "charneiras plásticas" junto às secções $x \approx L/3$ e $x \approx 2L/3$ (ver Fig. 7.50).

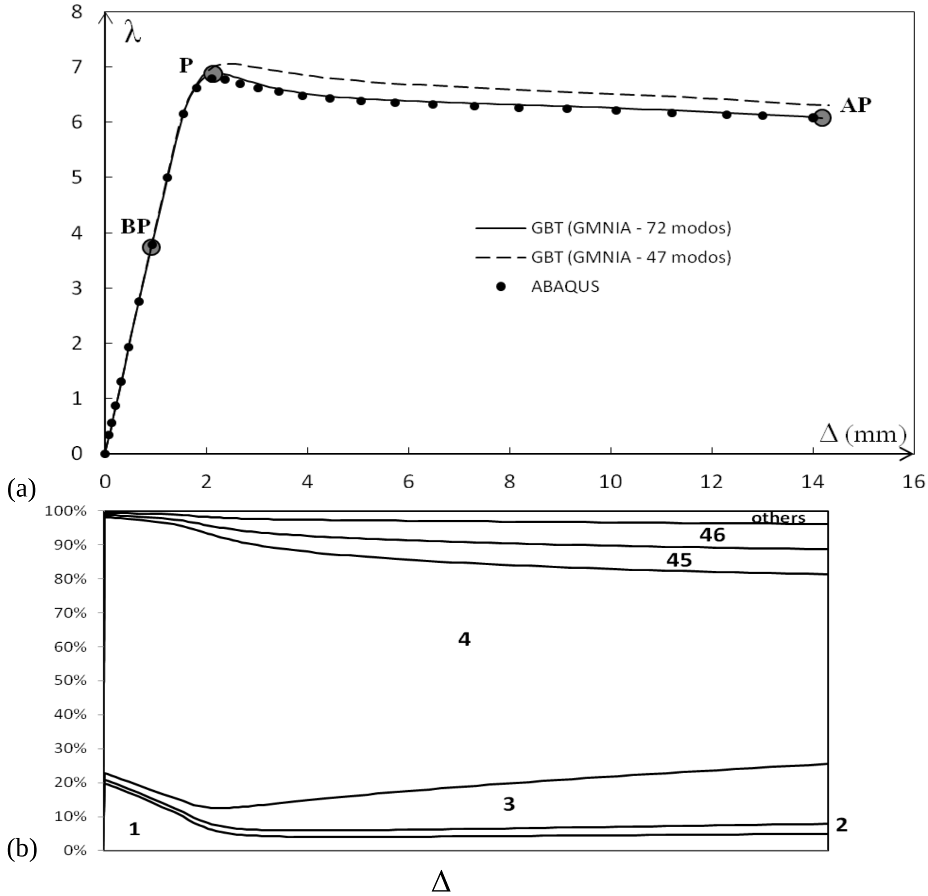


Fig. 7.49. (a) Trajectórias de equilíbrio para análises elasto-plásticas de 2ª ordem (GMNIA), e (b) diagrama de participação modal da GBT (72 modos).

(iii) Apesar das semelhanças entre a trajectória $\lambda(\Delta)$ do Abaqus e a da GBT com 47 modos (ver Fig. 7.49(a)) até se atingir a carga última, a Fig. 7.51(a) mostra que os correspondentes perfis de deslocamentos em P exibem discrepâncias quantitativas consideráveis, as quais se devem à remoção de modos de corte importantes.

Finalmente, a Fig. 7.52 mostra as distribuições de tensões de *von Mises* na superfície média da barra, obtidas pelas análises GMNIA da GBT (72 modos) e do Abaqus na configuração de equilíbrio P. Para além das semelhanças assinaláveis entre os dois *contours*, é também interessante observar que as tensões mais elevadas, superiores à tensão de cedência inicial (220 N/mm^2), ocorrem nas regiões onde se observou uma rigidez axial inferior (ver Fig. 7.51).

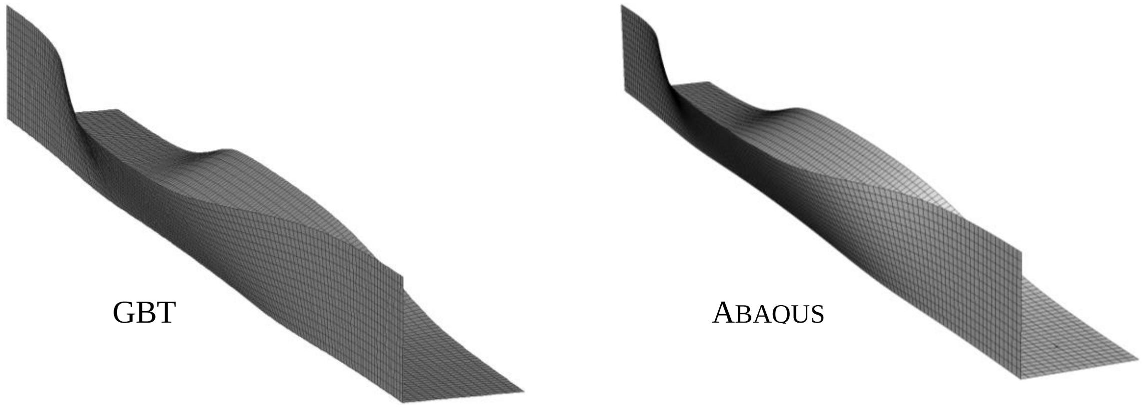


Fig. 7.50. Mecanismos de colapso (estado AP) do Abaqus e da GBT (GMNIA - 72 modos).

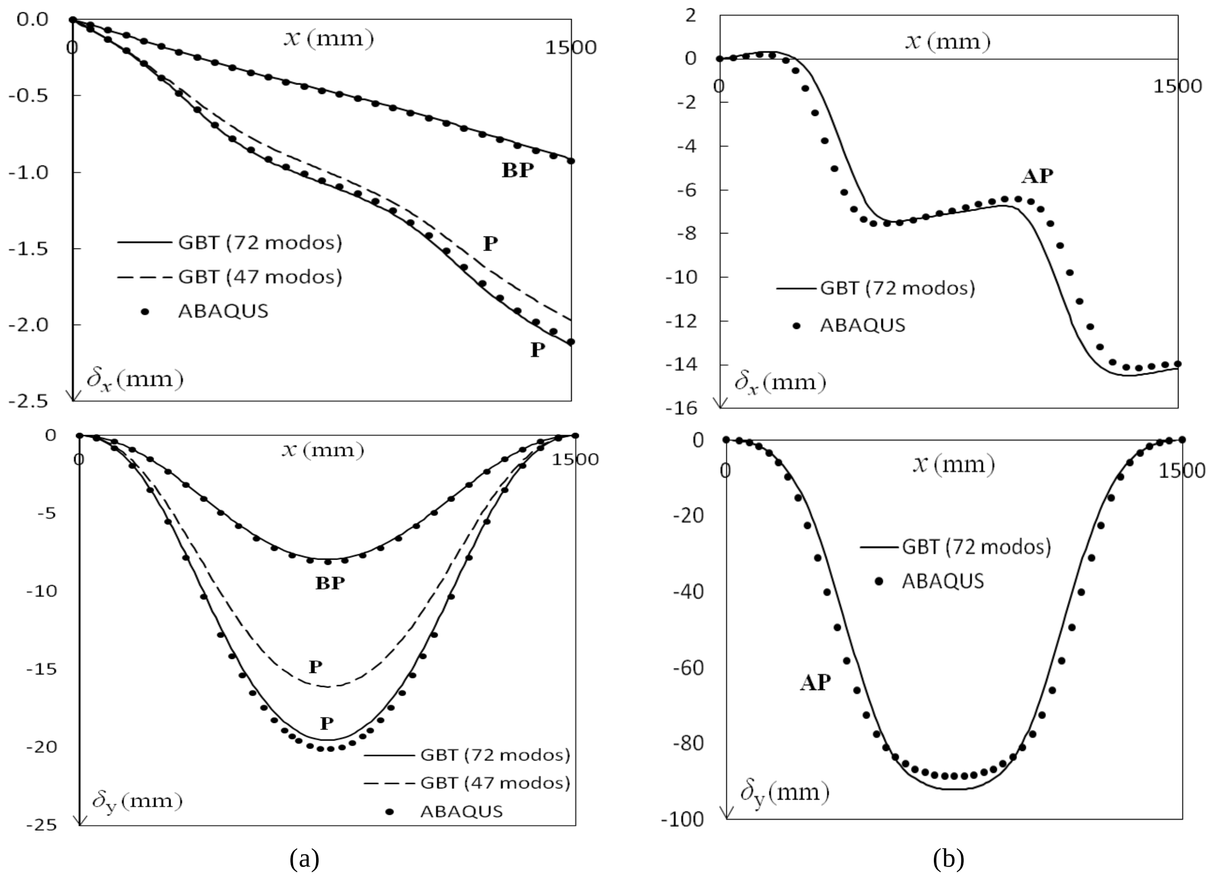


Fig. 7.51. Perfis longitudinais de deslocamentos axiais (δ_x) e horizontais (δ_y) relativos ao nó extremo de uma das abas (análise GMNIA): estados (a) BP, P e (b) AP.

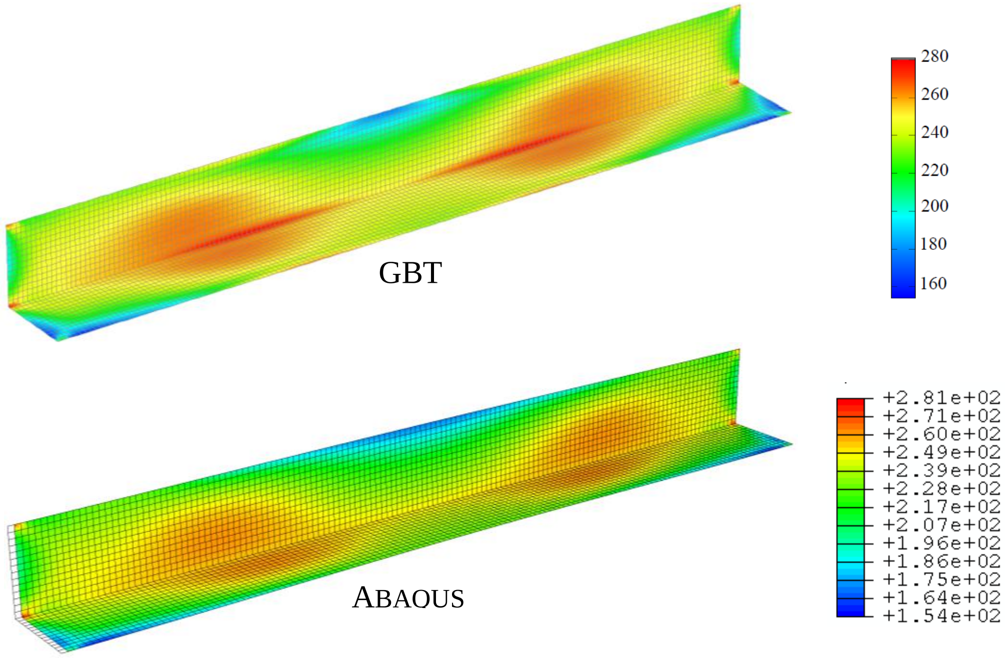


Fig. 7.52. *Contours* de tensões de *von Mises* (N/mm^2) do Abaqus e da GBT (GMNIA - 72 modos) no estado de equilíbrio P.

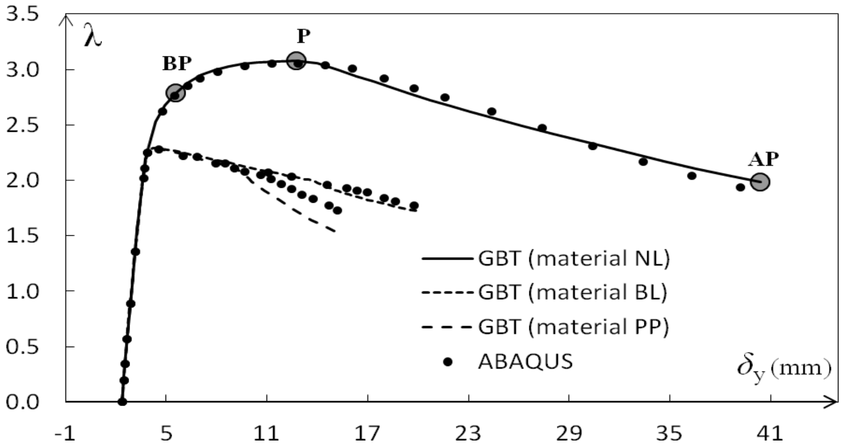
Coluna em IBT (I com banzos tubulares)

Relativamente à coluna IBT (I com banzos tubulares), a Fig. 7.53(a) mostra as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta_y)$ associadas aos modelos materiais PP, BL e NL (δ_y é o deslocamento horizontal a meio altura da alma na secção de meio vão – ver Fig. 7.11(b)). Para as curvas NL, os estados de equilíbrio BP, P e AP indicados correspondem aos pontos $\{5.6, 2.79\}_{GBT}$ + $\{5.5, 2.76\}_{ABQ}$ (BP), $\{12.7, 3.08\}_{GBT}$ + $\{12.9, 3.05\}_{ABQ}$ (P) e $\{40.4, 1.99\}_{GBT}$ + $\{39.2, 1.94\}_{ABQ}$ (AP). A Fig. 7.53(b) corresponde ao diagrama de participação modal da GBT (NL) relativo à evolução (com o aumento de δ_y) da configuração deformada da secção de meio vão. Note-se que:

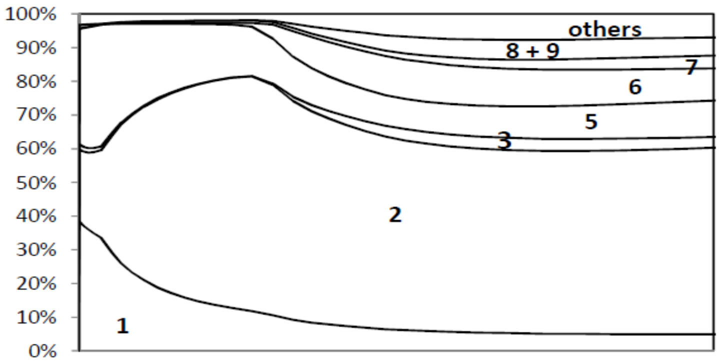
(i) Excepto para o material PP em estados avançados de pós-colapso, as curvas do Abaqus e da GBT estão em muito boa concordância – *e.g.*, as trajectórias NL não diferem mais de 4%.

(ii) As curvas associadas a PP e BL estão virtualmente coincidentes até estágios "avançados" de deformação, incluindo parte da fase descendente (apesar do colapso, i.e estado P, se dar em regime inelástico em ambos os casos). Contudo, no caso da curva associada a NL, o comportamento é bem mais rígido ($\lambda_{u,NL}$=3.05, $\lambda_{u,BL}$=2.28) devido ao elevado endurecimento do aço inox (parcialmente responsável pela elevada não linearidade da resposta na trajectória ascendente).

(iii) A Fig. 7.53(b) mostra que o comportamento da coluna exibe constribuições relevantes dos modos (iii$_1$) globais **1** e **2** (21.2-69.7%), e (iii$_2$) locais **5** (8.9-36.1%), **6** e **8**+**9**. Embora o modo local da alma (**5**) domine a deformação local na trajectória ascendente (relembra-se que este modo contribui para a imperfeição geométrica), ocorrem participações importantes dos modos locais dos banzos (**6**, **8** e **9**) na fase de pós-colapso. Tal facto pode ser confirmado através do mecanismo de colapso (estado AP) ilustrado na Fig. 7.54. Nesta figura, assinale-se o desenvolvimento de uma linha de cedência ("charneira plástica") nas regiões mais comprimidas dos banzos na zona de meio vão.



(a)



(b)

Fig. 7.53. (a) Trajectórias de equilíbrio para três modelos materiais – perfeitamente-plástico (PP), bi-linear (BL) e não linear (NL), e (b) diagrama de participação modal da GBT (NL).

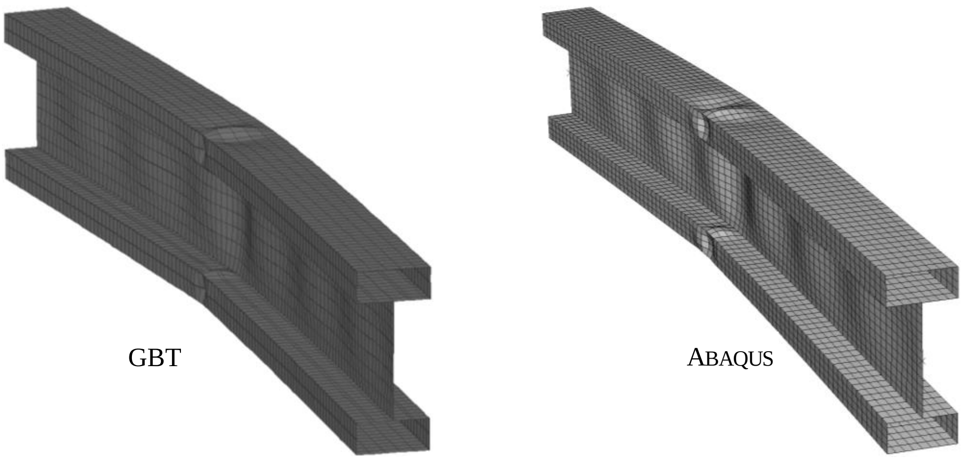
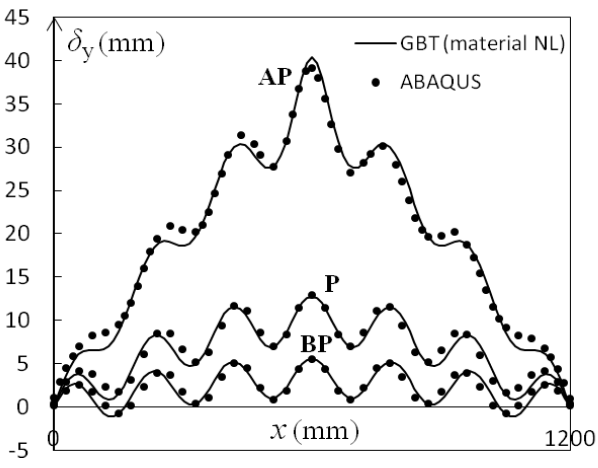
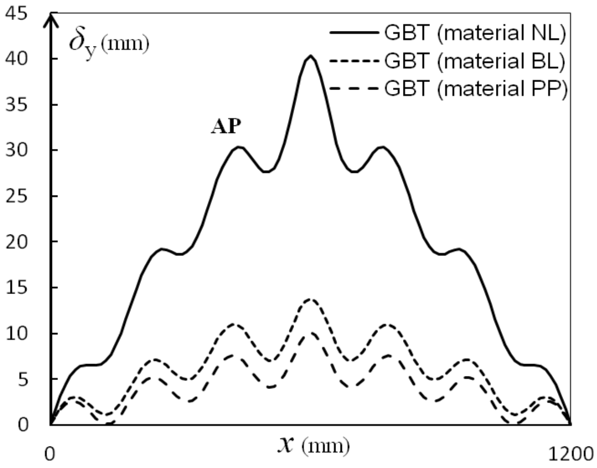


Fig. 7.54. Mecanismo de colapso da coluna (estado de equilíbrio AP).



(a)



(b)

Fig. 7.55. Perfis longitudinais de deslocamentos laterais do ponto médio da alma para (a) os estados BP, P e AP da coluna NL, e (b) λ_{GBT}=1.99 nas respostas NL, BL e PP.

Por último, a Fig. 7.55(a) diz respeito à análise com o material NL e aos estados de equilíbrio BP, P e AP. Esta figura exibe os perfis longitudinais de deslocamento lateral do ponto médio da alma (δ_y(x)). A concordância entre os resultados da GBT e os obtidos através de EFC é bastante boa, sendo as discrepâncias visíveis resultantes de diferenças na aproximação da imperfeição geométrica. De modo a avaliar a influência do tipo de modelo material, a Fig. 7.55(b) compara os perfis δ_y(x) da GBT para λ_{GBT}=1.99 (estado AP). Observa-se que, apesar das diferenças quantitativas esperadas, todos os perfis seguem a mesma tendência (igual número de semi-ondas).

7.4.4 Conclusões

Com o objectivo de validar a formulação fisicamente não linear de 2ª ordem da GBT apresentada neste capítulo, bem como de ilustrar as suas potencialidades na análise do comportamento estrutural de perfis de parede fina, foram apresentados e discutidos sete exemplos ilustrativos neste capítulo. Estes abrangem uma vasta gama de cenários distintos, nomeadamente (i) tipo de secção transversal (I, SHS, C-reforçado, Cantoneira, I com banzos tubulares), (ii) lei constitutiva uniaxial (bi-linear com/sem endurecimento ou não linear – ligas de aço inoxidável), (iii) condições de fronteira (perfis simplesmente apoiados, encastrados-apoiados, bi-encastrados), (iv) tipo de carregamento (transversal concentrado ou axial distribuído na secção), e (v) padrão de deformação – global (flexão, torção), distorcional, local, corte, extensão transversal. A validação da formulação e respectivo código (implementado em MATLAB – *Mathworks 2012*) foi efectuada por comparação de resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, distribuições tri-dimensionais de tensões, perfis de deslocamentos e mecanismos de colapso) com os obtidos através do Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*), recorrendo a modelos de elementos finitos de casca. Para além da validação, a análise de resultados de natureza modal (diagramas de participação, funções de amplitude modais, e trajectórias de equilíbrio baseadas em conjuntos de modos pré-seleccionados) permitiu compreender a mecânica comportamental de cada perfil em qualquer fase da sua resposta (elástica ou elasto-plástica). Esta característica excecional da GBT pode vir a ser de grande utilidade no melhoramento de métodos de dimensionamento existentes e/ou no desenvolvimento/proposição de novos métodos (*e.g.*, teoria das linhas de cedência (*Hiriyur e Schafer 2005*), método da resistência directa (*Schafer 2008*)). Em particular, espera-se que este trabalho e a sua disseminação internacional possa contribuir para que a comunidade científica passe a focar-se, não apenas na decomposição modal dos modos de instabilidade elástica de barras de parede fina, mas também na decomposição modal dos mecanismos de colapso. Apenas desta forma se poderá realmente classificar um mecanismo de colapso de uma barra no que diz respeito à sua natureza modal (global, local, distorcional).

De uma forma geral, é possível afirmar que os resultados da GBT estão em óptima concordância com os obtidos através do Abaqus, o que garante a validação da formulação proposta neste capítulo. Para além disso, importa realçar que graças à natureza modal da GBT, apenas foram necessários 21.1 % (em média – ver Tab. 7.3) dos números de g.l. requeridos pelos modelos do Abaqus para obter aproximações de qualidade semelhante. Embora tenham sido detectadas algumas discrepâncias não desprezáveis entre alguns resultados, o seu impacto na qualidade global dos mesmos é reduzido e foram propostas soluções credíveis para esses “problemas” (aumento do número de modos de deformação de certo tipo, aumento da discretização longitudinal e/ou transversal). Estas conclusões permitem afirmar que a GBT constitui claramente uma alternativa bastante promissora às análises de EFC, ou outros métodos tradicionais, para avaliar o comportamento e capacidade resistente de perfis de parede fina (*e.g.*, análise rigido-plástica de linhas de cedência).

Relativamente à interpretação modal dos resultados, importa não esquecer o papel crucial desempenhado pelos modos de corte e de extensão transversal na resposta em regime elástico ou inelástico, apesar da sua presença nos diagramas de participação modal ser muitas vezes desprezável (consequência da definição de participação modal utilizada).

Por último, importa referir dois aspectos. Em primeiro lugar, foram analisados dois casos (7.4.2.2 e 7.4.2.3) cujos resultados numéricos foram comparados com os experimentais existentes na literatura, tendo-se concluído que a modelação dos efeitos das tensões residuais de membrana e/ou do endurecimento dos cantos (desprezados nesta tese) pode ser crucial na simulação precisa do comportamento e capacidade resistente dos perfis de parede fina. Será de grande utilidade implementar estes aspectos no *software* da GBT até agora desenvolvido, pois potenciará ainda mais a utilização da GBT no âmbito de projectos de investigação e desse *software* no dimensionamento/projecto de estruturas de parede fina. Em segundo lugar, mostrou-se no último exemplo (7.4.2.7) que a utilização de uma liga de aço inoxidável (lei σ-ε não linear), ao invés de aço carbono (lei σ-ε bi-linear) com tensão limite de proporcionalidade semelhante, pode conduzir a um ganho muito significativo na capacidade resistente do perfil – tal facto é consequência do elevado endurecimento que caracteriza o comportamento da maioria dos aços inox.

Capítulo 8

Considerações Finais e Desenvolvimentos Futuros

Neste último capítulo, começa-se por apresentar as contribuições inovadoras da presente tese e as principais conclusões da investigação desenvolvida. Por fim, referem-se vários tópicos/problemas que surgem na sequência natural do trabalho efectuado e que deverão ser objecto de actividade de investigação futura, com o intuito de incrementar o domínio de aplicação e a disseminação da GBT nas universidades, centros de investigação e gabinetes de projecto.

8.1. Considerações finais

No capítulo 2 abordaram-se os conceitos fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) comuns a todas as formulações da GBT apresentadas nesta tese – hipóteses simplificativas, relações cinemáticas, lei constitutiva elástica e análise da secção. Seguidamente, apresentaram-se as formulações da GBT para análises lineares de 1ª ordem e de estabilidade, utilizadas na determinação de imperfeições geométricas iniciais para análises de pós-encurvadura, fornecidas como uma combinação linear dos modos de instabilidade da barra. Relativamente à imposição das condições de fronteira em secções com empenamentos restringidos ($\zeta_{k,x} = 0$) e sujeitas a tensões de corte ($\sigma_{xs} \neq 0$), chamou-se a atenção para a possibilidade da ocorrência de *shear locking* (*Belytschko et al. 2000*) associado à incompatibilidade das condições estática e cinemática mencionadas (pois $\zeta_{k,x}$=0 => σ_{xs}=0). A opção implementada, que conduz a melhores resultados, é aquela que garante a admissibilidade cinemática, ou seja, $\zeta_{k,x}$=0 nas secções impedidas de empenar. Para além disso, verificou-se que (i) a anulação de $\zeta_{k,xx}$ nessas secções, apenas para os modos de corte, e (ii) o refinamento da malha de EF na zona afectada (solução típica), permitem melhorar a qualidade dos resultados. Estas medidas são válidas para análises elásticas ou inelásticas (capítulo 6) de 1ª ordem. Nas análises de 2ª ordem (capítulo 7) foram todas adoptadas as medidas à excepção da condição (i).

Ainda no capítulo 2, estabeleceu-se uma nova definição de factor de participação modal, a qual é calculada na secção da barra que exibe o máximo deslocamento (tri-dimensional ou no plano da secção – *input*) para uma certa configuração de equilíbrio (em regime elástico ou inelástico). A contribuição de cada modo de deformação é quantificada pelo rácio entre (i) o seu deslocamento tri-dimensional máximo nessa secção e (ii) a soma de todos esses deslocamentos modais, os quais não ocorrem necessariamente no mesmo ponto. Esta definição julga-se mais adequada para caracterizar configurações deformadas em regime inelástico, pois os mecanismos de colapso envolvem frequentemente um nível elevado de deformação nas regiões de deslocamentos máximos.

Um dos aspectos inovadores deste trabalho diz respeito à análise da secção, a qual foi baseada na formulação proposta por *Silva* (*2013*) com a única diferença de poderem ser adoptados 4 ou 5 tipos de g.l. nodais em vez de apenas 3. Até ao presente trabalho, a análise da secção da GBT considerava três (d_X, d_Y, d_Z) ou quatro (d_X, d_Y, d_Z, θ_X – rotação de flexão transversal) g.l. nodais. Por isso, e de modo a aproximar com rigor os perfis não lineares de empenamentos resultantes da (i) deformação por corte (*e.g.*, efeito de *shear lag*) e/ou (ii) espalhamento de plasticidade, essas formulações requeriam um nível de discretização significativo, facto que é prejudicial à eficiência computacional dos modelos. Para além disso, a aproximação linear não garante a continuidade dos gradientes de empenamentos entre sub-placas da mesma placa. Por estes motivos, pensou-se ser necessário que os perfis de deslocamentos axiais fossem aproximados por funções não lineares em cada sub-placa. Assim, a análise da secção implementada nestre trabalho permitiu considerar um 5º g.l. nodal que corresponde a uma rotação em torno do eixo local z (ortogonal à linha média da secção), denominada rotação de empenamento (θ_z) – em cada nó, considera-se uma rotação independente por parede (direcção) convergente. Esta inovação permite aproximar cada perfil de empenamentos $u_k(s)$ através de polinómios cúbicos (em vez de funções lineares) em cada sub-placa da secção discretizada. Apresentou-se um exemplo ilustrativo para analisar as vantagens da inclusão deste novo g.l. na análise física e geometricamente linear de um tabuleiro “curto” de uma ponte em caixão, sujeito ao efeito de *shear lag* (*Zhang e Lin 2013*). Para cada caso analisado (tabuleiro simplesmente apoiado ou em consola) efectuaram-se duas análises, uma considerando o novo g.l. nodal e outra (para a mesma discretização da secção) com apenas 4 g.l. por nó. Concluiu-se que a exclusão do g.l. de rotação de empenamento conduz a distribuições de tensões qualitava e quantitativamente insatisfatórias, ao contrário das obtidas quando esse g.l. é considerado (semelhantes aos resultados do Abaqus).

Concluiu-se ainda que, à semelhança do Abaqus, a GBT foi capaz de capturar (i) o *shear lag* "positivo" (tensões axiais máximas dos banzos ocorrem nas zonas de ligação às almas; tensões mínimas dos banzos ocorrem na sua região central) no tabuleiro simplesmente apoiado, bem como (ii) o *shear lag* "positivo" e "negativo" (tensões mínimas ocorrem junto às almas e máximas na região central) que têm lugar no primeiro ¼ (junto ao apoio) e últimos ¾ de consola, respectivamente.

Tendo em vista analisar o comportamento de elementos estruturais em aço, apresentaram-se no capítulo 3 os modelos adoptados para simular o comportamento uniaxial do aço carbono e do aço inoxidável. Importa salientar que há diferenças evidentes entre o comportamento mecânico de ambos os materiais, tais como o facto de os aços inoxidáveis (i) não apresentarem um patamar de cedência bem definido e exibirem uma relação σ-ε significativamente não linear, e (ii) serem caracterizados por um maior endurecimento após a cedência, até níveis elevados de ductilidade (tornando-os mais adequados para desempenho anti-sísmico). Optou-se pela típica lei bi-linear para modelar o aço carbono (com ou sem endurecimento) e pela relação não linear (ε-σ) proposta por *Quach et al.* (*2008*) para simular o aço inoxidável. Esta última, (i) é válida para o comportamento à tracção/compressão até à extensão última de qualquer tipo de aço inoxidável (austenítico, ferrítico ou duplex), e (ii) depende apenas dos 3 parâmetros básicos de *Ramberg-Osgood* (E, $\sigma_{0.2}$, n).

No capítulo 6, apresentou-se uma formulação original da GBT para análises fisicamente não lineares de 1ª ordem de perfis de parede fina (i) com secção transversal arbitrária, (ii) constituídos por materiais elasto-plásticos caracterizados por (ii_1) resposta linear em regime elástico e (ii_2) endurecimento isotrópico arbitrário (nulo, linear ou não linear), e (iii) submetidos a qualquer carregamento exterior (distribuído e/ou pontual) dependente de um único parâmetro. Com o intuito de validar a formulação proposta (e o código implementado em MATLAB – *Mathworks 2012*), bem como de ilustrar as suas potencialidades na análise do comportamento estrutural de perfis de parede fina, foram apresentados e discutidos seis exemplos ilustrativos (mais dois exemplos suplementares em anexo). Estes abrangem uma vasta gama de cenários distintos, nomeadamente (i) o tipo de secção transversal (I, H, Hat, Z, C, C-reforçado, RHS e LSB), (ii) a lei constitutiva uniaxial (bi-linear com ou sem endurecimento), (iii) as condições de fronteira (perfis simplesmente apoiados, encastrados-apoiados, bi-encastrados, ou em consola), (iv) o tipo de carregamento (pontual, faca ou uniformemente distribuído), e (v) os padrões de deformação – global (flexão, torção), distorcional, local, corte, extensão transversal. A validação foi efectuada por comparação de resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, diagramas e distribuições tri-dimensionais de tensões, perfis de deslocamentos e mecanismos de colapso) com os obtidos através do Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*), recorrendo a modelos de elementos finitos de casca. Para além da validação, a análise de resultados de natureza modal (diagramas de participação modal, funções de amplitude modais, trajectórias de equilíbrio baseadas em conjuntos distintos de modos de deformação) permitiiu compreender a mecânica comportamental de cada perfil em qualquer fase da sua resposta (elástica ou elasto-plástica). Esta característica original da GBT pode revelar-se de grande utilidade no desenvolvimento de novos métodos de dimensionamento (*e.g.*, análise rigido-plástica de mecanismos de colapso, método da resistência directa) baseados, não apenas na classificação dos modos de instabilidade, mas sobretudo na classificação dos modos de colapso. Até ao presente trabalho, a GBT é a única ferramenta numérica capaz de efectuar esta classificação com base na decomposição modal de mecanismos de colapso, como se mostrou neste capítulo.

De uma forma geral, é possível afirmar que os resultados da GBT e do Abaqus estão em óptima concordância, o que garante a validação da formulação proposta. Importa ainda realçar que, graças à natureza modal da GBT, apenas foram necessários 8.8 % (em média) dos números de g.l. requeridos pelos modelos do Abaqus para obter aproximações de qualidade semelhante. Embora tenham sido detectadas e justificadas algumas discrepâncias não desprezáveis entre resultados de tensões, o seu impacto na qualidade global dos resultados é reduzido e, para além disso, foram propostas formas de atenuar essas diferenças. Nomeadamente, a aproximação linear dos deslocamentos $v(s)$ em cada sub-placa conduz a diagramas de tensões transversais (σ_{ss}) discontínuos entre sub-placas. Uma forma de atenuar essas singularidades consiste em refinar a malha da secção. Esta solução, apesar de originar um número total de modos de deformação maior, pode não afectar o número de modos utilizado na análise. Apesar de não ter sido implementada computacionalmente, uma solução do problema pode passar pela adopção de perfis $v_k(s)$ que garantam a continuidade de $v_{k,s}(s)$ entre sub-placas (tal como foi proposto nesta tese relativamente aos perfis de empenamentos $u_k(s)$ – ver capítulo 2). Apesar das discontinuidades, foi observado que os *contours* de tensões σ_{ss} são qualitativamente (e por vezes quantitativamente) semelhantes aos obtidos através do Abaqus. Relativamente às tensões de corte (σ_{xs}), foram também observadas discrepâncias relacionadas com discontinuidades entre sub-placas. Estando esta componente de tensão dependente de v_k e $u_{k,s}$ em regime elástico, a adopção de perfis u_k não lineares em cada sub-placa e/ou o refinamento da malha da secção são duas soluções possíveis para o problema – não esquecer que em plasticidade existe interacção entre componentes de tensão, pelo que a ocorrência de singularidades numa particular componente pode "contaminar" as restantes.

Relativamente à interpretação modal dos resultados, importa salientar três aspectos:

(i) Nos dois exemplos em que se avaliou a influência do endurecimento (linear) no comportamento dos elementos estruturais, verificou-se que os diagramas de participação modal não variam muito com o valor do módulo tangente (ou declive de endurecimento) considerado.

(ii) Importa evidenciar o papel crucial que os modos de corte e de extensão transversal podem ter na resposta em regime elástico ou inelástico, apesar da sua presença nos diagramas supracitados ser muitas vezes desprezável (consequência da definição de participação modal adoptada).

(iii) Através da análise das trajectórias de equilíbrio e dos respectivos diagramas de participação modal, concluiu-se que as maiores contribuições dos modos locais (globais) estão geralmente associadas a reservas elasto-plásticas de resistência (rácio entre a carga "plástica" e a de cedência) mais elevadas (baixas). Contrariamente, maiores contribuições dos modos globais correspondem quase sempre a reservas elasto-plásticas de resistência mais baixas. Estes factos têm paralelo na rigidez de pós-encurvadura de barras em regime elástico: os modos de instabilidade locais exibem uma rigidez pós-crítica muito superior àquela que caracteriza os modos globais, a qual é quase sempre desprezável. Quando se interpretam resultados de análises fisica e geometricamente não lineares, é prática comum atribuir a reserva inelástica de resistência aos efeitos de 2ª ordem (em regime elástico), negligenciando o facto de os efeitos fisicamente não lineares desempenharem um papel semelhante.

No capítulo 7, apresentou-se uma formulação da GBT para análises fisicamente não lineares de 2ª ordem (ou de pós-encurvadura) de perfis de parede fina (i) com secção arbitrária, (ii) imperfeitos (podem exibir imperfeições geométricas e/ou tensões residuais), (iii) constituídos por um material elasto-plástico com endurecimento isotrópico arbitrário, e (iv) submetidos a qualquer carregamento exterior (distribuído e/ou pontual) dependente de um único parâmetro. De seguida, (i) apresentou-se uma revisão bibliográfica sobre a modelação numérica de imperfeições geométricas e (ii) abordou-se resumidamente a origem, influência e modelação das tensões residuais em perfis de parede fina. Neste trabalho, as imperfeições geométricas foram modeladas pela combinação linear de modos de instabilidade com amplitudes retiradas na literatura. Apesar de não ter sido implementada a hipótese de modelar explicitamente tensões residuais de membrana, o efeito das tensões de flexão pode ser implicitamente considerado se a lei constitutiva uniaxial resultar do ensaio de provetes retirados do perfil após a sua produção.

Com o intuito de validar a formulação apresentada e respectivo código (implementado em MATLAB

- *Mathworks 2012*), bem como de ilustrar as suas potencialidades, foram apresentados e discutidos sete exemplos numéricos. Estes abrangem uma vasta gama de cenários distintos, nomeadamente (i) o tipo de secção transversal (I, SHS, C-reforçado, Cantoneira, I com banzos tubulares), (ii) a lei constitutiva uniaxial (bi-linear com/sem endurecimento ou não linear – ligas de aço inoxidável), (iii) as condições de fronteira (perfis simplesmente apoiados, encastrados-apoiados, bi-encastrados), (iv) o tipo de carregamento (transversal concentrado ou axial distribuído na secção), e (v) os padrões de deformação – global (flexão, torção), distorcional, local, corte, extensão transversal. A validação foi efectuada por comparação de resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, distribuições tri-dimensionais de tensões, perfis de deslocamentos e mecanismos de colapso) com os obtidos através do Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*), recorrendo a modelos de elementos finitos de casca (EFC). Em dois dos exemplos numéricos, os resultados da GBT foram também comparados com resultados de ensaios experimentais existentes na literatura. De uma forma geral, é possível afirmar que os resultados da GBT estão em óptima concordância com os obtidos através do Abaqus, o que garante a validação da formulação proposta. Para além disso, importa realçar que graças à natureza modal da GBT, apenas foram necessários 21.1 % (em média) dos números de g.l. requeridos pelo Abaqus para obter aproximações de qualidade semelhante. Embora algumas discrepâncias não desprezáveis tenham sido detectadas entre alguns resultados, o seu impacto na qualidade global dos resultados é reduzido e foram propostas soluções credíveis para esses "problemas" (aumento do número de modos de deformação de certo tipo, aumento da discretização longitudinal e/ou transversal). Estas conclusões permitem afirmar que a GBT constitui uma alternativa bastante promissora às análises de EFC, ou outros métodos tradicionais, para avaliar o comportamento e capacidade resistente de perfis de parede fina. Por outro lado, e embora a sua presença nos diagramas de participação modal seja muitas vezes desprezável (consequência da definição de participação modal utilizada), os modos de corte e de extensão transversal têm uma importância fundamental no comportamento do elemento estrutural em regime elástico ou inelástico. Importa ainda referir dois aspectos:

(i) Foram analisados dois casos cujos resultados numéricos foram comparados com os experimentais existentes na literatura, tendo-se concluído que a modelação das tensões residuais de membrana e/ou do endurecimento dos cantos (desprezados nesta tese) pode ser crucial na simulação precisa do comportamento e capacidade resistente dos perfis de parede fina. Será de grande utilidade implementar estes aspectos no *software* da GBT até agora desenvolvido, pois potenciará ainda mais a utilização futura da GBT.

(ii) Mostrou-se, no último exemplo ilustrativo, que a utilização de um aço inoxidável (lei σ-ε não linear) ao invés de um aço carbono (lei σ-ε bi-linear) com tensão limite de proporcionalidade semelhante, pode conduzir a um ganho muito significativo na capacidade resistente do perfil. Tal facto é consequência do elevado endurecimento que caracteriza o comportamento da maioria dos aços inox.

Bastante importante no actual estado da arte no domínio do dimensionamento de elementos estruturais em aço enformado a frio, a classificação de determinado modo de colapso baseia-se sobretudo na classificação do modo de instabilidade elástica que lhe está associado. Tendo em conta que para além de efeitos geometricamente não lineares, o colapso envolve também efeitos fisicamente não lineares, a classificação modal (global, local, distorcional) baseada apenas no modo de instabilidade não parece totalmente correcta/rigorosa. A GBT, através de resultados como os diagramas de participação modal, funções de amplitude modais, e trajectórias de equilíbrio baseadas em conjuntos distintos de modos de deformação, permite classificar directamente o modo de colapso atendendo à influência do espalhamento de plasticidade. Esta potencialidade da GBT poderá ter grande conveniência no melhoramento de métodos de dimensionamento existentes, como por exemplo o método da resistência directa, actualmente implementado nos regulamentos norte-americano (*AISI 2007*) e australiano/neo-zelandês (*AS/NZS 2001*) de estruturas de aço enformadas a frio.

8.2. Desenvolvimentos futuros

Apesar do actual estado da GBT estar bastante desenvolvido (ver sub-secção 1.1.3 do capítulo 1), ainda existem diversos tópicos por explorar, os quais surgem naturalmente no seguimento do trabalho realizado nesta tese. Referem-se, em seguida, os desenvolvimentos futuros de maior relevância para o autor:

(i) Implementação computacional da modelação do endurecimento dos cantos em secções de aço enformadas a frio. Tal como foi referido na sub-secção 1.1.1 do capítulo 1, as zonas dos cantos destas secções “endurecem” por deformação plástica durante o processo de fabrico, resultando num aumento da tensão de cedência nessas zonas cuja influência na resistência última do elemento é, em muitos casos, relevante. Existem várias publicações (*e.g.*, *Gardner e Nethercot 2004a*, *Ashraf et al. 2005, 2006b*, *Cruise e Gardner 2008b*, *Rossi et al. 2009*) onde são definidas as regiões “endurecidas” da secção e propostas expressões para o cálculo das tensões de cedência a considerar nessas zonas. Com esta informação, a implementação desse efeito na

GBT será trivial, bastando discretizar as zonas dos cantos com pequenas sub-placas às quais serão atribuídas as propriedades materiais (endurecidas) dessas regiões. Num outro contexto, esta nova implementação também permitirá modelar elementos estruturais compostos por chapas soldadas de materiais distintos (*e.g.*, vigas de aço de "alma cheia" em tabuleiros de pontes, com banzos e alma constituídos por aços de diferentes classes).

(ii) Tal como foi referido no capítulo 7 (sub-secção 7.3.2), a influência das tensões residuais de flexão está implícita e aproximadamente contabilizada na lei uniaxial σ-ε se esta for obtida com base em ensaios de provetes cortados do perfil após o seu fabrico. No entanto, a distribuição de tensões residuais de membrana, cuja influência no estado limite último de perfis laminados a quente ou soldados pode ser particularmente importante, deve ser introduzida explicitamente no modelo numérico de modo a garantir uma análise estrutural precisa. A modelação deste tipo de tensões ainda não realizada no âmbito da GBT, e será um aspecto a implementar e validar muito brevemente. Para tal, serão utilizadas distribuições analíticas de tensões residuais de membrana existentes na literatura em função da geometria da secção, processo de fabrico e material (*e.g., Key e Hancock 1993, Young e Ellobody 2005*, Gardner *e Cruise 2009, Anapayan et al. 2011, Wang et al. 2012a, b*).

(iii) Proposição de novas definições de "participação modal" baseadas em valores modais de deformação / critérios energéticos. Esta tarefa reveste-se de particular relevância pois permitirá ultrapassar a dificuldade actual em avaliar, com base em diagramas de participação baseados em deslocamentos, a importância dos modos de corte e de extensão transversal numa dada análise.

(iv) Desenvolvimento de um novo g.l. nodal que permita que o campo de deslocamentos transversais de membrana (v) seja aproximado por polinómios de *Hermite* em cada sub-placa, em substituição das funções lineares actualmente utilizadas. A execução desta tarefa permitirá ultrapassar o problema da discontinuidade nos valores das tensões σ_{ss} entre sub-placas – discutido na análise de resultados dos capítulos 6 e 7. Note-se que esta medida não corresponderá necessariamente a um aumento do número de g.l. da análise, pois eventualmente permitirá reduzir o número mínimo de modos de extensão transversal que garanta a precisão requerida.

(v) Desenvolvimento de um *software* eficiente, versátil e *user-friendly*, que integre todas as formulações da GBT propostas e validadas neste trabalho, dando continuidade ao projecto (programa GBTUL) iniciado por *Bebiano et al.* (*2008, 2013*) – a versão actual deste programa de cálculo permite realizar análises lineares de estabilidade e de vibração. De modo a aumentar a eficiência/capacidade do *software* sugere-se que seja efectuado um extenso estudo paramétrico que permita definir/optimizar *a priori* os seguintes factores: (i) discretização da secção, (ii) malha de EFV, e (iii) número mínimo de modos de deformação que garanta resultados precisos (*e.g.*, diferença máxima para os resultados do Abaqus deve ser inferior a 3%). Obviamente que os critérios a estabelecer dependerão de um conjunto (mínimo) de parâmetros, nomeadamente (i) o tipo de análise (*e.g.*, elástica ou inelástica, 1ª ou 2ª ordem), (ii) o carregamento (axial e/ou transversal, localizado e/ou distribuído, no vão ou nas extremidades), (iii) as condições de fronteira, e (iv) a geometria da secção. Este estudo permitirá definir um conjunto de directivas (*guidelines*) tendo em vista uma análise optimizada da GBT.

(vi) Após a realização dos desenvolvimentos anteriores, será bastante interessante conjugar este trabalho com a investigação que tem vindo a ser desenvolvida por *Basaglia* (*2010*) no âmbito da análise de estruturas constituídas por vários elementos (pórticos, estruturas tri-dimensionais).

ANEXOS

ANEXO 2.A

O Tensor das Deformações de Green – Saint-Venant

Este tensor é composto por seis componentes independentes, três de extensão e três de distorção, cuja derivação é apresentada de seguida.

Extensões (ε_{ii})

Considere-se um elemento linear infinitesimal (AB na Fig. 2.A.1), de comprimento $\|dX\|$, do volume de um corpo indeformado. Após deformação, os deslocamentos sofridos pelos pontos A e B são definidos num referencial ortonormado *1-2-3* por (u_{A1}, u_{A2}, u_{A3}) e (u_{B1}, u_{B2}, u_{B3}). Sendo $X_A = (X_{A1}, X_{A2}, X_{A3})$ e $x_B = (x_{B1}, x_{B2}, x_{B3})$ os vectores das posições inicial e final dos pontos A e B, respectivamente, o desenvolvimento em série de *Taylor* de x_B em torno de X_A é dado por (i, j = 1, 2, 3)

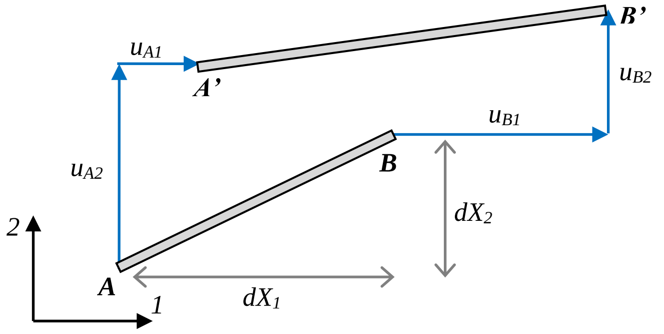


Fig. 2.A.1. Posições indeformada (AB) e deformada ($A'B'$) de uma fibra genérica no plano 1-2.

$$x_{Bi} = x_i\left(X_A + dX\right) = x_{Ai} + \left.\frac{dx_i}{dX_j}\right|_{(X=X_A)} dX_j \qquad , \quad (2.A.1)$$

sendo j um índice mudo. Introduzindo na série a relação cinemática $x=X+u$, obtém-se

$$du_i = dx_i - dX_i = \left.\frac{du_i}{dX_j}\right|_{(X=X_A)} dX_j \qquad . \quad (2.A.2)$$

As extensões do tensor de *Green – Saint-Venant* dizem respeito às direcções do referencial ortonormado adoptado (ver Fig. 2.A.1), vindo para o caso particular da direcção *1*

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11} = \frac{\|dx\|}{dX_1} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_{11}+1)^2 = \varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{11} + 1 = \left(\frac{\|dx\|}{dX_1}\right)^2 \\ dX = \left(dX_1, 0, 0\right), \quad \|dx\| = \sqrt{((u_{1,1}+1)dX_1)^2 + (u_{2,1}dX_1)^2 + (u_{3,1}dX_1)^2}\end{gathered} \qquad , \quad (2.A.3)$$

onde (i) as componentes de $dx = (dx_1, dx_2, dx_3)$ são definidas com base em (2.A.2), e (ii) a eliminação de ε_{11}^2, resultante da hipótese das pequenas deformações (ε_{ij}<<1) – válida para a maioria dos problemas em Engenharia Civil, origina

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\|dx\|}{dX_1}\right)^2 - 1\right] = u_{1,1} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{1,1}\right)^2 + \left(u_{2,1}\right)^2 + \left(u_{3,1}\right)^2\right] \qquad , \quad (2.A.4)$$

de onde se conclui que para qualquer uma das três direcções $i=1,2,3$ (índice livre), a relação extensão-deslocamentos é dada por

$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i} + \frac{1}{2}\left[\left(u_{1,i}\right)^2 + \left(u_{2,i}\right)^2 + \left(u_{3,i}\right)^2\right] \qquad . \quad (2.A.5)$$

Distorções (γ_{ij})

Considerem-se duas fibras infinitesimais, perpendiculares entre si, e pertencentes a um corpo indeformado. Após distorção ($\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$), as fibras passam a formar um ângulo de $\pi/2 - \gamma_{ij}$ rad entre elas. Para o caso particular de duas fibras no plano *1-2*, como se ilustra na Fig. 2.A.2, a definição de γ_{12} é conseguida com base na relação trignométrica

$$\begin{gathered}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin\left(\gamma_{12}\right) = \frac{dx_{AB} \cdot dx_{AC}}{\|dx_{AB}\|\|dx_{AC}\|} \\ dx_{AB} = \left(1+u_{1,1},\, u_{2,1},\, u_{3,1}\right)dX_1, \qquad dx_{AC} = \left(u_{1,2},\, 1+u_{2,2},\, u_{3,2}\right)dX_2\end{gathered} \qquad , \quad (2.A.6)$$

a qual pode ainda ser simplificada com base nas definição de (1+ε_{11}) e (1+ε_{22}) em (2.A.3), vindo

$$\sin\left(\gamma_{12}\right)=\frac{\left(u_{1,2}+u_{1,1}u_{1,2}+u_{2,1}+u_{2,1}u_{2,2}+u_{3,1}u_{3,2}\right)}{\left(1+\varepsilon_{11}\right)\left(1+\varepsilon_{22}\right)} \quad . \quad (2.A.7)$$

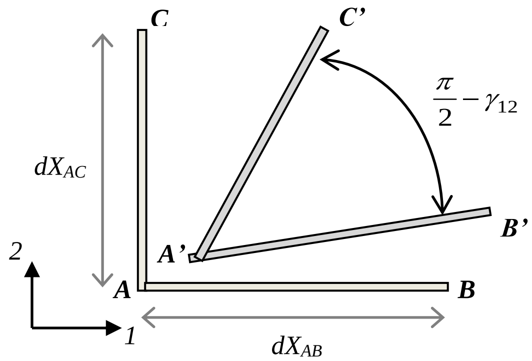


Fig. 2.A.2. Distorção no plano *1-2* (γ_{12}) de duas fibras inicialmente perpendiculares entre si.

Finalmente, e atendendo a que $\sin(\gamma_{ij}) \approx \gamma_{ij}$ e $(1+\varepsilon_{ij}) \approx 1$ na hipótese das pequenas deformações, as distorções do tensor de *Green – Saint-Venant* leêm-se (i, j, k = 1, 2, 3)

$$\gamma_{ij}=2\varepsilon_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j} \quad , \quad (2.A.8)$$

onde k é um índice mudo.

ANEXO 2.B

Desacoplamento Modal da GBT

Fundamentos de álgebra linear

Considere-se um problema de valores e vectores próprios (PVVP) do tipo $(\boldsymbol{B} - \lambda_k \boldsymbol{C})\, y_k = 0$, em que $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são matrizes simétricas. Consegue-se garantir que dois vectores próprios quaisquer do problema, y_i e y_j, são ortogonais relativamente a $\boldsymbol{B}$ e a $\boldsymbol{C}$ se estiverem associados a valores próprios distintos ($\lambda_i \neq \lambda_j$). De facto, a manipulação algébrica da equação em causa permite obter (*i* e *j* são índices livres)

$$(\lambda_i - \lambda_j)\, y_i^T\, \boldsymbol{B}\, y_j = 0 \qquad (\lambda_i - \lambda_j)\, y_i^T\, \boldsymbol{C}\, y_j = 0 \qquad , \quad (2.B.1)$$

de onde se conclui que apenas quando $\lambda_i \neq \lambda_j$ se garante que

$$y_i^T\, \boldsymbol{B}\, y_j = 0 \qquad y_i^T\, \boldsymbol{C}\, y_j = 0 \qquad , \quad (2.B.2)$$

ou seja, que os respectivos vectores próprios são ortogonais relativamente a $\boldsymbol{B}$ e a $\boldsymbol{C}$. Deste modo, se os valores próprios do problema forem todos distintos, os vectores próprios correspondentes definirão uma nova base na qual $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são matrizes diagonais.

Fundamentos relativos à obtenção dos modos convencionais da GBT

Etapa I – Determinação do sub-espaço dos modos de deformação sem distorções ($u_{,s} + v_{,x}$) nem extensões transversais ($v_{,s}$) de membrana. Como (i) B^1 depende de $v_{k,s}$, e (ii) D^3 de $u_{k,s} + v_k$ (parcela de distorção de membrana independente de x – ver Eq. (2.12)), o PVVP

$$\left[\left(\boldsymbol{B^1} + \boldsymbol{D^3}\right) - \lambda_k \boldsymbol{I}\right] y_k = 0 \quad , \quad (2.B.3)$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade, conduz a um conjunto de vectores próprios independentes ($\boldsymbol{Y_I}$) que verificam as condições supracitadas – são todos aqueles associados a λ_k=0, pois pretende-se que satisfaçam as condições

$$\boldsymbol{B^1} y_k = 0 \qquad \boldsymbol{D^3} y_k = 0 \quad . \quad (2.B.4)$$

Note-se que a solução de (2.B.3) também podia ser obtida através da resolução sequencial de

$$\left(\boldsymbol{B^1} - \lambda_k \boldsymbol{I}\right) y_k = 0 \qquad \left(\boldsymbol{D}_I^3 - \lambda_k \boldsymbol{I}\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.B.5)$$

onde $\boldsymbol{D}_I^3$ corresponde à transformação de $\boldsymbol{D}^3$ para o sub-espaço dos vectores próprios que verificam $\boldsymbol{B^1} y_k = 0$ no problema anterior, os quais estão associados a modos sem extensão transversal. Daqui em diante, todas as matrizes envolvidas nos vários PVVP estarão escritas num sub-espaço dado por combinação linear dos vectores de $\boldsymbol{Y_I}$, de modo a garantir a ausência de distorções e extensões transversais características dos modos convencionais. Importa ainda referir a importância da matriz $\boldsymbol{C}$ (originalmente adoptada por *Schardt*) nos PVVP seguintes, a qual é fundamental para (i) evitar valores próprios pertencentes ao espaço dos números complexos, e também (ii) obter modos de deformação com um significado físico bem definido.

<u>Etapa II</u> – Transformação das matrizes B^2 e C (escritas no espaço dos modos elementares) para o sub-espaço $\boldsymbol{Y_I}$, obtendo-se as matrizes

$$\boldsymbol{B_{II}^2} = \boldsymbol{Y_I^T B^2 Y_I} \qquad \boldsymbol{C_{II}} = \boldsymbol{Y_I^T C Y_I} \quad , \quad (2.B.6)$$

as quais integram o problema

$$\left(\boldsymbol{B_{II}^2} - \lambda_k \boldsymbol{C_{II}}\right) y_k = 0 \quad , \quad (2.B.7)$$

onde:

(i) A λ_k=0 corresponde um sub-espaço vectorial ($\boldsymbol{Y_{II}^{glob}}$) associado à combinação de modos de deformação globais (o modo de torção só está incluído, ou seja, é convencional, no caso de secções abertas) – de facto, quando λ_k=0 tem-se $\boldsymbol{B}_{II}^2\ y_k = 0$, o que significa que os vectores próprios (y_k) correspondentes estão associados a modos de deformação caracterizados por $w_{k,ss}$=0 (ver definição de $\boldsymbol{B^2}$ em (2.14)).

(ii) A distintos valores de λ_k>0 corresponde um sub-espaço vectorial ($\boldsymbol{Y_{II}^{loc}}$) associado aos modos locais, os quais se caracterizam pela flexão transversal das paredes da secção ($w_{k,ss}$≠0) e ficam perfeitamente definidos por $\boldsymbol{Y_{loc}^{conv}} = \boldsymbol{Y_I}\,\boldsymbol{Y_{II}^{loc}}$. No final desta fase, os modos globais ainda se encontram acoplados.

Etapa III – No que respeita ao desacoplamento dos modos globais associados ao sub-espaço $\boldsymbol{Y}_{II}^{glob}$ (vectores próprios correspondentes a λ_k=0 em (2.B.7)), começe-se por determinar o modo de torção para secções abertas (em secções celulares este modo não é convencional). Este modo é dado por $\boldsymbol{Y}_{tor}^{conv} = \boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{tor}$ **,** onde $\boldsymbol{Y}_{III}^{tor}$ é o vector correspondente ao único valor próprio não nulo de

$$\left(\boldsymbol{D}_{III}^{1} - \lambda_k \boldsymbol{C}_{III}\right) y_k = 0$$
$$\boldsymbol{D}_{III}^{1} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right)^T \boldsymbol{D}^1 \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right) \qquad \boldsymbol{C}_{III} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right)^T \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right) \quad , \quad (2.B.8)$$

onde a escolha de $\boldsymbol{D}^1$ se deve ao facto dessa matriz ser definida com base na rotação ($w_{k,s}$) de cada parede (ver (2.14)) – dos 4 modos globais, apenas o de torção exibe $w_{k,s}\neq 0$ (rotação uniforme da secção no seu plano). Relativamente aos modos de extensão axial e flexão, deve-se primeiro transformar as matrizes $\boldsymbol{X}_{mod}^{1}$ e $\boldsymbol{C}$ em função do tipo de secção, vindo para (i) secções abertas

$$\boldsymbol{X}_{mod}^{1} = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)} \int_b e\left(v_i v_k + w_i w_k\right) ds \qquad \boldsymbol{X}_{mod,III}^{1} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\right)^T \boldsymbol{X}_{mod}^{1} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\right)$$
$$\boldsymbol{C}_{III} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\right)^T \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\right) \quad , \quad (2.B.9)$$

onde $\boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}$ contém os vectores próprios associados a λ_k=0 em (2.B.8), e (ii) secções celulares

$$\boldsymbol{X}_{mod,III}^{1} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right)^T \boldsymbol{X}_{mod}^{1} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right) \qquad \boldsymbol{C}_{III} = \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right)^T \boldsymbol{C} \left(\boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\right) \quad . \quad (2.B.10)$$

A utilização de $\boldsymbol{X}_{mod}^{1}$ deve-se ao facto de estar relacionada com o quadrado do deslocamento de qualquer ponto no plano da secção (v^2+w^2) – cada um dos modos em causa (extensão axial e flexão) apresenta uma distribuição uniforme desses deslocamentos. Efectuada a transformação, da resolução de

$$(\boldsymbol{X}_{mod,III}^{1} - \lambda_k \boldsymbol{C}_{III})\, y_k = 0 \quad , \quad (2.B.11)$$

conclui-se que:

(i) A λ_1 = 0 corresponde um vector próprio ($\boldsymbol{Y}_{III}^{axial}$) associado a deslocamentos nulos no plano da secção (pois $\boldsymbol{X}_{mod,III}^{1}\, y_k = 0$) e empenamento uniforme, permitindo obter o modo axial através de

$$\boldsymbol{Y}_{axial}^{conv} = \boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial} \boldsymbol{Y}_{III}^{axial} \quad ,(2.B.12)$$

no caso de secções abertas, ou de

$$\boldsymbol{Y}_{axial}^{conv} = \boldsymbol{Y}_I \boldsymbol{Y}_{II}^{glob} \boldsymbol{Y}_{III}^{axial} \quad , \quad (2.B.13)$$

no caso de secções celulares.

(ii) A $\lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ correspondem 2 vectores próprios ($\boldsymbol{Y}_{III}^{flex}$) associados a deslocamentos uniformes no plano da secção, na direcção dos seus eixos principais centrais de inércia, permitindo obter os 2 modos de flexão recta através de

$$\boldsymbol{Y}_{flex}^{conv} = \boldsymbol{Y}_{I}\,\boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\boldsymbol{Y}_{III}^{flex+axial}\boldsymbol{Y}_{III}^{flex} \quad , \quad (2.B.14)$$

no caso de secções abertas, ou de

$$\boldsymbol{Y}_{flex}^{conv} = \boldsymbol{Y}_{I}\,\boldsymbol{Y}_{II}^{glob}\boldsymbol{Y}_{III}^{flex} \quad , \quad (2.B.15)$$

no caso de secções celulares.

ANEXO 2.C

Análises Lineares - Implementação

Apresenta-se neste anexo a forma como foram implementados, através do *software* MATLAB (*Mathworks 2012*), os tensores de 1ª, 2ª e 3ª ordem que integram as definições (2.22) do vector de forças exteriores e das matrizes de rigidez/geométrica. As matrizes U, V e W são a representação matricial dos campos de deslocamentos modais u_k, v_k e w_k em cada sub-placa (N_p no total) da secção transversal – a entrada (i,k) contém os deslocamentos (função de s) do modo k na sub-placa i. De modo a simplificar a implementação, todas as integrações (realizadas numéricamente através da quadratura de *Gauss-Legendre*) foram transformadas atendendo a uma mudança de variável de s para ξ no domínio de cada sub-placa – $\xi = s_p/b_p \in [0, 1]$, sendo b_p a largura de uma sub-placa genérica p.

No que respeita aos tensores de 1ª ordem que figuram no vector de forças ($m = x, s, z$), tem-se

$$q^u = \int_0^1 \left(e_{q_x} U\right)^T e_0 d\xi \qquad q^{v,w} = \int_0^1 \left[\left(e_{q_s} V\right)^T + \left(e_{q_z} W\right)^T\right] e_0 d\xi \qquad e_{q_m} = \begin{bmatrix} (q_m)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (q_m)_{N_p} \end{bmatrix}, \quad (2.C.1)$$

sendo os de 2ª ordem que figuram na matriz de rigidez definidos por

$$C^1 = \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^1 U^T e_1 U d\xi \qquad C^2 = \frac{E}{12(1-\nu^2)}\int_0^1 W^T e_3 W\, d\xi \qquad C^3 = \frac{E\,\nu}{1-\nu^2}\int_0^1 V_{,\xi}^T e_1^{aux1} U\, d\xi$$

$$B^1 = \frac{E}{1-\nu^2}\int_0^1 V_{,\xi}^T e_4 V_{,\xi} d\xi \qquad B^2 = \frac{E}{12(1-\nu^2)}\int_0^1 W_{,\xi\xi}^T e_5 W_{,\xi\xi} d\xi \qquad D^1 = \frac{G}{3}\int_0^1 W_{,\xi}{}^T e_6 W_{,\xi} d\xi \,. \quad (2.C.2)$$

$$D^2 = \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)}\int_0^1 W^T e_6 W_{,\xi\xi} d\xi \qquad D^3 = G\int_0^1 \left(U_{,\xi}^T e_4 U_{,\xi} + U_{,\xi}^T e_1^{aux1} V + V^T e_1^{aux1} U_{,\xi} + V^T e_1 V\right) d\xi$$

Finalmente, os tensores de 3ª ordem utilizados na definição da matriz geométrica foram implementados da seguinte forma, onde os índices N_p e p indicam o número total de sub-placas e o modo de deformação em causa (relativo à trajectória de pré-encurvadura), respectivamente:

$$X_p^1 = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(V^T e_u e_1 V + W^T e_u e_1 W\right) d\xi, \quad e_u = \begin{bmatrix} U_{1p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{N_p p} \end{bmatrix}$$

$$X_p^2 = \frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(V^T e_{v,\xi} e_1^{aux1} V + W^T e_{v,\xi} e_1^{aux1} W\right) d\xi, \quad e_{v,\xi} = \begin{bmatrix} \left(V_{,\xi}\right)_{1p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(V_{,\xi}\right)_{N_p p} \end{bmatrix}$$

$$X_p^3 = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(U^T e_u e_1 U\right) d\xi \qquad X_p^4 = \frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(U^T e_{v,\xi} e_1^{aux1} U\right) d\xi$$

$$X_p^5 = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W^T e_u e_3 W\right) d\xi \qquad X_p^6 = \frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W^T e_{v,\xi} e_2 W\right) d\xi$$

$$X_p^7 = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W_{,\xi}{}^T e_u e_6 W_{,\xi}\right) d\xi \qquad X_p^8 = \frac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W_{,\xi}{}^T e_{v,\xi} e_7 W_{,\xi}\right) d\xi$$

$$X_p^9 = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(U^T e_w e_3 W + W^T e_w e_3 U\right) d\xi, \quad e_w = \begin{bmatrix} W_{1p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_{N_p p} \end{bmatrix}$$

$$X_p^{10} = \frac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(U^T e_{w,\xi\xi} e_6 W + W^T e_{w,\xi\xi} e_6 U\right) d\xi, \quad e_{w,\xi\xi} = \begin{bmatrix} \left(W_{,\xi\xi}\right)_{1p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(W_{,\xi\xi}\right)_{N_p p} \end{bmatrix}$$

$$X_p^{11} = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(V^T e_w e_7 W_{,\xi} + W_{,\xi}{}^T e_w e_7 V\right) d\xi \quad X_p^{12} = \frac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(V^T e_{w_{,\xi\xi}} e_7 W_{,\xi} + W_{,\xi}{}^T e_{w_{,\xi\xi}} e_7 V\right) d\xi$$

$$S_p^1 = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(U_{,\xi}{}^T e_{v,\xi} e_8 U_{,\xi}\right) d\xi \qquad S_p^2 = \frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(U_{,\xi}^T e_u e_4 U_{,\xi}\right) d\xi$$

$$S_p^3 = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W_{,\xi}{}^T e_{v_{,\xi}} e_8 W_{,\xi}\right) d\xi \qquad S_p^4 = \frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W_{,\xi}{}^T e_u e_4 W_{,\xi}\right) d\xi$$

$$S_p^5 = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(V_{,\xi}{}^T e_{v_{,\xi}} e_8 V_{,\xi}\right) d\xi \qquad S_p^6 = \frac{E\nu}{\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(V_{,\xi}{}^T e_u e_4 V_{,\xi}\right) d\xi \qquad . \qquad (2.C.3)$$

$$S_p^7 = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W_{,\xi}{}^T e_{v_{,\xi}} e_7 W_{,\xi}\right) d\xi \qquad S_p^8 = \frac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W_{,\xi}{}^T e_u e_6 W_{,\xi}\right) d\xi$$

$$S_p^9 = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W_{,\xi\xi}{}^T e_{v_{,\xi}} e_\xi^{aux} e_5 W_{,\xi\xi}\right) d\xi \qquad S_p^{10} = \frac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(W_{,\xi\xi}{}^T e_u e_5 W_{,\xi\xi}\right) d\xi$$

$$S_p^{12} = \frac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(U_{,\xi}{}^T e_w e_6 W_{,\xi} + W_{,\xi}{}^T e_w e_6 U_{,\xi}\right) d\xi$$

$$S_p^{13} = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(V_{,\xi}{}^T e_{w_{,\xi\xi}} e_5 e_\xi^{aux} W_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi}{}^T e_{w_{,\xi\xi}} e_5 e_\xi^{aux} V_{,\xi}\right) d\xi$$

$$S_p^{14} = \frac{E\nu}{12\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1 \left(V_{,\xi}{}^T e_w e_7 W_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi}{}^T e_w e_7 V_{,\xi}\right) d\xi$$

$$\Gamma_p^1 = G\int_0^1 \left(U^T e_v e_1^{aux1} U_{,\xi}\right) + \left(U^T e_{u_{,\xi}} e_4 U_{,\xi}\right) d\xi$$

$$e_v = \begin{bmatrix} V_{1p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{N_p p} \end{bmatrix}, \quad e_{u_{,\xi}} = \begin{bmatrix} \left(U_{,\xi}\right)_{1p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(U_{,\xi}\right)_{N_p p} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_p^2 = G\int_0^1 \left(V^T e_v e_1^{aux1} V_{,\xi}\right) + \left(V^T e_{u_{,\xi}} e_4 V_{,\xi}\right) d\xi \qquad \Gamma_p^3 = G\int_0^1 \left(W^T e_v e_1^{aux1} W_{,\xi}\right) + \left(W^T e_{u_{,\xi}} e_4 W_{,\xi}\right) d\xi$$

$$\Gamma_p^4 = \tfrac{G}{12}\int_0^1 \left(W^T e_v e_2 W_{,\xi}\right) + \left(W^T e_{u_{,\xi}} e_6 W_{,\xi}\right) d\xi \qquad \Gamma_p^5 = \tfrac{G}{12}\int_0^1 \left(W_{,\xi}^T e_v e_7 W_{,\xi\xi}\right) + \left(W_{,\xi}^T e_{u_{,\xi}} e_5 W_{,\xi\xi}\right) d\xi$$

$$\Gamma_p^6 = \tfrac{G}{6}\int_0^1 \left(U^T e_{w,\xi} e_6 W_{,\xi}\right) + \left(W^T e_{w,\xi} e_6 U_{,\xi}\right) d\xi, \quad e_{w,\xi} = \begin{bmatrix} \left(W_{,\xi}\right)_{1p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(W_{,\xi}\right)_{N_p p} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_p^7 = \tfrac{G}{6}\int_0^1 \left(V^T e_{w,\xi} e_7 W_{,\xi\xi}\right) + \left(W_{,\xi}^T e_{w,\xi} e_7 V_{,\xi}\right) d\xi$$

Quanto às matrizes auxiliares utilizadas na definição dos tensores anteriores, como resultado da transformação de variável de s para ξ, tem-se

$$\mathrm{e}_0 = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_{N_p} \end{bmatrix}^T \qquad e_\xi^{aux} = \begin{bmatrix} 1/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/b_{N_p} \end{bmatrix} \qquad e_1 = \begin{bmatrix} e_1 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p} b_{N_p} \end{bmatrix}$$

$$e_1^{aux1} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p} \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} e_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3 \end{bmatrix} \qquad e_3 = \begin{bmatrix} e_1^3 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3 b_{N_p} \end{bmatrix}$$

$$e_4 = \begin{bmatrix} e_1/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}/b_{N_p} \end{bmatrix} \qquad e_5 = \begin{bmatrix} e_1^3/b_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3/b_{N_p}^3 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.C.4}$$

$$e_6 = \begin{bmatrix} e_1^3/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3/b_{N_p} \end{bmatrix} \qquad e_7 = \begin{bmatrix} e_1^3/b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3/b_{N_p}^2 \end{bmatrix}$$

$$e_8 = \begin{bmatrix} e_1/b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}/b_{N_p}^2 \end{bmatrix} \qquad e_9 = \begin{bmatrix} e_1/b_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}/b_{N_p}^3 \end{bmatrix}$$

ANEXO 4.A

O Método de Newton-Raphson

O método de *Newton-Raphson* é um método numérico potente e muito utilizado em problemas de engenharia (*e.g.*, *De Borst et al. 2012*), o qual visa obter a solução de sistemas de equações não-lineares do tipo

$$f = \begin{Bmatrix} f_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x_1,...,x_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad . \qquad (4.A.1)$$

O método baseia-se na utilização dos termos de primeira ordem do desenvolvimento em série de *Taylor* da função *f*, sendo traduzido matemáticamente pelo esquema iterativo (j=1,...,N_{iter})

$$x^{j+1} - x^j = -\left(J^j\right)^{-1} f^j, \quad J^j = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{x=x^j} \quad , \qquad (4.A.2)$$

onde (i) x^{j+1} é a solução (vector $n \times 1$) obtida no final da iteração j e (ii) f^j e J^j são a função f e respectiva matriz Jacobiana avaliadas para $x = x^j$ (solução obtida antes do início da iteração j –

x^1 é determinada através de um método alternativo). O processo iterativo termina quando o critério de convergência definido for satisfeito. A Fig. 4.A.1 ilustra o método descrito para um domínio uni-dimensional, ou seja, aplicado na resolução de $f(x)=0$. Como se constata, em cada iteração (j) a função f é aproximada pela tangente (1ª derivada) no ponto correspondente à solução de partida (x^j).

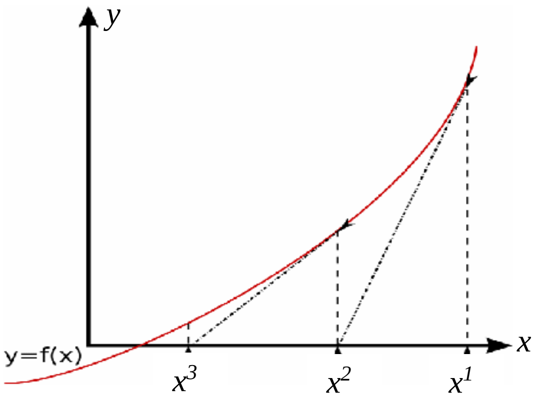


Fig. 4.A.1. Ilustração do método de *Newton-Raphson* para um domínio uni-dimensional.

Relativamente à eficácia e à eficiência do método, apesar de requerer poucas iterações em caso de convergência (tipicamente 3 a 5), pode ocorrer convergência para uma solução indesejada, ou até mesmo divergência, se *p.e.* (i) a estimativa inicial x^1 estiver muito "afastada" da solução ou (ii) alguma estimativa x^j corresponder a uma singularidade da função f (1ª derivada nula no exemplo da Fig. 4.A.2).

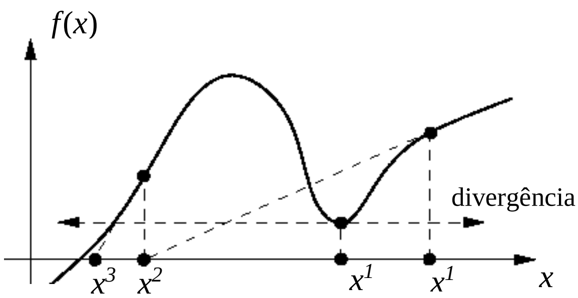


Fig. 4.A.2. Exemplos de convergência e divergência do método de *Newton-Raphson*.

ANEXO 6.A

Análises Elasto-Plásticas de 1ª Ordem - Implementação

Apresenta-se neste anexo a definição do vector de forças internas e matriz de rigidez tangente (ver Eqs. (6.9) e (6.13)-(6.16)) no formato matricial em que foram implementados através do *software* MATLAB (*Mathworks 2012*). Importa notar que todas as integrações foram (i) realizadas numéricamente através da quadratura de *Gauss-Legendre* e (ii) baseadas nas mudanças de variável de s para ξ ($\xi = s_p/b_p \in [0, 1]$) e de z para η ($\eta = z_p/e_p \in [-1/2, 1/2]$), onde e_p e b_p são a espessura e largura da sub-placa genérica p da secção transversal, respectivamente.

Vector de forças internas

As expressões $F_{(xx)k}$, $F_{(ss)k}$ e $F_{(xs)k}$ definidas em (6.9) correspondem à k-ézima componente dos vectores calculados computacionalmente através de

$$\begin{gathered} F_{xx} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(e_1\left(U - \eta e_1^{aux1} W\right)\right)^T \sigma_{xx}\big|_j \, d\eta \, d\xi, \quad F_{ss} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(e_1^{aux1} V_{,\xi} - \eta e_{11} W_{,\xi\xi}\right)^T \sigma_{ss}\big|_j \, d\eta \, d\xi \\ F_{xs} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(e_1^{aux1} U_{,\xi} + e_1 V - 2\eta e_1^{aux2} W_{,\xi}\right)^T \sigma_{xs}\big|_j \, d\eta \, d\xi \end{gathered} \quad , \quad (6.A.1)$$

onde (i) U, V e W são matrizes modais que guardam na entrada (p, k) o perfil de deslocamentos de membrana (função de ξ) do modo de deformação k, no domínio da sub-placa p, (ii) $\sigma_{mn}|_j$ (mn = xx, ss, xs) são vectores coluna cuja p-ézima entrada corresponde à distribuição (em x, ξ e η)

da respectiva tensão na sub-placa p e configuração de equilíbrio j, e (iii) as matrizes diagonais "e" têm a dimensão do número de sub-placas existentes na secção (N_p) e resultam das transformações de variável referidas anteriormente, vindo

$$e_1 = \begin{bmatrix} e_1 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p} b_{N_p} \end{bmatrix}, \quad e_1^{aux1} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p} \end{bmatrix}, \quad e_1^{aux2} = \begin{bmatrix} e_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^2 \end{bmatrix}$$

$$e_{11} = \begin{bmatrix} e_1^2 / b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^2 / b_{N_p} \end{bmatrix} \quad . \quad (6.A.2)$$

Matriz de rigidez tangente

Reescreva-se agora a "componente" i-k (sub-matriz 4x4) da matriz de rigidez tangente (ver Eqs. (6.13)-(6.16)) no formato em que foi implementada computacionalmente, vindo

$$K_{ik,\tan}\Big|_j = \int_{L_e} \left\{ \begin{array}{l} M_{ik}^{xx-xx} \left(ddS^i\right)^T ddS^k + M_{ik}^{xx-ss} \left(ddS^i\right)^T S^k + M_{ik}^{xx-xs} \left(ddS^i\right)^T dS^k + \\ + M_{ik}^{ss-xx} \left(S^i\right)^T ddS^k + M_{ik}^{ss-ss} \left(S^i\right)^T S^k + M_{ik}^{ss-xs} \left(S^i\right)^T dS^k + \\ + M_{ik}^{xs-xx} \left(dS^i\right)^T ddS^k + M_{ik}^{xs-ss} \left(dS^i\right)^T S^k + M_{ik}^{xs-xs} \left(dS^i\right)^T dS^k \end{array} \right\} dx \quad , \quad (6.A.3)$$

onde os índices ik que figuram no 2º membro sinbolizam a componente (i, k) (associada aos modos de deformação i e k) das matrizes M^{a-b} definidas por

$$M^{xx-xx} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} U^T e_1 e_{d\sigma}^{xx-xx} U - U^T \eta e_{10} e_{d\sigma}^{xx-xx} W - \\ -W^T \eta e_{10} e_{d\sigma}^{xx-xx} U + W^T \eta^2 e_3 e_{d\sigma}^{xx-xx} W \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.4)$$

$$M^{xx-ss} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} U^T e_1^{aux1} e_{d\sigma}^{xx-ss} V_{,\xi} - U^T \eta e_{11} e_{d\sigma}^{xx-ss} W_{,\xi\xi} - \\ -W^T \eta e_1^{aux2} e_{d\sigma}^{xx-ss} V_{,\xi} + W^T \eta^2 e_6 e_{d\sigma}^{xx-ss} W_{,\xi\xi} \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.5)$$

$$M^{xx-xs} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} U^T e_1^{aux1} e_{d\sigma}^{xx-xs} U_{,\xi} + U^T e_1 e_{d\sigma}^{xx-xs} V - 2U^T \eta e_1^{aux2} e_{d\sigma}^{xx-xs} W_{,\xi} - \\ -W^T \eta e_1^{aux2} e_{d\sigma}^{xx-xs} U_{,\xi} - W^T \eta e_{10} e_{d\sigma}^{xx-xs} V + 2W^T \eta^2 e_2 e_{d\sigma}^{xx-xs} W_{,\xi} \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.6)$$

$$M^{ss-xx} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} V_{,\xi}{}^T e_1^{aux1} e_{d\sigma}^{ss-xx} U - W_{,\xi\xi}{}^T \eta e_{11} e_{d\sigma}^{ss-xx} U - \\ -V_{,\xi}{}^T \eta e_1^{aux2} e_{d\sigma}^{ss-xx} W + W_{,\xi\xi}{}^T \eta^2 e_6 e_{d\sigma}^{ss-xx} W \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.7)$$

$$M^{ss-ss} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} V_{,\xi}{}^T e_4 e_{d\sigma}^{ss-ss} V_{,\xi} - V_{,\xi}{}^T \eta e_{12} e_{d\sigma}^{ss-ss} W_{,\xi\xi} - \\ -W_{,\xi\xi}{}^T \eta e_{12} e_{d\sigma}^{ss-ss} V_{,\xi} + W_{,\xi\xi}{}^T \eta^2 e_5 e_{d\sigma}^{ss-ss} W_{,\xi\xi} \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.8)$$

$$M^{ss-xs} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} V_{,\xi}{}^T e_4 e_{d\sigma}^{ss-xs} U_{,\xi} + V_{,\xi}{}^T e_1^{aux1} e_{d\sigma}^{ss-xs} V - \\ -2V_{,\xi}{}^T \eta e_{11} e_{d\sigma}^{ss-xs} W_{,\xi} - W_{,\xi\xi}{}^T \eta e_{12} e_{d\sigma}^{ss-xs} U_{,\xi} - \\ -W_{,\xi\xi}{}^T \eta e_{11} e_{d\sigma}^{ss-xs} V + 2W_{,\xi\xi}{}^T \eta^2 e_7 e_{d\sigma}^{ss-xs} W_{,\xi} \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.9)$$

$$M^{xs-xx} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} U_{,\xi}{}^T e_1^{aux1} e_{d\sigma}^{xs-xx} U - U_{,\xi}{}^T \eta e_1^{aux2} e_{d\sigma}^{xs-xx} W + V^T e_1 e_{d\sigma}^{xs-xx} U - \\ -V^T \eta e_{10} e_{d\sigma}^{xs-xx} W - 2W_{,\xi}{}^T \eta e_1^{aux2} e_{d\sigma}^{xs-xx} U + 2W_{,\xi}{}^T \eta^2 e_2 e_{d\sigma}^{xs-xx} W \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.10)$$

$$M^{xs-ss} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} U_{,\xi}{}^T e_4 e_{d\sigma}^{xs-ss} V_{,\xi} - U_{,\xi}{}^T \eta e_{12} e_{d\sigma}^{xs-ss} W_{,\xi\xi} + \\ + V^T e_1^{aux1} e_{d\sigma}^{xs-ss} V_{,\xi} - V^T \eta e_{11} e_{d\sigma}^{xs-ss} W_{,\xi\xi} - \\ -2W_{,\xi}{}^T \eta e_{11} e_{d\sigma}^{xs-ss} V_{,\xi} + 2W_{,\xi}{}^T \eta^2 e_7 e_{d\sigma}^{xs-ss} W_{,\xi\xi} \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.11)$$

$$M^{xs-xs} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{pmatrix} U_{,\xi}{}^T e_4 e_{d\sigma}^{xs-xs} U_{,\xi} + U_{,\xi}{}^T e_1^{aux1} e_{d\sigma}^{xs-xs} V - 2U_{,\xi}{}^T \eta e_{11} e_{d\sigma}^{xs-xs} W_{,\xi} + \\ + V^T e_1^{aux1} e_{d\sigma}^{xs-xs} U_{,\xi} + V^T e_1 e_{d\sigma}^{xs-xs} V - 2V^T \eta e_1^{aux2} e_{d\sigma}^{xs-xs} W_{,\xi} - \\ -2W_{,\xi}{}^T \eta e_{11} e_{d\sigma}^{xs-xs} U_{,\xi} - 2W_{,\xi}{}^T \eta e_1^{aux2} e_{d\sigma}^{xs-xs} V + 4W_{,\xi}{}^T \eta^2 e_6 e_{d\sigma}^{xs-xs} W_{,\xi} \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad , \quad (6.A.12)$$

sendo as matrizes diagonais "*e*" (dimensão do número de sub-placas da secção (N_p)) obtidas através de (6.A.2) e

$$e_2 = \begin{bmatrix} e_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} e_1^3 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3 b_{N_p} \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} e_1/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}/b_{N_p} \end{bmatrix}$$

$$e_5 = \begin{bmatrix} e_1^3/b_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3/b_{N_p}^3 \end{bmatrix}, \quad e_6 = \begin{bmatrix} e_1^3/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3/b_{N_p} \end{bmatrix}$$

$$, \quad (6.A.13)$$

$$e_7 = \begin{bmatrix} e_1^3 \big/ b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^3 \big/ b_{N_p}^2 \end{bmatrix}, \quad e_{10} = \begin{bmatrix} e_1^2 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^2 b_{N_p} \end{bmatrix}$$

$$e_{12} = \begin{bmatrix} e_1^2 \big/ b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^2 \big/ b_{N_p}^2 \end{bmatrix}, \quad e_{d\sigma}^{a-b} = \left[\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \sigma_a}{\partial \varepsilon_b}\right)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\dfrac{\partial \sigma_a}{\partial \varepsilon_b}\right)_{N_p} \end{bmatrix}\right]_j$$

onde $e_{d\sigma}^{a-b}$ guarda os gradientes de tensões em cada sub-placa na configuração de equilíbrio *j* – no caso da deformação por corte ($b \equiv xs$) deve constar γ_{xs} (em vez de ε_{xs}) no denominador.

ANEXO 6.B

Considerações sobre Modelação no Abaqus

Para efeitos de validação dos resultados da GBT apresentados ao longo desta tese, foram realizadas através do *software* Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*) diversas análises física e/ou geométricamente não lineares baseadas em modelos de elementos finitos de casca – o método de *Riks* foi adoptado como estratégia incremental-iterativa (mesma família do método implementado neste trabalho – ver capítulo 5). Em seguida abordam-se dois aspectos de elevada importância na construção destes modelos numéricos, nomeadamente (i) a escolha do tipo de EF e (ii) a discretização da malha.

O tipo de elemento finito

É dado como garantido pela comunidade científica (*e.g.*, *Silvestre 2005*, *Camotim et al. 2006*, *Lecce e Rasmussen 2006b*, *Becque e Rasmussen 2009*, *Pham and Hancock 2010*) que o EF de casca designado por S4 (DS Simulia Inc. 2004) é adequado à modelação de perfis de parede fina em análises de diversas naturezas (*e.g.*, lineares de estabilidade, fisica e/ou geométricamente não lineares).Trata-se de um elemento quadrilátero com 6 graus de liberdade (g.l.) por nó e caracterizado por (i) funções de aproximação lineares, (ii) 4 pontos de integração no seu plano, e (iii) um estado plano de tensão, permitindo resolver problemas que envolvam deformações finitas de membrana e/ou grandes rotações. No entanto, o elemento S4R, o qual se distingue pela integração reduzida (apenas 1 ponto de integração no plano), tem sido adoptado em trabalhos de investigação com maior frequência do que o elemento S4 (*e.g.*, *Yan e Young 2004*, *Ellobody e Young 2005*, *Lecce e Rasmussen 2006b*, *Seo et al. 2008*, *Becque e Rasmussen 2009*, *Theofanous e Gardner 2009, 2010*, *Pham e Hancock 2010*), motivado pelo acréscimo de eficiência computacional que lhe está associado. Contudo, este tipo de EF tem o inconveniente de poder conduzir a um comportamento excessivamente flexível quando comparado com o "exacto". Segundo *Camotim et al.* (*2006*), a integração reduzida provoca uma diminuição significativa da rigidez de corte (designado no manual do Abaqus por *hourglassing*, em língua inglesa)[1], propriedade que favorece os elementos S4 em detrimento dos S4R em problemas de grande interesse prático – contudo, este inconveniente perde relevância no caso de elementos cuja aproximação seja não linear, como p.e. o S9R5. Importa ainda referir que este elemento, caracterizado por 9 nós, 5 g.l. por nó e integração reduzida, não é aconselhado para problemas que envolvam deformações moderadas a grandes. No entanto, já foi diversas vezes utilizado com êxito na modelação de perfis em aço inoxidável (*e.g.*, *Gardner e Nethercot 2004b*, *Ashraf et al. 2006b*, *Jandera et al. 2008*). Com base no referido anteriormente, optou-se por utilizar o EF S4 em todos os modelos numéricos desenvolvidos no Abaqus.

A discretização da malha

A discretização utilizada na modelação de cada elemento estrutural tem um papel fundamental na precisão dos resultados. Por exemplo, é sabido que (i) EF de casca demasiado alongados originam erros numéricos prejudiciais, (ii) zonas onde se esperam elevados gradientes de deslocamentos exigem uma discretização mais refinada, e (iii) numa análise de estabilidade a malha deve ser suficientemente refinada para que seja possível captar modos de instabilidade com comprimentos de onda pequenos a médios (de natureza local e/ou distorcional). No presente trabalho optou-se por utilizar em cada modelo, malhas ortogonais com "fatias transversais"[2] de largura constante, definida de modo a garantir uma boa relação custo-benefício entre a eficiência da análise e a precisão dos resultados – conseguido com base na experiência do autor e em casos semelhantes existentes na literatura. Note-se também que, se em alguns casos se questionou a adequação da malha considerada, essas dúvidas foram sempre esclarecidas através da comparação da respectiva curva carga-deslocamento com a obtida através de uma malha mais refinada que garantisse a precisão dos resultados.

1 O Abaqus tem várias opções de controle do efeito *hourglassing*, sendo aconselhado activar a opção *SECTION CONTROLS, HOURGLASS=STIFFNESS quando se utilizem elementos com aproximação linear e integração reduzida.

2 Fatia transversal é cada fiada transversal de EF ao longo da direcção longitudinal da barra.

ANEXO 6.C

Exemplos Ilustrativos Complementares

Ilustra-se aqui a aplicação da GBT, implementada no *software* Matlab (*Mathworks 2012*), à análise fisicamente não linear de 1ª ordem de duas vigas metálicas de parede fina. São apresentados dois casos de validação complementares aos apresentados na secção 6.3 do capítulo 6. Tratam-se de dois exemplos muito simples, que permitem evidenciar alguns aspectos não contabilizados pelas teorias de vigas clássicas. A validação dos resultados é feita por comparação de resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, diagramas de tensões, perfis de deslocamentos, *contours* de tensões e configurações deformadas tri-dimensionais) com os obtidos pelo *software* de EF Abaqus (*DS Simulia Inc. 2004*), recorrendo a modelos de elementos finitos de casca (EFC)[1].

6.C.1 Caracterização

Antes de apresentar e discutir os resultados, os problemas abordados são definidos, fazendo referência aos modos de deformação da GBT seleccionados e ilustrando as configurações dos mais relevantes em cada análise (ver Tab. 6.C.2). Importa também mencionar que (i) os elementos estruturais analisados não apresentam imperfeições iniciais (tensões residuais ou imperfeições geométricas)[2], (ii) as dimensões

1 A teoria J_2 com escoamento associado é também o modelo de plasticidade adoptado nas análises do Abaqus.

2 Estas apenas serão introduzidas no capítulo 7, no âmbito de análises elasto-plásticas de 2ª ordem.

das secções referem-se à linha média da secção e todos os resultados dizem respeito a pontos localizados na superfície média da barra (z=0), e (iii) os modelos do Abaqus são formados por malhas regulares de EFC do tipo S4.

O material considerado em ambos os exemplos exibe um comportamento elástico perfeitamente-plástico com as propriedades apresentadas na Tab. 6.C.1. Nessa tabela, apresentam-se também os números de EFC na direcção longitudinal (N_x) e ao longo da linha média da secção (N_s) do modelo do Abaqus, e a quantidade de pontos de integração de *Gauss* considerada na GBT (por direcção local s, z e x de cada sub-placa em cada EFV) – o número de pontos ao longo da espessura de cada EFC do Abaqus, iguala o valor adoptado na GBT. Na tab. 6.C.2 apresentam-se os números de modos de deformação da GBT (G – globais, D – distorcionais, L – locais, C – corte, ET – extensão transversal, FCC – fluxo de corte celular (excepto o de torção)) utilizados em cada análise, bem como a quantidade de g.l. utilizados nos modelos da GBT e do Abaqus.

Tab. 6.C.1. Exemplos ilustrativos: propriedades materiais, nº de EFC no Abaqus, e nº de pontos de *Gauss* na GBT.

Exemplo	Propriedades Materiais		Discretização de EFC no ABAQUS		Pontos de *Gauss* na GBT		
	E (N/mm^2)	σ_0^y (N/mm^2)	N_x	N_s	s	z	x
H	210000	200	150	90	6	7	6
Hat			100	26	5	3	5

Tab. 6.C.2. Quantidade de modos de deformação da GBT (por tipo) e de g.l. utilizados nos modelos da GBT e do Abaqus.

Exemplo	G	D	L	C	ET	Modos GBT (usados / total)	g.l. GBT	g.l. ABAQUS	g.l. GBT / ABAQUS (%)
H	4	0	2	7	24	37 / 127	2073	81900	2.5
Hat	4	1	4	14	14	37 / 60	1917	16200	11.8

O primeiro exemplo (ver Fig. 6.C.1) aborda uma consola com secção em H (L=1500 mm), constituída por um material elástico-perfeitamente plástico (ver propriedades na Tab. 6.C.1) e sujeita a um momento torsor T=966665.7 λ Nmm na secção extrema, o qual resulta do binário representado na Fig. 6.C.1(b). Na GBT, a secção foi discretizada em 10 sub-placas em cada banzo e 4 na alma, o que resultou em 127 modos de deformação (rotação de empenamento adoptada). Desses, apenas 37 foram seleccionados para a análise (ver Tab. 6.C.2), estando as configurações dos mais relevantes ilustradas na

Fig. 6.C.3. Longitudinalmente, o modelo da GBT envolve 28 EFV (de comprimento constante por troços da viga): (i) 8 EFV em $x<0.10L$, (ii) 12 EFV em $0.10L \leq x \leq 0.90L$ e (iii) 8 EFV em $x > 0.90L$.

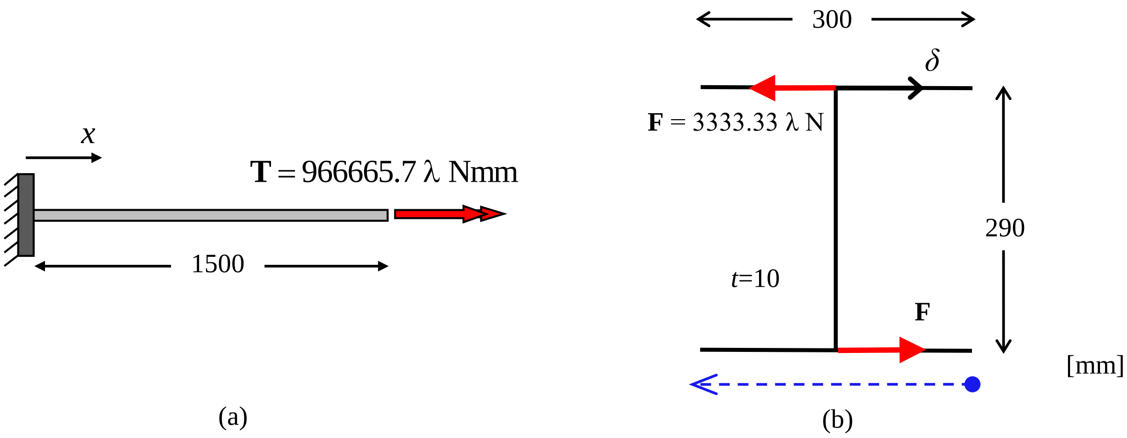


Fig. 6.C.1. Viga em H: (a) vista geral, e (b) carregamento e dimensões da secção.

O segundo perfil de parede fina a analisar é a viga simplesmente apoiada (L=1000 mm) com secção em Hat ilustrada na Fig. 6.C.2, a qual é constituída por um material elástico-perfeitamente plástico (ver Tab. 6.C.1) e está sujeita a duas forças verticais (F=500 λ N – ver Fig. 6.C.2(b)) aplicadas a meio vão (x=500 mm). Na GBT, a secção é discretizada por 4 sub-placas no banzo, 3 em cada alma e 2 em cada reforço, o que conduz a 60 modos de deformação (rotação de empenamento não foi considerada), dos quais apenas 37 foram utilizados na análise (ver Tab. 6.C.2) – a Fig. 6.C.4 apresenta as configurações dos modos mais importantes. A discretização longitudinal utilizada na GBT envolve 26 EFV: (i) 7 EFV em $x < 0.45L$, (ii) 12 EFV em $0.45L \leq x \leq 0.55L$ e (iii) 7 EFV em $x > 0.55L$.

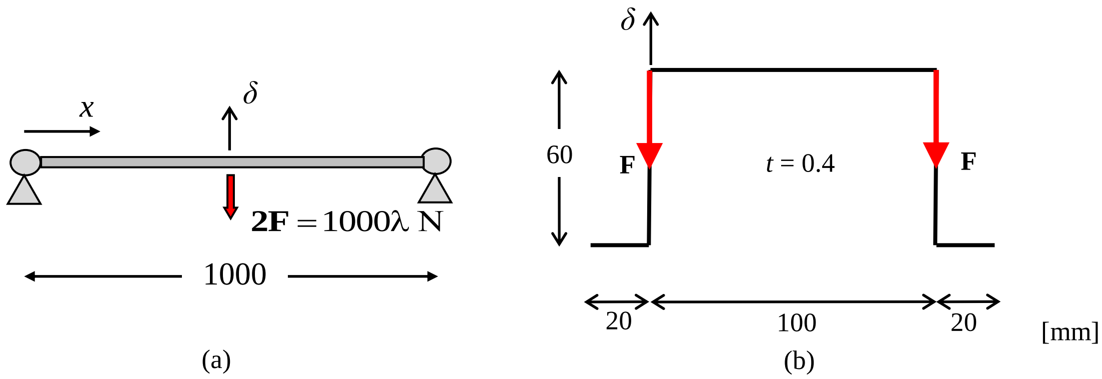


Fig. 6.C.2. Viga em Hat: (a) vista geral, e (b) carregamento e dimensões da secção.

6.C.2 Modos de deformação

Nas Figs. 6.C.3-6.C.4 apresentam-se as configurações no plano e os perfis axiais dos modos de deformação mais relevantes em cada análise da GBT, estando a discretização da secção representada juntamente com os modos de extensão transversal. Os modos encontram-se identificados com o respectivo número após renumeração, uma vez que o grupo de modos seleccionado constitui uma fracção do número total de modos (ver Tab 6.C.2).

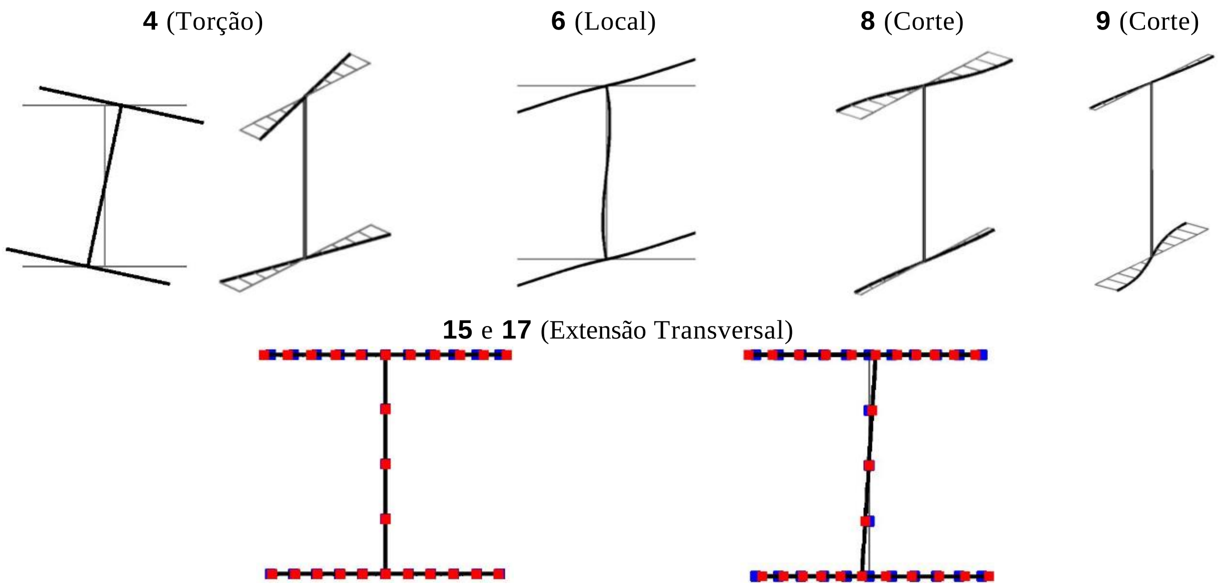


Fig. 6.C.3. Viga em H: configurações no plano e perfis axiais dos 6 modos de deformação da GBT mais relevantes.

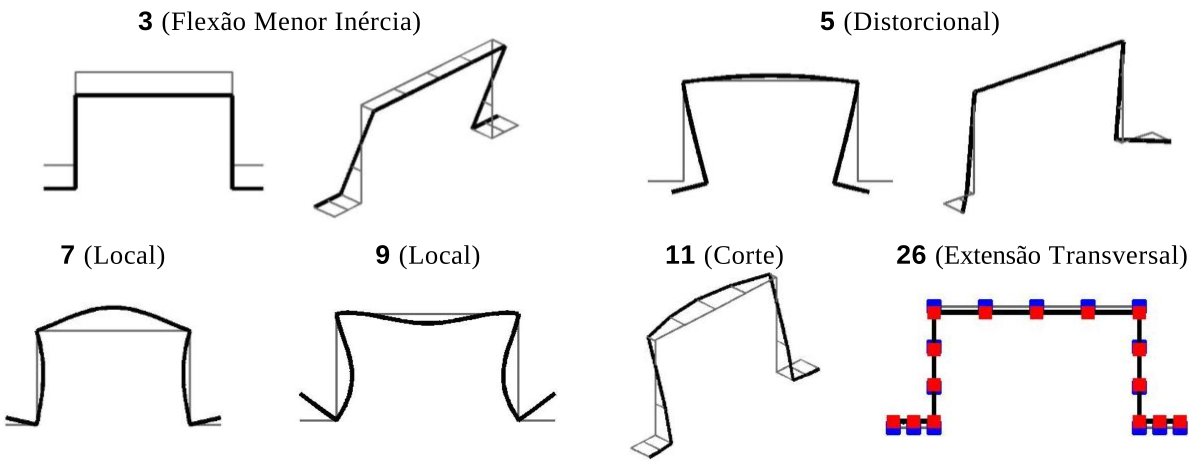


Fig. 6.C.4. Viga em Hat: configurações no plano e perfis axiais dos 6 modos de deformação da GBT mais relevantes.

6.C.3 Resultados – validação e vantagens da análise modal

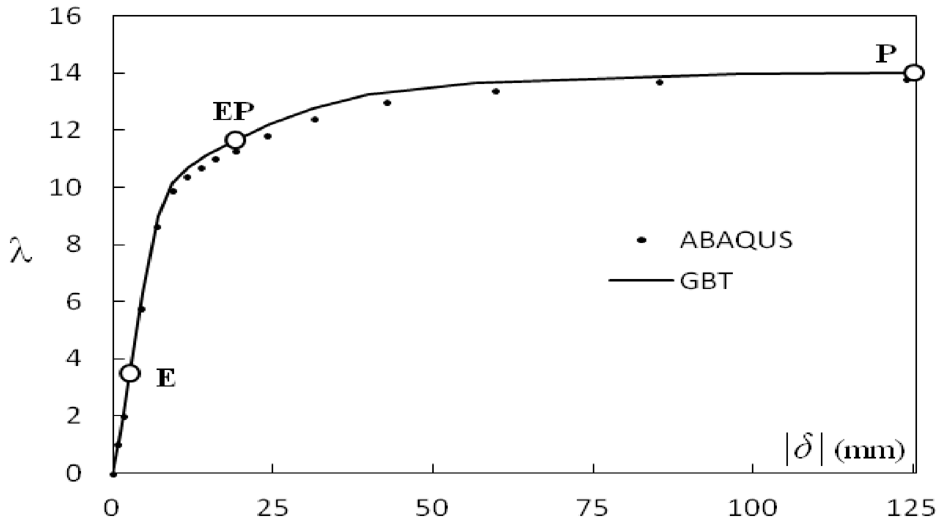
Antes de apresentar os resultados relativos à validação dos modelos da GBT, importa referir que foram seleccionadas três configurações (estados) de equilíbrio em cada exemplo, estando identificados nas curvas λ vs δ pelas letras E (regime elástico), EP (regime elasto-plástico antes do *plateau*) e P (regime elasto-plástico sobre o *plateau* – colapso). A identificação destas três configurações permitirá comparar da melhor forma os resultados entre a GBT e o Abaqus em diferentes fases da trajectória de equilíbrio. Por último, importa referir que o método de *Euler* Regressivo (abordado no capítulo 4) foi o algoritmo de retorno adoptado no modelo de plasticidade de cada problema.

Viga em H

A Fig. 6.C.5(a) apresenta as trajectórias de equilíbrio do Abaqus e da GBT relativas à monitorização do deslocamento lateral (δ) do nó de ligação banzo superior-alma na extremidade da consola (x=1500 mm – ver Fig. 6.C.1(b)). Constata-se que ambas as curvas diferem ligeiramente no regime elasto-plástico, mas a diferença nunca excede os 3.5%. Os três estados de equilíbrio indicados (E, EP e P) correspondem aos seguintes valores do parâmetro de carga: (i) λ_{GBT}=3.50 + λ_{ABQ}=3.50 (E), (ii) λ_{GBT}=11.65 + λ_{ABQ}=11.30 (EP) e (iii) λ_{GBT}=14.02 + λ_{ABQ}=13.80 (P). Note-se que a curva $\lambda(\delta)$ exibe uma transição entre o regime elástico e o “plástico” (*plateau*) bem mais “suave” que a ilustrada no exemplo anterior (ver Fig. 6.13(a)). Enquanto que aí o carregamento é aplicado precisamente na região que desencadeia o colapso da viga (meio vão), neste exemplo a carga localiza-se na zona oposta àquela que precipita o colapso (junto ao encastramento). Na Fig. 6.C.5(b) representa-se o diagrama de participação modal da GBT relativo à evolução da configuração deformada da secção carregada da viga, de onde se conclui que apenas dois modos de deformação (**4** – torção e **6** – local anti-simétrico) apresentam contribuições visíveis em toda a trajectória de equilíbrio (e praticamente constantes em todo o domínio – cerca de 90 % vs. 10 %) – importa relembrar que a teoria clássica de torção de *Saint-Venant* não prevê a existência do modo **6**.

As Figs. 6.C.6(a)-(b) mostram os perfis longitudinais relatives ao deslocamento lateral do nó de ligação banzo superior-alma nos estados E, EP e P. Os resultados da GBT e do Abaqus apresentam uma diferença máxima de 1.9 % e é possível constatar que: (i) enquanto no regime elástico, o perfil é claramente não linear em todo o domínio, (ii) no regime elasto-plástico a sua variação tende para linear à medida que o carregamento progride, devido ao “efeito de rótula plástica” junto à secção encastrada.

(a)



(b)

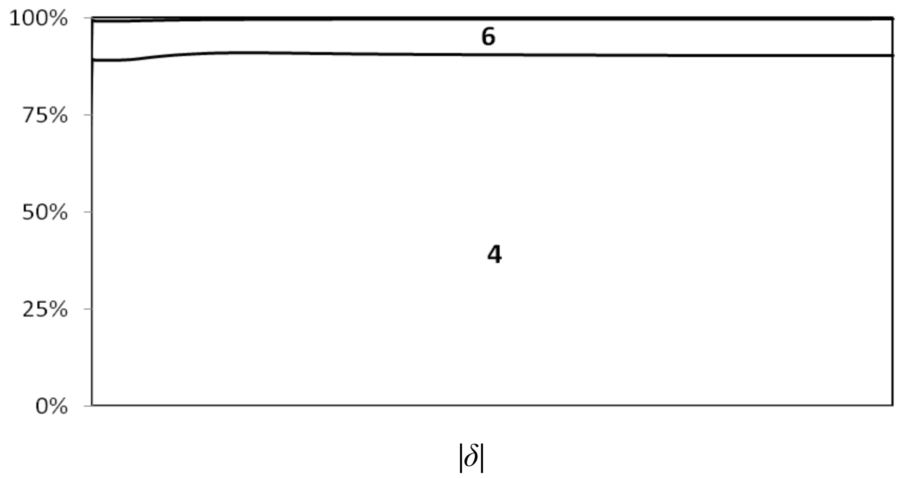


Fig. 6.C.5. (a) Trajectórias de equilíbrio obtidas pela GBT e Abaqus, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

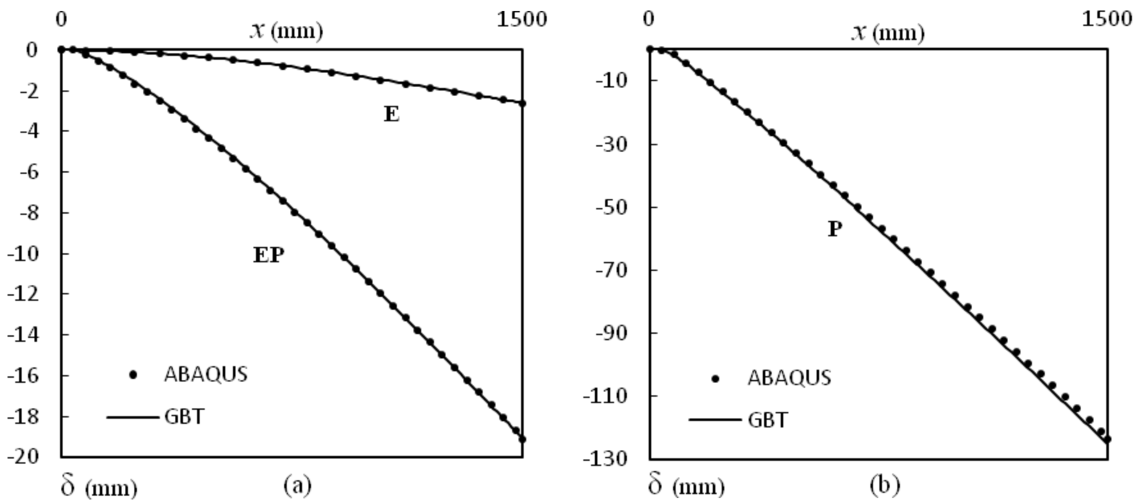


Fig. 6.C.6. Perfis longitudinais relativos ao deslocamento lateral do nó alma-banzo superior: configurações (a) E + EP e (b) P.

A Fig. 6.C.7(a) diz respeito ao estado E e mostra os diagramas de tensões transversais (σ_{ss}) ao longo da largura do banzo inferior em x=19 mm (orientação dada pela linha a traço interrompido na Fig. 6.C.1(b) – válida para todos os diagramas deste exemplo). Estas tensões resultam do efeito de *Poisson* causado pelas tensões de empenamento de torção (ver Fig. 6.C.3) – o empenamento restringido em x=0 gera torção não uniforme. A distribuição de tensões do Abaqus é altamente não linear mas constante em cada EFC (30 por banzo). Embora esta não linearidade seja capturada pela GBT, o facto de se terem considerado apenas 10 sub-placas por banzo explica o porquê da variação de tensões junto às extremidades do banzo não ser bem simulada – a duplicação do número de sub-placas deveria ser suficiente para melhorar significativamente os resultados. A Fig. 6.C.7(b), também relativa ao estado E, exibe os diagramas de tensões de corte (σ_{xs}) para o mesmo banzo e secção (x=19 mm) antes referidos. Embora os resultados da GBT e do Abaqus sigam a mesma tendência global, há grandes diferenças quantitativas que se devem (i) a um fenómeno de *shear locking* na secção encastrada (abordado em 2.3.2 – capítulo 2) e/ou (ii).ao facto de o banzo ser muito mais discretizado no Abaqus do que na GBT – relembra-se também que os valores da GBT são unidos por segmentos de recta, o que pode deturpar o verdadeiro diagrama quando os pontos estão muito espaçados.

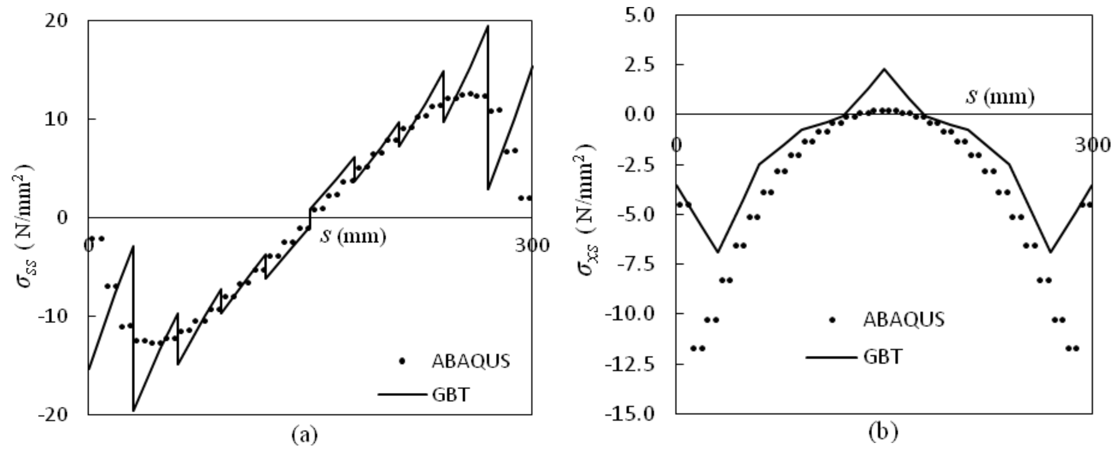


Fig. 6.C.7. Diagramas de tensões (a) σ_{ss} e (b) σ_{xs} no banzo inferior da secção em x=19 mm (configuração E).

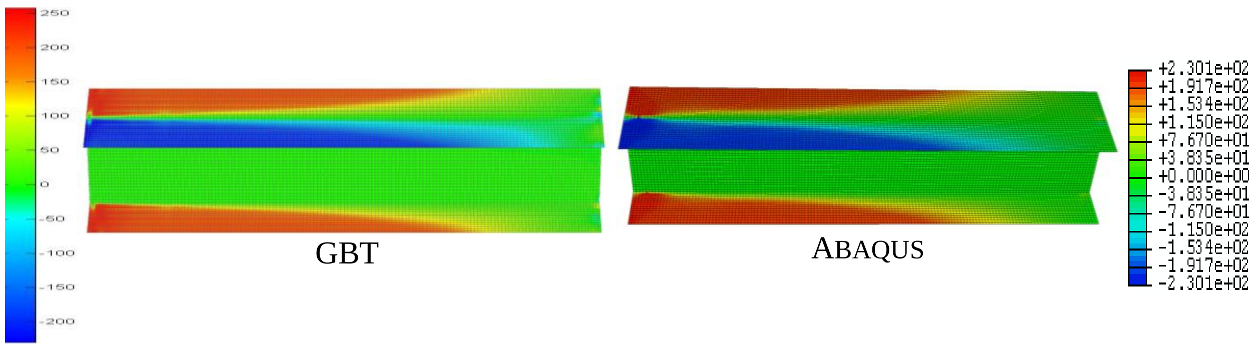


Fig. 6.C.8. *Contours* das tensões axiais σ_{xx} (N/mm^2) na configuração P (colapso).

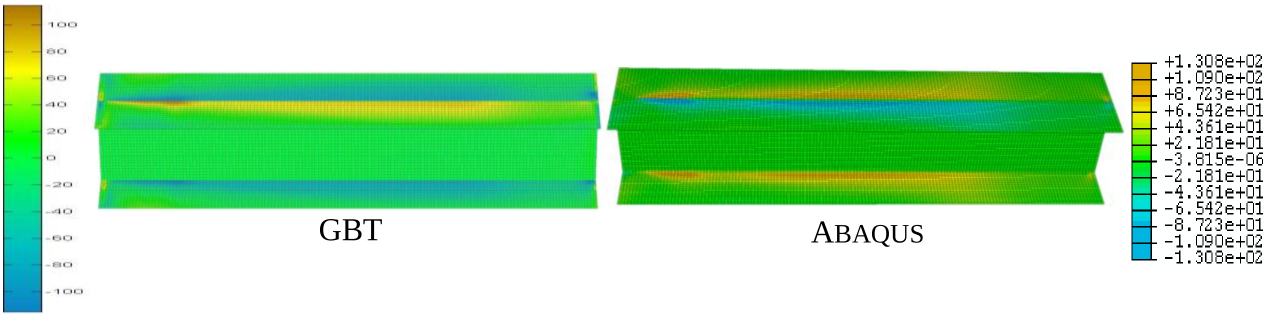


Fig. 6.C.9. *Contours* das tensões de corte σ_{xs} (N/mm^2) na configuração P (colapso).

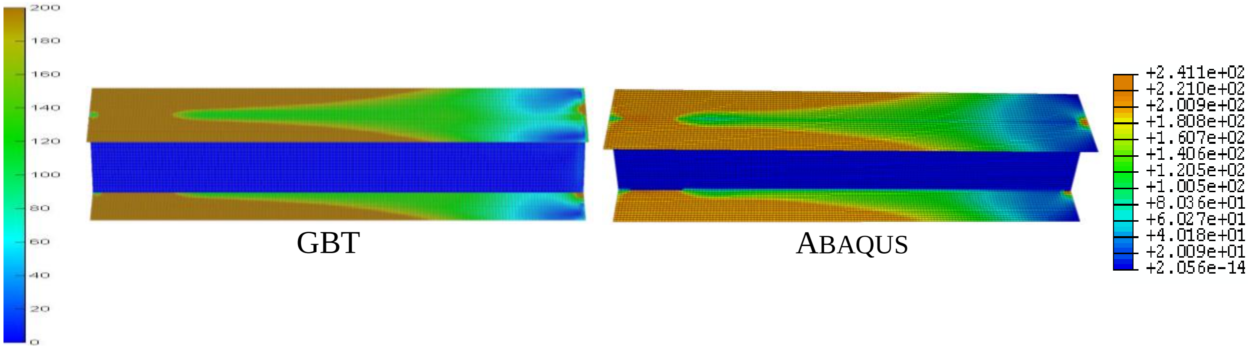


Fig. 6.C.10. *Contours* das tensões de *von Mises* σ_{Mises} (N/mm^2) na configuração P (colapso).

As Figs 6.C.8 a 6.C.10 mostram os *contours* do Abaqus e GBT relativos às tensões σ_{xx}, σ_{xs} e σ_{Mises} no colapso (estado P) da viga – a comparação entre *outputs* é bastante satisfatória. A Fig. 6.C.8 deixa claro que as tensões de empenamento de torção σ_{xx} são muito elevadas junto ao encastramento e decrescem em direcção à outra extremidade da consola. Observando agora a Fig. 6.C.9, é interessante notar que as tensões de corte (originadas pela torção não uniforme) são máximas nas zonas de maior variação das tensões axiais (σ_{xx}) – a pequena perturbação nos *contours* σ_{xx} e σ_{xs} da GBT junto à secção encastrada (esquerda) é uma consequência do efeito de *shear locking* mencionado anteriormente. Relativamente às tensões de *von Mises* (Fig. 6.C.10), a "formação de rótula plástica" referida anteriormente pode agora ser comprovada – junto ao encastramento, os banzos encontram-se totalmente plastificados ($\sigma_{Mises} = \sigma_0^y$). É também possível concluir que σ_{Mises} diminui em direcção à secção livre da consola, e também da zona exterior para a interior dos banzos onde quer que eles estejam parcialmente plastificados.

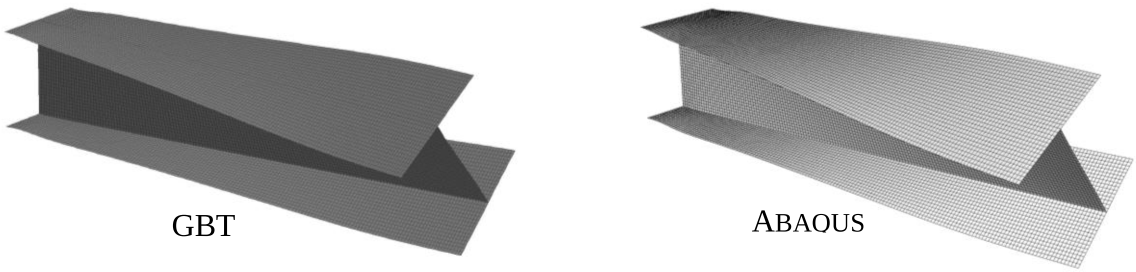


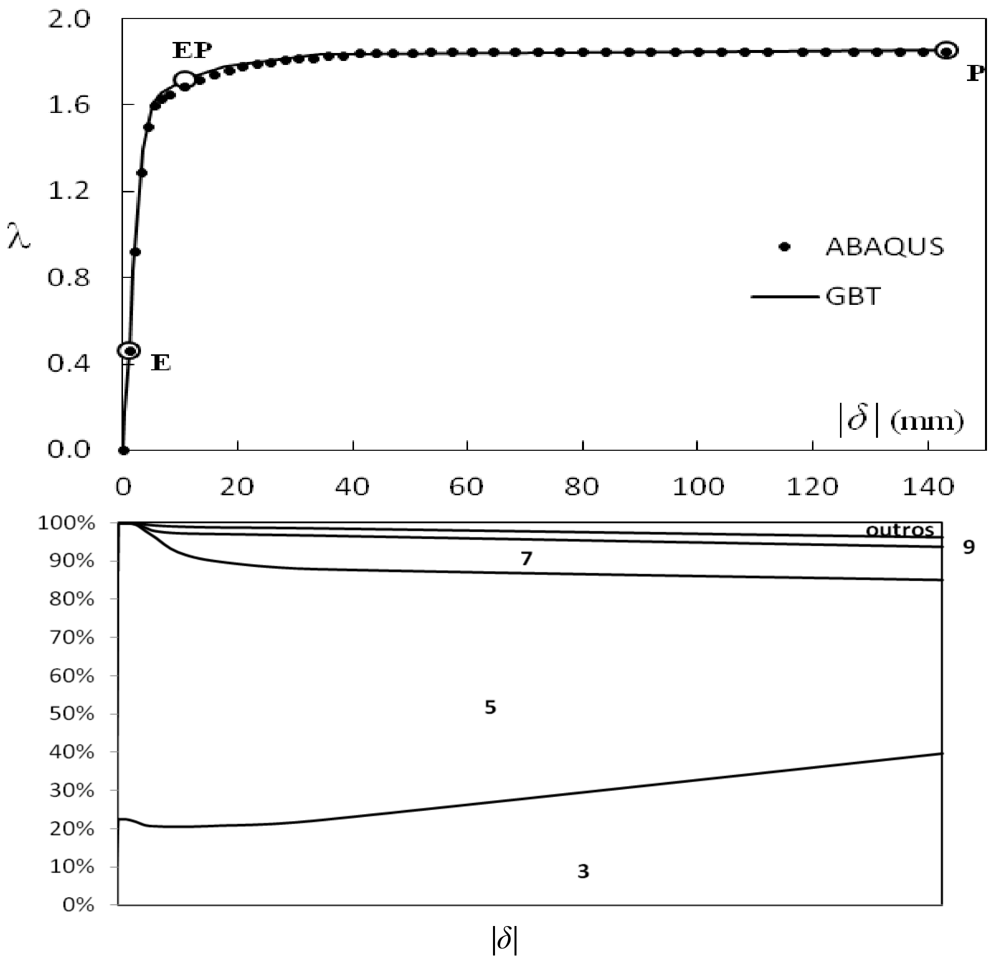
Fig. 6.C.11. Configuração deformada da consola no colapso (estado P).

Por último, a Fig. 6.C.11 exibe a configuração deformada (torcida) da viga no colapso (P), sendo mais uma vez as representações do Abaqus e da GBT virtualmente indistinguíveis.

Viga em Hat

A Fig. 6.C.12(a) exibe as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta)$ do Abaqus e da GBT, onde δ é o deslocamento vertical a meio vão do nó de ligação alma-banzo indicado na Fig. 6.C.2(b). Mais uma vez observa-se uma excelente correlação entre as duas curvas, cuja máxima diferença é de 1.8 %. Os três estados de equilíbrio indicados (E, EP e P) são (i) λ_{GBT}=0.46 + λ_{ABQ}=0.46 (E), (ii) λ_{GBT}=1.72 + λ_{ABQ}=1.69 (EP) e (iii) λ_{GBT}=1.85 + λ_{ABQ}=1.85 (P). Na Fig. 6.C.12(b) representa-se o diagrama de participação modal da GBT relativo à secção de meio vão, sendo possível concluir que (recordar Fig. 6.C.4):

(a)



(b)

Fig. 6.C.12. (a) Trajectórias de equilíbrio obtidas pelo Abaqus e GBT, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

(i) A configuração deformada da viga apresenta uma participação conjunta dominante (superior a cerca de 85%) dos modos de flexão na menor inércia (**3**) e distorcional simétrico (**5**) para qualquer nível de carga – o decréscimo após a fase elástica é compensado pelo aumento da participação dos modos locais **7** (principalmente) e **9**.

(ii) Após a fase elástica, a participação do modo **5** decresce visivelmente e é gradualmente substituída pelo crescimento das contribuições dos modos **3**, **7** e **9**. No entanto, as participações no colapso – cerca de 45 % (modo **5**), 40 % (modo **3**), 9 % (modo **7**) e 3 % (modo **9**), mostram que o modo distorcional **5** mantém a sua preponderância.

As Figs. 6.C.13(a)-(b) mostram os perfis longitudinais do Abaqus e GBT relativos ao deslocamento vertical do nó de ligação alma esquerda-banzo para os estados E, EP e P. Tal como seria de esperar por agora, a comparação entre ambos os resultados é quase perfeita. Vale a pena notar a formação evidente de uma rótula plastica na secção de meio vão à medida que a carga aumenta (de E até P).

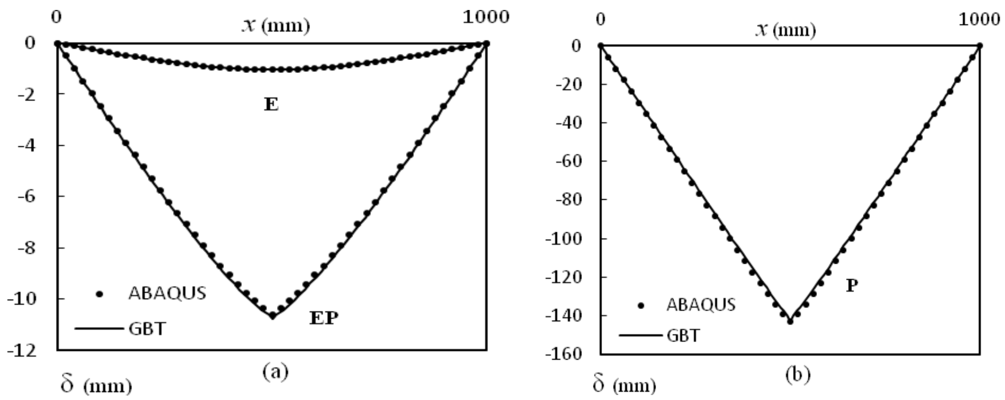


Fig. 6.C.13. Perfis longitudinais relativos ao deslocamento vertical do nó alma esquerda-banzo para os estados (a) E + EP e (b) P.

A Fig. 6.C.14(a) representa os diagramas de tensões de corte (σ_{xs}) no colapso ao longo da linha média da secção em x=450 mm (perto de meio vão) – note-se que as tensões são praticamente nulas nos reforços e zonas inferiores das almas. Os resultados da GBT e do Abaqus exibem tendências semelhantes e são quantitativamente muito semelhantes no banzo superior. As almas apresentam diferenças significativas devido à dificuldade em captar o efeito de concentração de tensões resultante das forças pontuais – a consideração do g.l. de rotação de empenamento constitui uma solução verossímil para o problema. Mesmo assim, a Fig. 6.C.14(b) mostra que os diagramas de tensões de *von Mises* nas configurações E, EP e P (relativos à mesma secção) exibem uma concordância muito boa entre o Abaqus e a GBT. No estado E é possível concluir que os cantos alma-reforço são os primeiros a ceder e que cada reforço apresenta uma variação de tensão significativa, o que é consequência da participação do modo distorcional **5** (exibe um perfil axial incidente nessas zonas – ver Fig. 6.C.4).

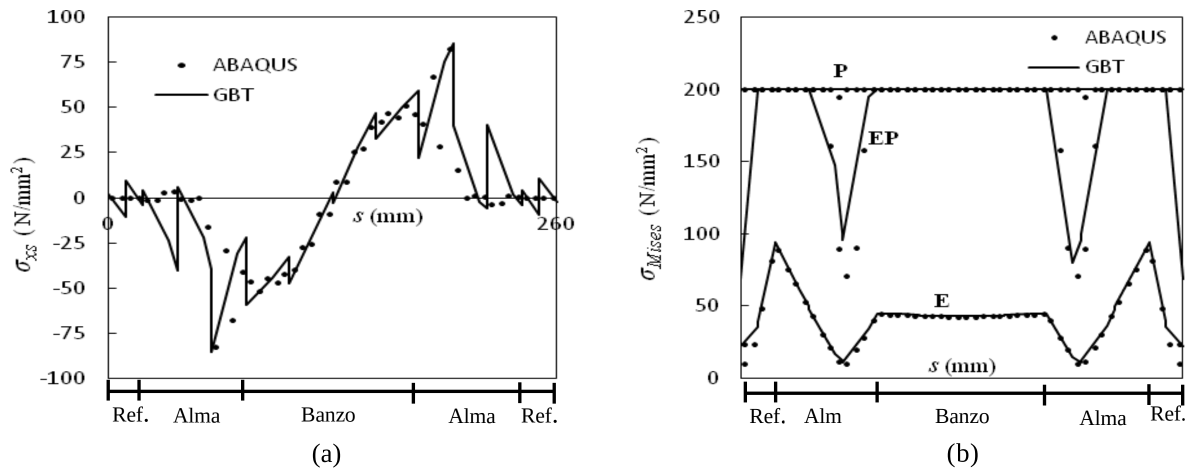


Fig. 6.C.14. Diagramas de tensões na secção em x=450 mm: (a) σ_{xs} (em P) e (b) σ_{Mises} (em E, EP e P).

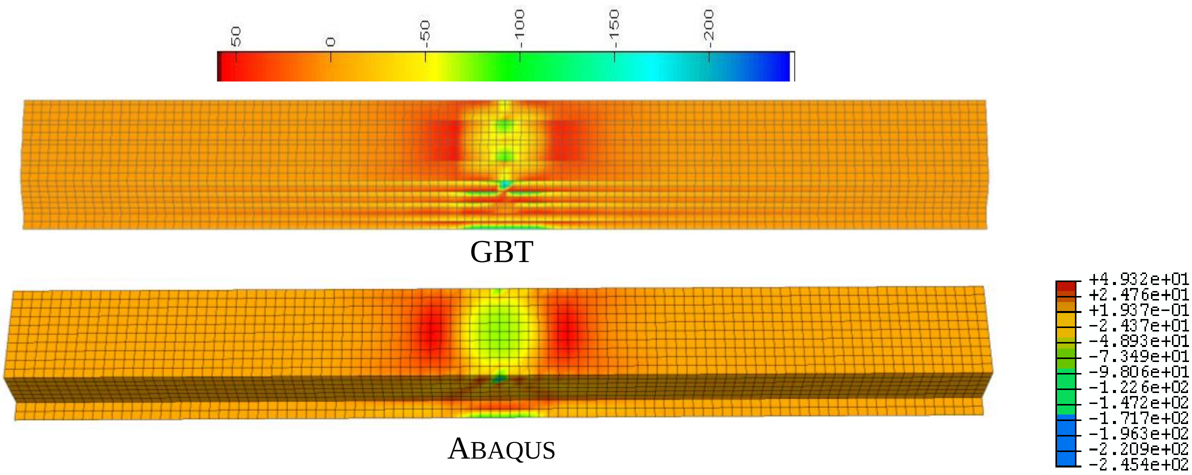


Fig. 6.C.15. *Contours* de tensões transversais σ_{ss} (N/mm^2) na configuração EP.

Finalmente, as Figs. 6.C.15 e 6.C.16 permitem comparar os resultados do Abaqus e GBT relativamente (i) à distribuição tri-dimensional de tensões σ_{ss} no estado EP, e (ii) à configuração deformada da viga no colapso (P), os quais apresentam uma concordância bastante boa. A Fig. 6.C.16 torna clara a presença de deformação distorcional na região de meio vão.

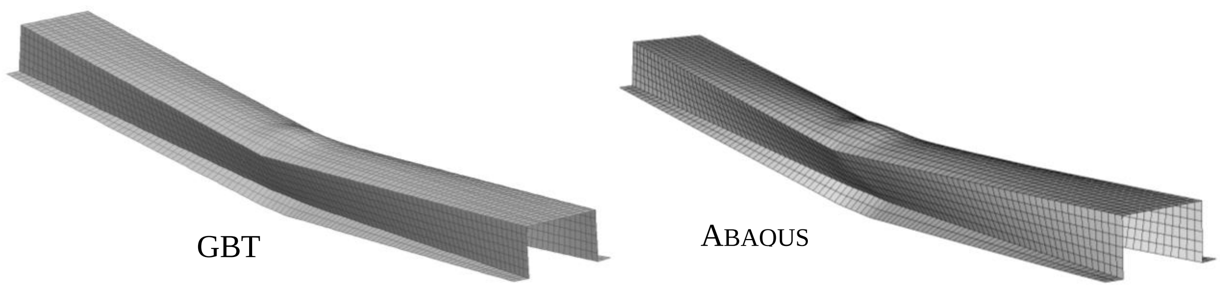


Fig. 6.C.16. Configuração deformada (reduzida 3x) da viga no colapso (estado P).

ANEXO 7.A

Análises Elasto-Plásticas de 2ª Ordem - Implementação

Apresenta-se neste anexo a definição do vector de forças internas e matriz de rigidez tangente no formato matricial em que foram implementados através do *software* MATLAB (*Mathworks 2012*). Importa notar que todas as integrações foram (i) realizadas numericamente através da quadratura de *Gauss-Legendre* e (ii) baseadas nas mudanças de variável de s para ξ ($\xi = s_p/b_p \in [0, 1]$) e de z para η ($\eta = z_p/e_p \in [-1/2, 1/2]$), onde e_p e b_p são a espessura e largura da sub-placa genérica p da secção transversal, respectivamente.

Vector de forças internas

A i-ézima componente (sub-vector 4x1 associado ao modo de deformação i da GBT) do vector de forças internas definida em (7.10), foi implementada vectorialmente através de

$$\begin{aligned} f_{i(xx)}^{\text{int}} &= \int_{L_e} F_{1i}^{xx}\left(ddS^i\right)^T + F_{2i}^{xx}\left(dS^i\right)^T\,dx \\ f_{i(ss)}^{\text{int}} &= \int_{L_e} F_{1i}^{ss}\left(S^i\right)^T + F_{2i}^{ss}\left(dS^i\right)^T\,dx \\ f_{i(xs)}^{\text{int}} &= \int_{L_e} F_{1i}^{xs}\left(dS^i\right)^T + F_{2i}^{xs}\left(ddS^i\right)^T + F_{3i}^{xs}\left(S^i\right)^T\,dx \end{aligned} \quad , \quad (7.A.1)$$

onde (i) i é um índice/expoente livre, (ii) S^i, dS^i e ddS^i são as funções de forma (1x4) do EFV correspondentes ao modo i da GBT (ver (6.7) – capítulo 6), e (iii) F_1^{xx}, F_2^{xx}, F_1^{ss}, etc., são vectores cuja linha i (*e.g.*, F_{1i}^{xx}) está associada ao modo i, os quais podem ser obtidos por

$$F_1^{xx} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(e_1 \underbrace{\left[U - \eta e_1^{aux1} \left(W + \alpha \begin{pmatrix} diag\left(W\Phi_2\right)U + \\ +diag\left(U\Phi_2\right)W \end{pmatrix} \right) + diag\left(U\Phi_2\right)U \right]}_{F_{1,aux}^{xx}} \right)^T \sigma_{xx}\, d\eta d\xi$$

$$F_2^{xx} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(e_1 \underbrace{\begin{bmatrix} diag\left(V\Phi_1\right) V + diag\left(W\Phi_1\right) W - \\ -\alpha\eta\, e_4 \begin{pmatrix} diag\left(W_{,\xi}\Phi_1\right)V + \\ +diag\left(V\Phi_1\right)W_{,\xi} \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{F_{2,aux}^{xx}} \right)^T \sigma_{xx}\, d\eta d\xi \qquad , \text{ (7.A.2)}$$

$$F_1^{ss} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(e_1 \underbrace{\begin{bmatrix} e_\xi^{aux} V_{,\xi} - \eta e_8 W_{,\xi\xi} + e_\xi \begin{pmatrix} diag\left(V_{,\xi}\Phi_0\right)V_{,\xi} + \\ +diag\left(W_{,\xi}\Phi_0\right)W_{,\xi} \end{pmatrix} \\ -\alpha\eta e_9 \begin{pmatrix} diag\left(W_{,\xi\xi}\Phi_0\right)V_{,\xi} + \\ +diag\left(V_{,\xi}\Phi_0\right)W_{,\xi\xi} \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{F_{1,aux}^{ss}} \right)^T \sigma_{ss}\, d\eta d\xi$$

$$F_2^{ss} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(e_1 \underbrace{\left[e_\xi diag\left(U_{,\xi}\Phi_1\right)U_{,\xi} - \alpha\eta e_8 \begin{pmatrix} diag\left(W_{,\xi}\Phi_1\right)U_{,\xi} + \\ +diag\left(U_{,\xi}\Phi_1\right)W_{,\xi} \end{pmatrix} \right]}_{F_{2,aux}^{ss}} \right)^T \sigma_{ss}\, d\eta d\xi \qquad , \text{ (7.A.3)}$$

$$F_1^{xs}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(e_1\underbrace{\begin{bmatrix} V-2\eta e_4 W_{,\xi}+e_\xi^{aux}\begin{pmatrix} U_{,\xi}+diag\left(U\Phi_2\right)U_{,\xi}+\\ +diag\left(V_{,\xi}\Phi_0\right)V+\\ +diag\left(W_{,\xi}\Phi_0\right)W \end{pmatrix}- \\ -\alpha\eta\left(e_4\begin{pmatrix} diag\left(U\Phi_2\right)W_{,\xi}+\\ +diag\left(W\Phi_2\right)U_{,\xi}\end{pmatrix}+e_8\begin{pmatrix} diag\left(W_{,\xi\xi}\Phi_0\right)V+\\ +diag\left(V_{,\xi}\Phi_0\right)W_{,\xi}\end{pmatrix}\right)\end{bmatrix}}_{F_{1,aux}^{xs}}\right)^T\sigma_{xs}\,d\eta d\xi$$

$$F_2^{xs}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(e_1\underbrace{\left[e_\xi^{aux}diag\left(U_{,\xi}\Phi_1\right)U-\alpha\eta e_4\begin{pmatrix} diag\left(W_{,\xi}\Phi_1\right)U+\\ +diag\left(U_{,\xi}\Phi_1\right)W\end{pmatrix}\right]}_{F_{2,aux}^{xs}}\right)^T\sigma_{xs}\,d\eta d\xi$$

$$F_3^{xs}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(e_1\underbrace{\begin{bmatrix} e_\xi^{aux}\begin{pmatrix} diag\left(V\Phi_1\right)V_{,\xi}+\\ +diag\left(W\Phi_1\right)W_{,\xi}\end{pmatrix}- \\ -\alpha\eta e_8\begin{pmatrix} diag\left(V\Phi_1\right)W_{,\xi\xi}+\\ +diag\left(W_{,\xi}\Phi_1\right)V_{,\xi}\end{pmatrix}\end{bmatrix}}_{F_{3,aux}^{xs}}\right)^T\sigma_{xs}\,d\eta d\xi \quad , \quad (7.A.4)$$

onde (i) U, V e W são matrizes modais que guardam na entrada (p, k) o perfil de deslocamentos de membrana (função de ξ) do modo de deformação k, no domínio da sub-placa p, (ii) σ_{mn} (mn = xx, ss, xs) são vectores coluna cuja p-ézima entrada corresponde à distribuição (em x, ξ e η) da respectiva tensão na sub-placa p e configuração de equilíbrio em causa (j), (iii) a função *diag* tem como resultado uma matriz diagonal cujas entradas são idênticas às do vector *input*, e (iv) Φ são vectores coluna onde a k-ézima entrada está associada ao modo de deformação k e corresponde à aproximação da sua função de forma ou de alguma derivada, relativas à configuração deformada j, ou seja,

$$\Phi_0\left(k\right)=S^k\,d_k\big|_j\,,\ \Phi_1\left(k\right)=dS^k\,d_k\big|_j,\ \Phi_2\left(k\right)=ddS^k\,d_k\big|_j \quad , \quad (7.A.5)$$

onde k é um índice livre. Relativamente às matrizes diagonais "e" que figuram em (7.A.2)-(7.A.3), as quais têm a dimensão do número de sub-placas existentes na secção (N_p) e resultam das transformações de variável referidas anteriormente, tem-se

$$e_1 = \begin{bmatrix} e_1 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p} b_{N_p} \end{bmatrix}, \quad e_1^{aux1} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p} \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} e_1/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}/b_{N_p} \end{bmatrix}$$

$$e_8 = \begin{bmatrix} e_1/b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}/b_{N_p}^2 \end{bmatrix}, \quad e_9 = \begin{bmatrix} e_1/b_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}/b_{N_p}^3 \end{bmatrix} \quad . \qquad (7.A.6)$$

$$e_\xi = \begin{bmatrix} 1/b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/b_{N_p}^2 \end{bmatrix}, \quad e_\xi^{aux} = \begin{bmatrix} 1/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/b_{N_p} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez tangente

Reescreva-se agora a "componente" *i-p* da matriz de rigidez tangente – sub-matriz 4x4 associada aos modos de deformação i e p (ver Eqs. (7.13)-(7.19)), no formato em que foi implementada computacionalmente. Uma vez que se vão integrar as expressões integrandas de (7.15)-(7.17) ao longo das várias sub-placas da secção transversal (tal como tem sido feito até aqui), começa-se por definir os gradientes de tensões (7.19) recorrendo a matrizes ($G_{\sigma\text{-}d}$) em que a p-ézima coluna guarda os gradientes em cada sub-placa (linha da matriz) associados ao modo de deformação p, vindo ($mn = xx, ss, xs$)

$$\begin{aligned} G_{\sigma_{mn}-d_{pt}} = {} & e_{d\sigma}^{mn-xx}\left\{F_{1,aux}^{xx} e_{\zeta,xx}^t + F_{2,aux}^{xx} e_{\zeta,x}^t\right\} + e_{d\sigma}^{mn-ss}\left\{F_{1,aux}^{ss} e_{\zeta}^t + F_{2,aux}^{ss} e_{\zeta,x}^t\right\} + \\ & + e_{d\sigma}^{mn-xs}\left\{F_{1,aux}^{xs} e_{\zeta,x}^t + F_{2,aux}^{xs} e_{\zeta,xx}^t + F_{3,aux}^{xs} e_{\zeta}^t\right\} \end{aligned} \quad , \qquad (7.A.7)$$

onde (i) as matrizes $F_{1,aux}^{xx}$, $F_{2,aux}^{xx}$, etc. estão indicadas nas expressões (7.A.2)-(7.A.4), e (ii) as matrizes diagonais e^t (dimensão do número de modos de deformação (N_{GBT})) e $e_{d\sigma}$ (dimensão do número de sub-placas (N_p)) são dadas por

$$e_{d\sigma}^{a-b}=\left[\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial\sigma_a}{\partial\varepsilon_b}\right)_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \left(\dfrac{\partial\sigma_a}{\partial\varepsilon_b}\right)_{N_p}\end{bmatrix}\right]_j$$

,(7.A.8)

$$e_{\zeta}^{t}=\begin{bmatrix}S_t^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_t^{N_{GBT}}\end{bmatrix},\quad e_{\zeta,x}^{t}=\begin{bmatrix}dS_t^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & dS_t^{N_{GBT}}\end{bmatrix},\quad e_{\zeta,xx}^{t}=\begin{bmatrix}ddS_t^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & ddS_t^{N_{GBT}}\end{bmatrix}$$

onde (i) $e_{d\sigma}^{a-b}$ guarda os gradientes de tensões em cada sub-placa na configuração de equilíbrio j – no caso da deformação por corte ($b\equiv xs$) deve constar γ_{xs} (em vez de ε_{xs}) no denominador, (ii) S_t^q, dS_t^q e ddS_t^q correspondem à t-ézima (t=1,...,4) componente dos vectores de funções de forma e suas derivadas, relativos ao modo q (q=1,...,N_{GBT}). Definidos que estão os gradientes de tensões (7.19), procede-se à implementação dos gradientes (7.15)-(7.17) como se apresenta de seguida.

Relativamente à implementação da expressão (7.15), tem-se

$$\frac{\partial f_{i(xx)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}}=\int_{L_e}\left[\left(A_{xx-1}+A_{xx-3}\right)\left(ddS^i\right)^T+\left(A_{xx-2}+A_{xx-4}\right)\left(dS^i\right)^T\right]dx \qquad , \text{(7.A.9)}$$

com

$$A_{xx-1}=M_{xx-1}(i,p),\quad M_{xx-1}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(M_{xx-1}^{aux}\right)^T G_{\sigma_{xx}-d_{pt}}\,d\eta d\xi,\quad M_{xx-1}^{aux}=e_1F_{1,aux}^{xx}$$

$$A_{xx-2}=M_{xx-2}(i,p),\quad M_{xx-2}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(M_{xx-2}^{aux}\right)^T G_{\sigma_{xx}-d_{pt}}\,d\eta d\xi,\quad M_{xx-2}^{aux}=e_1F_{2,aux}^{xx}$$

$$A_{xx-3}=M_{xx-3}(i,p),\quad M_{xx-3}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\begin{bmatrix}U^Te_{\sigma_{xx}}e_1U-\\ -\alpha\eta\left(U^Te_{\sigma_{xx}}e_{10}W+W^Te_{\sigma_{xx}}e_{10}U\right)\end{bmatrix}e_{\zeta,xx}^{t}\,d\eta\,d\xi \qquad , \text{(7.A.10)}$$

$$A_{xx-4}=M_{xx-4}(i,p),\quad M_{xx-4}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\begin{bmatrix}V^Te_{\sigma_{xx}}e_1V+W^Te_{\sigma_{xx}}e_1W-\\ -\alpha\eta\left(V^Te_{\sigma_{xx}}e_1^{aux2}W_{,\xi}+W_{,\xi}{}^Te_{\sigma_{xx}}e_1^{aux2}V\right)\end{bmatrix}e_{\zeta,x}^{t}\,d\eta\,d\xi$$

onde (i) $G_{\sigma\text{-}d}$ está definida em (7.A.7), (ii) as matrizes $F_{1,aux}^{xx}$ e $F_{2,aux}^{xx}$ estão indicadas em (7.A.2), (iii) as matrizes diagonais e^t estão definidas em (7.A.8), e (iv) as restantes matrizes diagonais "*e*" (dimensão igual ao número de sub-placas (N_p)) são dadas por (mn=xx)

$$e_{\sigma_{mn}} = \left\| \begin{bmatrix} (\sigma_{mn})_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sigma_{mn})_{N_p} \end{bmatrix} \right\|_j$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} e_1 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p} b_{N_p} \end{bmatrix}, e_{10} = \begin{bmatrix} e_1^2 b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^2 b_{N_p} \end{bmatrix}, e_1^{aux2} = \begin{bmatrix} e_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^2 \end{bmatrix} . \quad (7.A.11)$$

Relativamente à implementação da expressão (7.16), tem-se

$$\frac{\partial f_{i(ss)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}} = \int_{L_e} \left[\left(A_{ss-1} + A_{ss-3} \right) \left(S^i \right)^T + \left(A_{ss-2} + A_{ss-4} \right) \left(dS^i \right)^T \right] dx \quad , \quad (7.A.12)$$

com

$$A_{ss-1} = M_{ss-1}(i,p), \quad M_{ss-1} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(M_{ss-1}^{aux} \right)^T G_{\sigma_{ss}-d_{pt}} \, d\eta d\xi, \quad M_{ss-1}^{aux} = e_1 F_{1,aux}^{ss}$$

$$A_{ss-2} = M_{ss-2}(i,p), \quad M_{ss-2} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \left(M_{ss-2}^{aux} \right)^T G_{\sigma_{ss}-d_{pt}} \, d\eta d\xi, \quad M_{ss-2}^{aux} = e_1 F_{2,aux}^{ss}$$

$$A_{ss-3} = M_{ss-3}(i,p), \quad M_{ss-3} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{bmatrix} V_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{ss}} e_4 V_{,\xi} + W_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{ss}} e_4 W_{,\xi} - \\ -\alpha\eta \left(V_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{ss}} e_{12} W_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi}{}^T e_{\sigma_{ss}} e_{12} V_{,\xi} \right) \end{bmatrix} e_\zeta^t \, d\eta d\xi \quad , \quad (7.A.13)$$

$$A_{ss-4} = M_{ss-4}(i,p), \quad M_{ss-4} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{bmatrix} U_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{ss}} e_4 U_{,\xi} - \\ -\alpha\eta \left(U_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{ss}} e_{11} W_{,\xi} + W_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{ss}} e_{11} U_{,\xi} \right) \end{bmatrix} e_{\zeta,x}^t \, d\eta d\xi$$

onde (i) $G_{\sigma\text{-}d}$ está definida em (7.A.7), (ii) as matrizes $F_{1,aux}^{ss}$ e $F_{2,aux}^{ss}$ estão indicadas em (7.A.3), (iii) as matrizes diagonais e^t são dadas por (7.A.8), e (iv) as restantes matrizes diagonais "*e*" (dimensão igual ao número de sub-placas (N_p)) são definidas em (7.A.11) (mn=ss) e por

$$e_4=\begin{bmatrix} e_1/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}/b_{N_p} \end{bmatrix}, e_{11}=\begin{bmatrix} e_1^2/b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^2/b_{N_p} \end{bmatrix}, e_{12}=\begin{bmatrix} e_1^2/b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{N_p}^2/b_{N_p}^2 \end{bmatrix}. \quad (7.A.14)$$

Por último, resta apresentar a forma como a expressão (7.17) foi implementada, vindo

$$\frac{\partial f_{i(xs)}^{\text{int}}}{\partial d_{pt}}=\int_{L_e}\begin{bmatrix} \left(A_{xs-1}+A_{xs-4}+A_{xs-5}\right)\left(dS^i\right)^T+\left(A_{xs-2}+A_{xs-6}\right)\left(ddS^i\right)^T+ \\ +\left(A_{xs-3}+A_{xs-7}\right)\left(S^i\right)^T \end{bmatrix} dx \quad , \ (7.A.15)$$

com

$$A_{xs-1}=M_{xs-1}(i,p), \quad M_{xs-1}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(M_{xs-1}^{aux}\right)^T G_{\sigma_{xs}-d_{pt}}\, d\eta d\xi, \quad M_{xs-1}^{aux}=e_1 F_{1,aux}^{xs}$$

$$A_{xs-2}=M_{xs-2}(i,p), \quad M_{xs-2}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(M_{xs-2}^{aux}\right)^T G_{\sigma_{xs}-d_{pt}}\, d\eta d\xi, \quad M_{xs-2}^{aux}=e_1 F_{2,aux}^{xs}$$

$$A_{xs-3}=M_{xs-3}(i,p), \quad M_{xs-3}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(M_{xs-3}^{aux}\right)^T G_{\sigma_{xs}-d_{pt}}\, d\eta d\xi, \quad M_{xs-3}^{aux}=e_1 F_{3,aux}^{xs}$$

$$A_{xs-4}=M_{xs-4}(i,p), \quad M_{xs-4}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\begin{bmatrix} U_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux1} U- \\ -\alpha\eta\left(W_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux2} U+U_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux2} W\right) \end{bmatrix} e_{\zeta,xx}^t\, d\eta\, d\xi$$

$$A_{xs-5}=M_{xs-5}(i,p), \quad M_{xs-5}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\begin{bmatrix} V^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux1} V_{,\xi}+W^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux1} W_{,\xi}- \\ -\alpha\eta\left(V^T e_{\sigma_{xs}} e_{11} W_{,\xi\xi}+W_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{xs}} e_{11} V_{,\xi}\right) \end{bmatrix} e_{\zeta}^t\, d\eta\, d\xi$$

$$A_{xs-6}=M_{xs-6}(i,p), \quad M_{xs-6}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\begin{bmatrix} U_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux1} U- \\ -\alpha\eta\left(W_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux2} U+U_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux2} W\right) \end{bmatrix}^T e_{\zeta,x}^t\, d\eta\, d\xi \quad , \ (7.A.16)$$

$$A_{xs-7}=M_{xs-7}(i,p), \quad M_{xs-7}=\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\begin{bmatrix} V^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux1} V_{,\xi}+W^T e_{\sigma_{xs}} e_1^{aux1} W_{,\xi}- \\ -\alpha\eta\left(V^T e_{\sigma_{xs}} e_{11} W_{,\xi\xi}+W_{,\xi}{}^T e_{\sigma_{xs}} e_{11} V_{,\xi}\right) \end{bmatrix}^T e_{\zeta,x}^t\, d\eta\, d\xi$$

onde (i) $G_{\sigma\text{-}d}$ está definida em (7.A.7), (ii) as matrizes $F_{1,aux}^{xs}$, $F_{2,aux}^{xs}$ e $F_{2,aux}^{xs}$ estão indicadas em (7.A.4), (iii) as matrizes diagonais e^t são dadas por (7.A.8), e (iv) as restantes matrizes diagonais "*e*" (dimensão igual ao número de sub-placas (N_p)) estão definidas em (7.A.6), (7.A.11) (*mn*=*xs*) e (7.A.14).

Referências

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2011a). Análise elasto-plástica de barras com secção de parede fina no contexto da teoria generalizada de vigas, *Actas (CD-ROM) do Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia* (CMNE), Coimbra (Portugal), 14-17/6, A. Tadeu *et al.* (eds.).

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2011b). Análise fisicamente não linear de vigas metálicas no contexto da GBT, *Actas do VIII Congresso de Construção Metálica e Mista*, Guimarães, Portugal, 24-25/11, L. Silva et al. (eds.), II-295-304.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2012a). GBT-based elastic-plastic analysis of cold-formed steel members. *Proceedings of the 7th International Conference on Advances in Steel Structures* (ICASS), Nanjing (China), 14-16/4, S.L. Chan, G.P. Shu (eds.), Vol. 1, 219-227.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2012b). Geometrically and physically non-linear GBT-based analysis of thin-walled steel members, *Proc. of the 10th Int. Conf. on Advances in Steel Concrete Composite and Hybrid Structures* (ASCCS), Singapore, 2-4/7, J.R. Liew, S.C. Lee (eds.), Research Publishing (Singapore), 187-195.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2012c). First order elastoplastic GBT analysis of tubular beams, *Proceedings of the 14th Int. Symposium on Tubular Structures*, London (UK), 12-14/9, L. Gardner (ed.), CRC (Taylor & Francis), 705-712.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2012d). GBT-based elastic-plastic post-buckling analysis of stainless steel thin-walled members, *Online proceedings of the Stainless Steel in Structures: 4th International Experts Seminar*, Ascot (UK), 6-7/12, The Steel Construction Institute (SCI) (*www.steel-stainless.org/experts12*).

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013a). Modal decomposition of thin-walled member collapse mechanisms, *Thin-Walled Structures*, **74** (January), 269-291.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013b). GBT-based first-order analysis of elastic-plastic thin-walled steel members exhibiting strain-hardening, *IES Journal A: Civil and Structural Eng.* (Singapore), **6**(2), 119-134.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013c). Inelastic post-buckling GBT analysis of tubular thin-walled metal members, *Proceedings of the 5th International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation*, Cape Town (South Africa), 2-4/9, Alphose Zingoni (ed.), CRC Press, 417-418. (full paper in CD-ROM, 1157-1164).

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013d). Geometrically and materially non-linear GBT analysis of tubular thin-walled metal members, *USB-drive Proc. Congress on Numerical Methods in Engineering*, Bilbao (Spain), 25-28/6.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013e). GBT-based structural analysis of elastic-plastic thin-walled members, *USB Drive Proc. of the SSRC Annual Stability Conference*, St. Louis (Missouri, USA), 16-20/4.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013f). Physically non linear GBT analysis of thin-walled members, *Computers & Structures*, **129** (December), 148-165.

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013g). GBT-based elastic-plastic post-buckling analysis of stainless steel thin-walled members, *Thin-Walled Structures, in press.*

Abambres M., Camotim D., Silvestre N. (2013h). Análise inelástica de pós-encurvadura de perfis metálicos de parede fina utilizando a teoria generalizada de vigas, *Actas do IX Congresso de Construção Metálica e Mista* (CMM), Matosinhos, Portugal, 24-25/10, L. Silva et al. (eds.).

Abambres M., Camotim D., Silvestre N., Rasmussen, K.J.R. (2013). GBT-based structural analysis of elastic-plastic thin-walled members, *Computers & Structures*, *in press*.

Abdella K. (2006). Inversion of a full-range stress-strain relation for stainless steel alloys, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **41**(3), 456-463.

Abdella K. (2007). An explicit stress formulation for stainless steel applicable in tension and compression, *Journal of Constructional Steel Research*, **63**(3), 326-331.

Abdella K., Thannon R.A., Mehri A.I., Alshaikh F.A. (2011). Inversion of three-stage stress-strain relation for stainless steel in tension and compression, *Journal of Constructional Steel Research*, **67**(5), 826-832.

Ádány S., Joó A.L., Schafer B.W. (2010). Buckling mode identification of thin-walled members by using cFSM base functions, *Thin-Walled Structures*, **48**(10-11), 806-817.

Ádány S., Schafer B.W. (2006). Buckling mode decomposition of single-branched open cross-section members via finite strip method: Application and examples, *Thin-Walled Structures*, **44**(5), 585-600.

AISI - American Iron and Steel Institute (1968). *Specification for the Design of Light Gauge Cold-Formed Stainless Steel Structural Members*, American Iron and Steel Institute.

AISI - American Iron and Steel Institute (2007). *North American Specification for the Design of Cold Formed Steel Structural Members*, American Iron and Steel Institute.

Allen D. (2006). History of cold formed steel, *STRUCTURE magazine* (November), pp. 28-32.

AISC - American Institute of Steel Construction (2010). *Specification for Structural Steel Buildings*, ANSI/AISC 360-10, Chicago.

American Mathematical Society (1963). *Selected papers of Richard von Mises*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, pp. 189-199.

Anapayan T., Mahendran M., Mahaarachchi D.(2011). Lateral distortional buckling tests of a new hollow flange channel beam, *Thin-Walled Structures*, **49**(1), 13-25.

Anapayan T, Mahendran M (2012). "Numerical modelling and design of LiteSteel Beams subject to lateral buckling", *Journal of Constructional Steel Research*, **70**(March), 51-64.

Standards Australia (AS) / New Zeland (NZS) (2001). *Cold-Formed Stainless Steel Structures* (AS/NZS 4673:2001).

ASCE - American Society of Civil Engineers (1991). *Specification for the Design of Cold-Formed Stainless Steel Structural Members* (ANSI/ASCE-8-90), American Society of Civil Engineers.

ASCE – American Society of Civil Engineers (2002). *Specification for the Design of Cold-Formed Stainless Steel Structural Members* (*SEI/ASCE 8-02*), American Society of Civil Engineers.

Ashraf M., Gardner L., Nethercot D. (2005). Strength enhancement of the corner regions of stainless steel cross-sections, *Journal of Constructional Steel Research*, **61**(1), 37-52.

Ashraf M., Gardner L., Nethercot D. (2006a). Compression strength of stainless steel cross-sections, *Journal of Constructional Steel Research*, **62**(1-2), 105-115.

Ashraf M., Gardner L., Nethercot D. (2006b). Finite element modelling of structural stainless steel cross-sections, *Thin-Walled Structures*, **44**(10), 1048-1062.

Baddoo N.R. (2008). Stainless steel in construction: A review of research, applications, challenges and opportunities, *Journal of Constructional Steel Research*, **64**(11), 1199-1206.

Bakker, M.C.M. (1990). Yield-line analysis of post-collapse behavior of thin-walled steel members, *Heron*, vol. 35, no. 3, Vrouwenvelder et al. (eds.), Delft University of Technology.

Basaglia C. (2010). Análise Não Linear de Barras e Pórticos Metálicos Utilizando a Teoria Generalizada de Vigas, *Tese de Doutoramento*, Departamento de Engenharia Civil, Arquitectura e Georecursos, Instituto Superior Técnico (UTL).

Batra, R.C. (2006). *Elements of Continuum Mechanics*, AIAA Education Series, Reston.

Bauschinger J. (1886). *On the change of the position of elastic limit of iron and steel under cyclic variation of stress*, Mitt. Mech.-Tech. Lab. Munich, **13**(1).

Bebiano R., Camotim D., Gonçalves R. (2013). Desenvolvimentos Recentes no Programa GBTUL: Análise de Barras de Parede Fina utilizando a GBT, *USB-drive Proc. of the Congress on Numerical Methods in Eng.*, Bilbao (Spain), 25-28/6.

Bebiano R., Pina P., Silvestre N., Camotim D. (2008). *GBTUL – Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Members (software)*, DECivil/IST, University of Lisbon (*http://www.civil.ist.utl.pt/gbt*).

Bebiano R., Silvestre N., Camotim D. (2007). GBT formulation to analyze the buckling behaviour of thin-walled members subjected to non-uniform bending, *Int. Journal of Structural Stability and Dynamics*, 7(1), 23-54.

Becque J. (2010). Inelastic plate buckling, Journal of Engineering Mechanics – ASCE, **136**(9), 1123-30.

Becque J. (2011). Experimental verification of an inelastic plate theory based on plastic flow theory, *Thin-Walled Structures*, **49**(12), 1563-1572.

Becque J., Rasmussen K.J.R. (2009). Numerical investigation of the interaction of local and overall buckling of stainless steel I-columns, *Journal of Structural Engineering*, **135**(11), 1349-1356.

Becque J., Rasmussen K.J.R. (2009). Experimental investigation of local-overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns, *Journal of Constructional Steel Research*, **65** (8-9), 1677-1684.

Belytschko T., Liu W.K., Moran B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Wiley, Chichester (UK).

Bjorhovde R. (1972). Deterministic and probabilistic approaches to the strength of steel columns, *Ph. D. dissertation*, Lehigh University, Bethlehem (PA).

Bonada J., Casafont M., Roure F., Pastor M.M. (2012). Selection of the initial geometrical imperfection in nonlinear FE analysis of cold-formed steel rack columns, *Thin-Walled Structures*, **51**(February), 99-111.

Bridgman P. W. (1952). *Studies in Large Plastic Flow and Fracture With Special Emphasis on the Effects of Hydrostatic Pressure*, McGraw-Hill, NewYork.

Buildings Department (BD) – The Government of the Hong Kong Special Administrative Region (2011). *Code of Practice for the Structural Use of Steel*, Hong Kong.

Camotim D., Basaglia C., Bebiano R., Gonçalves R., Silvestre N. (2010a). Latest developments in the GBT analysis of thin-walled steel structures, *Proceedings of International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures* (SDSS'Rio– Rio de Janeiro, 8-10/9), E. Batista et al. (eds.), 33-58.

Camotim D., Basaglia C., Silva N.F., Silvestre N. (2010b). Numerical analysis of thin-walled structures using Generalised Beam Theory (GBT): recent and future developments, *Computational Technology Reviews*, **1**, B. Topping *et al.* (eds.), Saxe-Coburg Publications (Stirlingshire), 315-354.

Camotim D., Silvestre N., Dinis P.B. (2006a). Análise numérica de elementos estruturais de aço enformados a frio: desenvolvimentos recentes perspectivas futuras, *Revista Sul-Americana Eng. Estrutural*, **3**(1), 55-100.

Camotim D., Silvestre N., Gonçalves R. e Dinis P.B. (2004). GBT analysis of thin-walled members: new formulations and applications, *Thin-Walled Structures: Recent Advances and Future Trends in Thin-Walled Structures Technology* (International Workshop – Loughborough, 25/6), J. Loughlan (Ed.), Canopus Publishing Ltd., 137-168.

Camotim D., Silvestre N., Gonçalves R. e Dinis P.B. (2006b). GBT-based structural analysis of thin-walled members: overview, recent progress and future developments, *Advances in Engineering Structures, Mechanics and Construction* (SMCD 2006 – Waterloo, 14-17/5), M. Pandey, W.-C. Xie, L. Chu (Eds.), Springer, 187-204.

Casafont M., Marimon F., Pastor M., Ferrer M. (2011). Linear buckling analysis of thin-walled members combining the Generalised Beam Theory and the Finite Element Method, *Computers & Structures*, **89**(21-22), 1982-2000.

CASE – Centre for Advanced Structural Engineering (1996). *Computer Program THIN-WALL* (v.1.2) - *Users Manual*, School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney.

CEN - Comité Européen de Normalisation (2005a). *Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings* (EN 1993-1-1), Bruxelas.

CEN - Comité Européen de Normalisation (2005b). *Stainless Steels - Part 1: List of Stainless Steels* (EN 10088-1), Bruxelas.

CEN - Comité Européen de Normalisation (2006a). *Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1-4: General Rules – Supplementary Rules for Stainless Steels* (EN 1993-1-4), Bruxelas.

CEN – Comité Européen de Normalisation (2006b). *Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1.5: General Rules and Supplementary Rules for Plated Structures* (EN 1993-1-5), Bruxelas.

CEN - Comité Européen de Normalisation (2006c). *Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1-3: General rules - Supplementary Rules for Cold-Formed Members and Sheeting* (EN 1993-1-3), Bruxelas.

CEN - Comité Européen de Normalisation (2009). *Stainless Steels – Part 4: Technical Delivery Conditions for Sheet/Plate and Strip of Corrosion Resisting Steels for Construction Purposes* (EN 10088-4), Bruxelas.

Chen W.F., Han D.J. (1988). *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York.

Cheung Y.K. (1969). Folded Plate Structures by the Finite Strip Method, *J. Structural Division* (ASCE), **95**, 2963-2979.

Cheung Y.K. (1976). *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, Oxford.

Cheung Y.K., Tham L.G. (1998). *The Finite Strip Method*, CRC Press, Boca Raton.

Cheung M.S., Li W., Chidiac S.E. (1996). *Finite Strip Analysis of Bridges*, E & FN Spon, London.

Christensen R.M. (2006). A comprehensive theory of yielding and failure for isotropic materials, *Journal of Engineering Materials and Technology*, **129** (April), 173-181.

Clarke M. J., Hancock G.J. (1990). A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear-Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**(7), 1365-1391.

Clough R.W. (1960). The finite element method in plane stress analysis, Proceedings of 2nd conference on electronic computation, ASCE Structural Division, Pittsburgh, 345.

Clough R.W., Wilson E.L. (1962). Stress analysis of a gravity dam by the finite element method, *Proceedings of symposium on the use of computers in civil engineering*, LNEC, Lisbon, v. 1, 29.1-29.22.

Crisfield M.A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”, *Computers and Structures*, **13**(1-3), 55-62.

Crisfield M.A. (1991). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (*vol.1: Essentials*), John Wiley & Sons.

Crisfield M.A. (1997). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (*vol.2: Adv. Topics*), John Wiley & Sons.

Cruise R.B., Gardner L. (2006). Measurement and prediction of geometric imperfections in structural stainless steel members, *Structural Engineering and Mechanics*, **24**(1), 63-89.

Cruise R.B., Gardner L. (2008a). Residual stress analysis of structural stainless steel sections, *Journal of Constructional Steel Research*, **64**(3), 352-366.

Cruise R.B., Gardner L. (2008b). Strength enhancements induced during cold forming of stainless steel sections, *Journal of Constructional Steel Research*, **64**(11), 1310-1316.

CUFSM (2011). *Elastic Buckling Analysis of Thin-Walled Members by the finite strip method and constrained finite strip method for general end boundary conditions* (v 4.05), Department of Civil Engineering, Johns Hopkins University (http://www.ce.jhu.edu/bschafer).

Cunat P.-J. (2004). Alloying Elements in Stainless Steel and Other Chromium-Containing Alloys, disponível em *www.euro-inox.org*, Euro Inox, Bruxelas.

Dawson R.G., Walker A.C. (1972). Post-buckling of geometrically imperfect plates, *Journal of Structural Division* (ASCE), **98**(1), 75-94.

De Borst R, Crisfield M, Remmers J, Verhoosel CV (2012). *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (*Second Edition*), John Wiley & Sons, Chichester (UK).

Dinis P.B., Camotim D., Silvestre N. (2006). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily 'branched' open cross-sections, *Thin-Walled Structures*, **44**(1), 20-38.

Dinis P.B., Camotim D., Silvestre N. (2010). On the local and global buckling behaviour of angle, T-section and cruciform thin-walled members, *Thin-Walled Structures*, **48**(10-11), 786-797.

Dinis P.B., Camotim D., Silvestre N. (2012). On the mechanics of thin-walled angle column instability, *Thin-Walled Structures*, **52**(March), 80-89.

DS Simulia Inc. (2004). *ABAQUS Standard* (version 6.5).

Dubina D., Ungureanu V. (2002). Effect of imperfections on numerical simulation of instability behaviour of cold-formed steel members, *Thin-Walled Structures*, **40**(3), 239-262.

Dunai L. (2002). Virtual Experiments of Steel Structures, *Stability and Ductility of Steel Structures* (SDSS'2002), Iványi M. (Ed.), Akadémiai Kiadó, Budapest, 825-832.

Ellobody E., Young B. (2005). Structural performance of cold-formed high strength stainless steel columns, *Journal of Constructional Steel Research*, **61**(12), 1631-1649.

Euro Inox (2002). 'Villa Inox' in Tuusula, Finland, disponível em *www.euro-inox.org*, Euro Inox, Bruxelas.

Euro Inox (2007a). Commentary to the third edition of the design manual for structural stainless steel, disponível em *www.steel-stainless.org/designmanual*, Building Series, Vol. 11, Euro Inox, Bruxelas.

Euro Inox (2007b). *Stainless steel: Tables of technical properties (second edition)*, Materials and Applications Series, Vol.5, Euro Inox, Bruxelas.

Euro Inox, SCI – The Steel Construction Institute (2007). *Design Manual for Structural Stainless Steel (third edition)*, Building Series, Vol. 11, Euro Inox, Bruxelas.

Gao T., Moen C. (2010). The Cold Work of Forming Effect in Steel Structural Members, *Proceedings of the International Colloquia on Stability and Ductility of Steel Structures* (SDSS), Rio de Janeiro, Brazil, 8-10/9.

Gardner L., Nethercot D. (2004a). Experiments on stainless steel hollow sections – Part 1: Material and cross-sectional behaviour, *Journal of Constructional Steel Research*, **60**(9), 1291-1318.

Gardner L., Nethercot D. (2004b). Numerical modeling of stainless steel structural components – A consistent approach, *Journal of Structural Engineering*, **130**(10), 1586-1601.

Gardner L., Cruise R. (2009). Modeling of Residual Stresses in Structural Stainless Steel Sections, *J.ournal of Structural Engineering*, **135**(1), 42-53.

Gau J.T., Kinzel G.L. (2001). An Experimental Investigation of the Influence of the Baushinger Effect on Springback Predictions, *Journal of Materials Processing Technology*, **108**(3), 369-375.

Gedge G. (2008). Structural uses of stainless steel – buildings and civil engineering, *Journal of Constructional Steel Research*, **64**(11), 1194-1198.

Gonçalves R., Camotim D. (2004). GBT local and global buckling analysis of aluminum and stainless steel columns, *Computers and Structures*, **82**(17-19), 1473-1484.

Gonçalves R., Camotim D. (2005). Formulation of a physically non-linear beam finite element using generalised beam theory, *Proceedings of 4th European Conference on Steel and Composite Structures* (Eurosteel 2005), B. Hoffmeister e O. Hechler (Eds.), Maastricht 1.2-53–1.2-60.

Gonçalves R. e Camotim D. (2007). Thin-walled member plastic bifurcation analysis using generalised beam theory, *Advances in Engineering Software*, **38**(8-9), 637-646.

Gonçalves R., Camotim D. (2011). Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members, *Thin-Walled Structures*, **49**(10), 1237-1245.

Gonçalves R., Camotim D. (2012). Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members, *Thin-Walled Structures*, **51**(February), 121-129.

Gonçalves R., Dinis P.B., Camotim D. (2005). GBT formulation to analyze the stability of thin-walled members with fully arbitrary cross-section shapes, *CD-ROM Proceedings of the 2005 Joint ASME/ASCE/SES Conference on Mechanics and Materials* (McMat 2005 − Baton Rouge, 1-3/6).

Gonçalves R., Dinis P.B., Camotim D. (2009). GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections, *Thin-Walled Structures*, **47**(5), 583-600.

Gonçalves R., Ritto-Corrêa M., Camotim D. (2010). A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory, *Computational Mechanics*, **46**(5), 759-781.

Gozzi, J. (2004). Plastic Behavior of Steel – *Experimental Investigation and modeling* (Licentiate Thesis), Lulea University of Technology, Sweden.

Granlund J. (1997). Structural Steel Plasticity – Experimental study and theoretical modelling, *Doctoral Thesis*, Lulea University of Technology, Lulea.

Hancock G.J. (1998). *Design of Cold-Formed Steel Structures*, Australian Institute of Steel Construction.

Hassanein M.F. (2010). Imperfection analysis of austenitic stainless steel plate girders failing by shear, *Engineering Structures*, **32**(3), 704-713.

Hellweg H.-B., Crisfield M.A. (1998). A new arc-length method for handling sharp nap-backs, *Computers and Structures*, **66**(5), 705-709.

Hencky, H. (1924). Zur theorie plastischer deformationen und der hierdurch im material hervorgerufenen nachspannungen, *Proceedings of the International Congress for Applied Mechanics*, Delft, 22-26/4, Technische Boekhandel en Drukkerij J. Waltman Jr., 1925, pp. 312-317.

Hill H. (1944). Determination of stress-strain relations from the offset yield strength values, *Technical report 927, National Advisory Committee for Aeronautics*, Washington.

Hill R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford, UK.*

Hiriyur B.K.J., Schafer B.W. (2005). Yield-line Analysis of Cold-formed Steel Members, *International Journal of Steel Structures*, **5**(1), 43-54.

Houska C., Wilson K (2008). Stainless steel inspires design metamorphosis, disponível em *www.nickelinstitute.org*, The Nickel Institute.

Hsu T.C. (1966). Definition of the yield point in plasticity and its effect on the shape of the yield locus, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **1**(4), 331-338.

Hutchinson J.W. (1974). Plastic Buckling, Advances in Applied Mechanics, Yih C-S (editor), New York: Academic, 67-144.

Ilyushin, A.A. (1948). *Plasticity, Part 1 – Elastic-Plastic Deformations*, State Publisher of Technical Theoretical Literature, Moscow and Leningrad, (reprinted by Logos, Moscow, 2004).

Ishikawa H. (1997). Subsequent Yield Surface Probed From Its Current Center, *Int. Journal of Plasticity*, **13**(6-7), 533-549.

ISSF - International Stainless Steel Forum (2012). Documentação *online* disponível em *www.worldstainless.org*.

Jandera M., Gardner L., Machacek J. (2008). Residual stresses in cold-rolled stainless steel hollow sections, *Journal of Constructional Steel Research*, **64**(11), 1255-1263.

Jiang X.-M., Chen H., Richard Liew J.Y. (2002). Spread-of-plasticity analysis of three-dimensional steel frames, *Journal of Constructional Steel Research*, **58**(2), 193-212.

Johansson B., Olsson A. (2000). Current design practice and research on stainless steel structures in Sweden, *Journal of Constructional Steel Research*, **54**(1), 3-29.

Jones, R.M. (2009). *Deformation Theory of Plasticity*, Bull Ridge, Blacksburg (Virginia, USA).

Key P.W., Hancock G.J. (1993a). A Theoretical Investigation of the Column Behavior of Cold-Formed Square Hollow Sections, *Thin-Walled Structures*, **16**(1-4), 31–64.

Key P.W., Hancock G.J. (1993b). A finite strip method for the elastic-plastic large displacement analysis of thin-walled and cold-formed steel sections, *Thin-Walled Structures*, **16**(1-4), 3-29.

Kfistek V., Bazant Z. (1987). Shear lag effect and uncertainty in concrete box girder creep, *Journal of Structural Engineering*, **113**(3), 557-74.

Koiter W.T., Kuiken G.D. (1971). *The Interaction Between Local Buckling and Overall Buckling on the Behaviour of Buit-up Columns*, Report WTHD-23, Delft University of Technology.

Kotełko M. (2004). Load-capacity estimation and collapse analysis of thin-walled beams and columns—recent advances, *Thin-Walled Structures*, **42**(2), 153-175.

Langdon G.S., Schleyer G. K. (2004). Unusual strain rate sensitive behaviour of AISI 316L austenitic stainless steel, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **39**(1), 71-86

Lecce M., Rasmussen K.J.R. (2005). Experimental investigation of the distortional buckling of cold-formed stainless steel sections, *Research Report No. 844 - School of Civil Engineering, University of Sydney*, Australia.

Lecce M., Rasmussen K.J.R. (2006a). Distortional buckling of cold-formed stainless steel sections: Experimental investigation, *Journal of Structural Engineering*, **132**(4), 497-504.

Lecce M., Rasmussen K.J.R. (2006b). Distortional buckling of cold-formed stainless steel sections: Finite-element modeling and design, *Journal of Structural Engineering*, **132**(4), 505-514.

Lee S.C., Yoo C.H., Yoon D.Y. (2002). Analysis of Shear Lag Anomaly in Box Girders, *Journal of Structural Engineering*, **128**(11), 1379-86.

Leonard, J. (2007). Investigation of Shear Lag Effect in High-rise Buildings with Diagrid System, Master Thesis in Civil and Environmental Engineering, M.I.T., U.S.A.

Li Z., Abreu J.B., Ádány S., Schafer B.W. (2012). Cold-formed steel member stability and the constrained Finite Strip Method, Proceedings of Sixth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS 2012 – Glasgow, 3-5/12), J. Loughlan, D. Nash, J. Rhodes (eds.), 1-16.

Li Z., Hanna M.T., Ádány S., Schafer B.W. (2011). Impact of basis, orthogonalization, and normalization on the constrained Finite Strip Method for stability solutions of open thin-walled members, *Thin-Walled Structures*, **49**(9), 1108-1122.

Li Z., Schafer B.W. (2010). Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods, *Proceedings of the 20th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures* (Saint Louis, MO, 3-4/11).

Liu Y., Hui L.(2012). Finite element study of steel single angle beam–columns, *Engineering Structures*, **32**(8), 2087-2095.

Loughlan J. (ed.) (2004). *Thin-Walled Structures - Advances in Research, Design and Manufacturing Technology*, Institute of Physics Publishing (Bristol).

Lubliner, J., 1990, Plasticity Theory, Macmillan, New York.

Ludwik P. (1909). *Elemente der Technologischen Mechanik*, Springer-Verlag, Berlim.

MacDonald M., Rhodes J., Taylor G.T. (2000). Mechanical properties of stainless steel lipped channels, *Proceedings of the 15th International Specialty Conference on Cold Formed Steel Structures*, 673–686, LaBoube R.A. e Yu W.-W. (eds.), University of Missouri-Rolla.

Mathworks (2012). Matlab R2010a, Product Documentation, Mathworks (www.mathworks.com/help/techdoc).

Mendelson A. (1968). *Plasticity: Theory and Application*, Macmillan, New York.

Miettinen E. (2002). Sustainable architecture with stainless steel, Euro Inox, Bruxelas (*www.euro-inox.org*).

Mirambell E., Real E. (2000). On the calculation of deflections in structural stainless steel beams: An experimental and numerical investigation, *Journal of Constructional Steel Research*, **54**(1), 109-133.

Moen C.D., Igusa T., Schafer B.W. (2008). Prediction of residual stresses and strains in cold-formed steel members, *Thin-Walled Structures*, **46**(11), 1274-89.

Murray N.W. (1984). Introduction to the theory of thin-walled structures, Clarendon Press, Oxford.

Murray N.W., Khoo P.S. (1981). Some basic plastic mechanisms in the local buckling of thin-walled steel structures, *International Journal of Mechanical Sciences*, **23**(12), 703-713.

Nadai, A. (1931). *Plasticity*, McGraw-Hill, New York and London.

Narayanan S., Mahendran M. (2002). Distortional Buckling Behaviour of Innovative Cold-formed Steel Columns, *Proc. 3rd European Conference on Steel Structures* (Eurosteel), A. Lamas, L. Simões da Silva (Eds.), Coimbra, Vol. 1, 723-732.

Narayanan S., Mahendran M. (2003). Ultimate Capacity of Innovative Cold-Formed Steel Columns, *Journal of Constructional Steel Research*, **59**(4), 489-508.

Nedelcu M. (2010). GBT formulation to analyse the behaviour of thin-walled members with variable cross-section, *Thin-Walled Structures*, **48**(8), 629-638.

Nedelcu M. (2011). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of isotropic conical shells, *Thin-Walled Structures*, **49**(7), 812-818.

Neto E.A. de S., Peric D., Owen D.R.J. (2008). *Computational Methods for Plasticity – Theory and Applications*, John Wiley & Sons Ltd. (Chichester).

Ohashi Y., Kawashima K., Yokoshi T. (1975). Anisotropy due to plastic deformation of initially isotropic mild steel and its analytical formulation, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **23**(4-5), 277-294.

Olsson A. (2001). Stainless Steel Plasticity – Material modelling and structural applications, *Doctoral Thesis*, Department of Civil and Mining Engineering, Lulea University of Technology, Lulea.

Outokumpu (2013). Documentação *online* disponível em *www.outokumpu.com*.

Papangelis J.P., Hancock G.J. (1995). Computer Analysis of Thin-Walled Structural Members, *Computers & Structures*, **56**, 157-176.

Pauly T., Helzel M. (2011). *Stainless steel flat products for building – the grades in EN 10088-4 explained*, Building Series, Vol. 18 (1st ed.), Euro Inox, Bruxelas.

Pham C., Hancock G. (2010). Numerical simulation of high strength cold-formed purlins in combined bending and shear, *Journal of Constructional Steel Research*, **66**(10), 1205-1217.

Philips A., Moon H. (1977). An experimental investigation concerning yield surfaces and loading surfaces, *Acta Mechanica*, **27**(1-4), 91-102.

Philips A., Lee C.-W. (1979). Yield Surfaces and loading surfaces. Experiments and recommendations, International Journal of Solids & Structures, **15**(9), 715-729.

Philips A., Lu W.-Y. (1984). An experimental investigation of yield surfaces and loading surfaces of pure aluminium with stress controlled and strain controlled paths of loading, *J. Eng. Mater. Tech.*, **106**(4), 349-354.

Philips A. (1986). A review of quasistatic experimental plasticity and viscoplasticity, *Int. Journal of Plasticity*, **2**(4), 315-328.

Powell G., Simons J. (1981). Improved iteration strategy for nonlinear structures, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **17**(10), 1455-1467, John Wiley & Sons Ltd.

Quach W.M., Teng J.G., Chung K.F. (2004). Residual stresses in steel sheets due to coiling and uncoiling: a closed-form analytical solution, *Engineering Structures*, **26**(9), 1249-59.

Quach W.M., Teng J.G., Chung K.F. (2006). Finite element predictions of residual stresses in press-braked thin-walled steel sections, *Engineering Structures*, **28**(11), 1609-1619.

Quach W.M., Teng J.G., Chung K.F. (2008). Three-stage full-range stress-strain model for stainless steels, *Journal of Structural Engineering*, **134**(9), 1518-1527.

Ramberg W., Osgood W. (1943). Description of stress-strain curves by three parameters, *Technical note 902, National Advisory Committee for Aeronautics*, Washington.

Rasmussen K.J.R. (2003). Full-range stress-strain curves for stainless steel alloys, *J. Const. Steel Research*, **59**(1), 47-61.

Rasmussen K.J.R., Burns T., Bezkorovainy P., Bambach M. (2003). Numerical modelling of stainless steel plates in compression, *Journal of Constructional Steel Research*, **59**(11), 1345-1362.

Reddy J. N. (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, New York.

Reddy J.N. (2005). *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill Education-Europe.

Reis A., Camotim D. (2012). *Estabilidade e Dimensionamento de Estruturas*, edições Orion (Amadora).

Riks E. (1972). The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *J. Applied Mechanics*, **39**(4), 1060-1066.

Riks E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *International Journal of Solids and Structures*, **15**(7), 529-551.

Ritto-Corrêa M., Camotim D. (2008). On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures, *Computers and Structures*, **86**(11-12), 1353–1368.

Rondal J (1987). Residual stresses in cold-rolled profiles, *Construction & Building Material*, **1**(3), 150-64.

Rhodes J. (2002). Buckling of thin-plates and members and early work on rectangular tubes, *Thin-Walled Structures*, **40**(2), 87-108.

Rossi B., Degée H., Pascon F. (2009). Enhanced mechanical properties after cold process of fabrication of non-linear metallic profiles, *Thin-Walled Structures*, **47**(12), 1575-1589.

SANS - South African National Standards, SABS - South African Bureau of Standards (1997). *Structural Use of Steel, Part 4: The Design of Cold-Formed Stainless Steel Structural Members* (SANS 10162-4/SABS 0162-4:1997).

Sarawit A.T., Kim Y., Bakker M.C.M., Pekoz T. (2003). The Finite Element Method for Thin-Walled Members – Applications, *Thin-Walled Structures*, **41**(2-3), 191-206.

Schafer BW, Li Z, Moen CD (2010). Computational modeling of cold-formed steel, *Thin-Walled Struct.*, **48**(10-11), 752-62.

Schafer B.W., Pekoz T. (1998). Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses, *Journal of Constructional Steel Research*, **47**(3), 193-210.

Schafer B.W. (2008). Review: The Direct Strength Method of cold-formed steel member design, *Journal of Constructional Steel Research*, **64**(7-8), 766-778.

Schardt R. (1966). Extension of the Engineer's Theory of Bending to the Analysis of Folded Plate Structures, *Der Stahlbau*, **35**, 161–171. (em língua alemã).

Seo J., Anapayan T., Mahendran M. (2008). Initial imperfections characteristics of mono-symmetric Lite Steel Beams for Numerical Studies, *Proceedings of Fifth International Conference on Thin-Walled Structures – Recent Innovations and Developments* (ICTWS, Brisbane, 18-20/6), M. Mahendran (ed.).

Silva N.M.F. (2013). Behaviour and Strength of Laminated FRP Composite Structural Elements, *Ph.D Thesis in Civil Engineering*, Instituto Superior Técnico, Technical University of Lisbon, Portugal.

Silva N.M.F., Silvestre N., Camotim D. (2006). GBT formulation to analyse the post-buckling behaviour of FRP composite thin-walled members, *CD-ROM Proc. of 8th Int. Conf. on Computational Structures Technology* (Las Palmas, 12-15/9), B Topping, G Montero, R Montenegro (eds.), Civil-Comp Press, 441-442.

Silva N.M.F., Camotim D., Silvestre N. (2008). GBT cross-section analysis of thin-walled members with arbitrary cross-sections: a novel approach, *Proc. of Fifth International Conference on Thin-Walled Structures – Recent Innovations and Developments* (Brisbane, 18-20/6), M. Mahendran (ed.), 1189-1196 (vol. 2).

Silvestre N. (2005). Teoria Generalizada de Vigas: Formulações, Implementação Numérica e Aplicações, *Tese de Doutoramento*, Departamento de Engenharia Civil, Arquitectura e Georecursos, Instituto Superior Técnico (UTL).

Silvestre N., Camotim D. (2003). Non-linear generalised beam theory for cold-formed steel members, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **3**(4), 461-490.

Silvestre N., Camotim D. (2006). Local-plate and distortional post-buckling behavior of cold-formed steel lipped channel columns with intermediate stiffeners, *Journal of Structural Engineering*, **132**(4), 529-540.

Silvestre N., Camotim D., Silva N.M.F. (2011). Generalised Beam Theory revisited: from the kinematical assumptions to the deformation mode determination, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **11**(5), 969-997.

Sloan S.W., Abbo A.J., Sheng D. (2001). Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control, *Engineering Computations*, **18**(1/2), 121-154.

Sommerstein M. (1999). The national archives building roof in Gatineau, Quebec, Canada, *Proceedings of the Fourth International Symposium on Roofing Technology*, Gaithersburg, Maryland, E.U.A.

Spitzig W. A., Sober R. J., Richmond O. (1976). The Effect of Hydrostatic Pressure on the Deformation Behavior of Maraging and HY-80 Steels and Its Implications for Plasticity Theory, *Metallurgical Transactions A*, **7**(11), 1703–1710.

Standards Australia (1998). *AS 4100: Steel Structures*, Sydney, Australia.

Stouffer D.C., Dame L. T. (1996). *Inelastic Deformation of Metals*, John Wiley and Sons, New York.

Sully R.M., Hancock G.J. (1996). Behavior of Cold-Formed SHS Beam-Columns, *J. Structural Eng.*, **122**(3), 326-336.

Sung S.-J., Liu L.-W., Hong H.-K., Wu H.-C. (2011). Evolution of yield surface in the 2D and 3D stress spaces, *International Journal of Solids and Structures*, **48**(6), 1054-1069.

Surovek A.E. (ed.) (2012). *Advanced Analysis in Steel Frame Design: Guidelines for the use of Direct Second-Order Inelastic Analysis*, Report of the Special Project Committee on Advanced Analysis, Technical Committee on Structural Members of the Structural Engineering Institute of American Society of Civil Engineers (ASCE).

Surovek A.E. (ed.), White D.W., Ziemian R.D., Camotim, D., Hajjar J., Teh L. (2011). *Guidelines for the Use of Direct Second-Order Inelastic Analysis in Structural Design Assessment of Planar Steel Frames*, ASCE Press, Reston, VA.

The Nickel Institute (2012). Celebrating the 100th anniversary of stainless steel, *Nickel Magazine* (special issue), The Nickel Institute, Bruxelas.

Theofanous M., Gardner L. (2009). Testing and numerical modelling of lean duplex stainless steel hollow section columns, *Engineering Structures*, **31**(12), 3047-3058.

Theofanous M., Gardner L. (2010). Experimental and numerical studies of lean duplex stainless steel beams, *Journal of Constructional Steel Research*, **66**(6), 816-825.

Theofanous M., Gardner L. (2011). Effect of element interaction and material nonlinearity on the ultimate capacity of stainless steel cross-sections, *Steel and Composite Structures*, **12**(1), 73-92.

Ungureanu V., Kotelko M., Mania R.J., Dubina D. (2010). Plastic mechanisms database for thin-walled cold-formed steel members in compression and bending, *Thin-Walled Structures*, **48**(10-11), 818-26.

van den Berg G.J. (2000). The effect of the non-linear stress-strain behavior of stainless steels on member capacity, *Journal of Constructional Steel Research*, **54**(1), 135-160.

van der Neut A. (1969). The interaction of local buckling and column failure of thin-walled compression members, *Proc. 12th Int. Cong. on Applied Mechanics*, Stanford Univ., Springer-Verlag, Berlin, 389-399.

Vieira R.F. (2010). A Higher Order Thin-Walled Beam Model, PhD Thesis in Civil Engineering, Instituto Superior Técnico, University of Lisbon, Portugal.

Vieira R.F., Virtuoso F.B., Pereira E.B.R. (2014). A higher order model for thin-walled structures with deformable cross-sections, *International Journal of Solids and Structures*, **51**(3–4), 575-598.

Vlasov V.Z. (1940). *Piéces Longues en Voiles Minces*, Editions Nationales Physico-Mathématiques, Moscow. (em língua russa − tradução em língua francesa: Éditions Eyrolles, Paris, 1962).

Vlasov V.Z. (1959). *Thin-Walled Elastic Bars,* Fizmatgiz, Moscow. (em língua russa − tradução em língua inglesa: Israel Program for Scientific Translation, Jerusalém, 1961).

Walker A.C. (Ed.) (1975). *Design and Analysis of Cold-Formed Sections*, John Wiley & Sons, New York.

Wang Y.-B., Li G.-Q., Chen S.-W. (2012a). The assessment of residual stresses in welded high strength steel box sections, *Journal of Constructional Steel Research*, **76**(September), 93-99.

Wang Y.-B., Li G.-Q., Chen S.-W. (2012b). Residual stresses in welded flame-cut high strength steel H-sections, *Journal of Constructional Steel Research*, **79**(December), 159-165.

Watanabe S. (1996). Technological progress and future outlook for stainless steel, *Nippon Steel Technical Report*, No. 71, disponível em *www.nssmc.com*, Nippon Steel.

Wempner G.A. (1971). Discrete approximation related to nonlinear theories of solids, *International Journal of Solids and Structures*, **17**(11), 1581-1599.

Wilson C.D. (2002). A critical reexamination of classical metal plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, **69**(Jan.), 63-68.

Winter G. (1959). Cold-formed light-gauge steel construction, *J. Structural Division* (ASCE), **85**(9), 151-171.

Wittrick W.H. (1968). A Unified Approach to Initial Buckling of Stiffened Panels in Compression, *Aeronautical Quarterly*, **19**, Part 3, 265-283.

World Steel Association (2013). Documentação *online* disponível em *www.worldsteel.org*.

Wriggers P., Chavan K. (2006). Beam and Shell Elements for Thin-Walled Aluminium Structures, *Foundations of Civil and Environmental Engineering*, **7**, Publishing House of Poznan University of Technology.

Wu H.-C. (2003). Effect of loading-path on the evolution of yield surface for anisotropic metals subjected to large pre-strain, *Int. Journal of Plasticity*, **19**(10), 1773-1800.

Wu H.-C. (2005). *Continuum Mechanics and Plasticity*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Wu H.-C., Lu J.K., Pan W.F. (1995). Some observations on yield surfaces for 304 stainless steel at large strain, *Journal Appl. Mech*., **62**(3), 626-632.

Yan J., Young B. (2004). Numerical investigation of channel columns with complex stiffeners – part I: test verification, *Thin-Walled Structures*, **42**(6), 883-893.

Yang D., Hancock G., Rasmussen K.J.R. (2004). Compression Tests of Cold-Reduced High Strength Steel Sections. II: Long Columns, *Journal of Structural Engineering*, **130**(11), 1782–1789.

Young B., Ellobody E. (2005). Buckling Analysis of Cold-Formed Steel Lipped Angle Columns, *Journal of Structural Engineering*, **131**(10), 1570-1579.

Young B., Lui W. (2005). Behavior of cold-formed high strength stainless steel sections, *Journal of Structural Engineering*, **131**(11), 1738-1745.

Young B., Rasmussen K.J.R. (1999). Shift of effective centroid in channel columns, *J. Struct. Engineering*, **125**(5), 524-531.

Young B., Yan J. (2002a). Finite element analysis and design of fixed-ended plain channel columns, *Finite Elements in Analysis and Design*, **38**(6), 549-566.

Young B., Yan J. (2002b). Channel columns undergoing local, distortional, and overall buckling, *Journal of Structural Engineering*, **128**(6), 728-736.

Zeinoddini V., Schafer B. (2011). Global imperfections and dimensional variations in cold-formed steel. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **11**(5), 829-854.

Zhang Y., Lin L. (2013). Shear Lag Analysis of Thin-Walled Box Girders Adopting Additional Deflection as Generalized Displacement, *Journal of Engineering Mechanics*, in press (September).

Zhao X.L., Hancock G.J. (1993a). A theoretical analysis of plastic moment capacity of an inclined yield-line under axial force, *Thin-Walled Structures*, **15**(3), 185-207.

Zhao X.L., Hancock G.J. (1993b). Experimental verification of the theory of plastic moment capacity of an inclined yield line under axial load, *Thin-Walled Structures*, **15**(3), 209-233.

Zhao X.L. (2003). Yield line mechanism analysis of steel members and connections, *Progress in Structural Engineering Materials*, **5**(4), 252-262.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. (2013). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (*Seventh Edition*), Butterworth-Heinemann, Oxford.